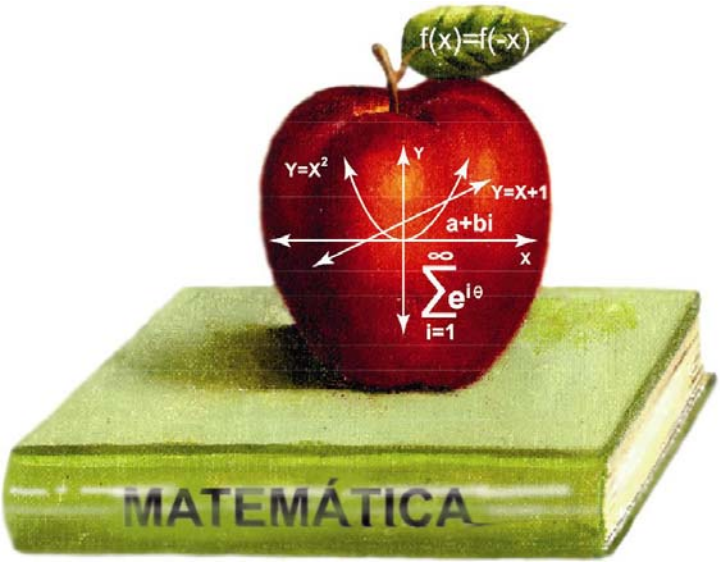
Geometría



Figuras Bidimensionales y Tridimensionales
K - 3ro

Profesor: Esteban Hernández
Universidad de P.R. en Bayamón

Pre-Prueba

1. Determina si cada curva en la siguiente figura es, abierta, cerrada, simple o no simple.

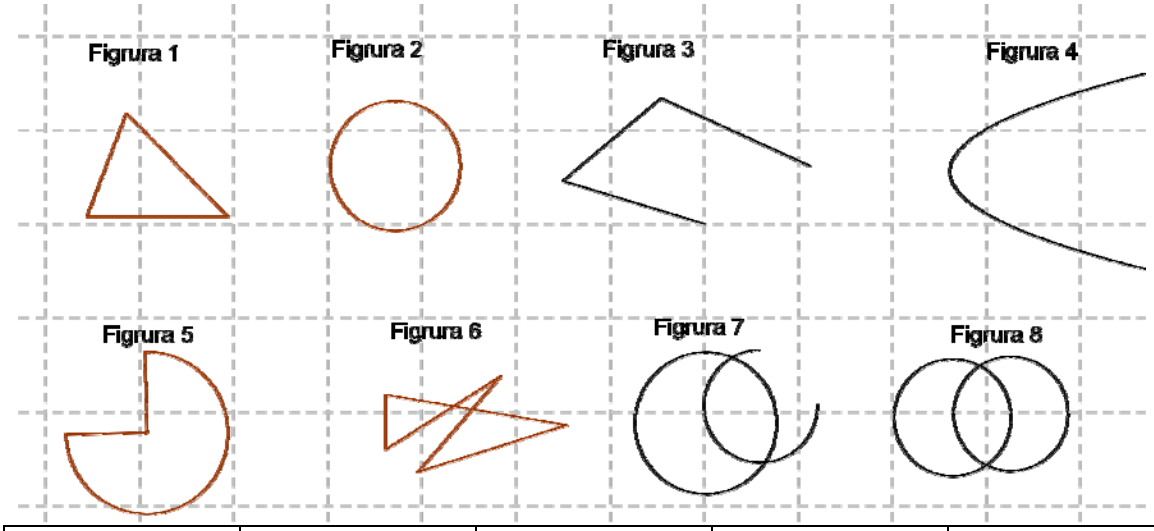


Figura	Abierta	Cerrada	Simple	No Simple
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				

2. Determina cuáles de las siguientes figuras son polígonos. Indica tu respuesta en la tabla.

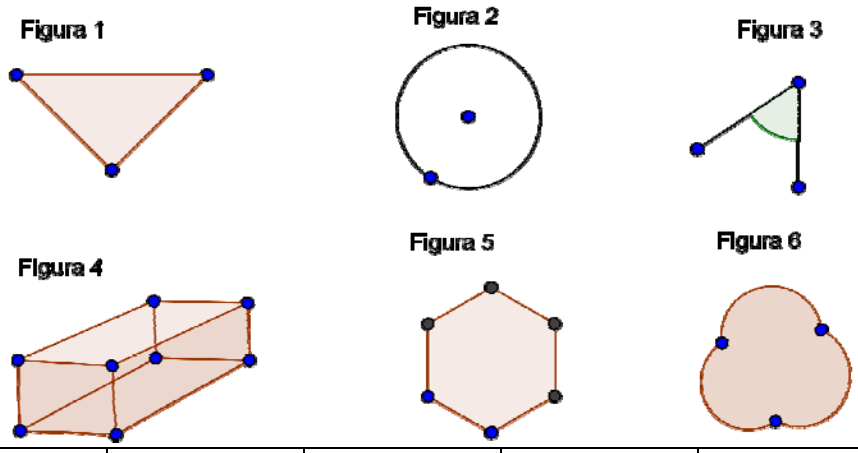


Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6

3. Clasifica cada ángulo como, agudo, obtuso, recto o llano. Completa la tabla.

Figura 1

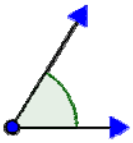


Figura 2

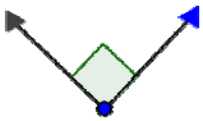


Figura 3

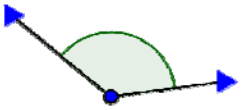


Figura 4

Figura 5

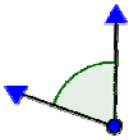


Figura 6

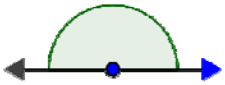


Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6

4. Identifica cada cuadrilátero por su nombre. Completa la tabla.

Figura 1

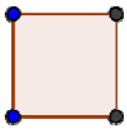


Figura 2

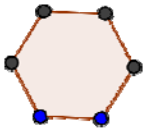


Figura 3

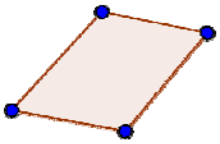


Figura 4

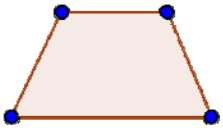


Figura 5

Figura 6

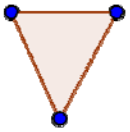


Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6

5. Identifica cada componente ilustrado del círculo. Completa la tabla.

Figura 1

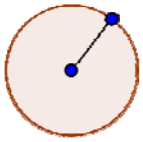


Figura 2

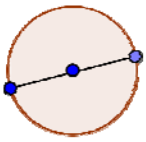


Figura 3

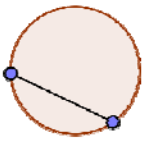


Figura 4

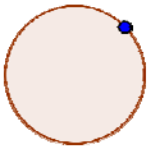


Figura 5

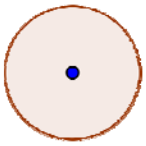


Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5

6. Clasifica el triángulo equilátero, isósceles, o escaleno. Clasifica el triángulo como obtusángulo, acutángulo, o rectángulo. Completa la tabla.

Figura 1

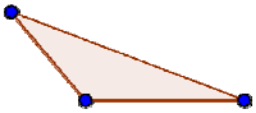


Figura 2

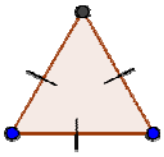


Figura 3

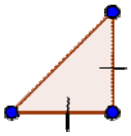
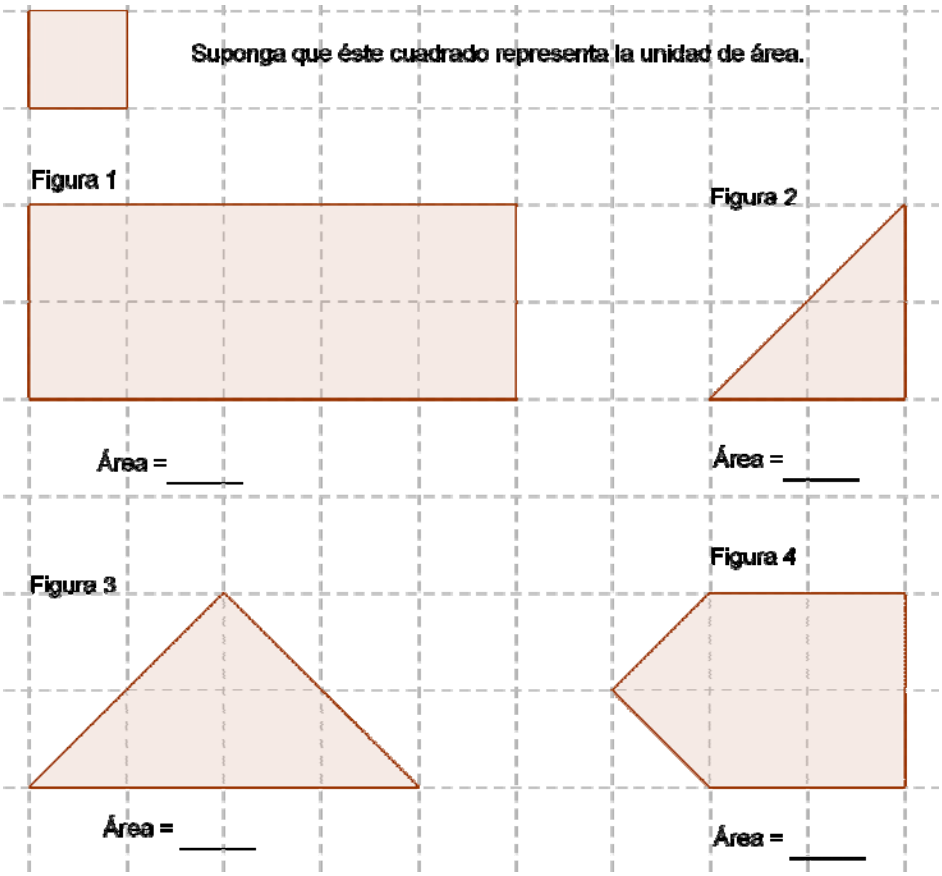
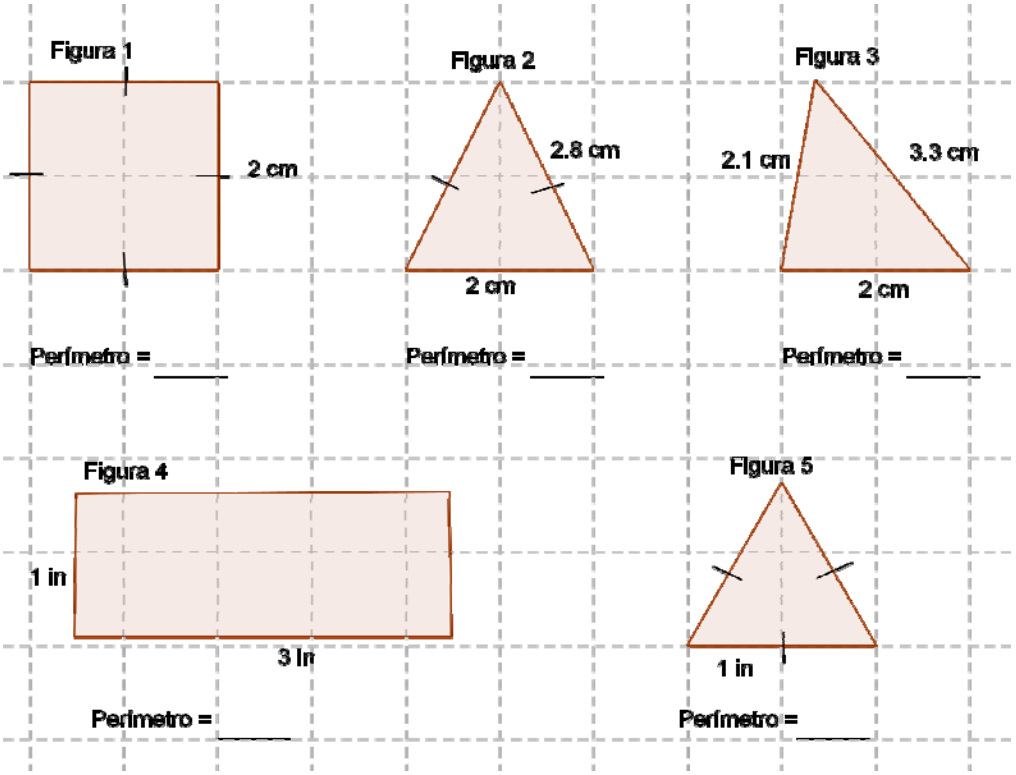


Figura 1	Figura 2	Figura 3

7. Determina el área de cada figura.



8. Encuentra el perímetro de cada figura.



Objetivos

1. **Entender el concepto de espacios.**
2. **Entender los conceptos de puto, línea y plano.**
3. **Identificar puntos, líneas, medias líneas, rayos y segmentos.**
4. **Definir e identificar curvas abiertas, curvas cerradas, curvas simples y curvas no simples.**
5. **Definir los conceptos de ángulo y grado.**
6. **Identificar ángulos agudos, ángulos rectos y ángulos obtusos.**
7. **Definir y encontrar ángulos complementarios y suplementarios.**
8. **Identificar polígonos de acuerdo al número de lados e identificar sus componentes.**
9. **Diferenciar entre polígonos regulares e irregulares.**
10. **Definir las unidades de longitud, de área y de volumen.**
11. **Determinar el perímetro y el área de un polígono.**
12. **Identificar figuras tridimensionales.**
13. **Encontrar el volumen de poliedros simples.**
14. **Identificar los vértices, las caras y las aristas de un poliedro.**

Justificación

Introducción a la Geometría

Elementos geométricos y el concepto de los espacios

Al mirar a nuestro alrededor observamos una infinidad de formas y figuras en los objetos que nos rodean. Desde los primeros tiempos el ser humano se vio obligado a observar, interpretar y manejar estas figuras pues de ello dependía su sobrevivencia. Por ejemplo, el observar alguna figura entre la maleza podría significar que un animal peligroso lo podía atacar. De esta forma necesitaba tener cada vez más un mejor entendimiento y un mejor control de su medio ambiente. Para tener más conocimientos debía clasificar objetos, clasificar formas, establecer relaciones entre las formas y los objetos e interpretar el significado de cada uno de estos conceptos geométricos.

Sabemos hoy día que el ser humano ha sido la especie más exitosa sobre la faz de la tierra por que tiene un atributo que lo hace único, su intelecto. Tenemos la capacidad de aprender y de aplicar nuestro conocimiento para interpretar, manejar y transformar nuestro medio ambiente.

La geometría tiene sus orígenes en cada una de las antiguas civilizaciones, egipcios, babilonios, romanos, griegos, etc., los cuales fueron acumulando conocimiento de sus antepasados hasta hacer de la Geometría una de las ramas más importantes en la matemática. Al principio todo giraba alrededor de la geometría. Las construcciones, la ingeniería rudimentaria, la astronomía, e inclusive la alquimia que luego dio lugar a la química, basaban su conocimiento en conceptos geométricos.

Fueron los griegos los que le dieron rigurosidad a la geometría, estudiaron las figuras de forma y tamaño idénticos (figuras congruentes) así como aquellas figuras de forma idéntica pero con tamaños diferentes (figuras similares). Los griegos fueron los primeros en insistir en que los enunciados de la geometría debían tener una prueba rigurosa.

La geometría plana

La geometría plana se basa en tres **conceptos fundamentales,** el punto, la línea y el plano, los que se aceptan sin definirlos y que forman parte de lo que llamamos **espacios geométricos,** o sea el conjunto formado por todos los puntos. El espacio geométrico es relativo a los elementos que se están usando. Por ejemplo, el espacio puede estar determinado por un punto, una línea o un plano. A cada espacio se le acostumbra asignar una dimensión, la cual determina los grados de libertad que se pueden ejecutar en dicho espacio. Los grados de libertad se pueden interpretar como los movimientos necesarios para ubicar un punto cualquiera en el espacio a partir de un punto de referencia. Al punto de referencia se acostumbra llamarle el origen. Un punto tiene dimensión cero (es adimensional) pues sobre un punto no podemos ejercer ningún movimiento. Una línea se considera un espacio de dimensión 1 pues a partir de un punto de referencia podemos movernos sobre la línea en una dirección, para obtener la ubicación de cualquier otro punto. El plano tiene dimensión dos, pues tenemos dos grados de libertad para movernos, o sea necesitamos dos movimientos para ubicar un punto, podemos pensar en los movimientos como largo y ancho.

Geometría espacial tridimensional

Se puede de igual manera definir un espacio tridimensional en el cual tenemos tres grados de libertad de movimiento. El espacio tridimensional se conoce comúnmente como el **espacio**. Para poder ubicar un punto en el espacio necesitamos tres movimientos en tres direcciones con relación a un punto de referencia. Imagina un cuarto de tu casa, si te ubicas en una esquina como punto de referencia entonces cualquier forma para llegar hasta una lámpara (punto) se puede descomponer en tres movimientos con relación a las paredes, un largo, un ancho y una altura.

El espacio tridimensional es donde existen todos los objetos sólidos que conocemos, incluyéndonos a nosotros.

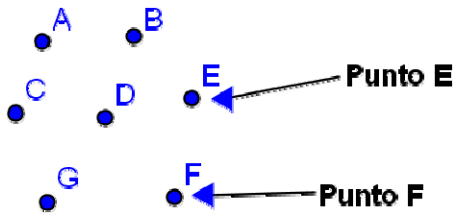
Espacios Geométricos

Puntos, líneas y planos

El punto

El **punto**, en geometría, es uno de los entes fundamentales, junto con la recta y el plano. Son considerados conceptos primarios, o sea, que sólo es posible describirlos en relación con otros elementos similares, no se definen. Se suelen describir apoyándose en los postulados característicos, que determinan las relaciones entre los entes geométricos fundamentales. El punto es un elemento geométrico adimensional, no tiene ni volumen, ni área ni longitud ni otro análogo dimensional; no es un objeto físico, es una idea; se usa para describir una posición en el espacio. Los puntos se identifican usando letras mayúsculas. A continuación se ilustran varios puntos y su forma de identificarlos.

