

# Fisika Dasar

Sparisoma Viridi

Versi 3 | 2011



# Isi

<b>1 Pengantar</b>	<b>1</b>
1.1 Permasalahan umum . . . . .	1
1.2 Kuis awal untuk motivasi: gerak parabola . . . . .	3
1.3 Integral secan pangkat tiga . . . . .	7
1.4 Panjang lintasan parabola . . . . .	8
1.5 Gelombang pada tali tak homogen . . . . .	9
<b>2 Gerak Lurus 1-D</b>	<b>11</b>
2.1 Posisi dan perpindahan . . . . .	11
2.2 Kecepatan rata-rata dan laju rata-rata . . . . .	12
2.3 Kecepatan sesaat dan laju sesaat . . . . .	15
2.4 Percepatan . . . . .	15
2.5 Gerak lurus dengan percepatan tetap . . . . .	16
2.6 Diferensiasi dan integrasi terhadap waktu . . . . .	17
<b>3 Rangkaian Gerak Lurus 1-D</b>	<b>21</b>
3.1 Rangkaian Gerak Lurus Berubah Beraturan (RGLBB) . . . . .	21
3.2 Menentukan kecepatan dari percepatan . . . . .	24
3.3 Menentukan posisi dari kecepatan . . . . .	26
3.4 Perpindahan dan jarak . . . . .	29
3.5 Laju dan kecepatan . . . . .	34

3.6	Laju dari percepatan . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Vektor dan Contoh Aplikasinya</b>	<b>39</b>
4.1	Skalar dan vektor . . . . .	39
4.2	Komponen vektor dan besarnya . . . . .	40
4.3	Penjumlahan dan pengurangan dua buah vektor . . . . .	42
4.4	Perkalian dan pembagian vektor dengan skalar . . . . .	44
4.5	Perkalian titik dua buah vektor . . . . .	45
4.6	Perkalian silang dua buah vektor . . . . .	46
4.7	Besar hasil perkalian skalar dan vektor . . . . .	48
4.8	Referensi . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Gerak dalam 2- dan 3-D</b>	<b>49</b>
5.1	Posisi dan perpindahan . . . . .	49
5.2	Kecepatan rata-rata dan kecepatan sesaat . . . . .	51
5.3	Percepatan rata-rata dan percepatan sesaat . . . . .	52
5.4	Gerak parabola . . . . .	54
5.5	Gerak melingkar beraturan . . . . .	55
5.6	Ilustrasi gerak secara umum . . . . .	55
5.7	Referensi . . . . .	56

# 1

## Pengantar

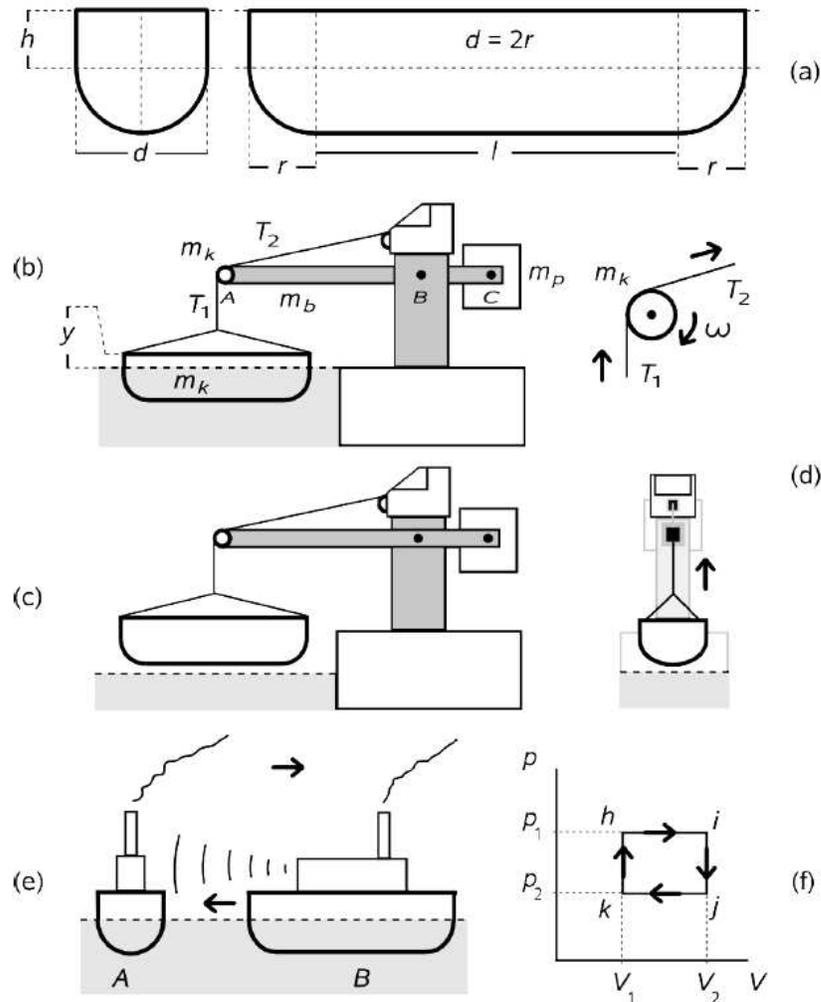
Fisika Dasar merupakan suatu catatan pendukung kuliah FI1101 Fisika Dasar IA dan FI1201 Fisika Dasar IIA yang diberikan dalam masa Tahun Pertama Bersama (TPB) di Institut Teknologi Bandung (ITB) [1]. Catatan ini akan diperbarui terus dari catatan sebelumnya [2] dan akan dapat diakses secara online [3], yang secara umum bersumber utama dari buku teks yang digunakan kedua matakuliah yang dimaksud [4].

