Séries S – ES/L – STI2D – STL – ST2S – ST2A – hôtellerie – Mathématiques

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES

Introduction

Pré-requis :
Dérivées – exponentielle – sinus et cosinus

Plan du cours

1. Equations du type $y' + ay = b$

A. Equations du type $y' + ay = 0$

Définition :

Une **équation différentielle** est une équation où **l'inconnue est une fonction**, et qui se présente sous la forme d'une **relation entre cette fonction et ses dérivées.**

Ex : $\boldsymbol{y' + ay = 0}$ avec a réel est une équation différentielle.

Si $\boldsymbol{f}$ définie et dérivable sur *I* est une **solution de cette équation différentielle**, alors f vérifie :

$\boldsymbol{f'(x) + af(x) = 0}$ pour tout $x \in I$

Solutions de l'équation $y' + ay = 0$:

Les solutions de l'équation différentielle $\boldsymbol{y' + ay = 0}$ sont les fonctions définies et dérivables sur R telles que :

$\boldsymbol{f(x) = \lambda e^{ax}}$ **avec $\boldsymbol{\lambda} \in \mathrm{R}$**

Ex : $y' + 2y = 0$

Prenons $f(x) = -e^{2x}$
$f'(x) = -2e^{2x}$
$f'(x) + 2f(x) = -2e^{2x} + 2e^{2x} = 0$

f est une solution de l'équation différentielle.

Séries S – ES/L – STI2D – STL – ST2S – ST2A – hôtellerie – Mathématiques
FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES

Propriété :

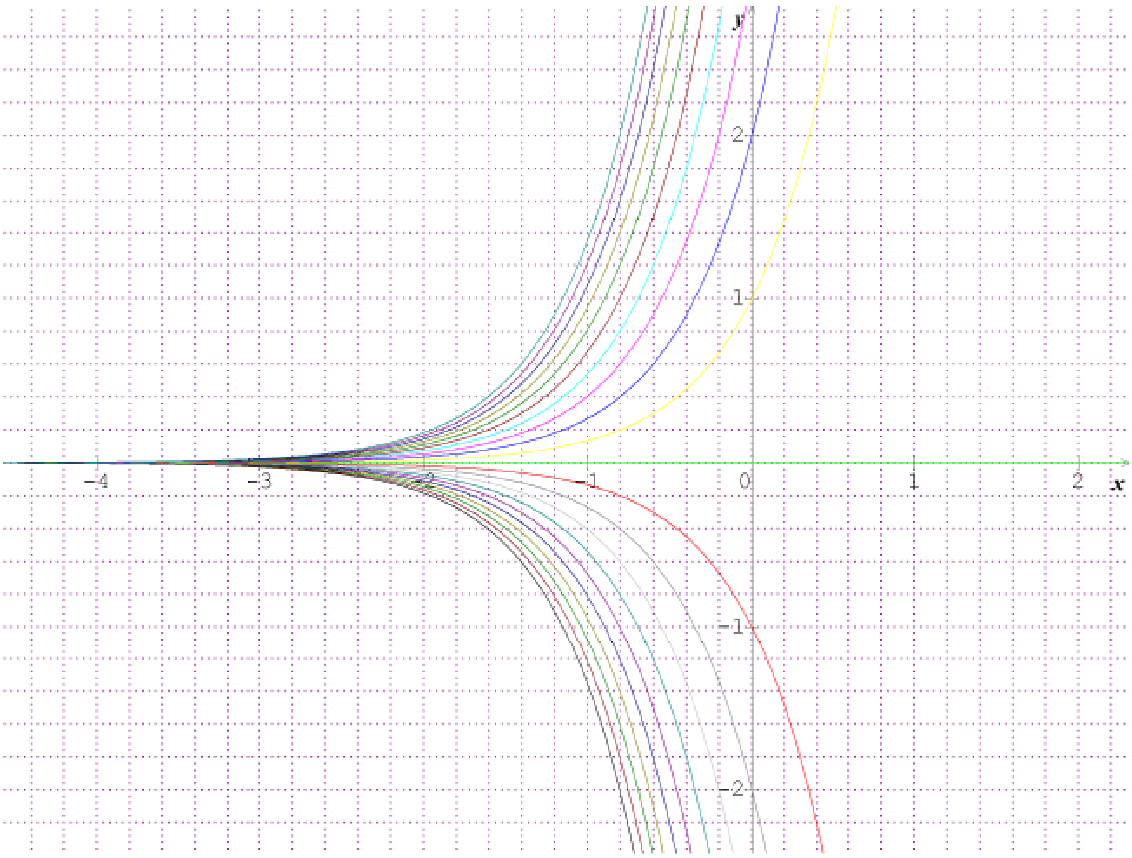
Si f est une solution de cette équation différentielle **alors kf avec k** $\in \mathrm{R}$ **est aussi une solution** de l'équation.