Ejemplo. Ilustración de puntos

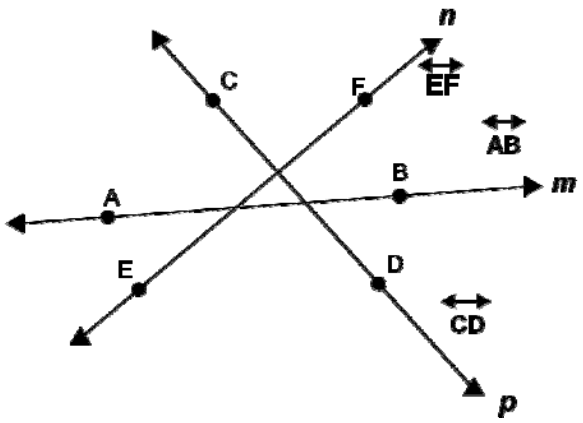


La línea

La **línea** al igual que el punto es un objeto geométrico fundamental. Para efectos de visualizar el concepto, se puede decir que una línea (o línea recta) es una sucesión continua e infinita de puntos en direcciones opuestas. Entenderemos por el concepto de continua que no tiene huecos, ni divisiones y que podemos trazarla en un papel sin levantar el lápiz. Se acostumbra identificar las líneas con una letra minúscula o con dos

puntos con una doble flecha sobre las letras. Las siguientes líneas están identificadas usando letras minúsculas y usando los puntos**.**

Ejemplo: La siguiente figura ilustra tres líneas (o rectas) y la forma en que se identifican.



Identificación de las líneas

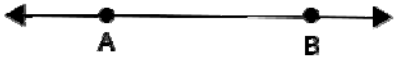
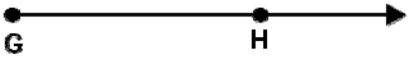
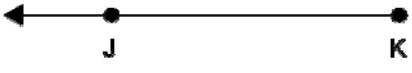
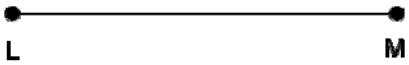
Línea *n*, $\overleftrightarrow{EF}$

Línea m, $\overleftrightarrow{AB}$

Línea *p*, $\overleftrightarrow{CD}$

Una línea se puede descomponer en varias partes, entre ellas, medias líneas, rayos y segmentos.

A continuación se ilustra la descomposición de una línea en partes y la forma en que la nombramos o identificamos.

Nombre del objeto	Figura	Símbolo identificador
Línea AB o BA		$\overleftrightarrow{AB}$
Media línea CD		$\overrightarrow{CD}$
Media línea FE		$\overrightarrow{FE}$
Rayo GH		$\overrightarrow{GH}$
Rayo KJ		$\overrightarrow{KJ}$
Segmento LM o ML		$\overline{LM}$ o $\overline{ML}$

Un **rayo** contiene todos los puntos de una línea a partir de un punto fijo, llamado el extremo y en una sola dirección. Una **media-línea** contiene todos los puntos de un rayo excepto el punto extremo. Un **segmento** contiene todos los puntos de una línea entre dos puntos fijo llamados los extremos.

El alfabeto griego

El **alfabeto griego** es un alfabeto utilizado para escribir solo la lengua griega. Desarrollado alrededor del siglo IX a. C. a partir del alfabeto fenicio, continúa en uso hasta nuestros días, tanto como alfabeto nativo del griego moderno como a modo de crear denominaciones técnicas para las ciencias, en especial la matemática, la física y la astronomía. En nuestro caso usaremos letras griegas para identificar planos y ángulos.

Se cree que el alfabeto griego deriva de una variante del fenicio, introducido en Grecia por mercaderes de esa nacionalidad. El fenicio, como los alfabetos semíticos posteriores, no empleaba signos para registrar las vocales. Para salvar esta dificultad, que lo hacía incompleto para la transcripción de la lengua griega, los griegos adaptaron algunos signos utilizados en fenicio para indicar aspiración para representar las vocales. Este aporte puede considerarse fundamental; la inmensa mayoría de los alfabetos que incluyen signos vocálicos se derivan de la aportación original griega. Además de las vocales, el griego añadió tres letras nuevas al final del alfabeto: fi (Φ φ) y ji (Χ χ) y psi (Ψ ψ), para representar sonidos aspirados que no existían en fenicio.

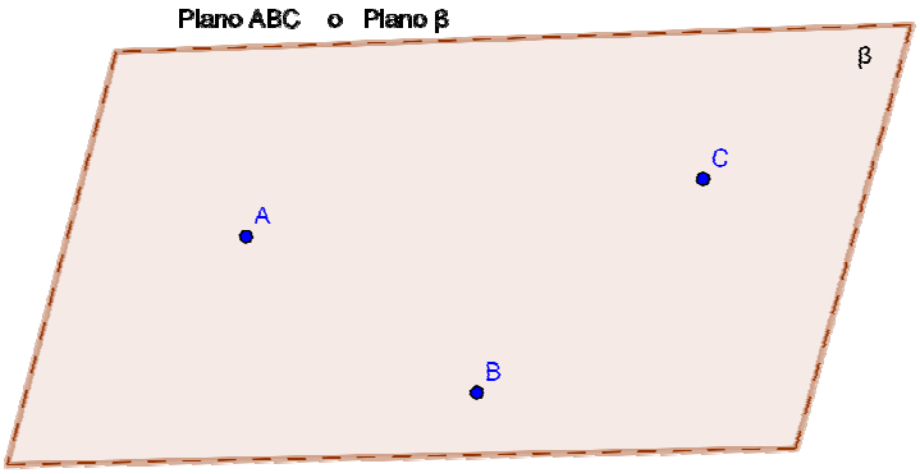
Α α Alfa	Β β Beta
Γ γ Gamma	Δ δ Delta
Ε ε Épsilon	Ζ ζ Dseta
Η η Eta	Θ θ Theta
Ι ι Iota	Κ κ Kappa
Λ λ Lambda	Μ μ My
Ν ν Ny	Ξ ξ Xi
Ο ο Ómicron	Π π Pi
Ρ ρ Ro	Σ σ Sigma
Τ τ Tau	Υ υ Ípsilon
Φ φ Fi	Χ χ Ji
Ψ ψ Psi	Ω ω Omega

El plano

El concepto de un **plano** es más fácil de visualizar pues existen muchos objetos que ilustran en cierto grado el concepto del un plano. Por ejemplo una pizarra en el salón de clase, una pared de su casa, una pantalla de televisión, etc. Euclides definió un plano como una sucesión continua de rectas paralelas.

Los planos de identifican o nombran usando letras griegas minúsculas como α, β, θ, ρ o con tres letras mayúsculas correspondientes a tres puntos sobre el plano. Para indicar que el plano continúa infinitamente, se acostumbra trazar los bordes entrecortados.

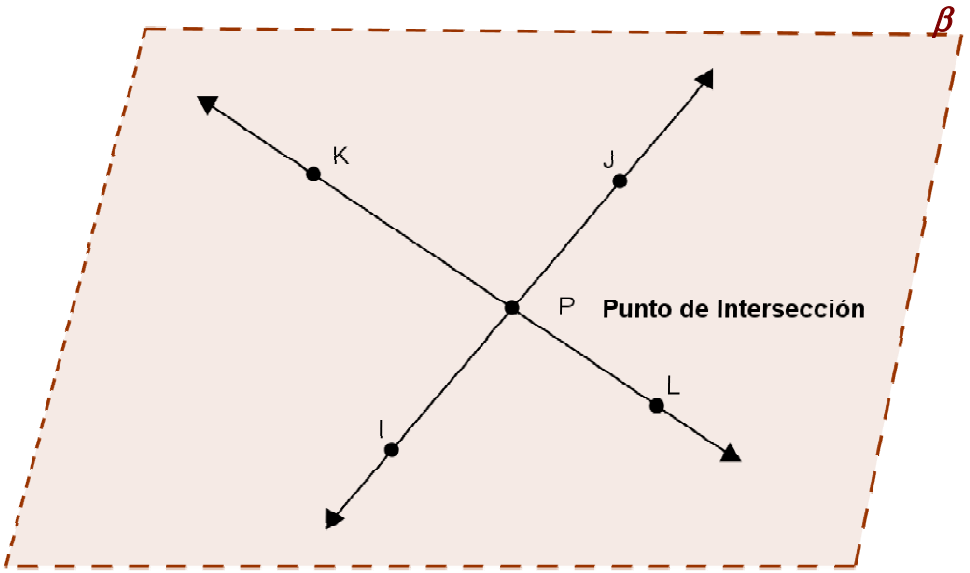
Ejemplo: Ilustración de un plano



Líneas que se intersecan en un plano

Decimos que dos líneas se intersecan si tienen un punto en común. El punto común se conoce como el punto de intersección. Las siguientes líneas se intersecan en el punto P

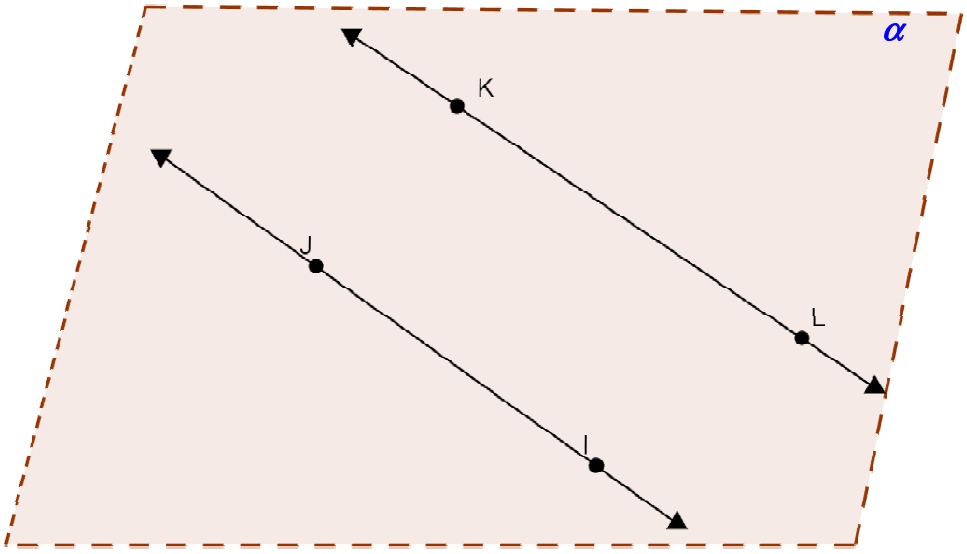
Ejemplo: Ilustración de línea que se cortan en un punto.



Líneas paralelas

Dos líneas en un plano son paralelas si no se intersecan, esto es tienen la misma dirección.

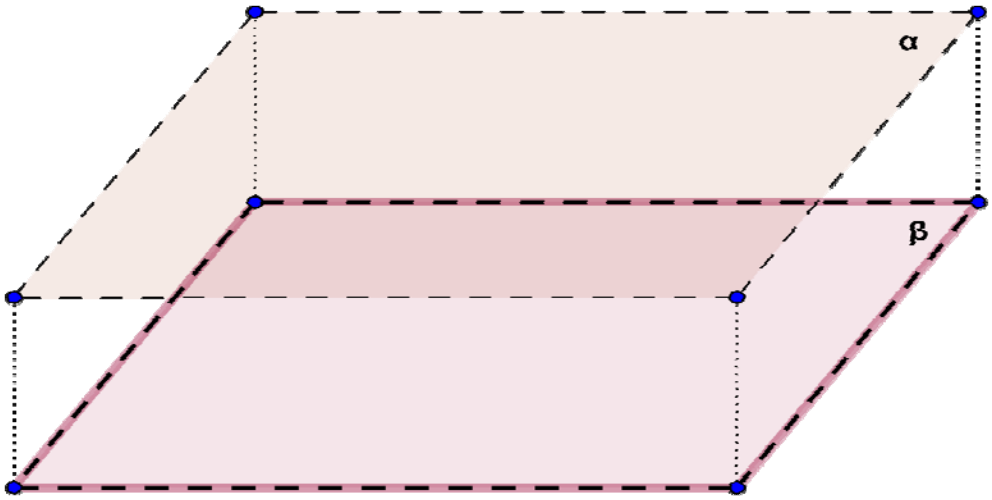
Ilustración: Ilustración de líneas son paralelas.



Planos paralelos

Dos planos se dice que son paralelos si no se intersecan, esto es, no tiene puntos en común.

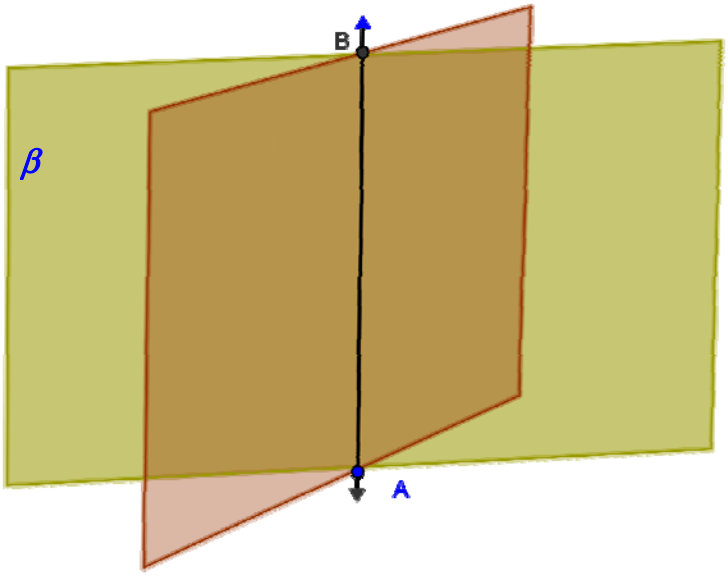
Ejemplo: Ilustración de dos planos paralelos, α y β.



Planos que se intersecan

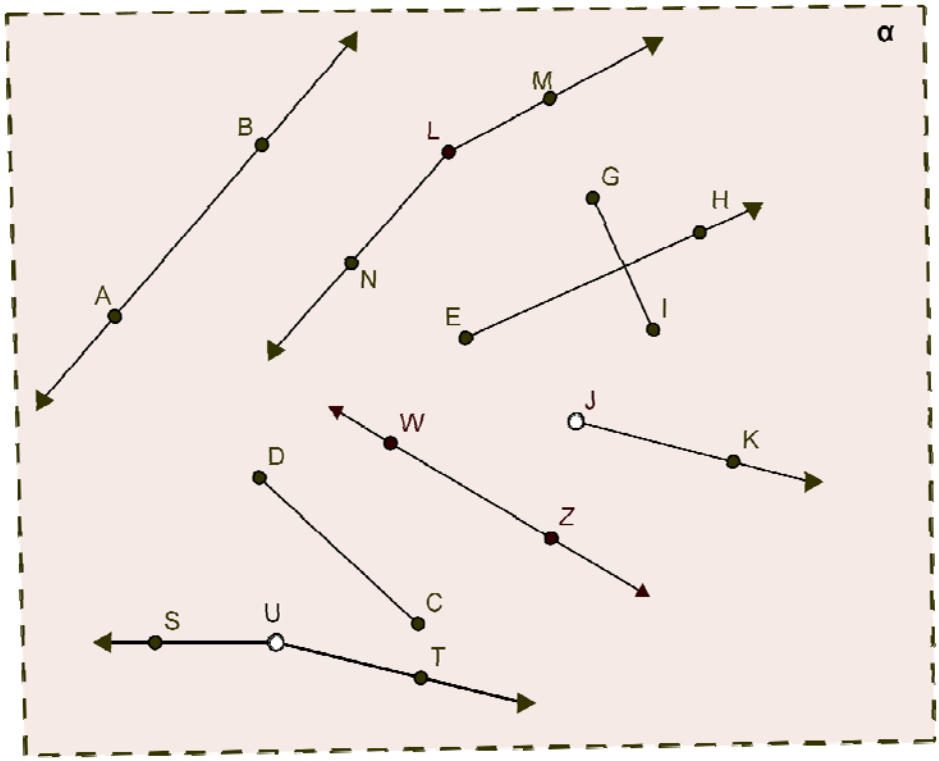
Dos planos que se intersecan contienen toda una línea como su intersección. En la siguiente ilustración la línea de intersección es $\overleftrightarrow{AB}$.

Ejemplo: Ilustración de dos planos que



I. Ejercicios de planos, puntos y líneas

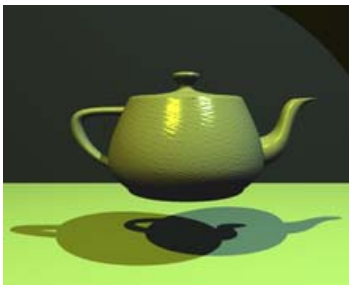
1. Determina los segmentos, las líneas, rayos no contenidos en alguna línea y las medias líneas sobre el plano α.

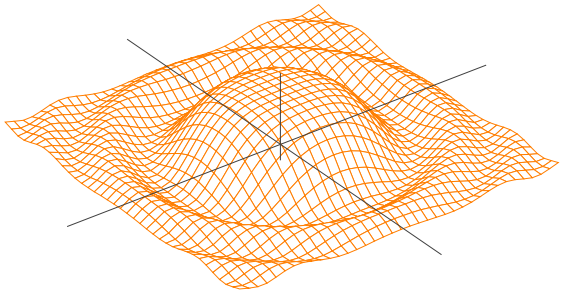


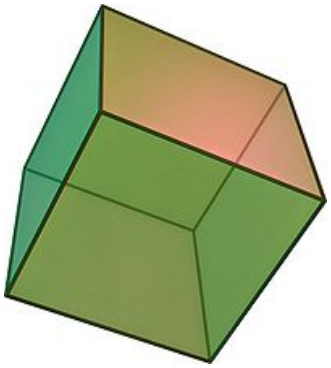
Líneas	Rayos	Medialínea	segmentos

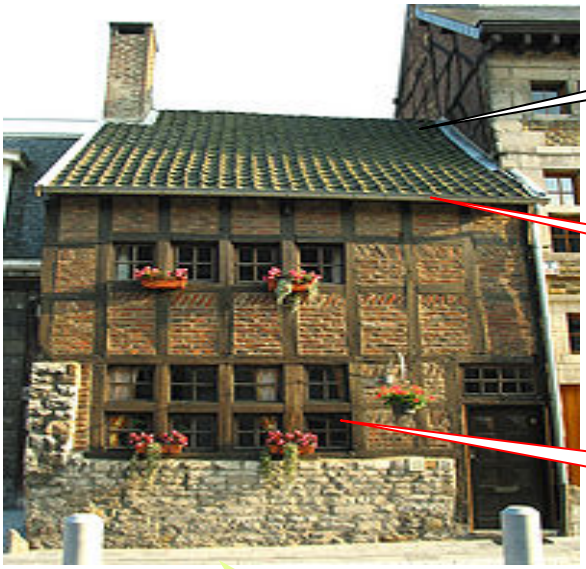
El espacio tridimensional

El **espacio tridimensional** es el más obvio y observable para nosotros pues vivimos en el y somos parte integral de dicho espacio. Todo lo que nos rodea está en un espacio de tres dimensiones. En cada uno de los espacios que hemos mencionado existen formas, objetos y figuras que determinan las características de los elementos que existen en dicho espacio. A cualquier objeto tridimensional se le pueden asignar medidas que describen y determinan su ubicación y su tamaño en el espacio. Imagina que te vas de compras y entras a una tienda de ropa, lo primero que el vendedor necesita saber son tus medidas. Necesita saber el alto (altura), y el grosor que incluye tus medidas de largo y de ancho. De esta misma forma le asignamos medidas a todos los objetos que nos rodean. De aquí que podamos diferenciar entre el tamaño, las formas y la posición de los objetos y las figuras. Hay objetos grandes, objetos pequeños, objetos pesados, objetos livianos, personas gordas o flacas, etc. Hay figuras cuadradas, redondas, cilíndricas y otras con infinidad de formas y tamaños. A continuación ilustramos algunos objetos y figuras tridimensionales y más adelante trabajaremos con figuras tridimensionales.









