Exercices

Mécanique du solide

Exo 1 Balançoire

Un enfant sur une balançoire est schématisé par un pendule oscillant autour d'un axe horizontal grâce à une liaison parfaite.

L'angle avec la verticale est noté θ et la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$.

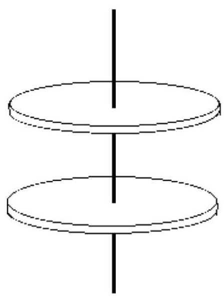
Quand la balançoire passe par un maximum d'élongation, l'enfant fléchit brutalement les genoux (la distance de son centre de gravité à l'axe est alors a_1 et son moment d'inertie par rapport à l'axe J_1, position 1) ; quand la balançoire passe par le point le plus bas, l'enfant se redresse brusquement parallèlement à la corde tendue (la distance de son centre de gravité à l'axe est alors a_2 et son moment d'inertie par rapport à l'axe J_2, position 2)

Il part de l'élongation maximale (en arrière) avec $\theta = -\theta_1$ et $\omega = 0$ et quand il passe par la position d'équilibre, on a $\theta = 0$ et $\omega = \omega_1$. Justifier que l'énergie mécanique se conserve et donner la relation liant ω_1 et θ_1.

1. Que peut-on dire du moment cinétique et de l'énergie cinétique au passage des positions 1 et 2 ?
2. Initialement la balançoire est écartée de la direction verticale d'un angle θ_0 et la vitesse angulaire est nulle. Au bout de combien de passage n par la position d'équilibre peut-elle atteindre la direction horizontale ? Introduire $\mathrm{K} = \mathrm{J}_2 a_2/\mathrm{J}_1 a_1$.

Exo 2 Dissipation d'énergie

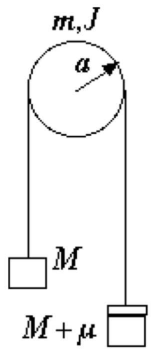
Deux disques de moments d'inertie J_1 et J_2 par rapport à leur axe commun autour duquel ils tournent sans frottement (cf figure suivante) sont mis en contact par leurs faces en regard grâce un dispositif non précisé qui les rapproche. Initialement (1) et (2) ont des vitesses angulaires positives respectives ω_{01} et $\omega_{02} < \omega_{01}$. Au bout d'un temps long, on constate que les deux disques tournent à la même vitesse angulaire ω_∞.



1. Déterminer ω_∞ en fonction de J_1, J_2, ω_{01}, ω_{02}.
2. Quelle est l'énergie dissipée quand ce nouveau régime permanent s'est établi ? Sous quelle forme s'est dissipée l'énergie ?

Exo 3 Machine d'Atwood

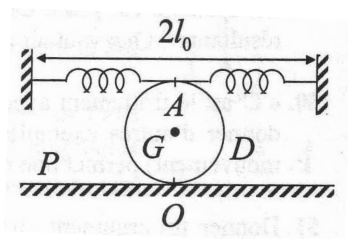
Une poulie de masse m, de rayon a, de moment d'inertie J par rapport à son axe supporte, grâce à un fil inextensible de masse négligeable et non glissant, d'un côté une masse M et de l'autre une masse M et une surcharge μ (cf figure).



Calculer l'accélération du système.

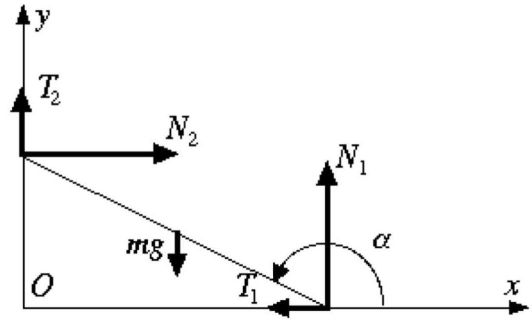
Exo 4 Disque et ressorts

Un disque D homogène de masse m et rayon a roule sans glisser sur un plan horizontal P. Y sont accrochés au point A (le plus haut en situation d'équilibre) deux ressorts identiques de longueur à vide l_0 et de raideur k.



Quelle est la pulsation propre ω_0 des oscillations de faible amplitude ?

Exo 5 Chute d'un manche à balai



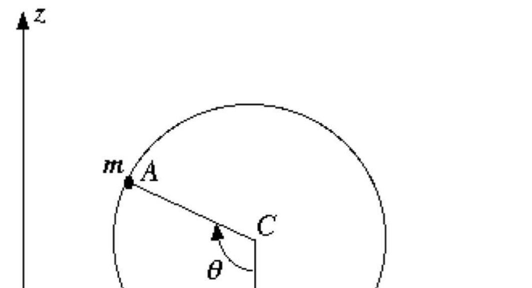
Un manche à balai est modélisé par une tige de section négligeable, de masse m, de longueur $2l$, de centre de masse G de moment d'inertie $\mathrm{J} = \frac{1}{3}ml^2$ par rapport à tout axe qui lui est perpendiculaire en G. Il glisse dans un mouvement de chute, limité à un plan Oxy, en restant en contact avec le plan Oxz du sol et le plan Oyz d'un mur. L'action du sol sur la tige se décompose en une composante normale de module N_1 et une composante tangentielle de module T_1. De même, l'action du mur sur la tige se décompose en une composante normale de module N_2 et une composante tangentielle de module T_2. Justifier que les sens de ces forces sur la figure précédente sont corrects. On suppose que les coefficients de frottement dynamique sont identiques aux deux points de contact et suffisamment faibles pour que la tige amorce un mouvement de glissement repéré par l'angle α de la figure.