### 1.1 Permasalahan umum

Pengalaman mengajar empat tahun terakhir ini memberikan masukan bahwa kendala utama peserta kuliah FI1101 dan FI1201 adalah untuk menyesuaikan diri dengan cara belajar di perguruan tinggi yang secara umum berbeda dengan cara belajar di tingkat pendidikan sebelumnya (SMU, SMP, SD, dan TK). Di perguruan tinggi seperti ITB, peserta kuliah tidak lagi hanya dijejali rumus dan cara menyelesaikan soal, melainkan diajak untuk berpikir bagaimana peristiwa sebenarnya terjadi sampai dapat diperoleh rumusan fisiknya. Banyak peserta kuliah yang mengalami kesulitan mengikuti cara belajar seperti ini karena tidak terbiasa untuk melengkapi sendiri langkah-langkah yang tidak diberikan di ruang kuliah. Langkah-langkah tersebut sengaja dihilangkan untuk memicu peserta kuliah belajar secara mandiri sehingga mendapatkan pemahaman sendiri. Suatu pemahaman yang akan lebih lekat pada benak mereka ketimbang diberikan langsung cara-caranya oleh pengajar, karena mereka memukannya sendiri. Hal lain adalah bahwa para peserta kuliah cenderung pasif dan kurang berani bertanya. Ini tidak dapat disalahkan kepada mereka karena sistem pendidikan pada jejang sebelumnya memang sarat dengan metode pendidikan satu arah, di mana peserta kelas hanya mendengarkan dan pengajarnya hanya berbicara. Proses diskusi amat jarang terjadi.

Khusus untuk lingkungan ITB, kemampuan intelektualitas peserta kuliah tidak perlu diragukan mengingat adanya proses seleksi masuk yang ketat. Motivasilah

yang menjadi faktor penentu apakah para peserta kuliah dapat menyelesaikan matakuliah FI1101 dan FI1201. Untuk itu sejak awal kuliah beberapa sikap positif perlu ditanamkan kepada para peserta kuliah, yaitu antara lain bahwa mereka tidak boleh segan bertanya, harus belajar mandiri, bekerja sama dalam belajar dengan teman-teman sekelas, memanfaatkan waktu di luar kuliah untuk berdiskusi dengan teman dan pengajar, dan mencari sendiri bahan-bahan dari literatur di perpustakaan dan internet.



Gambar 1.1: Ilustrasi soal bersifat tematik yang meliputi topik: (a) volume, massa jenis, (b)-(d) gaya apung, tegangan tali, kinematika rotasi, (e) efek Doppler, dan (f) siklus mesin kalor [5].

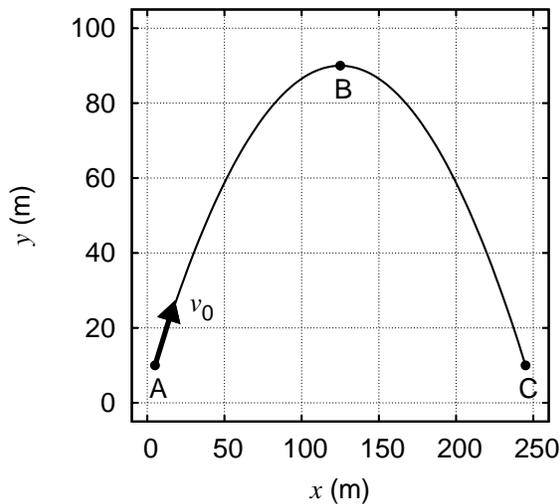
Dengan melihat hal-hal di atas, catatan kuliah ini perlu dirancang sedemikian rupa sehingga dapat mendukungnya. Beberapa contoh soal yang bersifat komprehensif, terintegrasi, dan multi topik akan diberikan agar para peserta kuliah dapat melihat bahwa materi perkuliahan dalam satu tahun tidak terkotak-kotak dan dapat bersemangat mempelajari kedua matakuliah tersebut karena