Forma de un plano

Borde con forma de línea

Formas y figuras

Las construcciones son una fuente muy rica del uso de figuras geométricas y del uso de los conceptos de los espacios. Podemos observar estas ideas geométricas en las construcciones de casas, puentes, edificios, pirámides, barcos, aviones y en cualquier otra construcción de la actividad humana.

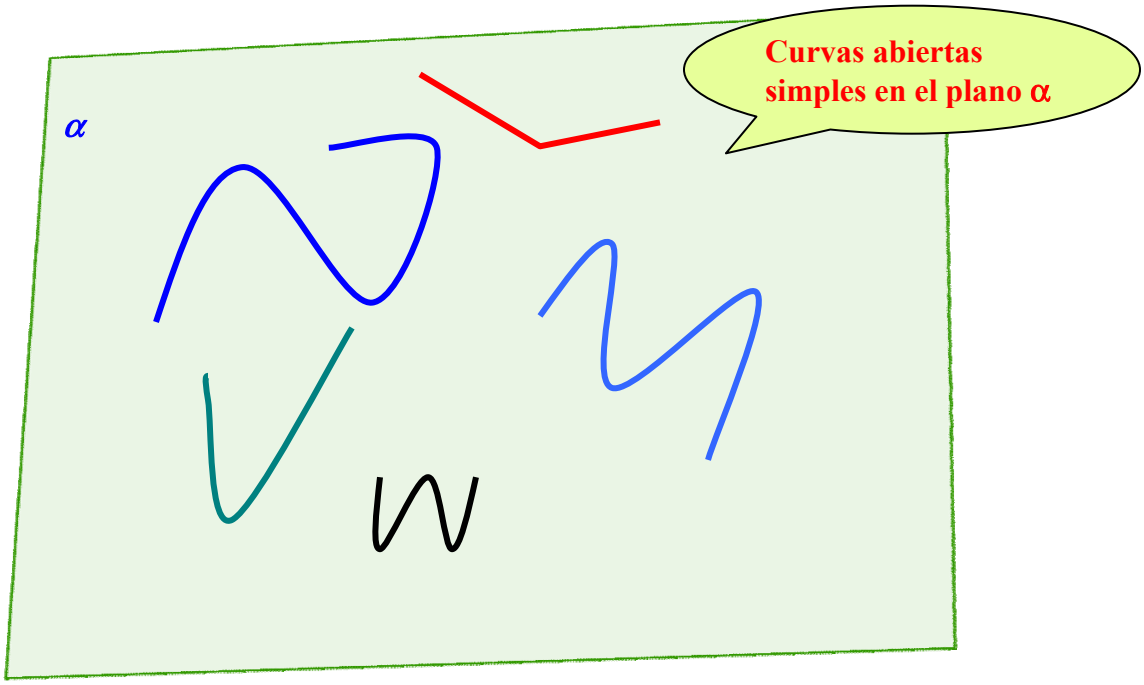
Figuras planas

En el plano se puede distinguir entre una infinidad de figuras que tienen formas, tamaños y posiciones particulares sobre un plano. Podemos diferenciar entre las figuras de una sola dimensión llamadas curvas y las de dos dimensiones. El término curva no se define y se usa para describir figuras en el plano.

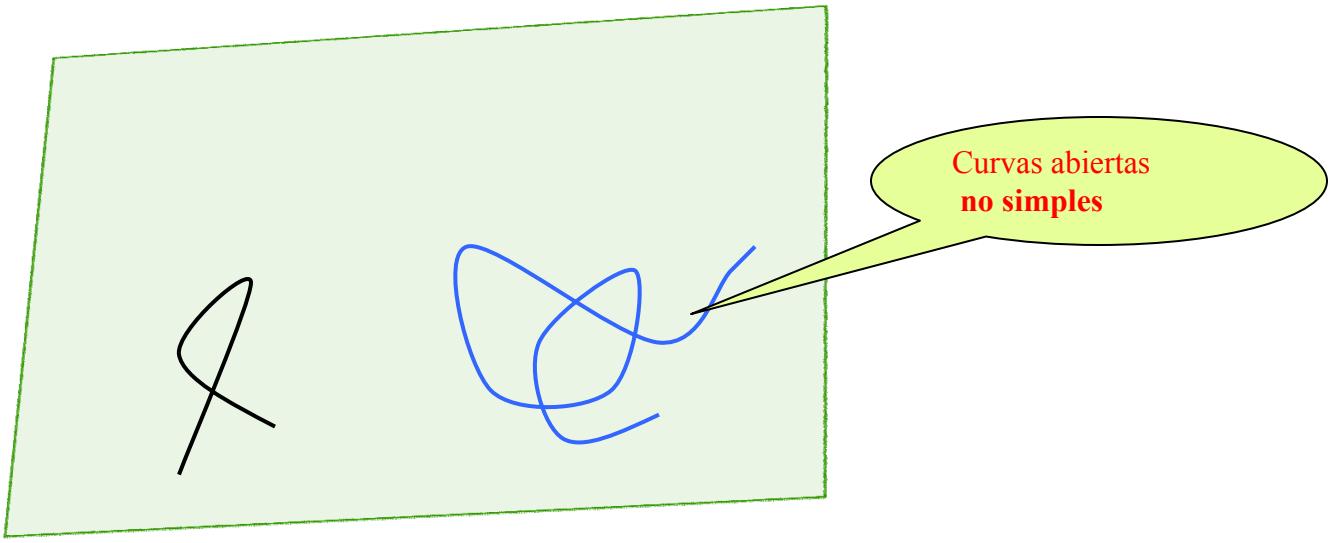
En las curvas podemos distinguir entre las curvas abiertas, las curvas cerradas, las curvas cerradas simples y las curvas cerradas no simples. Una **curva es abierta** si se traza de forma continua y su punto inicial es distinto de su punto final. Las **curvas cerradas** son aquellas que se trazan de forma continua y su punto inicial es igual a su punto final.

Una **curva simple abierta** es aquella que su trazado es continuo, no tiene puntos de intersección y sus puntos inicial y final son diferentes. Si una curva tiene al menos un punto de intersección decimos que es una **curva no simple**.

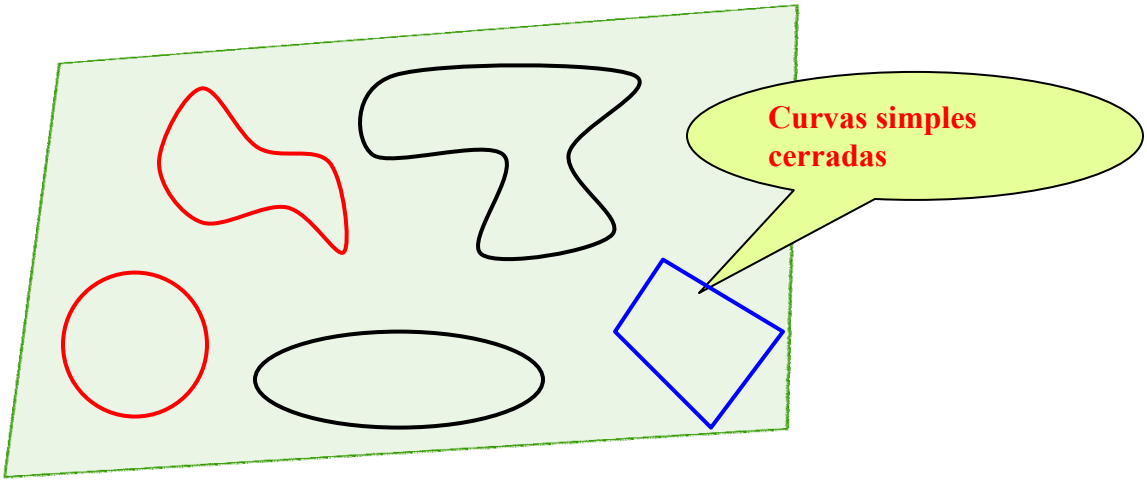
Ejemplos de curvas abiertas.

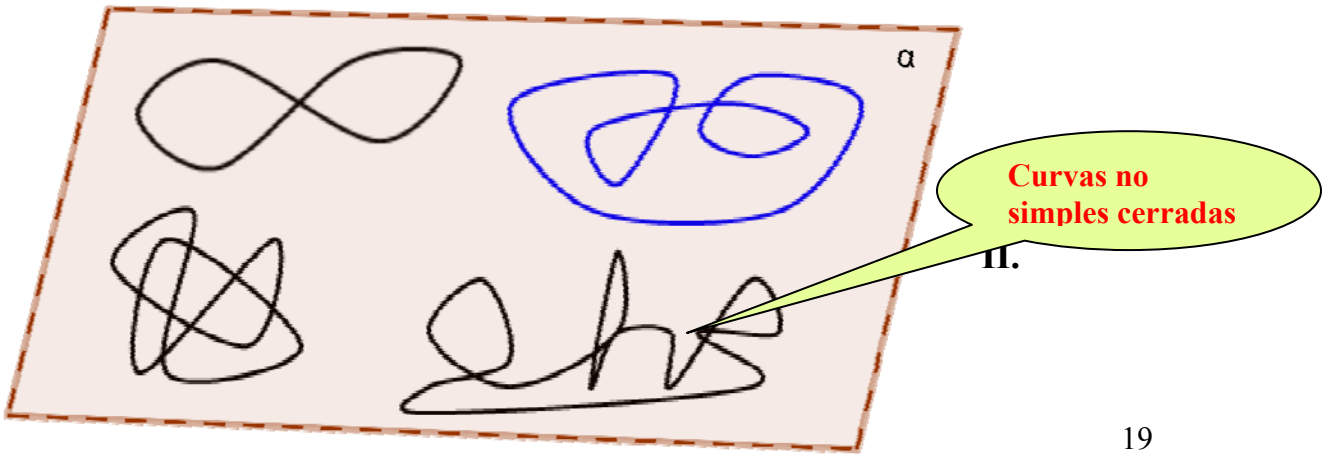


Curvas abiertas no simples



Curvas simples cerradas y curvas no simples cerradas





II.

Ejercicios de curvas

1. Determina si cada una de las siguientes curvas abiertas o cerradas.

Figura 1

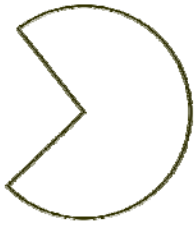


Figura 2

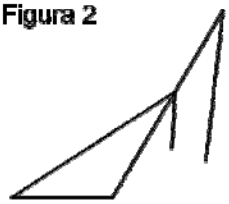


Figura 3

Figura 4

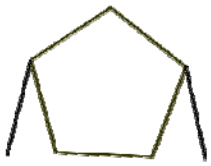


Figura 5

Figura 6

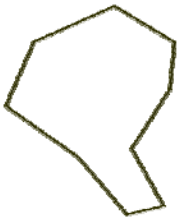


Figura 7

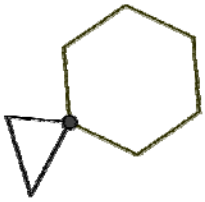


Figura 8

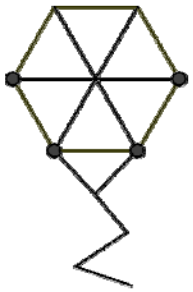


Figura 9

Figura 10

2. Determina si cada una de las siguientes curvas son simples o no son simples.

Figura 1

Figura 2

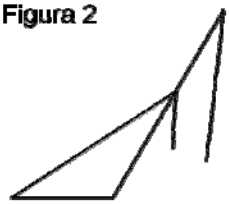


Figura 3

Figura 4

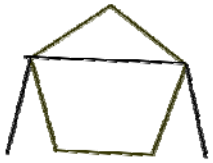


Figura 5

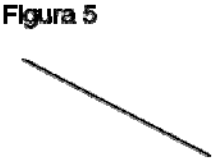


Figura 6

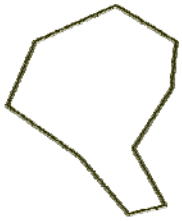


Figura 7

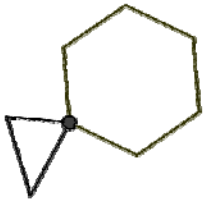


Figura 8

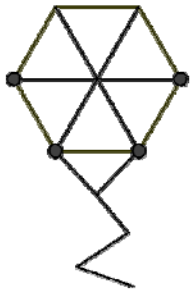
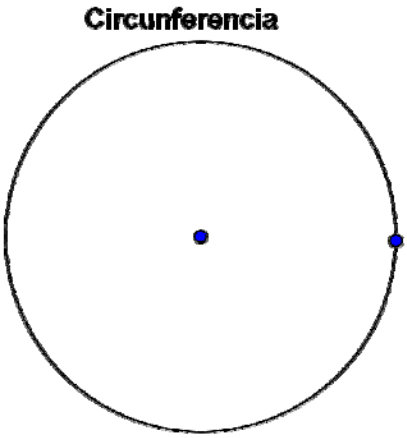


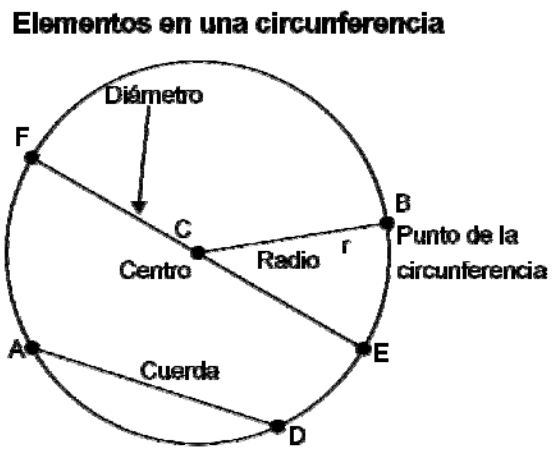
Figura 9

Figura 10

Circunferencias y círculos

Una **circunferencia** se define como el conjunto de puntos en el plano para los cuales la distancia de un punto de la circunferencia a un punto fijo llamado el centro es una constante, llamada el radio



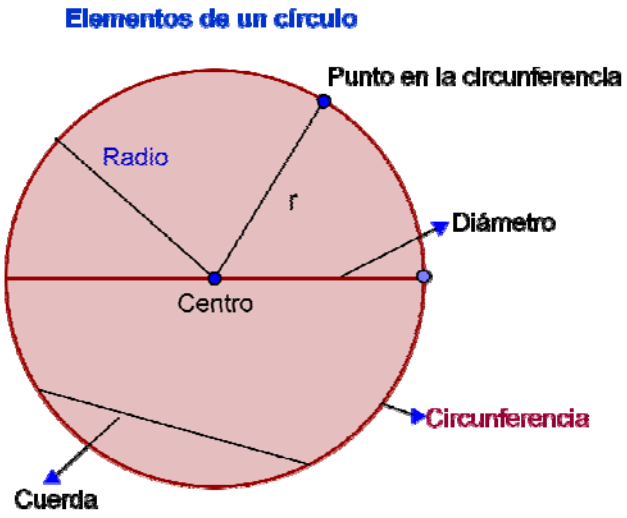


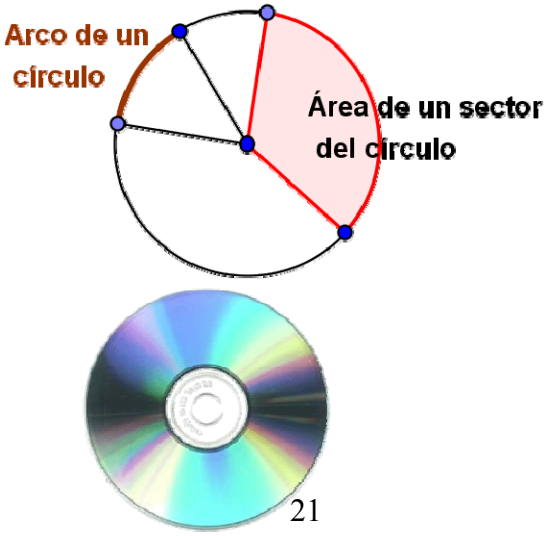
Un radio de una **circunferencia** es un segmento con un extremo en el centro y el otro extremo en la circunferencia. Una cuerda es un segmento cuyos extremos están sobre la circunferencia. Un diámetro es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

Un **círculo**, en geometría, es la figura que contiene todos los puntos del plano cuya distancia al centro de una circunferencia es menor o igual a la medida del radio.

La figura 20 ilustra un círculo y los elementos que lo forman.

Figura 20

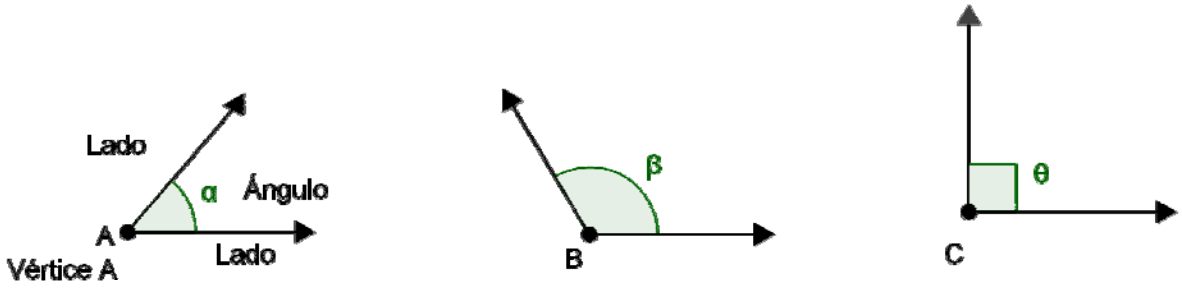




Observe además que un círculo tiene muchos radios, en esencia cualquier segmento desde el centro hasta la circunferencia es un radio del círculo. También un círculo contiene muchas cuerdas pues cualquier segmento cuyos extremos están sobre la circunferencia es una cuerda. Las cuerdas que pasan por el centro se llaman diámetros. Cualquier parte de una circunferencia delimitada por dos de sus puntos, se conoce como un arco de la circunferencia. La parte del área de un círculo delimitada por dos radios y un arco del círculo se conoce como el área de un sector del círculo.