Appliquer et projeter le théorème du centre de gravité puis celui du moment cinétique. En déduire une équation différentielle (qu'on ne cherchera pas à résoudre) vérifiée par la seule fonction inconnue $\alpha(t)$.

On ne perdra pas de temps à voir que les coordonnées de G sont $(-l\cos\alpha, l\sin\alpha, 0)$.

Exo 6 Oscillation d'une sphère lestée

Un point matériel A de masse m est solidaire de la surface d'une sphère homogène de masse M de centre C de rayon R de moment d'inertie $\mathrm{J} = (2/5)\mathrm{MR}^2$ par rapport à tout diamètre et qui roule sans glisser sur un sol horizontal. On note I le point de contact de la sphère avec le sol. La rotation de la sphère est repérée par l'angle θ orienté entre la verticale descendante et le rayon CA (figure suivante).



Quel lien y a-t-il entre la vitesse du centre C et le vecteur rotation de la sphère ? En déduire en fonction de θ, de ses dérivées et des constantes du problème, l'énergie cinétique de la sphère lestée, son énergie potentielle de pesanteur. En déduire la période des petites oscillations.

Exo 7 Cerceau

Un cerceau circulaire, de masse m, de rayon a, de moment d'inertie J = $(1/12)ma^2$ par rapport à son axe de symétrie se déplace avec un coefficient de frottement f sur le sol horizontal (l'axe vertical ascendant est Oy). On lance le cerceau avec un mouvement de rotation propre rétrograde, soit une vitesse initiale de son centre G égale à $v_0\overrightarrow{e_x}$ ($v_0 > 0$) et un vecteur rotation initial noté $\omega_0\overrightarrow{e_z}$ ($\omega_0 > 0$).

Montrer que le cerceau glisse à l'instant initial. Déterminer, tant que le cerceau glisse, la vitesse $v(t)\overrightarrow{e_x}$ de son centre et le vecteur rotation $\omega(t)\overrightarrow{e_z}$.

Montrer que le cerceau finit par ne plus glisser. Au bout de quel temps ? Quel est alors le mouvement ultérieur ? A quel condition a-t-il lieu vers l'arrière ?

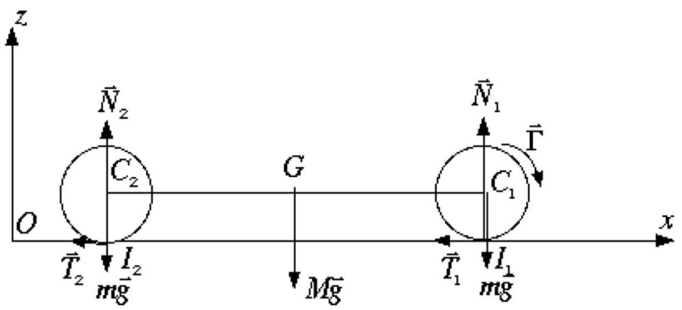
Exo 8 Fermeture d'une portière

Un automobiliste distrait a laissé la porte du passager grand ouverte alors qu'il démarre avec une accélération constante γ. Soit J le moment d'inertie de la porte par rapport à son axe de rotation et m sa masse. On considère la liaison mise en jeu comme parfaite.

À quelle vitesse angulaire la porte va-t-elle se refermer (et ainsi rappeler au conducteur son étourderie) ?

Exo 9 Modèle d'une automobile

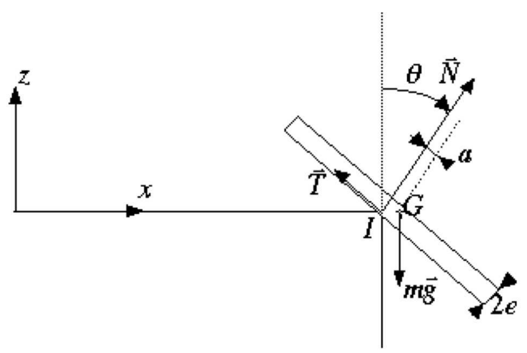
On modélise une automobile par deux disques homogènes identiques de masse m de rayon a, de moment d'inertie J = $(1/2)ma^2$ par rapport à leurs axes respectifs, de centre C, en contact avec un sol horizontal en I qui exerce sur eux une force $\overrightarrow{\mathrm{F}} = \overrightarrow{\mathrm{N}} + \overrightarrow{\mathrm{T}} = \mathrm{N}\overrightarrow{e_z} - \mathrm{T}\overrightarrow{e_x}$ (N et T algébriques), le tout avec l'indice « 1 » pour l'essieu avant et « 2 » pour l'arrière. Ces disques sont solidaires, grâce à des liaisons parfaites, à une tige $\mathrm{C_2C_1}$ de masse M de longueur $2l$, de centre G. On modélise le moteur par un couple $\Gamma = \Gamma\overrightarrow{e_y}$ exercé par la tige sur le disque « 1 » (il s'agit donc d'une traction). On suppose que les disques roulent sans glisser, le tout est résumé par la figure suivante.