Famille de fonctions :

Il y a une **infinité de fonctions solutions** de l'équation différentielle $y' + ay = 0$. Elles sont toutes du type $f(x) = \lambda e^{ax}$ avec $\lambda \in \mathrm{R}$.

L'ensemble de ces fonctions solutions est appelé **famille de fonctions.**
L'ensemble des courbes représentatives de ces fonctions est appelé **famille de courbes.**

Ex : une partie de la famille de fonctions solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$:



La fonction solution prise dans l'exemple précédent est ici représentée en rouge.

Propriété :

Soient deux réels x_0 et y_0.
Il n'y a parmi la famille de fonctions solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ **qu'une seule fonction vérifiant $f(x_0) = y_0$.**

Il n'y a parmi la famille de courbes correspondantes **qu'une seule courbe passant par le point $M(x_0, y_0)$.**

Condition initiale

On appelle la condition « $f(x_0) = y_0$ » ou « la courbe passe par le point $M(x_0, y_0)$ » **la condition initiale.**

Ex : recherche de la solution de $y' + 2y = 0$ telle que $f(0) = 3$

$f(x) = \lambda e^{2x}$
$f(0) = \lambda e^{2\times 0} = \lambda \times 1 = \lambda$ et $f(0) = 3$ (condition initiale)
d'où $\lambda = 3$

$f(x) = 3e^{2x}$

B. Equations du type $y' + ay = b$ avec b non nul

Ce cas est une généralisation du cas précédent $y' + ay = 0$ (appelée équation homogène).

Solutions de l'équation $y' + ay = b$:

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ avec a et b réels et $a \neq 0$ sont les fonctions définies et dérivables sur R telles que :

$$f(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{avec } \lambda \in \mathrm{R}$$

Ex : $y' + 2y = 6$

Prenons $f(x) = -e^{2x} - 3$
$f'(x) = -2e^{2x}$
$f'(x) + 2f(x) = -2e^{2x} + 2(e^{2x} - 3) = -2e^{2x} + 2e^{2x} + 6 = 6$

f est une solution de l'équation différentielle.