Ángulos

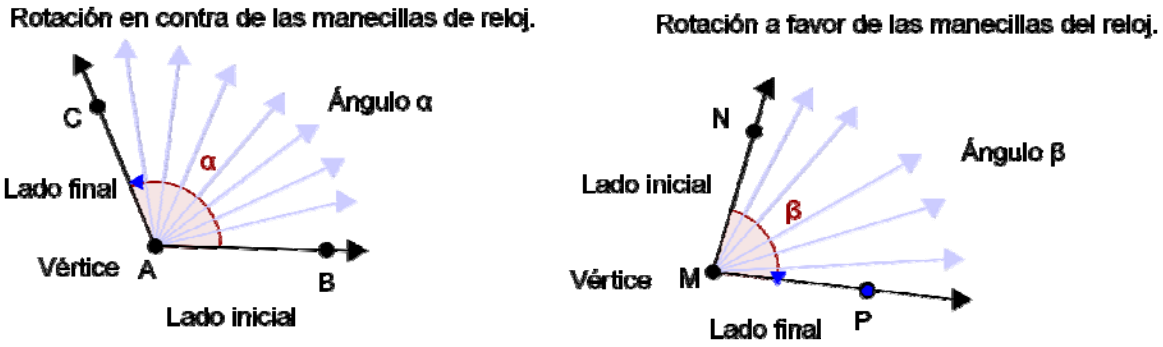
Un ángulo es la unión de dos rayos con su punto extremo en común. Los rayos que forman un ángulo se llaman lados y al punto común se le llama vértice. Las figuras a continuación ilustran varios ángulos y sus componentes.



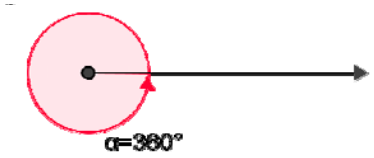
El símbolo que representa un ángulo es, $\measuredangle$. En lugar de escribir ángulo BAC en la siguiente figura, escribimos $\measuredangle$BAC o escribimos $\measuredangle$A, donde A representa el vértice del ángulo. En la figura el ángulo, $\measuredangle$BAC también se denota usando la letra griega α y el ángulo $\measuredangle$NMP, se identifica con la letra griega, β o como $\measuredangle$M.

A cada ángulo se le asigna una medida, la cual se interpreta como la cantidad de rotación que se genera al mover un rayo, llamado lado inicial hasta terminal en otro rayo, llamado lado final. En la figura se ilustra el $\measuredangle$A, con la rotación desde el lado inicial hasta el lado final en contra de las manecillas del reloj y el $\measuredangle$M con rotación a favor de las manecillas del reloj. Si la rotación es en contra de las manecillas del reloj se dice que

el **ángulo es positivo** y si es a favor de las manecillas del reloj se dice que el **ángulo es negativo.**



A la rotación del ángulo se le asigna una medida por medio de un sistema que se remonta hasta los babilonios del siglo II aC. Los astrónomos babilonios escogieron el número 360 para representar la rotación de un rayo que rota y regresa sobre si mismo. Se define entonces un grado como $\frac{1}{360}$ parte de la circunferencia. La figura ilustra un ángulo de 360^o.



Tipos de ángulos

Los ángulos se clasifican y denominan de acuerdo con su medida en grados.

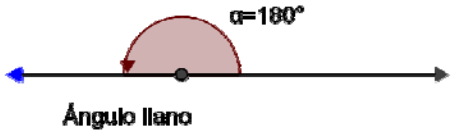
Un ángulo que mide entre 0^o y 90^o se llama ángulo agudo.

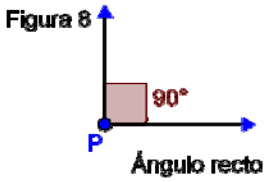
Un ángulo cuya medida es de 90^o se llama ángulo recto.

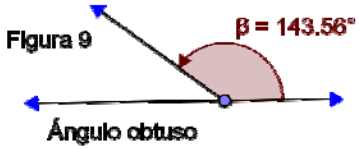
Los ángulos que miden entre 90^o y 180^o se laman ángulos obtusos.

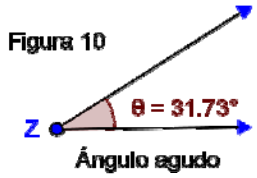
Un ángulo cuya medida es de 180^o se llama ángulo llano.

Las siguientes figuras ilustran cada uno de los casos anteriores.









Si la suma de dos ángulos es 90^o de dice que los ángulos son **complementarios** y cada uno es el complemento del otro.

Ejemplo: Ángulos complementarios

1. $\mathbf{60°+30°=90°}$ por lo tanto $\mathbf{60°}$ y $\mathbf{30°}$ son ángulos complementarios.
2. $\mathbf{75°+15°=90°}$ por lo tanto $\mathbf{75°}$ y $\mathbf{15°}$ son ángulos complementarios.
3. $\mathbf{46°+44°=90°}$ por lo tanto $\mathbf{46°}$ y $\mathbf{44°}$ son ángulos complementarios.

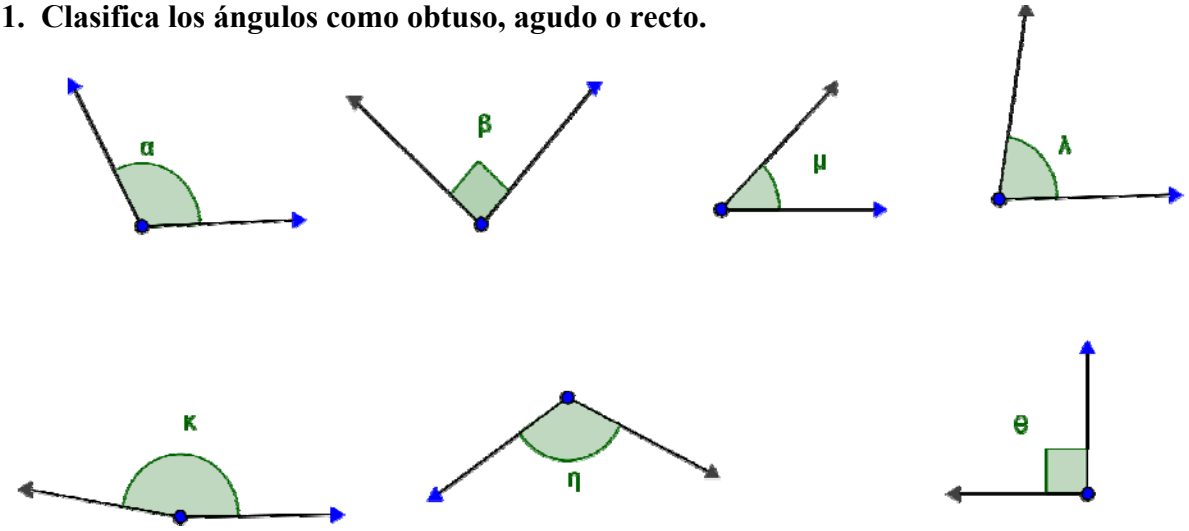
Si la suma de dos ángulos es 180^o de dice que los ángulos son **suplementarios** y cada uno es el suplemento del otro.

Ejemplo: Ángulos suplementarios

1. $\mathbf{150°+30°=180°}$ por lo tanto $\mathbf{150°}$ y $\mathbf{30°}$ son ángulos suplementarios.
2. $\mathbf{75°+105°=180°}$ por lo tanto $\mathbf{75°}$ y $\mathbf{105°}$ son ángulos suplementarios.
3. $\mathbf{120°+60°=180°}$ por lo tanto $\mathbf{120°}$ y $\mathbf{60°}$ son ángulos suplementarios.

III. Ejercicios de ángulos

1. Clasifica los ángulos como obtuso, agudo o recto.



Respuestas:

α	β	μ	λ	κ	η	θ

2. Encuentra la medida del ángulo complementario.

a. 75^0 **b.** 60^0

c. 50^0 **d.** 45^0

e. 35^0 **f.** 78^0

g. 36^0 **h.** 43^0

i. 48^0 **j.** 55^0

3. Encuentra la medida del ángulo suplementario.

a. 150^0 **b.** 42^0

c. 120^0 **d.** 45^0

e. 125^0 **f.** 165^0

g. 170^0 **h.** 10^0

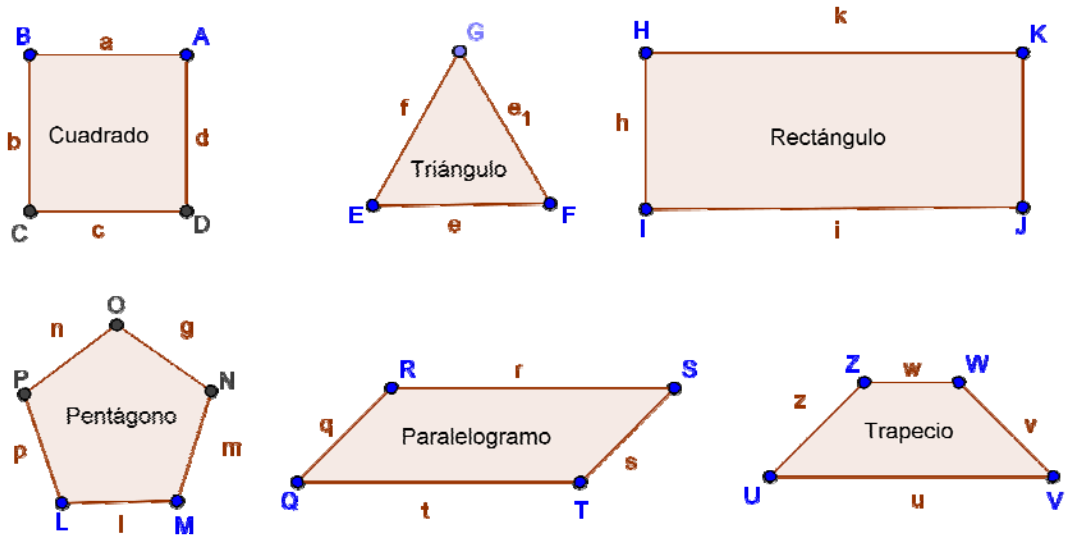
i. 108^0 **j.** 89^0

Polígonos

En muchas ocasiones habrás escuchado hablar sobre figuras geométricas como cuadrado, rectángulo, triángulo, pentágono, etc. Estos nombres están relacionados con una familia de figuras planas llamados **polígonos**.

Un **polígono** es una curva simple cerrada compuesta por segmentos consecutivos de líneas rectas. Los segmentos de línea se llaman ***lados*** y los puntos de intersección de los segmentos se llaman ***vértices.*** Los nombres de los polígonos se asignan de acuerdo al número de lados de la figura. Un polígono de n lados se llama n-ágono.

Ejemplos: La siguiente figura ilustra algunos ilustra algunos polígonos y sus respectivos nombres.



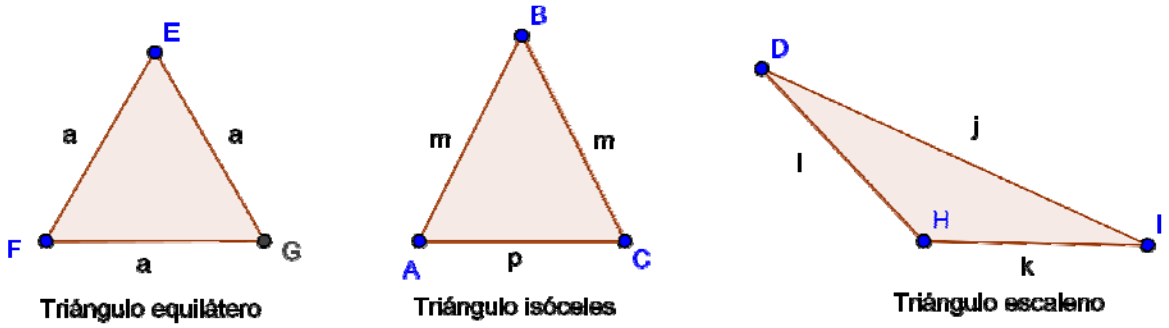
Los vértices de los polígonos se identifican con letras mayúsculas y los lados con letras minúsculas. Los polígonos se agrupan o clasifican por familias, los polígonos de tres lados se llaman **trígonos** y se conocen comúnmente como **triángulos.** Los polígonos de cuatro lados se llaman **cuadriláteros**, los de cinco lados **pentágonos**, los de seis lados **hexágonos** y así sucesivamente.

La familia de los triángulos

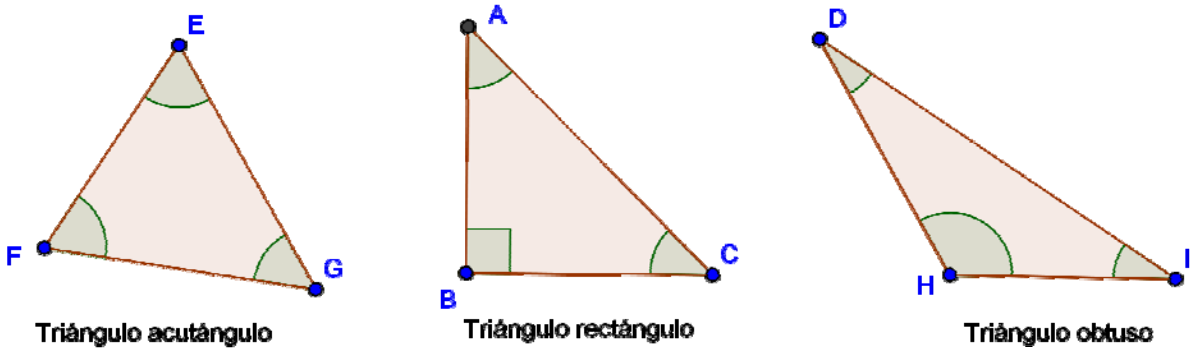
Los triángulos se clasifican por medio de las medidas de los ángulos interiores o por el número de lados iguales. En las siguientes figuras se ilustran los tipos de triángulos y la forma de nombrarlos.

Si todos los ángulos de un triángulo son agudos se le llama **triángulo acutángulo**, si el triángulo tiene un ángulo recto se llama **triángulo rectángulo** y si tiene un ángulo obtuso se llama **triangulo obtusángulo**. Si todos los lados de un triángulo son iguales se **llama triángulo equilátero**, si tiene dos lados iguales se llama **triángulo isósceles** y si todos los lados son diferentes se llama **triángulo escaleno.**

Clasificación de los triángulos de acuerdo al número de lados iguales.



Clasificación de los triángulos de acuerdo a los ángulos.

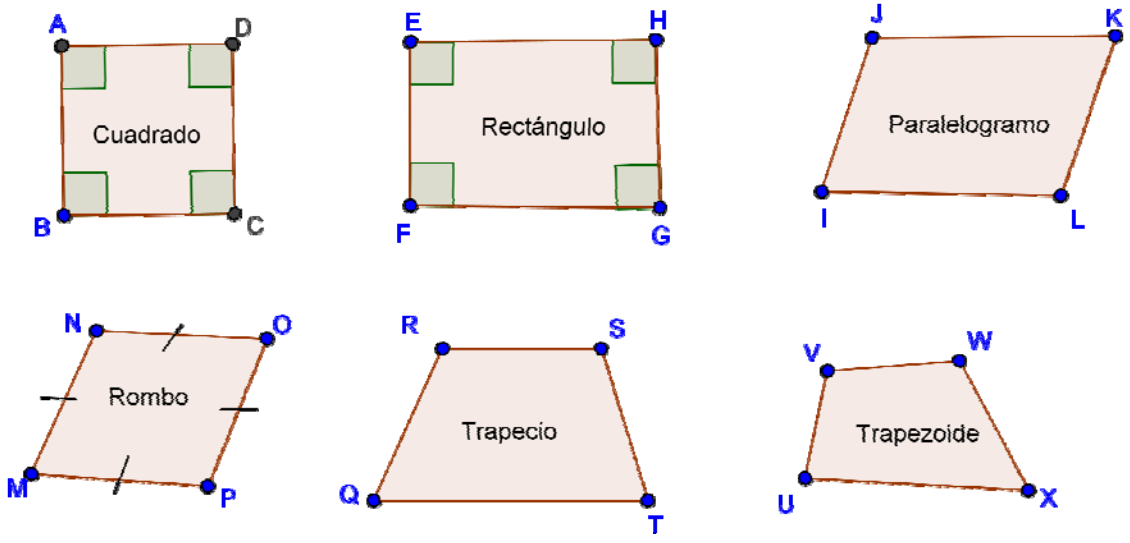


La familia de los cuadriláteros

Los cuadriláteros al igual que los triángulos son de los polígonos más conocidos. Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados (tetrágono). Los cuadriláteros se nombran usando las relaciones entre sus lados, como las relaciones entre los ángulos. Las relaciones entre los lados puede ser la de sus medidas o puede ser la condición de que los lados sean paralelos. Por ejemplo un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos.

En el caso de los ángulos se refiere a la existencia de ángulos rectos. Por ejemplo el rectángulo es el cuadrilátero que tiene todos sus ángulos rectos.

Ejemplo: La figura ilustra la familia de los cuadriláteros y sus nombres.



Las definiciones de los cuadriláteros en las figuras anteriores son las siguientes;

Cuadrado: es un cuadrilátero que tiene todos los lados iguales y todos los ángulos rectos.

Rectángulo: es un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos.

Paralelogramo: es un cuadrilátero con los pares de lados opuestos paralelos.

Rombo: es un paralelogramo con todos sus lados iguales.