aplikasinya dalam dunia riil terlihat jelas. Salah satu contohnya diberikan dalam Gambar 1.1.

## 1.2 Kuis awal untuk motivasi: gerak parabola

Di awal perkuliahan dalam suatu semester sebagaimana diberikan suatu kuis awal untuk memetakan kemampuan seluruh peserta kelas. Soal sebaiknya cukup menantang sehingga mereka menjadi bersemangat dan tahu bahwa banyak hal yang mereka belum tahu. Hal ini diharapkan dapat menjadi suatu motivasi belajar mereka selama sepanjang semester. Soal yang dimaksud adalah sebagai berikut ini, yang dilengkapi dengan jawabnya.

**Soal 1.** Suatu benda titik dilemparkan dengan kecepatan awal  $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$  dari posisi awal  $\vec{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j}$  sehingga menempus suatu lintasan berbentuk parabola yang posisi setiap saatnya diberikan oleh  $\vec{r}(t) = (x_0 + v_{0x}t)\hat{i} + (y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2)\hat{j}$ . (a) Apakah terdapat suatu titik balik? Bila ya, pada arah  $x$  atau arah  $y$ ? (b) Bila terdapat titik balik, tentukan di mana dan kapan titik balik tersebut? (c) Perkirakan secara kasar dengan menggunakan garis-garis lurus jarak yang ditempuh benda titik tersebut antara selang waktu  $0 \leq t \leq \tau$  di mana  $\vec{r}(\tau) = (x_0 + v_{0x}\tau)\hat{i} + y_0\hat{j}$ . (d) Dengan menggunakan rumus panjang busur, tentukan jarak yang ditempuh selama selang waktu tersebut dan bandingkan apakah hasilnya cocok dengan hasil dalam pertanyaan sebelumnya.



Gambar 1.2: Ilustrasi lintasan parabola benda titik dengan  $x_0 = 5$  m,  $y_0 = 10$  m,  $v_{0x} = 30$  m/s,  $v_{0y} = 40$  m/s, dan  $g = -10$  sm/s<sup>2</sup> (para arah  $y$ ).

**Jawab 1.** Gambar 1.2 memberikan ilustrasi gerak parabola benda titik untuk nilai parameter tertentu ( $x_0, y_0, v_{0x}, v_{0y}, g$ ).

- (a) Dari Gambar 1.2 terlihat bahwa terdapat terdapat titik balik pada arah  $y$ , yaitu ada suatu titik maksimum pada arah ini. Pada arah  $x$  tidak terdapat titik yang memiliki karakteristik ini.
- (b) Titik balik yang dimaksud adalah titik B dalam Gambar 1.2. Titik B ini dicapai saat  $v_y(t) = 0$ . Dari posisi setiap saat  $\vec{r}(t) = (x_0 + v_{0x}t)\hat{i} + (y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2)\hat{j}$  dapat diperoleh bahwa

$$v_y(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot \hat{j} = v_{0y} - gt.$$

Dengan demikian

$$0 = v_{0y} - gt_B \Rightarrow t_B = \frac{v_{0y}}{g}$$

adalah waktu di mana titik balik pada arah  $y$  dicapai atau di titik B. Posisi titik puncak diperoleh dengan memasukkan  $t = t_B$  pada fungsi posisi setiap saat, yaitu

$$\begin{aligned} \vec{r}_B &= \vec{r}(t_B) \\ &= (x_0 + v_{0x}t_B)\hat{i} + \left(y_0 + v_{0y}t_B - \frac{1}{2}gt_B^2\right)\hat{j} \\ &= \left[x_0 + v_{0x}\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)\right]\hat{i} + \left[y_0 + v_{0y}\left(\frac{v_{0y}}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2\right]\hat{j} \end{aligned}$$

Untuk parameter gerak dalam Gambar 1.2 diperoleh bahwa  $\vec{r}_B = (125\hat{i} + 90\hat{j})$  m.