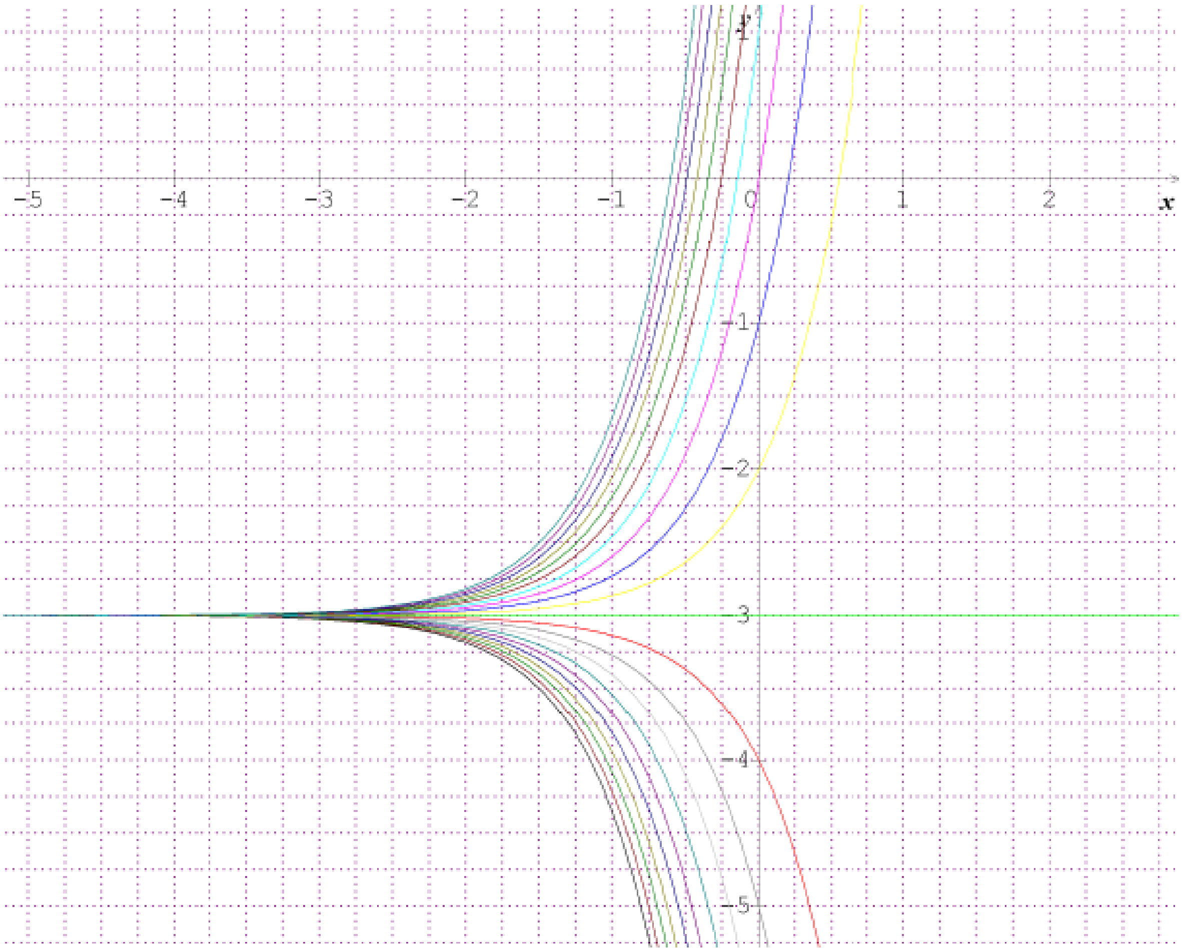
Propriété :

Si f est une solution de cette équation différentielle **alors kf avec $k \in$ R est aussi une solution** de l'équation.

Famille de fonctions :

Il y a une **infinité de fonctions solutions** de l'équation différentielle $y' + ay = b$. Elles sont toutes du type $f(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $\lambda \in$ R.

Ex : une partie de la famille de fonctions solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 6$:



La fonction solution prise dans l'exemple précédent est ici représentée en rouge.

Condition initiale

On peut de même soumettre la recherche de solution à cette équation à une **condition initiale** $f(x_0) = y_0$.

Ex : recherche de la solution de $y' + 2y = 6$ telle que $f(0) = -1$

$f(x) = \lambda e^{2x} - 3$
$f(0) = \lambda e^{2\times 0} - 3 = \lambda \times 1 - 3 = \lambda - 3$ et $f(0) = -1$ (condition initiale)
d'où $\lambda - 3 = -1$
$\lambda = 2$
$f(x) = 2e^{2x} - 3$

2. Equations du type $y'' + \omega^2 y = 0$

A. Préambule

Définition :

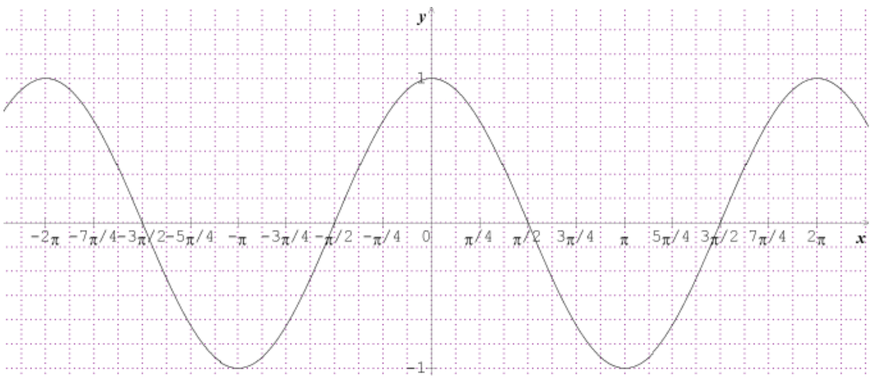
La **dérivée seconde** d'une fonction *f* est la **dérivée de sa dérivée**. Elle se note ***f''***.

L'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ pose une relation entre la fonction inconnue et sa dérivée seconde.