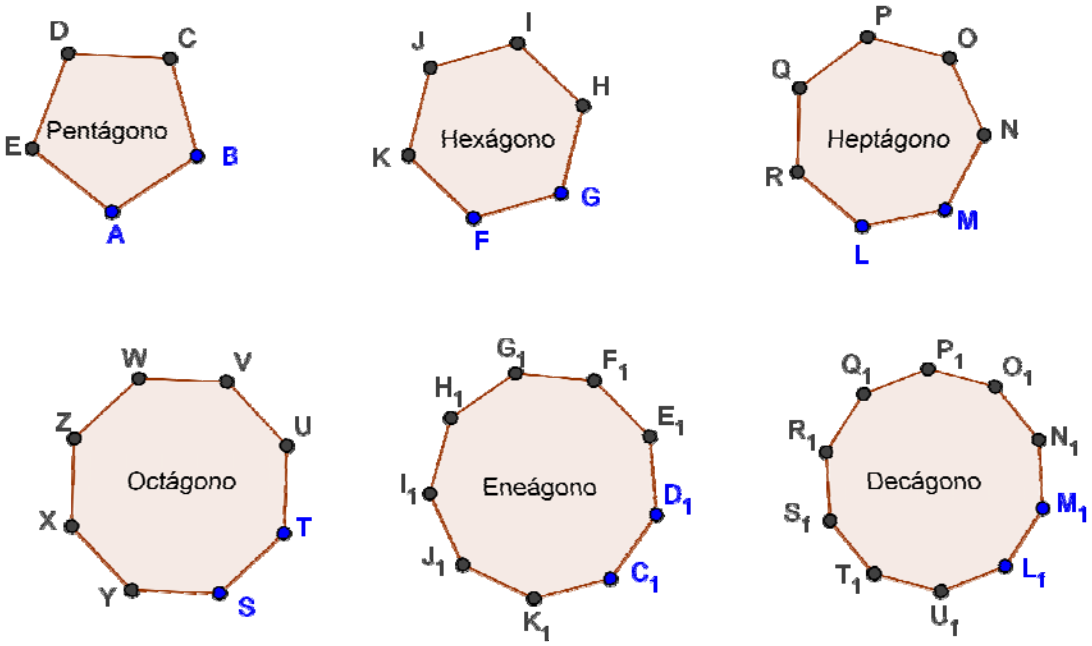
Trapecio: es un cuadrilátero con un par de lados paralelos.

Trapezoide: es un cuadrilátero que no tiene lados paralelos ni ángulos iguales

Polígonos regulares e irregulares

Los polígonos que tienen todos su lados iguales se laman polígonos **regulares** y si tienen algún lado diferente se llaman polígonos **irregulares**.

Ejemplos de polígonos regulares.



La tabla 1 ilustra los nombres de algunos polígonos de acuerdo con el número de lados.

Tabla 1

Clasificación de polígonos según el número de lados		
Nombre	**lados**	**Número de lados**
trígono, triángulo	**3**	**Polígono de 3 lados**
tetrágono, cuadrángulo, cuadrilátero	**4**	**Polígono de 4 lados**
pentágono	**5**	**Polígono de 5 lados**
hexágono	**6**	**Polígono de 6 lados**
heptágono	**7**	**Polígono de 7 lados**
octágono	**8**	**Polígono de 8 lados**
eneágono	**9**	**Polígono de 9 lados**
decágono	**10**	**Polígono de 10 lados**

La tabla 2 ilustra los nombres de algunos polígonos de acuerdo con el número de lados.

Tabla 2: Clasificación de los polígonos de acuerdo con el número de lados

11	**endecágono**	**Polígono de 11 lados**
12	**dodecágono**	**Polígono de 12 lados**
13	**tridecágono**	**Polígono de 13 lados**
14	**tetra decágono**	**Polígono de 14 lados**
15	**pentadecágono**	**Polígono de 15 lados**
16	**hexadecágono**	**Polígono de 16 lados**
17	**heptadecágono**	**Polígono de 17 lados**
18	**octodecágono**	**Polígono de 18 lados**
19	**eneadecágono**	**Polígono de 19 lados**
20	**isodecágono** **icoságono**	**Polígono de 20 lados**
30	**triacontágono**	**Polígono de 30 lados**
40	**tretracontágono**	**Polígono de 40 lados**
50	**pentacontágono**	**Polígono de 50 lados**
60	**hexacontágono**	**Polígono de 60 lados**
70	**heptacontágono**	**Polígono de 70 lados**
80	**octacontágono**	**Polígono de 80 lados**
90	**eneacontágono**	**Polígono de 90 lados**
100	**hectagóno**	**Polígono de 100 lados**
1000	**chiliágono**	**Polígono de 1000 lados**
10000	**miriagono**	**Polígono de 10000 lados**

IV. Ejercicios

1. Determina el número de vértices y de lados de cada polígono.

Figura 1

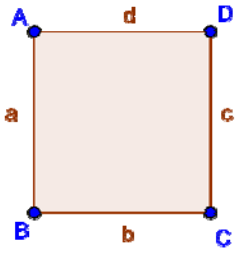


Figura 2

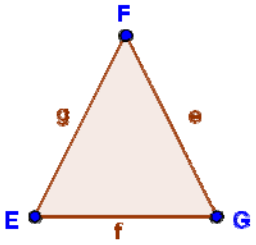


Figura 3

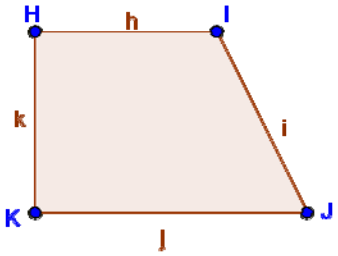


Figura 4

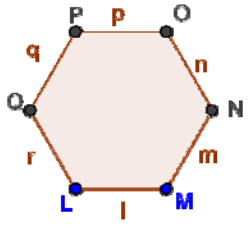


Figura 5

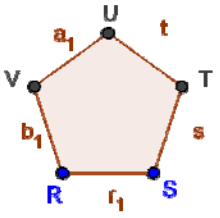
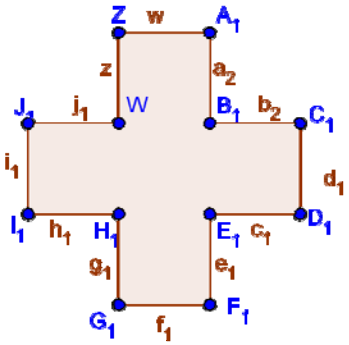


Figura 6



2. Identifica la figura de acuerdo al número de lados.

Figura 1

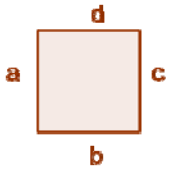


Figura 2

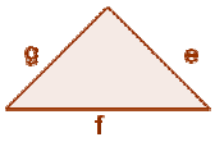


Figura 3

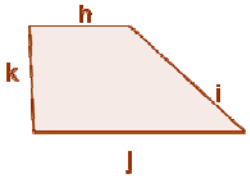


Figura 4

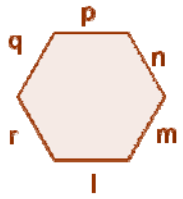


Figura 5

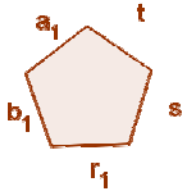


Figura 6

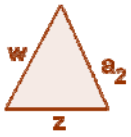


Figura 7

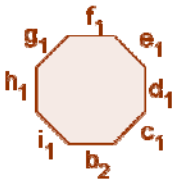


Figura 8

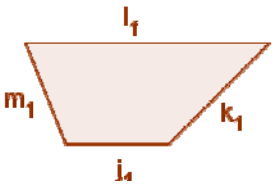


Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6	Figura 7	Figura 8

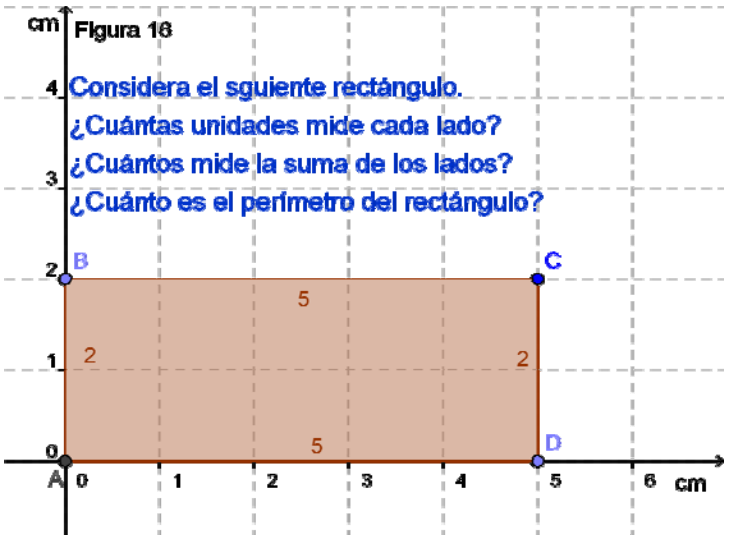
Los conceptos de área y perímetro en los polígonos

Perímetro de un polígono

Cada polígono en un plano está compuesto por segmentos de línea a los cuales le llamamos lados. A cada lado se le puede asignar una medida de largo en alguna unidad de medida como lo puede ser la medida en pulgadas, en pies, en metros, en centímetros, en yardas, etc.

El perímetro de un polígono es la suma de las medidas de sus lados.

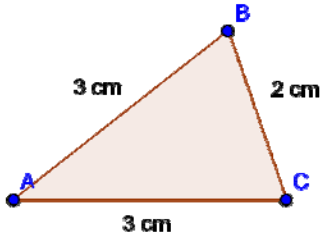
Ejemplo: Observe la siguiente figura. Identifique la unidad de medida en los ejes. Contesta las siguientes preguntas.



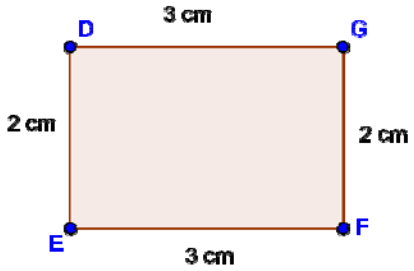
El largo mide 5 cm y el ancho mide 2 cm.

El perímetro mide, 5cm + 2cm + 5cm +2cm = 14cm

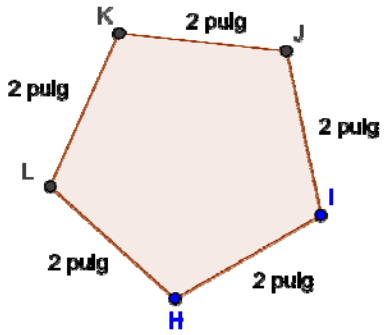
V. Ejercicio: Encuentra el perímetro de cada una de las siguientes figuras.



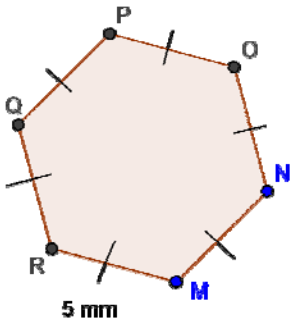
Perímetro = _____



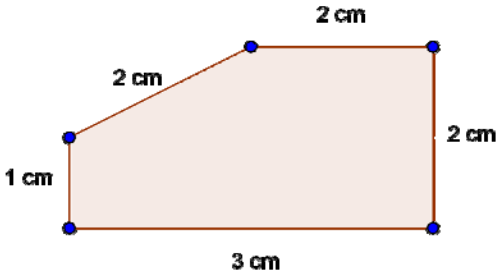
Perímetro = _____



Perímetro = _____



Perímetro = _____



Perímetro = _____

Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5

Figura 1

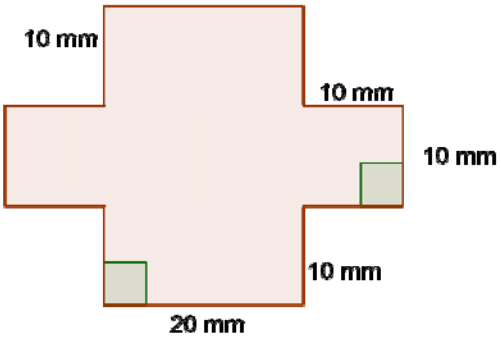


Figura 2

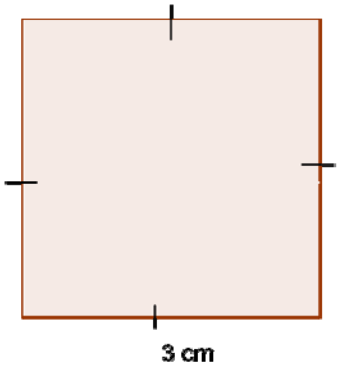


Figura 3

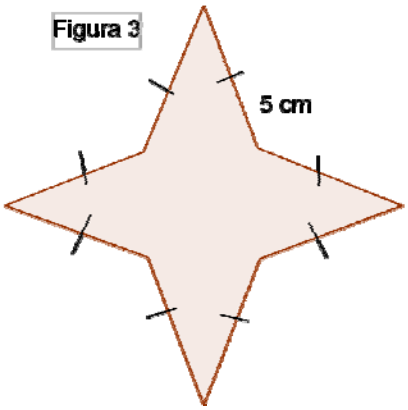


Figura 4

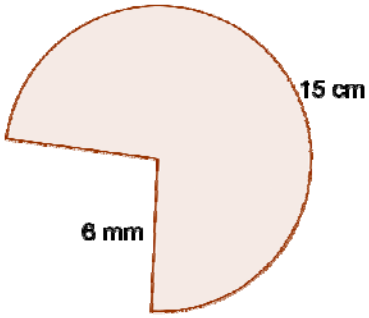
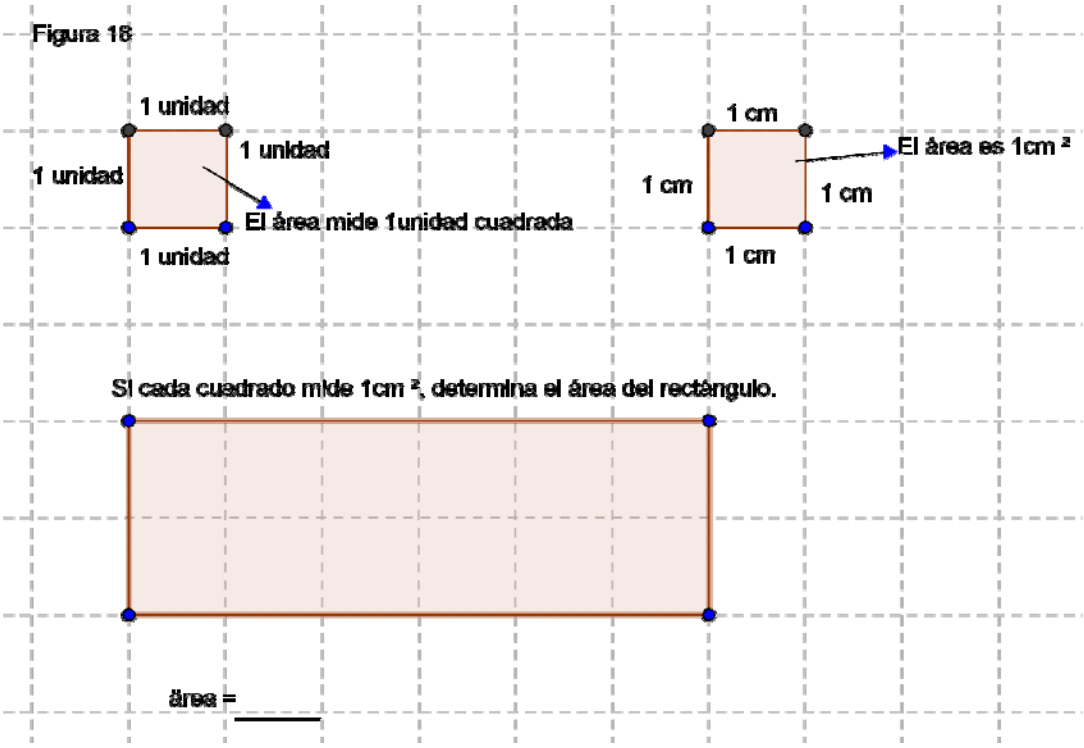


Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4

El área de un polígono

El concepto del área de un polígono es una medida de la cantidad del espacio que encierra el polígono. Las unidades para medir el área se definen en base al área que encierra un cuadrado cuya medida de los lados es una unidad. Decimos entonces que el área del cuadrado cuyos lados miden uno es de una unidad cuadrada. De esta maneara podemos medir el área en base a la cantidad de unidades cuadradas contenidas dentro del polígono. E la figura 18 se ilustra el concepto de unidad cuadrada. La unidad puede ser cualquiera de las unidades de medida que usted conoce, como por ejemplo, pulgadas (in.), metros (m), yardas (yd.), centímetros (cm), milímetros (mm), etc. En muchos casos hallar el área de un polígono simple se reduce a contar cuadritos, pero para otros polígonos la cantidad de cuadritos (unidades cuadradas) que caben dentro de la figura no es un número entero. En tal caso debemos desarrollar estrategias más sofisticadas para medir el área.