- (c) Untuk rentang  $0 \leq t \leq \tau$  di mana  $\vec{r}(\tau) = (x_0 + v_{0x}\tau)\hat{i} + y_0\hat{j}$  dapat dihitung jarak yang ditempuh, secara kasar dengan menggunakan bantuan beberapa garis lurus seperti diilustrasikan dalam Gambar 1.3. Untuk garis ABC maka diperoleh jarak

$$S_{ABC} = S_{AB} + S_{BC} = \left|\vec{r}\left(\frac{\tau}{2}\right) - \vec{r}(0)\right| + \left|\vec{r}(\tau) - \vec{r}\left(\frac{\tau}{2}\right)\right|.$$

Dengan  $\tau = 2t_B$  diperoleh

$$\begin{aligned} S_{AB} &= \left|\vec{r}\left(\frac{\tau}{2}\right) - \vec{r}(0)\right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{v_{0x}v_{0y}}{g}\right)^2 + \left[v_{0y}\left(\frac{v_{0y}}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2\right]^2} \\ &= \frac{v_{0y}}{g} \sqrt{v_{0x}^2 + \frac{1}{4}v_{0y}^2} \end{aligned}$$

Untuk  $S_{BC}$  akan diperoleh nilai yang sama, sehingga

$$S_{ABC} = \frac{2v_{0y}}{g} \sqrt{v_{0x}^2 + \frac{1}{4}v_{0y}^2}.$$

Dengan parameter dalam Gambar 1.2 diperoleh bahwa  $S_{ABC} = 80\sqrt{13}$  m. Sedangkan untuk garis ADBEC diperoleh jarak

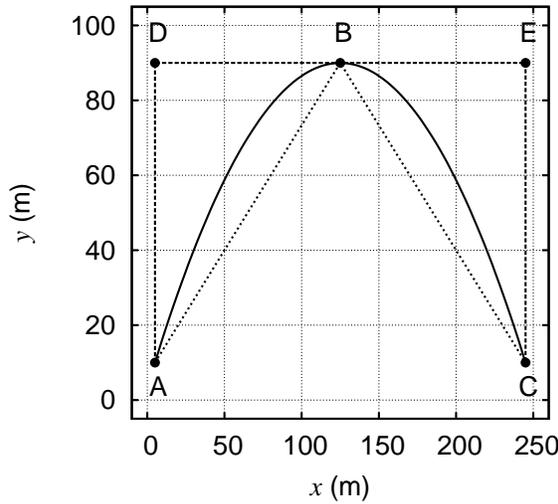
$$S_{\text{ADBEC}} = \frac{v_{0y}^2}{2g} + \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} + \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} + \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_{0y}}{g}(v_{0y} + 2v_{0x}),$$

yang untuk parameter gerak dalam Gambar 1.2 akan memberikan  $S_{\text{ADBEC}} = 400$  m. Jadi dapat dituliskan bahwa

$$S_{\text{ABC}} < S < S_{\text{ADBEC}}$$

atau dengan parameter dalam Gambar 1.2

$$80\sqrt{13} \text{ m} < S < 400 \text{ m}.$$



Gambar 1.3: Perkiraan kasar panjang lintasan dapat diperoleh melalui garis-garis lurus: ABC (jarak minimum) dan ADBEC (jarak maksimum).

- (d) Jarak yang ditempuh atau panjang lintasan benda selama  $0 \leq t \leq \tau$  di mana  $\vec{r}(\tau) = (x_0 + v_{0x}\tau)\hat{i} + y_0\hat{j}$  dapat dihitung dengan tuntas menggunakan rumus panjang busur [6],

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (1.1)$$

Untuk itu dituliskan kembali bahwa

$$x \equiv x(t) = x_0 + v_{0x}t, \quad (1.2)$$

$$y \equiv y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (1.3)$$

Substitusi Persamaan (1.2) dalam bentuk  $t = t(x)$  ke Persamaan (1.3) akan

memberikan  $y(x)$  seperti dalam langkah-langkah berikut ini

$$\begin{aligned} t &\equiv t(x) = \frac{x - x_0}{v_{0x}}, \\ y(t) &\Rightarrow y[t(x)] = y(x), \\ y(x) &= y_{0x} + v_{0y} \left( \frac{x - x_0}{v_{0x}} \right) - \frac{1}{2}g \left( \frac{x - x_0}{v_{0x}} \right)^2 \\ &= c_0 + c_1x + c_2x^2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

dengan

$$c_0 = y_{0x} - \frac{x_0 v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{x_0^2 g}{2v_{0x}^2}, \quad (1.5)$$