Fonction cosinus :

La **fonction cosinus** est la fonction **définie sur** R qui à *x* associe $\mathbf{\cos x}$**.**

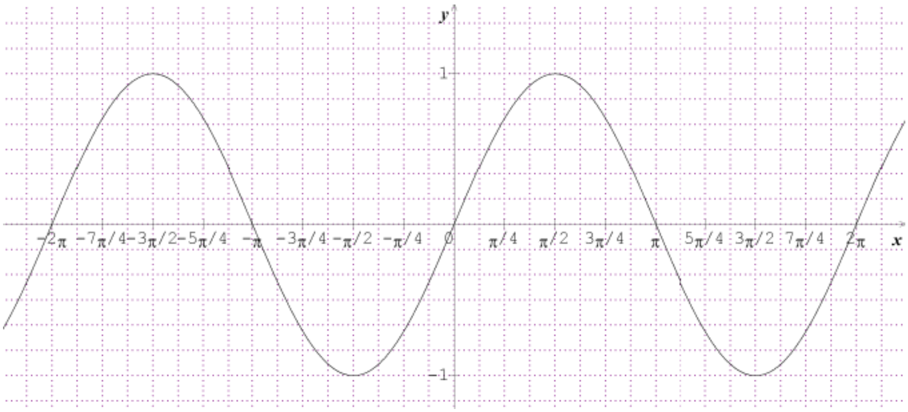
Représentation graphique :



<u>Fonction sinus :</u>

La **fonction sinus** est la fonction **définie sur** R qui à *x* associe $\boldsymbol{\sin x}$**.**

<u>Représentation graphique :</u>



<u>Dérivées :</u>

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur R.

$\boldsymbol{\cos'(x) = -\sin x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\sin'(x) = \cos x}$

$\boldsymbol{\cos''(x) = -\cos x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\sin'(x) = -\sin x}$

Si $\boldsymbol{f(x) = \cos kx}$ avec *k* réel non nul alors $\boldsymbol{f'(x) = -k \sin kx}$ et $\boldsymbol{f''^{(x)} = -k^2 \cos kx}$

Si $\boldsymbol{f(x) = \sin kx}$ avec *k* réel non nul alors $\boldsymbol{f'(x) = k \cos kx}$ et $\boldsymbol{f''^{(x)} = -k^2 \sin kx}$

B. Solutions de l'équation $\boldsymbol{y'' + \omega^2 y = 0}$

<u>Solutions :</u>

Les solutions de l'équation différentielle $\boldsymbol{y'' + \omega^2 y = 0}$ avec $\boldsymbol{\omega}$ réel non nul sont les fonctions définies et dérivables sur R telles que :

$\boldsymbol{f(x) = \lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x}$ $\qquad$ **avec $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\mu}$ réels**

Ex : $y'' + 9y = 0$

Prenons $f(x) = \cos 3x + \sin 3x$

$f''(x) = -9\cos 3x - 9\sin 3x$
$f''(x) + 9f(x) = -9\cos 3x - 9\sin 3x + 9 \times (\cos 3x + \sin 3x) = -9\cos 3x - 9\sin 3x + 9\cos 3x + 9\sin 3x = 0$

f est une solution de l'équation différentielle.