VI. Ejercicios de área

1. Determina el área de cada una de las siguientes figuras. Use la cuadrícula para identificar las unidades.

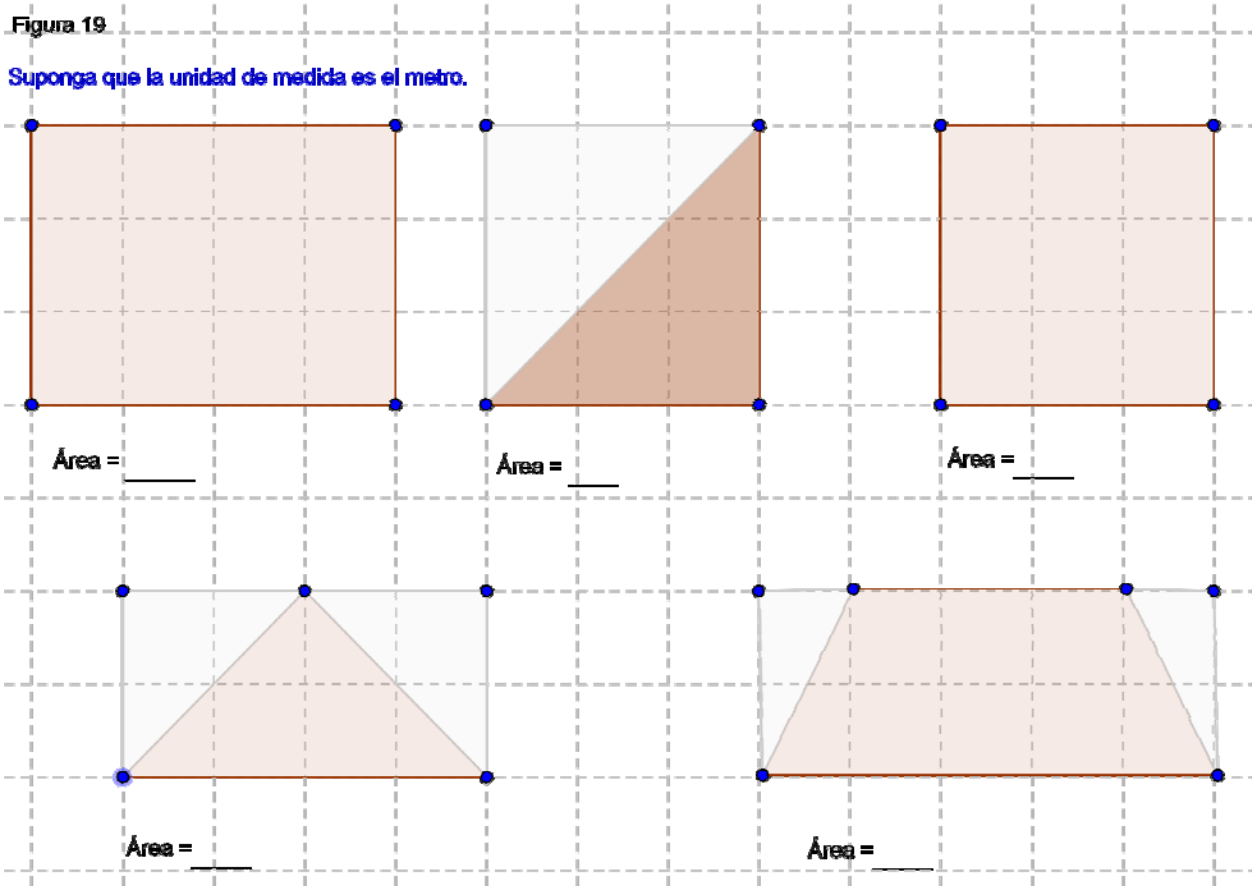


Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5

2. Encuentra el área de cada una de las siguientes figuras. Use la cuadrícula para identificar las unidades.

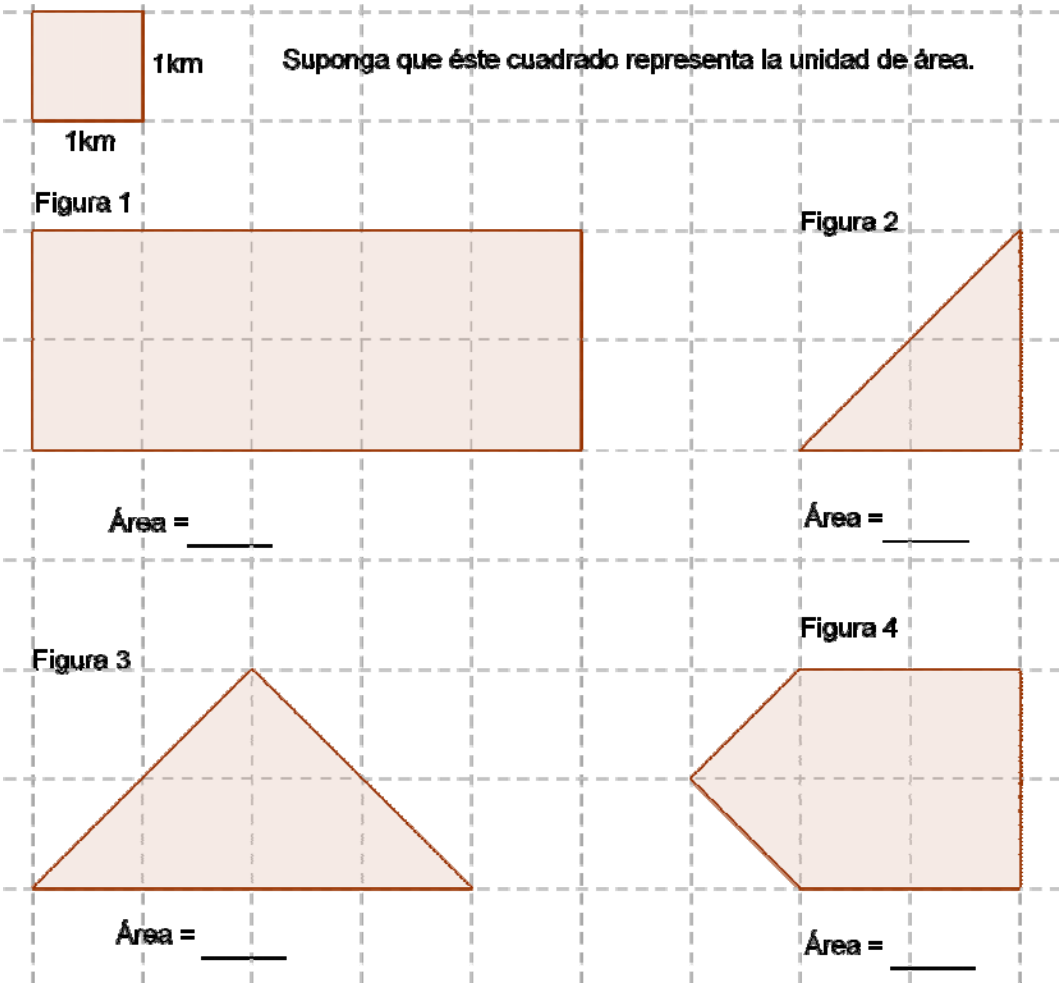
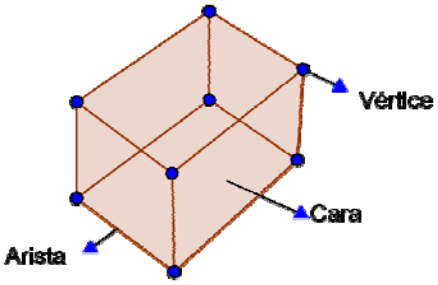


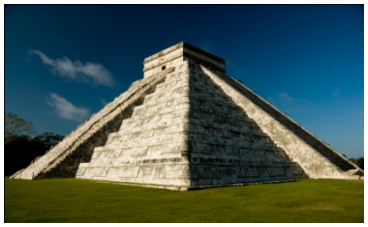
Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4

Figuras tridimensionales

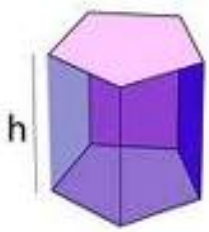
Las figuras estudiadas hasta este momento se dibujan sobre un plano (espacio de dos dimensiones) o sobre una línea (espacio unidimensional). Para representar el mundo que nos rodea donde los objetos son sólidos necesitamos un espacio de tres dimensiones. Si miramos una caja (el término en matemáticas es un paralelepípedo rectangular) vemos que contiene varios elementos estudiados en el plano. Por ejemplo los lados, que se les llama **caras** de la caja y forman rectángulos, tenemos los bordes de las caras, que representan segmentos de línea y se le llaman **aristas** y las esquinas que representan puntos, y se les llama **vértices**. Las figuras en el espacio cuyas caras son polígonos se llaman poliedros. Algunos de los poliedros se asignan nombres comunes, como al cubo, caja, etc.

Elementos de un poliedro

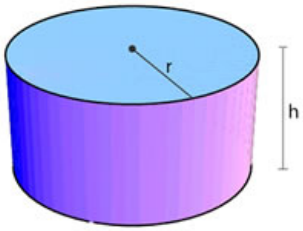




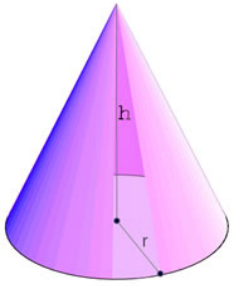
Pirámide



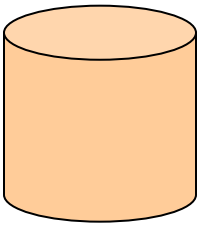
Prisma recto



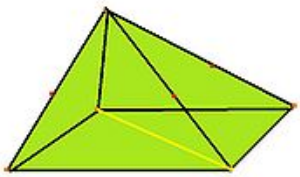
Cilindro



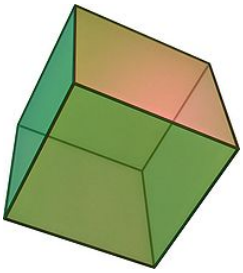
Cono



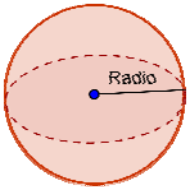
Cilindro circular



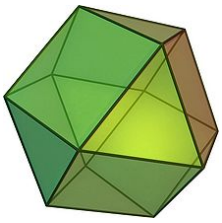
Pirámide rectangular



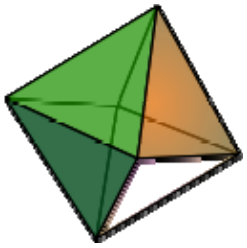
Cubo
(prisma rectangular)



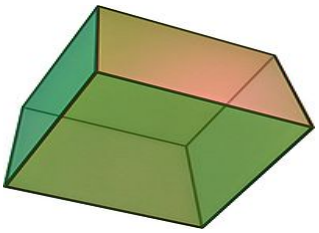
Esfera



Poliedro



Bipirámide



C a j a (p r i s m a)
r e c t á n g u l a r

VII Ejercicio: Figura tridimensionales

Determina el número de caras, de aristas y de vértices en cada uno de los siguientes poliedros. Completa la tabla con la información.

.

Fig. 1

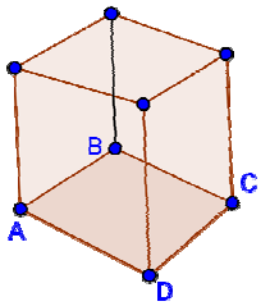


Fig. 2

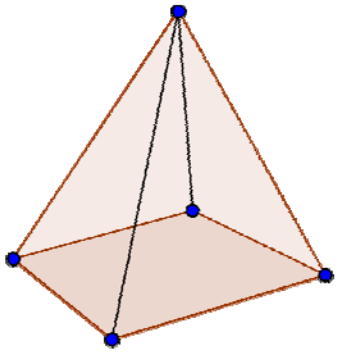


Fig. 3

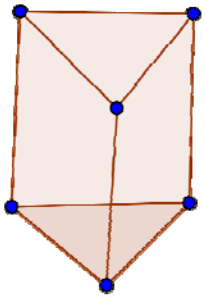


Fig. 4

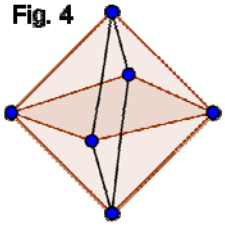


Fig. 5

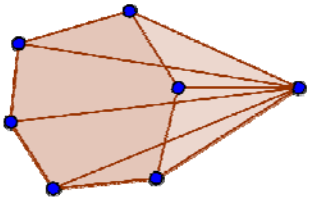


Fig.6

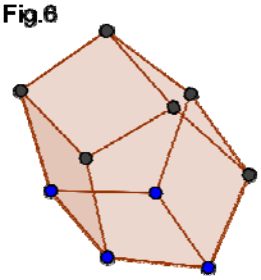
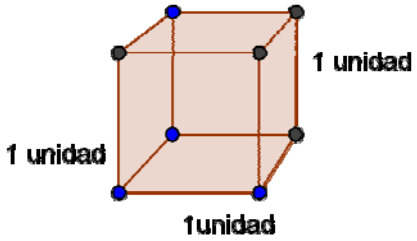


Figura	Vértices	Aristas	Caras
Fig. 1			
Fig. 2			
Fig. 3			
Fig. 4			
Fig. 5			
Fig. 6			

El concepto de volumen

Al igual que el caso del área, también podemos definir una forma de medir el espacio que ocupa una figura tridimensional. Lo hacemos de una forma similar a la del área, utilizando como base las unidades de medida en una línea.

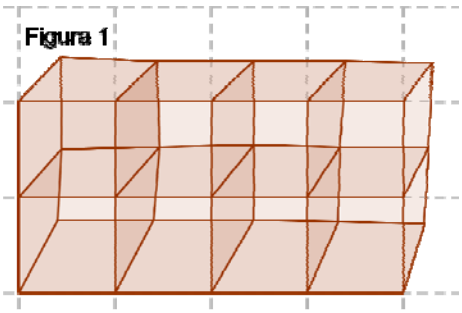
La unidad de medida de volumen se define como el espacio ocupado por un paralelepípedo (un cubo) que tiene unidad de media uno en todas sus aristas.



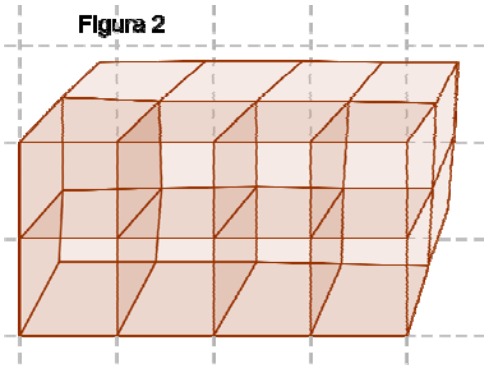
Volumen de una unidad cúbica

El volumen de una figura tridimensional de define como la cantidad de unidades cúbicas que ocupa la figura en el espacio.

Ejemplo: Determina el volumen de la figura. Suponga que cada cubo representa una unidad de volumen.



Volumen = 8 unidades cúbicas



Volumen = 16 unidades cúbicas

VIII. Ejercicios de volumen

1. Determina el volumen de cada figura. Suponga que la unidad es el metro cúbico.

Figura 1

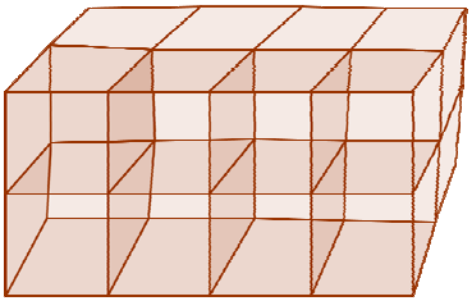


Figura 2

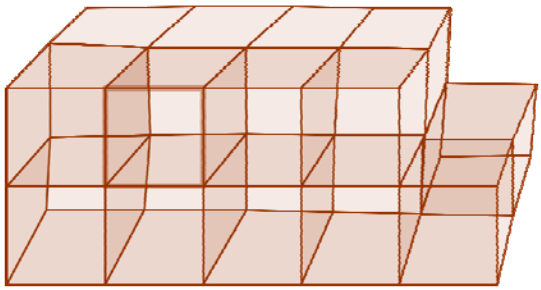


Figura 3

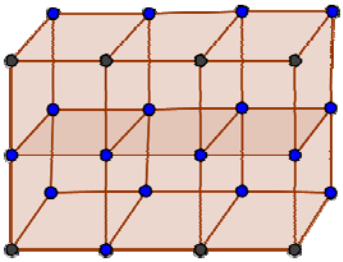
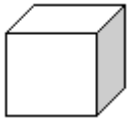
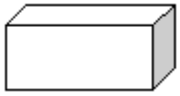
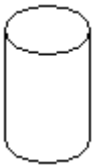


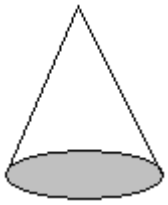
Figura 1	Figura 2	Figura 3

2. Identifica los siguientes objetos por su nombre.

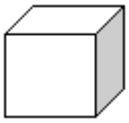




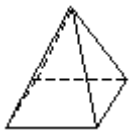




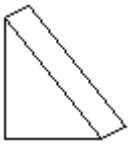
3. Determina el número de caras, aristas y vértices tiene cada figura.



___ caras ___ aristas ___ vértices

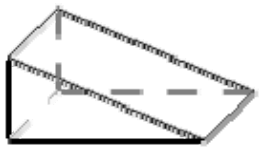


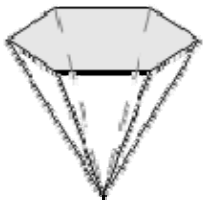
___caras ___ aristas ___vértices

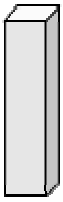


___ caras ___aristas ___vértices

4. Identifica cada figura por su nombre.





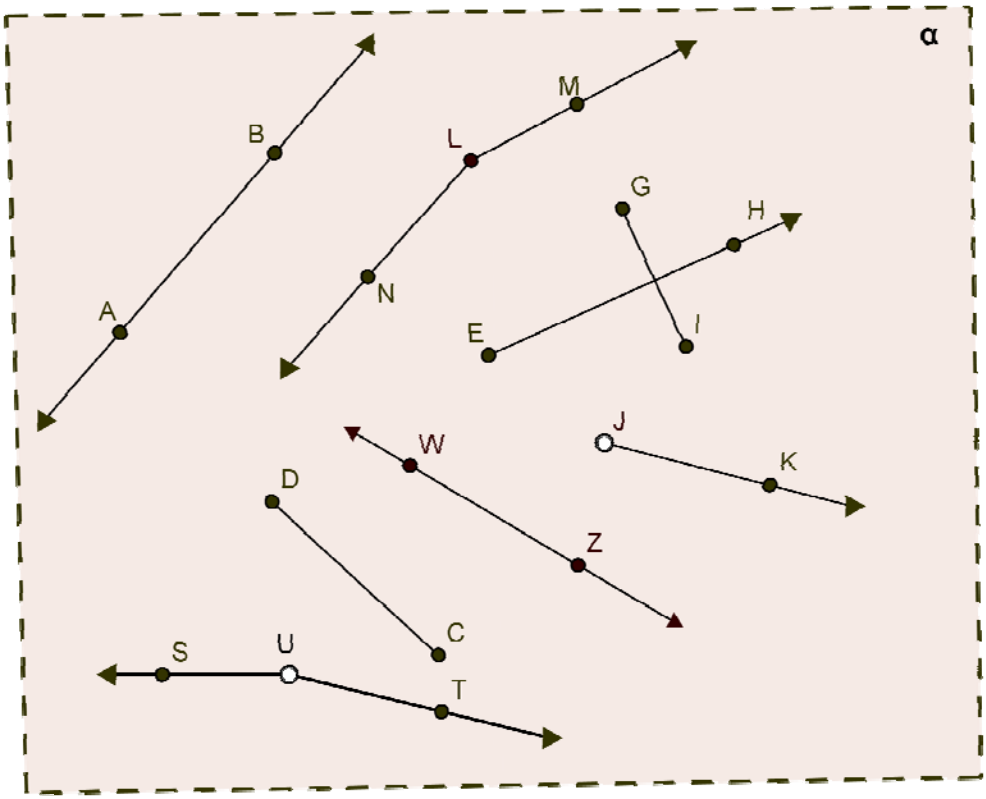


Respuestas de los ejercicios propuestos

Ejercicios: Pagina 15

I. Ejercicios de planos, puntos y líneas

1. Determina los segmentos, las líneas, rayos no contenidos en alguna línea y las medias líneas sobre el plano α.



Líneas	Rayos	Medialínea	segmentos
$\overleftrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{EH}$	$\overrightarrow{US}$	$\overline{DC}$
$\overleftrightarrow{WZ}$	$\overrightarrow{LM}$	$\overrightarrow{UT}$	$\overline{GI}$
	$\overrightarrow{LN}$	$\overrightarrow{JK}$	