$$c_1 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} + \frac{x_0 g}{v_{0x}^2}, \quad (1.6)$$

$$c_2 = -\frac{g}{2v_{0x}^2}. \quad (1.7)$$

Selanjutnya dapat diperoleh bahwa

$$\frac{dy}{dx} = c_1 + 2c_2x. \quad (1.8)$$

Substitusi Persamaan (1.8) ke Persamaan (1.1) akan memberikan

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (c_1 + 2c_2x)^2} dx, \quad (1.9)$$

dengan  $a = x(0)$  dan  $b = x(\tau)$ . Persamaan (1.1) dapat diselesaikan dengan memisalkan bahwa

$$\tan \theta = c_1 + 2c_2x, \quad (1.10)$$

sehingga

$$\sec^2 \theta d\theta = 2c_2 dx. \quad (1.11)$$

Substitusi Persamaan (1.10) dan (1.11) ke dalam Persamaan (1.9) akan memberikan suatu persamaan yang agak sulit untuk dipecahkan, yaitu

$$S = \frac{1}{2c_2} \int_a^b \sec^3 \theta d\theta. \quad (1.12)$$

Penyelesaian integral secan pangkat tiga dapat diperoleh dengan sedikit manipulasi [7], yang juga memerlukan integral secan yang tidak terlalu umum diketahui [8].

Hasil dari Jawab 1(d) akan ditunda dulu karena memerlukan pemecahan yang khusus. Pada bagian berikut ini akan dibahas pemecahan khusus yang dimaksud.

### 1.3 Integral secan pangkat tiga

Pertama-tama dapat dituliskan bahwa

$$\int \sec^3 x \, dx = \int (1 + \tan^2 x) \sec x \, dx = \int \sec x \, dx + \int \sec x \tan^2 x \, dx. \quad (1.13)$$

Bahas terlebih dahulu integral

$$\int \sec x \tan^2 x \, dx = \int \tan x \, d(\sec x) = \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx. \quad (1.14)$$

Dengan bantuan Persamaan (1.14), maka Persamaan (1.13) dapat dituliskan kembali menjadi

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x \, dx &= \int \sec x \, dx + \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx \\ &\Rightarrow 2 \int \sec^3 x \, dx = \int \sec x \, dx + \sec x \tan x \\ &\Rightarrow \int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \int \sec x \, dx. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Selanjutnya adalah menyelesaikan  $\int \sec x \, dx$  terlebih dahulu. Dapat dituliskan bahwa

$$\begin{aligned} \int \sec x \, dx &= \int \sec x \left( \frac{\tan x + \sec x}{\tan x + \sec x} \right) dx = \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2}{\sec x + \tan x} dx \\ &= \int \frac{d(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} = \ln |\sec x + \tan x| + c. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Substitusi Persamaan (1.16) ke Persamaan (1.15) sehingga memberikan

$$\int \sec^3 3x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + c. \quad (1.17)$$

Persamaan (1.17) adalah solusi yang dibutuhkan untuk menyelesaikan Jawab 1(d) sebelumnya.

## 1.4 Panjang lintasan parabola

Dengan menggunakan Persamaan (1.12) dan (1.17) dapat diperoleh bahwa

$$S = \frac{1}{2c_2} \left[ \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| \right]_{x=a}^b. \quad (1.18)$$

Dari Persamaan (1.10) dapat diperoleh bahwa

$$\sec \theta = \sqrt{1 + (c_1 + 2c_2x)^2}. \quad (1.19)$$

Akhirnya, Persamaan (1.18) dapat dituliskan kembali menjadi

$$S = \frac{1}{4c_2} \left[ \sqrt{1 + (c_1 + 2c_2x)^2} (c_1 + 2c_2x) + \ln \left| \sqrt{1 + (c_1 + 2c_2x)^2} + (c_1 + 2c_2x) \right| \right]_{x=a}^b. \quad (1.20)$$

Dengan menggunakan Persamaan (1.6) dan (1.7) maka dapat dituliskan bahwa

$$S = \frac{v_{0x}^2}{2g} \left\{ \frac{\sqrt{v_{0x}^4 + [v_{0x}v_{0y} + g(x_0 - x)]^2} [v_{0x}v_{0y} + g(x_0 - x)]}{v_{0x}^4} + \ln \left| \frac{\sqrt{v_{0x}^4 + [v_{0x}v_{0y} + g(x_0 - x)]^2} + [v_{0x}v_{0y} + g(x_0 - x)]}{v_{0x}^2} \right| \right\}_{x=a}^b. \quad (1.21)$$