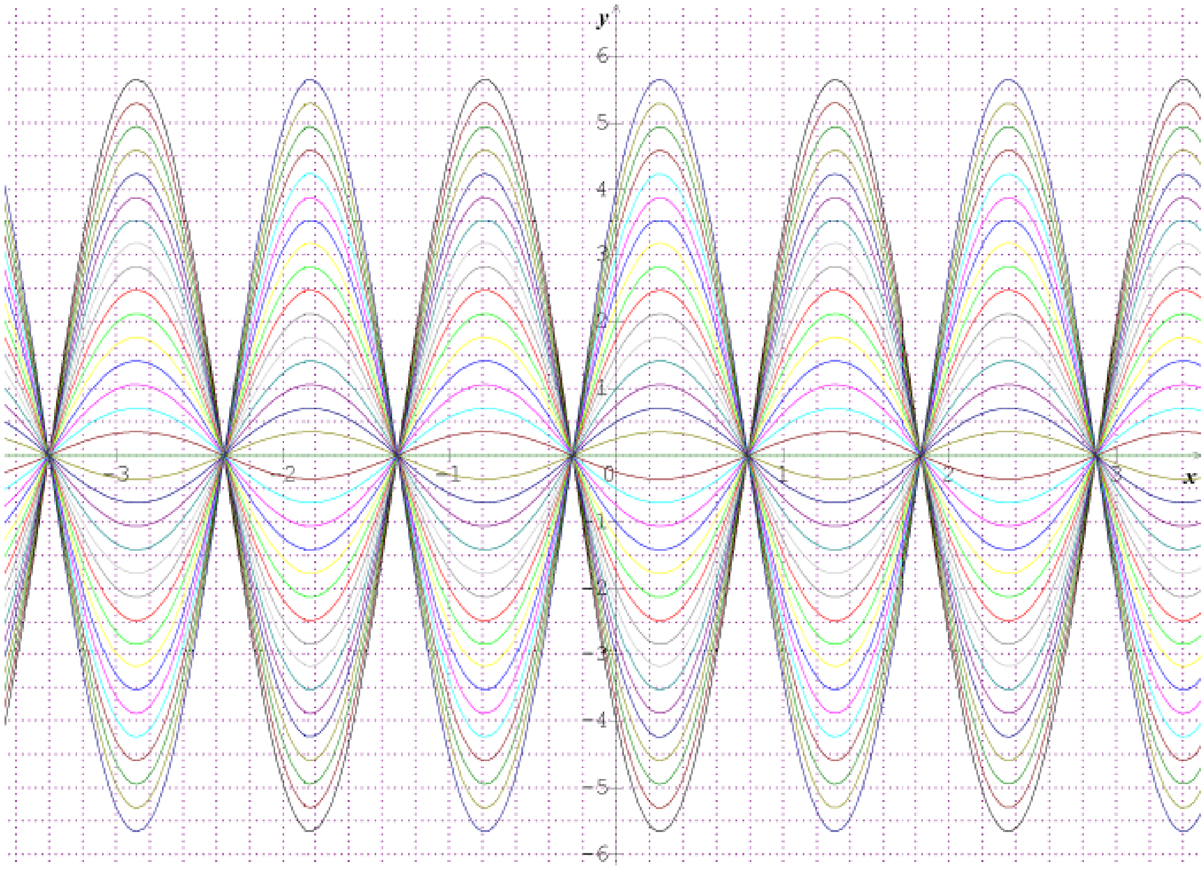
Propriété :

Si f est une solution de cette équation différentielle **alors kf avec k** $\in \mathbb{R}$ **est aussi une solution** de l'équation.

Famille de fonctions :

Il y a une **infinité de fonctions solutions** de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$. Elles sont toutes du type $f(x) = \lambda\cos\omega x + \mu\sin\omega x$ avec λ et μ réels.

Ex : une partie de la famille de fonctions solutions de l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$:



Séries S – ES/L – STI2D – STL – ST2S – ST2A – hôtellerie – Mathématiques

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES

<u>Propriété :</u>

Soient λ, μ et ω réels.
Si $\boldsymbol{f(x) = \lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x}$ alors **il existe A et $\boldsymbol{\varphi}$ réels** tels que $\boldsymbol{f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)}$.

<u>Corollaire :</u>

Soient A et φ réels.
$\boldsymbol{f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)}$ **est une solution** de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$.

<u>Propriété :</u>

Soient trois réels x_0, y_0 et y_1.
Il n'y a parmi la famille de fonctions solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ **qu'une seule fonction vérifiant $\boldsymbol{f(x_0) = y_0}$ et $\boldsymbol{f'(x_0) = y_1}$.**

<u>Conditions initiales :</u>

On appelle les conditions « $f(x_0) = y_0$ » et« $f'(x_0) = y_1$ » **les conditions initiales.**

Ex : recherche de la solution de $y'' + 9y = 0$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$

$f(x) = \lambda \cos 3x + \mu \sin 3x$
$f(0) = \lambda \times 1 + \mu \times 0 = \lambda$ et $f(0) = 1$ (condition initiale)
d'où $\lambda = 1$
$f(x) = \cos 3x + \mu \sin 3x$

$f'(x) = -3 \sin 3x + 3\mu \cos 3x$
$f'(0) = -3 \times 0 + 3\mu \times 1 = 3\mu$ et $f'(0) = 0$ (condition initiale)
d'où $3\mu = 0$
$\mu = 0$

$f(x) = \cos 3x$