Ejercicios: Página 20

II. Ejercicios de curvas

1. Determina si cada una de las siguientes curvas abiertas o cerradas.

Figura 1	**Cerrada**
Figura 2	**Abierta**
Figura 3	**Cerrada**
Figura 4	**Abierta**
Figura 5	**Abierta**
Figura 6	**Cerrada**
Figura 7	**Cerrada**
Figura 8	**Abierta**
Figura 9	**Cerrada**
Figura 10	**Cerrada**

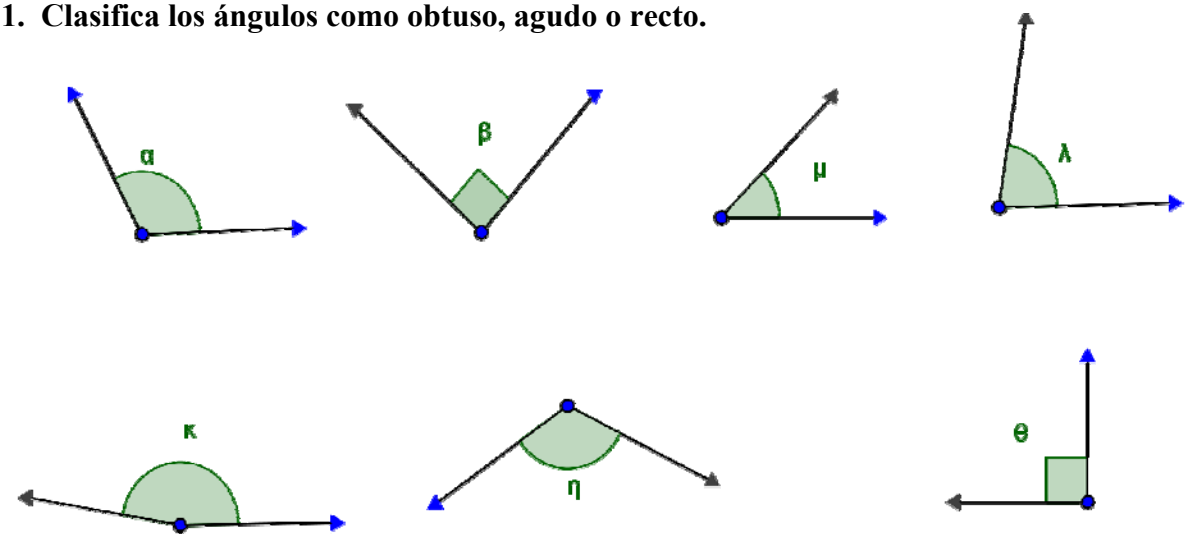
2. Determina si cada una de las siguientes curvas son simples o no son simples.

Figura 1	**Simple**
Figura 2	**No simple**
Figura 3	**Simple**
Figura 4	**No simple**
Figura 5	**Simple**
Figura 6	**Simple**
Figura 7	**No simple**
Figura 8	**No simple**
Figura 9	**No simple**
Figura 10	**Simple**

Ejercicios: Página 25

III. Ejercicios de ángulos

1. Clasifica los ángulos como obtuso, agudo o recto.



Respuestas:

α	β	μ	λ	κ	η	θ
Obtuso	**Recto**	**Agudo**	**Agudo**	**Obtuso**	**Agudo**	**Recto**

2. Encuentra la medida del ángulo complementario.

Ángulo	**Ángulo complementario**
a. 75^0	**15^0**
b. 60^0	**30^0**
c. 50^0	**40^0**
d. 45^0	**45^0**
e. 35^0	**55^0**
f. 78^0	**12^0**
g. 36^0	**54^0**
h. 43^0	**47^0**
i. 48^0	**42^0**
j. 55^0	**35^0**

3. Encuentra la medida del ángulo suplementario.

Ángulo	Ángulo suplementario
a. 150^0	30^0
b. 42^0	138^0
c. 120^0	60^0
d. 45^0	135^0
e. 125^0	55^0
f. 165^0	15^0
g. 170^0	10^0
h. 10^0	170^0
i. 108^0	72^0
j. 89^0	91^0

Ejercicios: Página 32

IV. Ejercicios

1. Determina el número de vértices y de lados de cada polígono.

Figura 1

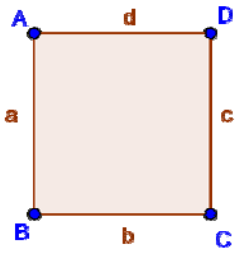


Figura 2

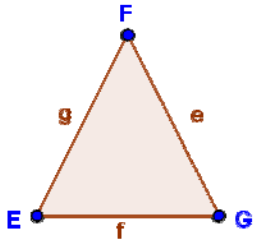


Figura 3

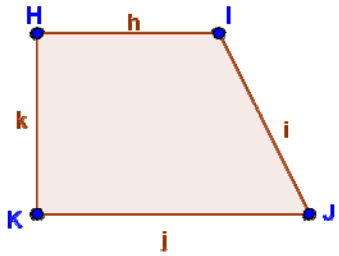


Figura 4

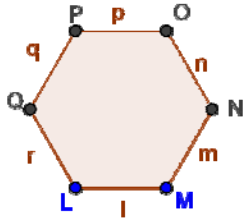


Figura 5

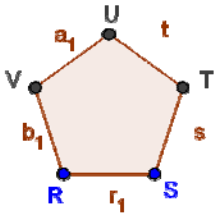


Figura 6

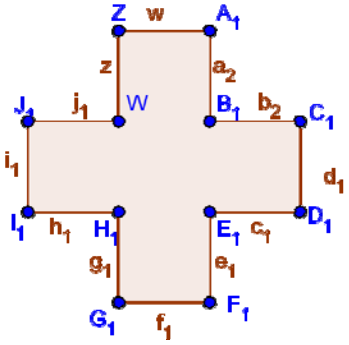


Figura	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6
vértices	4	3	4	6	5	12
lados	4	3	4	6	5	12

2. Identifica la figura de acuerdo al número de lados.

Figura 1

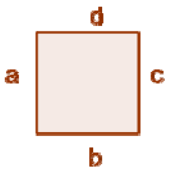


Figura 2

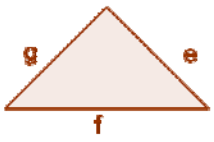


Figura 3

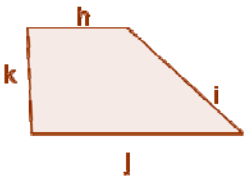


Figura 4

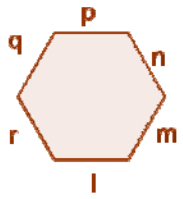


Figura 5

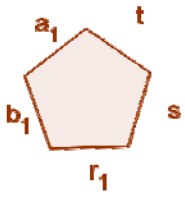


Figura 6

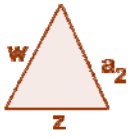


Figura 7

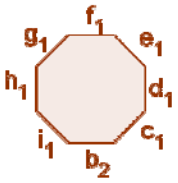


Figura 8

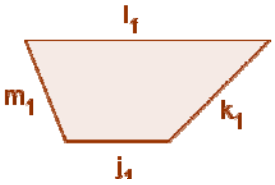
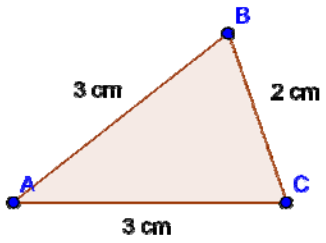


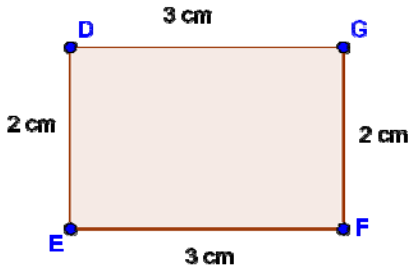
Figura 1	**Cuadrilátero(cuadrado)**
Figura 2	**Triángulo**
Figura 3	**Cuadrilátero(trapecio)**
Figura 4	**Hexágono (regular)**
Figura 5	**Pentágono**
Figura 6	**triángulo**
Figura 7	**octágono**
Figura 8	**Cuadrilátero (trapecio)**

V. Ejercicio: Página 34

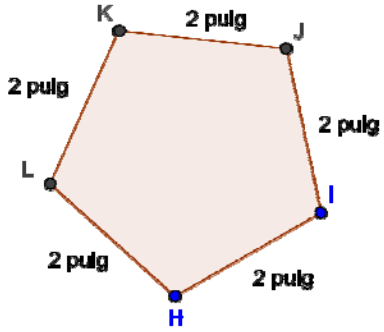
Encuentra el perímetro de cada una de las siguientes figuras.



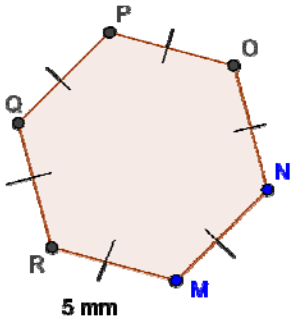
Perímetro = _____



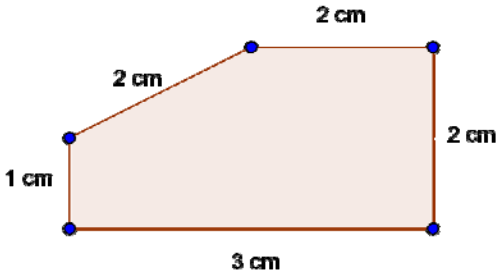
Perímetro = _____



Perímetro = _____



Perímetro = _____



Perímetro = _____

Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5
8 cm	10 cm	10 cm	30 cm	10 cm

Figura 1

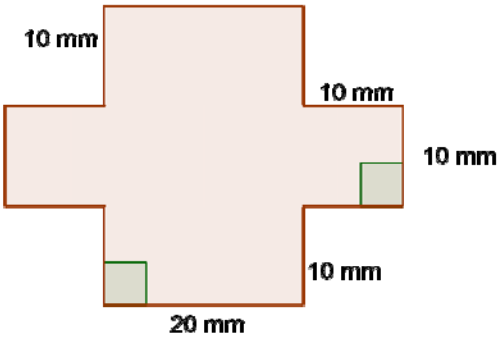


Figura 2

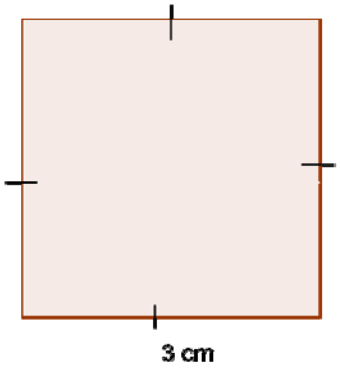


Figura 3

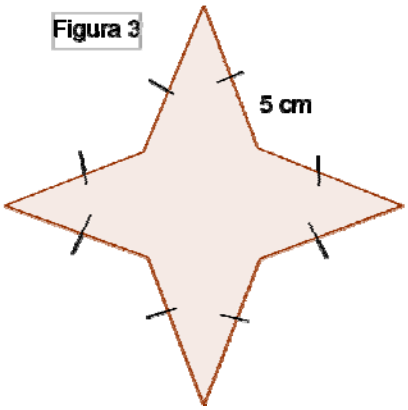


Figura 4

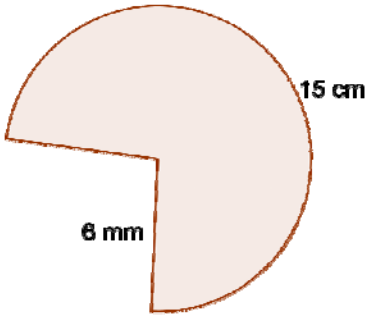


Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
140 cm	12 cm	40 cm	27 cm

Ejercicios: Página 37

VI. Ejercicios de área

1. Encuentra el área de cada una de las siguientes figuras. Use la cuadrícula para identificar las unidades.

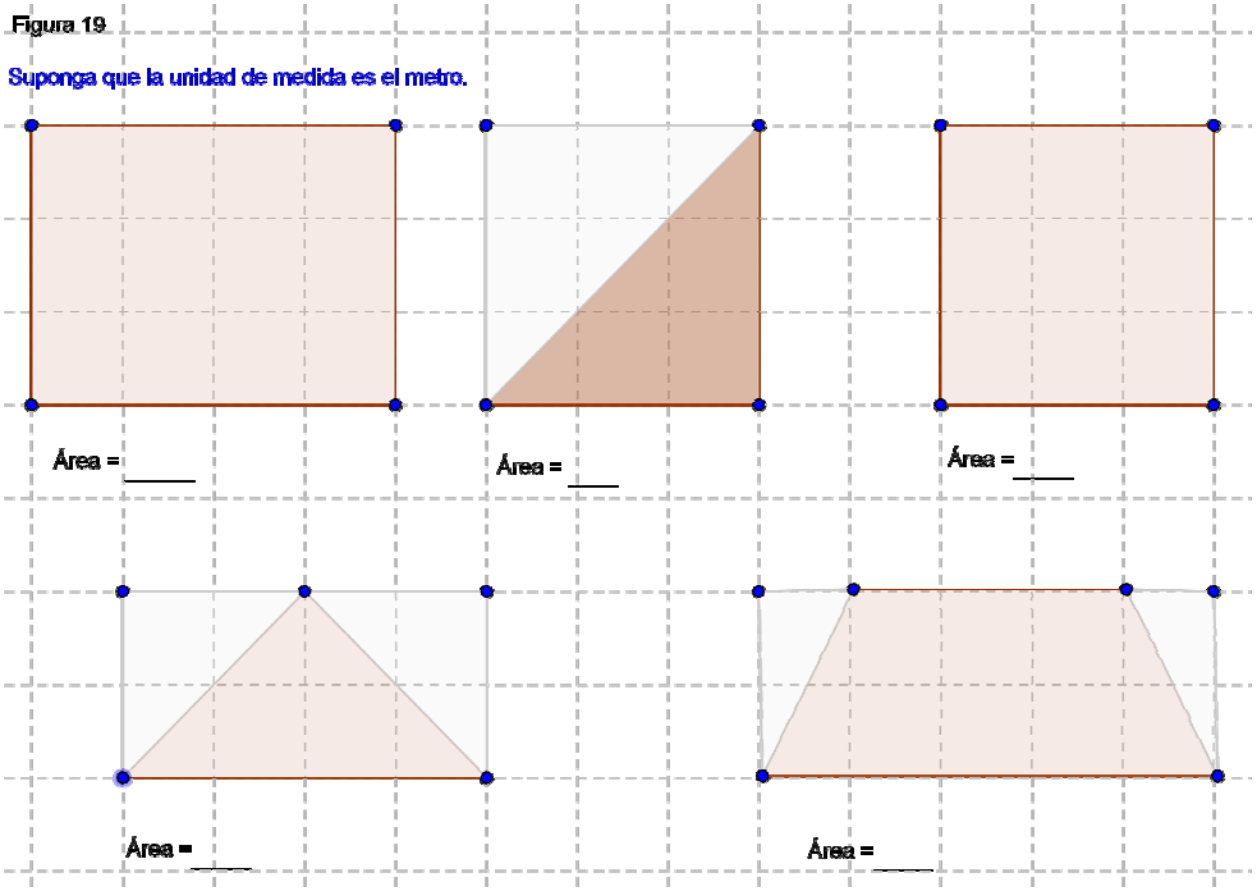


Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5
12 m^2	**4.5 m^2**	**9 m^2**	**4 m^2**	**8 m^2**

2. Encuentra el área de cada una de las siguientes figuras. Use la cuadrícula para identificar las unidades.

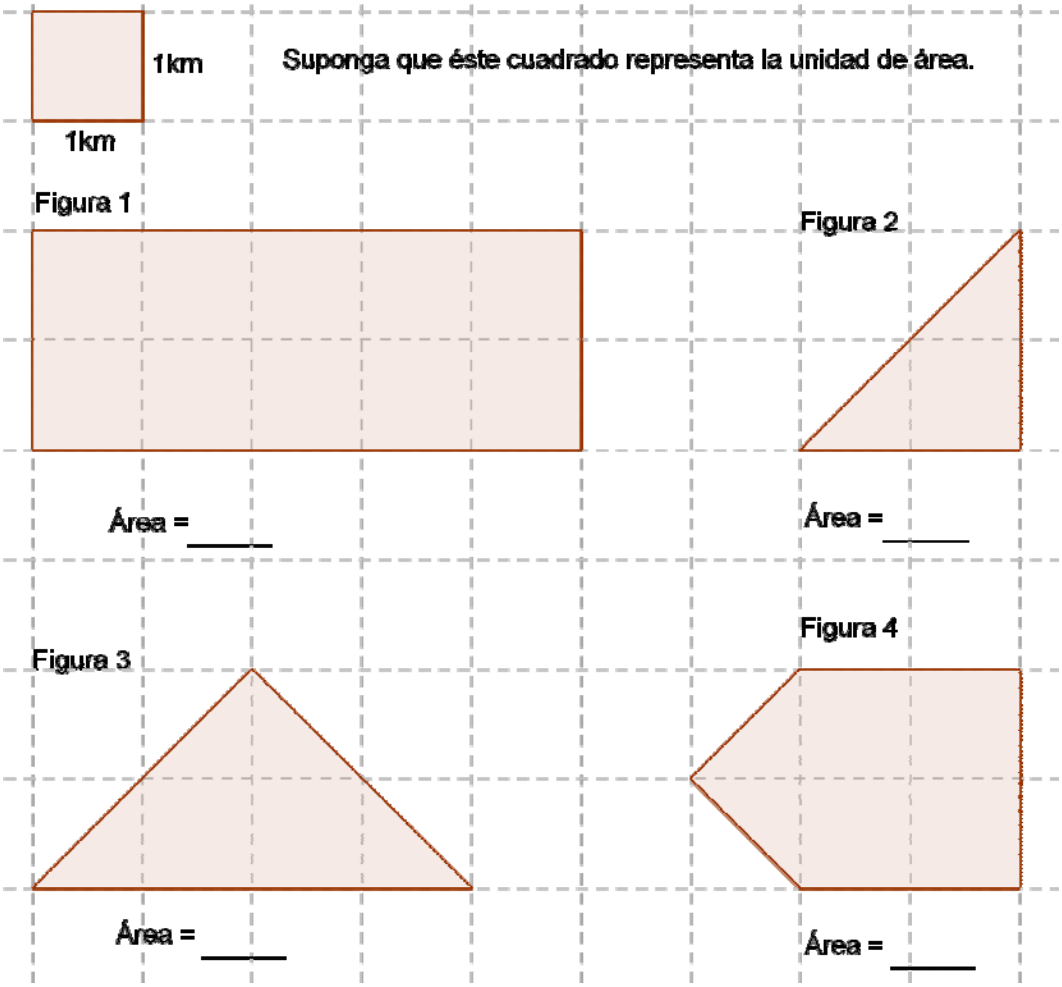


Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
10 km^2	2 km^2	4 km^2	5 km^2

Ejercicios: Página 41

VII Ejercicio: Figura tridimensionales

Determina el número de caras, de aristas y de vértices en cada uno de los siguientes poliedros. Completa la tabla con la información.