Selanjutnya dengan menggunakan  $a = x_0$  dan  $b = x_0 + 2v_{0x}v_{0y}/g$  dapat diperoleh bahwa

$$S = -\frac{v_{0x}^2}{2g} \left\{ \left[ \frac{\sqrt{v_{0x}^4 + (-v_{0x}v_{0y})^2} (-v_{0x}v_{0y})}{v_{0x}^4} + \ln \left| \frac{\sqrt{v_{0x}^4 + (-v_{0x}v_{0y})^2} + (-v_{0x}v_{0y})}{v_{0x}^2} \right| \right] - \left[ \frac{\sqrt{v_{0x}^4 + (v_{0x}v_{0y})^2} (v_{0x}v_{0y})}{v_{0x}^4} + \ln \left| \frac{\sqrt{v_{0x}^4 + (v_{0x}v_{0y})^2} + (v_{0x}v_{0y})}{v_{0x}^2} \right| \right] \right\} \\ = \frac{v_{0x}^2}{2g} \left\{ 2(v_{0x}v_{0y}) \left( \frac{\sqrt{v_{0x}^4 + v_{0x}^2v_{0y}^2}}{v_{0x}^4} \right) - \ln \left| \frac{\sqrt{v_{0x}^4 + v_{0x}^2v_{0y}^2} - v_{0x}v_{0y}}{\sqrt{v_{0x}^4 + v_{0x}^2v_{0y}^2} + v_{0x}v_{0y}} \right| \right\} \quad (1.22)$$

Dengan kembali merujuk kepada hasil  $S_{ABC}$  dan  $S_{ADBEC}$ , yaitu

$$S_{ABC} = \frac{2v_{0y}}{g} \left( v_{0x}^2 + \frac{1}{4}v_{0y}^2 \right)^{1/2}, \quad (1.23)$$

$$S_{ADBEC} = \frac{2v_{0y}}{g} \left( v_{0x} + \frac{1}{2}v_{0y} \right), \quad (1.24)$$

dapat dituliskan bahwa berlaku

$$S_{ABC} < S < S_{ADBEC}. \quad (1.25)$$

Dari parameter gerak yang diberikan dalam Gambar 1.2 dapat diperoleh berturut-turut nilai-nilai  $S_{ABC}$ ,  $S$ , dan  $S_{ADBEC}$  adalah kira-kira 288.4 m, 298.9 m, dan 400.0 m. Apabila diolah lebih lanjut, maka Persamaan (1.22) dapat menjadi

$$S = \frac{2v_{0y}}{g} \left( \frac{1}{4}v_{0x}^2 + \frac{1}{4}v_{0y}^2 \right)^{1/2} - \frac{v_{0x}}{2g} \ln \left| \frac{\sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} - v_{0y}}{\sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} + v_{0y}} \right|. \quad (1.26)$$

Mengapa nilai  $S > S_{ABC}$  hal ini dikarenakan suku kedua pada ruas kanan Persamaan (1.26) bernilai positif (hasil logaritma natural bernilai negatif).

## 1.5 Gelombang pada tali tak homogen

Satu lagi ilustrasi soal yang menarik adalah bagaimana waktu rambat gelombang pada tali apabila rapat massanya tidak homogen melainkan berubah secara linier.

**Soal 2.** Suatu tali memiliki rapat massa  $\mu_0$  pada  $x = 0$  dan  $\mu_L$  pada  $x = L$ . Tentukanlah waktu yang dibutuhkan gelombang untuk merambat dari  $x = 0$  sampai  $x = L$ . Tegangan tali dianggap sama dan bernilai  $\tau$ .

**Jawab 2.** Rapat massa tali sebagai fungsi dari posisi dapat diperoleh, yaitu

$$\mu(x) = \mu_0 + \left( \frac{\mu_L - \mu_0}{L} \right) x. \quad (1.27)$$

Cepat rambat gelombang pada tali tidak dapat dengan mudah dituliskan sebagai

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

karena rapat massa tali tidak konstan. Oleh karena itu dituliskan dalam bentuk

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{\tau}{\mu(x)}}.$$

Dengan menggunakan persamaan ini dan Persamaan (1.27) dapat dituliskan bahwa

$$dt = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sqrt{\mu_0 + \left(\frac{\mu_L - \mu_0}{L}\right) x} dx.$$

Dengan substitusi variabel  $u = \mu(x)$  dapat ditunjukkan bahwa [9]

$$\Delta t = \frac{2L}{3\sqrt{\tau}} \left( \frac{\mu_l + \sqrt{\mu_L \mu_0} + \mu_0}{\sqrt{\mu_L} + \sqrt{\mu_0}} \right),$$

dengan  $\Delta t = \int dt$  pada ruas kiri persamaan di atas.