1. Quel est le lien entre les vecteurs rotations des disques et la vitesse de translation du véhicule ?
2. En déduire l'expression de son énergie cinétique. Quelle est la puissance des forces de contact ? des forces de pesanteur ? des forces intérieures dans les liaisons ? du moteur ? En déduire l'accélération du véhicule.
3. Appliquer le théorème de la résultante cinétique à l'automobile entière et projeter sur les axes.
4. Calculer le moment cinétique de la barre et des disques par rapport à leur centres respectifs, en déduire le moment cinétique total calculé en G et appliquer le théorème des moments projeté sur Gy.
5. Appliquer le théorème du moment cinétique au centre de gravité à chacun des disques considéré isolement.
6. Pour résoudre plus rapidement ces équations, on néglige m devant M et on pose $\Gamma/a = \mathrm{F}$, déduire dans cette approximation les expressions de $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2$, T_1 et T_2. La roue avant peut-elle décoller ? Et la roue arrière ? La roue arrière peut-elle glisser ? Et la roue avant ?
7. Quel artifice de calcul peut-on utiliser pour étudier une propulsion ? Comment modifier le modèle pour étudier un « 4 × 4 » de même puissance ? Quel est, au vu des questions posées plus haut, l'intérêt du « 4 × 4 », hormis la frime ?

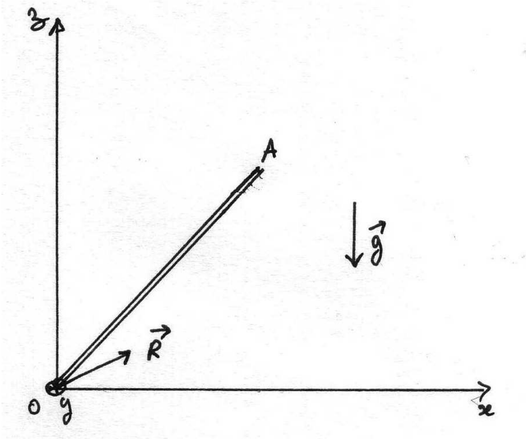
Exo 10 Chute d'une tartine

Une tartine parallélipédique est posée en porte-à-faux sur le coin d'une table (centre de gravité G, masse m, moment d'inertie J par rapport à Gy, épaisseur $2e$, valeur du porte-à-faux a. L'action de la table se décompose en une composante normale de module N et une tangentielle de module T, le coefficient de frottement est f. On note θ l'angle dont tourne la tartine par rapport à sa position initiale horizontale supposée sans vitesse (cf figure 7).



Déterminer $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ en fonction de θ et des constantes du problème. Même question pour N et T. Tracer les graphes donnant N et T en fonction de θ. La tartine décolle-t-elle de la table avant de glisser ou l'inverse ?

Exo 11 Dynamitage d'une cheminée



On assimile une cheminée à une tige homogène OA de masse M et de longueur L. On dynamite sa base (point O) et elle amorce une rotation dans un plan vertical autour du point O bloqué par les débris de l'explosion ; on note Oz la verticale ascendante, zOx le plan de chute et $\theta(t)$ l'angle que fait OA avec Oz à l'instant t. Le moment d'inertie de la cheminée par rapport à l'axe Oy est $\mathrm{J} = \dfrac{1}{3}\mathrm{ML}^2$. Au moment de l'explosion ($t = 0$), on a $\theta \simeq 0$ et $\dot{\theta} \simeq 0$. On admet que l'action du sol sur la cheminée se résume à une force R appliquée en O. On note g l'intensité de la pesanteur.

Trouver une équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ (deux méthodes possibles). En déduire les expressions de $\ddot{\theta}$ et de $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ et des constantes du problème. Trouver ensuite l'expression de la réaction $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ en fonction de $\ddot{\theta}$, $\dot{\theta}^2$ et θ puis de θ seul (et des constantes du problème, bien sûr) ; on projettera non sur Oz et Ox mais sur les vecteurs unitaires radial $\overrightarrow{e_r}$ et orthoradial $\overrightarrow{e_\theta}$ du mouvement.

Exo 12 Centre de gravité d'une règle

On pose une règle horizontalement sur ses deux index. On rapproche les index l'un de l'autre jusqu'à ce qu'ils se touchent. La règle ne tombe pas donc les index se retrouvent sous le centre de gravité. C'est trop bien ! Certes, mais expliquez !

Suggestion : faire la distinction entre coefficients statique et dynamique de frottement.