.

Fig. 1

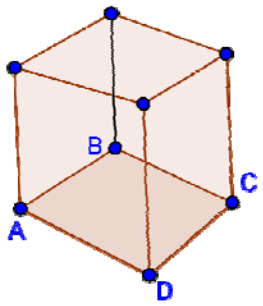


Fig. 2

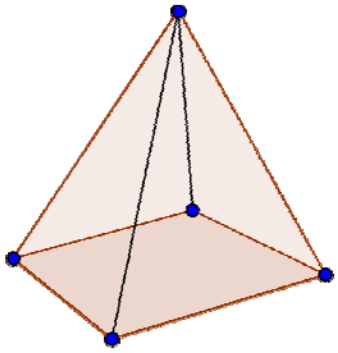


Fig. 3

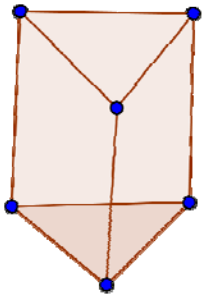


Fig. 4

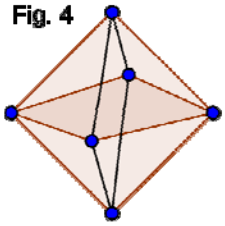


Fig. 5

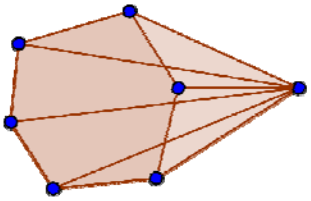


Fig.6

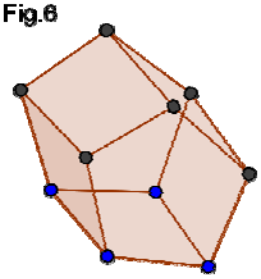


Figura	Vértices	Aristas	Caras
Fig. 1	8	12	6
Fig. 2	5	8	5
Fig. 3	6	9	5
Fig. 4	6	12	8
Fig. 5	7	12	7
Fig. 6	10	15	7

Ejercicios VIII: Página 43

1. Determina el volumen de cada figura. Suponga que la unidad es el metro cúbico.

Figura 1

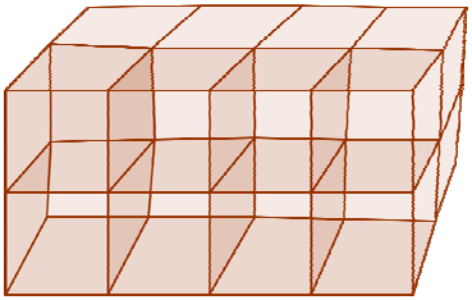


Figura 2

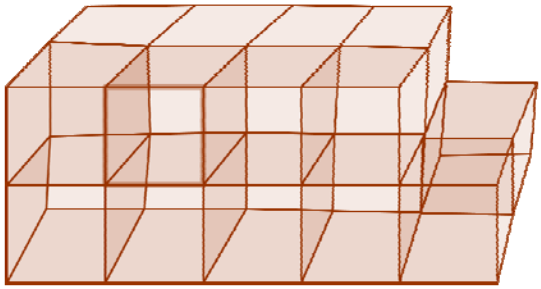


Figura 3

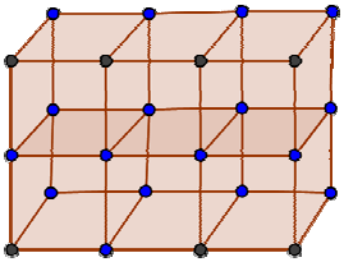
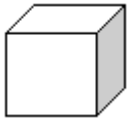
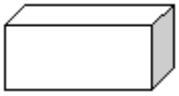


Figura 1	Figura 2	Figura 3
16 m^3	18 m^3	6 m^3

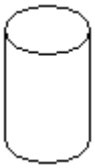
2. Identifica los siguientes objetos por su nombre.



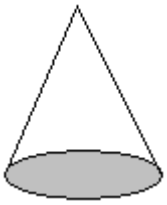
cubo



prisma rectangular

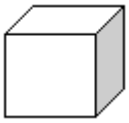


cilindro

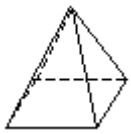


cono

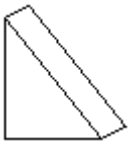
3. **Determina el número de caras, aristas y vértices tiene cada figura**.



6 caras 12 aristas 8 vértices



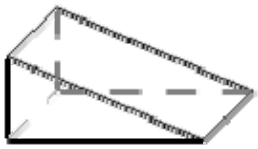
5 caras 8 aristas 5 vértices



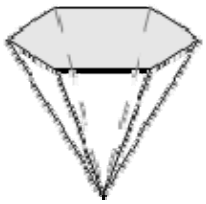
5 caras 9 aristas 6 vértices

4. Identifica cada figura por su nombre.

Pirámide rectangular



Prisma triangular

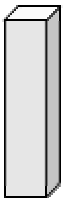


Pirámide hexagonal

cilíndro circular

Pirámide cuadrada

cono



Prisma rectangular

Prisma hexagonal

Respuestas de la Pre-Prueba y la pos-prueba

1. Determina si cada curva en la siguiente figura es, abierta, cerrada, simple o no simple.

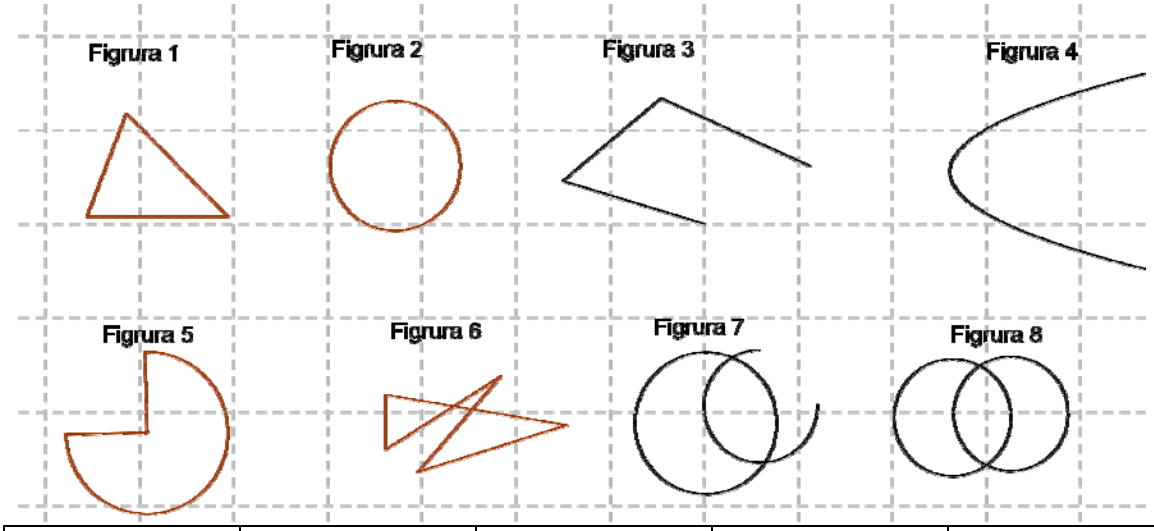


Figura	Abierta	Cerrada	Simple	No Simple
1		X	X	
2		X	X	
3	X		X	
4	X		X	
5		X	X	
6		X		X
7	X			X
8		X		X

2. Determina cuáles de las siguientes figuras son polígonos. Indica tu respuesta en la tabla.

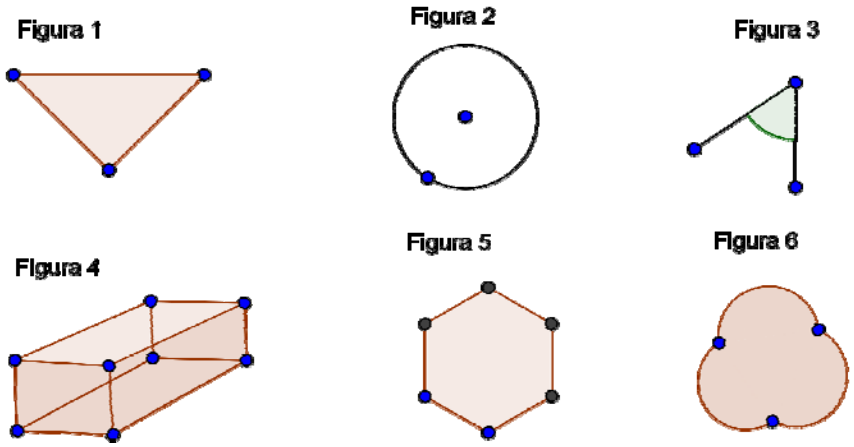


Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6
Si	No	No	Si	Si	No

3. Clasifica cada ángulo como, agudo, obtuso, recto o llano. Completa la tabla.

Figura 1

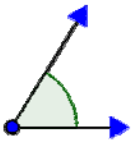


Figura 2

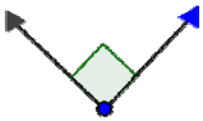


Figura 3

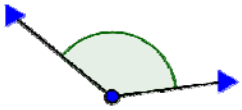


Figura 4

Figura 5

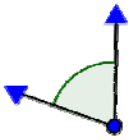


Figura 6

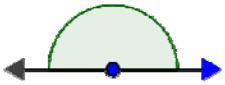


Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6
Agudo	Recto	Obtuso	Agudo	Agudo	Llano

4. Identifica cada cuadrilátero por su nombre. Completa la tabla.

Figura 1

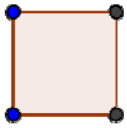


Figura 2

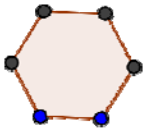


Figura 3

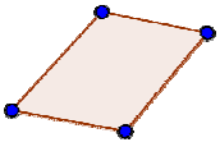


Figura 4

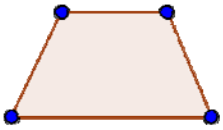


Figura 5

Figura 6

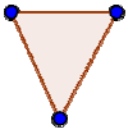


Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6
Cuadrado	Hexágono	Paralelogramo	Trapecio	Rectángulo	Triángulo

5. Identifica cada componente ilustrado del círculo. Completa la tabla.

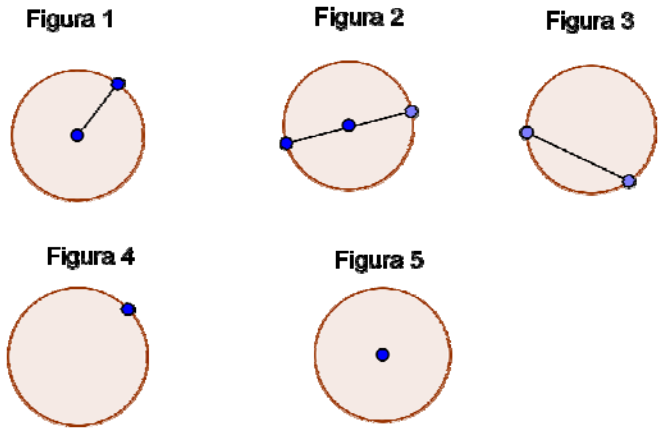


Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5
Radio	Diámetro	Cuerda	Punto	Centro

6. Clasifica el triángulo como rectángulo, equilátero, isósceles, o escaleno. Clasifica el triángulo como obtusángulo, acutángulo, o rectángulo. Completa la tabla.

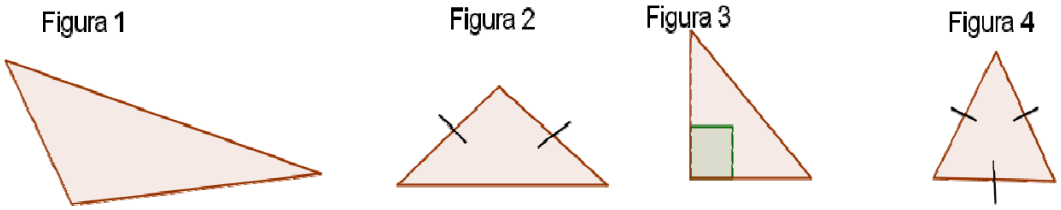
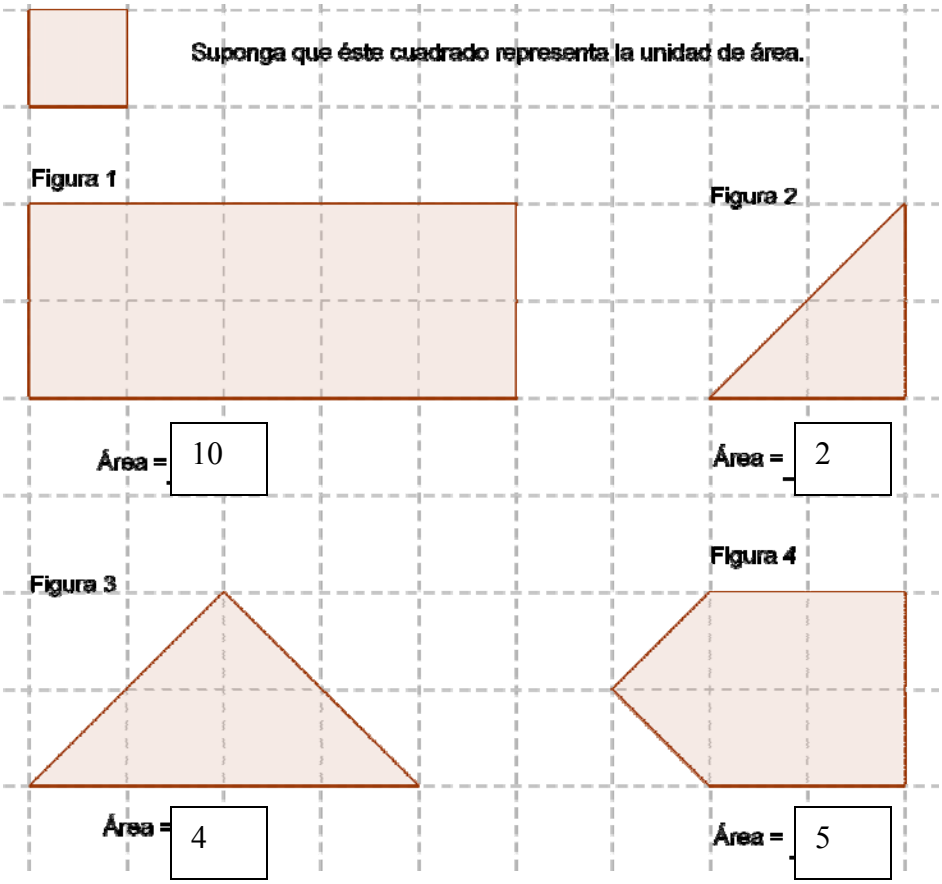
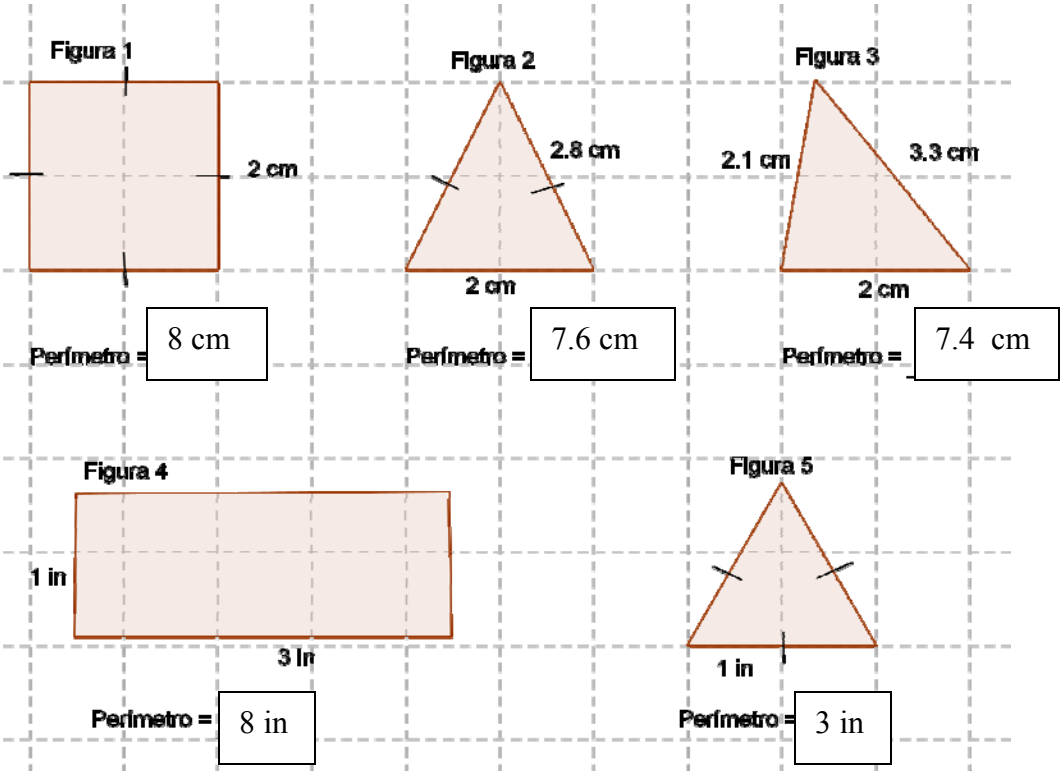


Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
Escaleno	Isósceles	Rectángulo	Equilátero
Obtusángulo	Acutángulo	Rectángulo	Acutángulo

7. Determina el área de cada figura.



8. Encuentra el perímetro de cada figura.