## Referensi

1. URI <http://www.itb.ac.id/>
2. Sparisoma Viridi, "Catatan Kuliah Fisika Dasar II", Versi 1, Mei 2010
3. URI [http://phys.itb.ac.id/~viridi/pdf/fisika\\_dasar.pdf](http://phys.itb.ac.id/~viridi/pdf/fisika_dasar.pdf)
4. David Halliday, Robert Resnick, and Jearl Walker, "Fundamentals of Physics", John Wiley & Sons (Asia), 8th, Extended, Student, Edition, (2008)
5. Novitrian, Khairul Basar, dan Sparisoma Viridi, "Evaluasi Sekunder Tematik Mata Kuliah Fisika Dasar yang Diberikan di Tingkat TPB ITB", Prosiding Seminar Nasional Fisika 2010 (SNF 2010), 11-12 Mei 2010, Bandung, Indonesia, pp. 504-509
6. Alan Jeffrey and Hui-Hui Dai, "Handbook of Mathematical Formulas and Integrals", Elsevier, Amsterdam, 4th Edition, 2008, pp. 106-107
7. Wikipedia contributors, "Integral of secant cubed", Wikipedia, The Free Encyclopedia, 6 June 2011, 01:43 UTC, oldid:432778285 [accessed 9 August 2011]
8. "Discussion of  $\int \sec x = \ln|\sec x + \tan x| + C$ ", URI <http://math2.org/math/integrals/more/sec.htm> [2011.08.10 06.03+07]
9. Raymond A. Serway and John W. Jewett, "Physics for Scientists and Engineers", Thomson Brooks/Cole, 6th Edition, 2004, p. 511

## 2

# Gerak Lurus 1-D

Konsep-konsep yang akan dipelajari dalam catatan ini adalah posisi, perpindahan, jarak, selang waktu, kecepatan rata-rata, kecepatan sesaat, laju rata-rata, laju sesaat, percepatan, hubungan antara percepatan – kecepatan (sesaat) – posisi melalui proses integrasi dan diferensiasi, dan intepretasi grafik mengenai besaran-besaran di atas [1]. Dalam catatan ini hanya akan dibahas benda titik yang bergerak mengikuti garis lurus yang dapat berarah horisontal, vertikal, diagonal, radial, dan penyebab gerak tidak akan dibahas.

## 2.1 Posisi dan perpindahan

Posisi suatu benda titik dinyatakan dengan koordinat  $x$  yang dapat berharga negatif, nol, atau positif. Umumnya digambarkan suatu sumbu, dalam hal ini sumbu- $x$ , di mana bila benda terletak di sebelah kiri titik nol maka nilai posisinya adalah negatif, bila tepat terletak pada titik nol maka posisinya nol, dan bila terletak di sebelah kanan titik nol maka posisinya adalah positif. Aturan ini tidaklah baku (dapat pula dengan definisi sebaliknya) akan tetapi umum digunakan. Jadi posisi suatu benda titik yang diberi indeks  $i$  dituliskan sebagai

$$x_i. \tag{2.1}$$

Perpindahan antara dua buah posisi adalah selisih antara posisi kedua dengan posisi pertama. Bila posisi pertama diberi indeks  $i$  dan posisi kedua diberi indeks  $f$  maka perpindahan dari posisi pertama ke posisi kedua adalah

$$\Delta x = x_f - x_i. \tag{2.2}$$

Simbol  $\Delta$ , huruf besar delta dalam bahasa Yunani, menyatakan perubahan dari suatu kuantitas, dan berarti nilai akhir dikurangi nilai awal. Perpindahan meru-

pakan salah satu contoh besaran vektor, di mana ia memiliki besar dan juga arah.

**Soal 1.** Suatu benda titik memiliki posisi awal  $x_i$  (indeks  $i$  berarti inisial atau awal) dan posisi akhir  $x_f$  (indeks  $f$  berarti final atau akhir) seperti ditampilkan dalam Tabel 2.1 berikut ini.

Tabel 2.1: Posisi awal dan akhir beberapa buah benda.

Benda	$x_i$ (m)	$x_f$ (m)
<i>A</i>	2	4
<i>B</i>	6	3
<i>C</i>	5	5
<i>D</i>	-2	-4
<i>E</i>	-5	-1
<i>F</i>	-8	-8
<i>G</i>	2	-7
<i>H</i>	-9	-1
<i>I</i>	0	-5
<i>J</i>	0	7

Tentukanlah perpindahan masing-masing benda dengan menggunakan Persamaan (2.2)

**Jawab 1.** Indeks pada  $\Delta x$  menyatakan benda dalam hal ini:  $\Delta x_A = 2$  m,  $\Delta x_B = -3$  m,  $\Delta x_C = 0$  m,  $\Delta x_D = -2$  m,  $\Delta x_E = 4$  m,  $\Delta x_F = 0$  m,  $\Delta x_G = -9$  m,  $\Delta x_H = 8$  m,  $\Delta x_I = -5$  m, dan  $\Delta x_J = 7$  m.

## 2.2 Kecepatan rata-rata dan laju rata-rata

Kecepatan (velocity) rata-rata (avg atau average)  $v_{\text{avg}}$  suatu benda yang pada saat awal  $t_i$  berada pada posisi  $x_i$  dan pada saat akhir  $t_f$  berada pada posisi  $x_f$  adalah

$$v_{\text{avg}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}. \quad (2.3)$$

Kecepatan rata-rata merupakan suatu besaran vektor. Besaran ini menyatakan seberapa cepat suatu benda bergerak. Bila digambarkan grafik posisi setiap saat  $x$  terhadap waktu  $t$ , maka kemiringan garis antara dua buah titik menyatakan kecepatan rata-rata dalam selang waktu tersebut.

Terdapat pula besaran yang disebut sebagai laju (speed) rata-rata  $s_{\text{avg}}$  yang didefinisikan sebagai

$$s_{\text{avg}} = \frac{\text{jarak tempuh}}{\Delta t}. \quad (2.4)$$

Laju rata-rata merupakan besaran skalar. Oleh karena itu  $s_{\text{avg}}$  selalu berharga positif atau nol.

**Soal 2.** Apakah yang dimaksud dengan gerak lurus bentuk grafik  $x - t$  harus selalu berbentuk garis lurus? Mengapa?

**Jawab 2** Tidak. Karena yang dimaksud dengan gerak lurus adalah lurus dalam dimensi spasial. Dalam grafik  $x - t$  kemiringan kurva pada suatu titik menyatakan kecepatan (sesaat) pada titik tersebut. Dengan demikian walau benda bergerak dalam dimensi spasial menempuh lintasan berbentuk garis lurus, akan tetapi kecepatannya berubah-ubah, maka grafik  $x - t$  yang dihasilkannya akan berubah-ubah pula kemiringannya.

**Soal 3.** Sebuah mobil pada  $t = 0$  s berada pada posisi  $x = 2$  m, pada  $t = 2$  s berada pada posisi  $x = 4$  m, dan pada  $t = 4$  s berada pada posisi  $x = 5$  m. Tentukanlah perpindahan dan jarak yang ditempuh benda untuk selang waktu  $0 \text{ s} < t < 2 \text{ s}$ ,  $2 \text{ s} < t < 4 \text{ s}$ , dan  $0 \text{ s} < t < 4 \text{ s}$ . Tentukanlah pula kecepatan rata-rata dan laju rata-rata pada selang-selang waktu di atas.

**Jawab 3.** Perpindahan pada selang waktu yang ditanyakan adalah

$$0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} : \Delta x = 4 \text{ m} - 2 \text{ m} = 2 \text{ m},$$

$$2 \text{ s} < t < 4 \text{ s} : \Delta x = 5 \text{ m} - 4 \text{ m} = 1 \text{ m},$$

$$0 \text{ s} < t < 4 \text{ s} : \Delta x = 5 \text{ m} - 2 \text{ m} = 3 \text{ m}.$$

Dengan demikian dapat dihitung kecepatan rata-rata adalah

$$0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} : v_{\text{avg}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4 \text{ m} - 2 \text{ m}}{2 \text{ s} - 0 \text{ s}} = 1 \text{ m/s},$$

$$2 \text{ s} < t < 4 \text{ s} : v_{\text{avg}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5 \text{ m} - 4 \text{ m}}{4 \text{ s} - 2 \text{ s}} = 0.5 \text{ m/s},$$

$$0 \text{ s} < t < 4 \text{ s} : v_{\text{avg}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5 \text{ m} - 2 \text{ m}}{4 \text{ s} - 0 \text{ s}} = 0.75 \text{ m/s}.$$

Sedangkan perpindahan adalah

$$0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} : \Delta x = |4 \text{ m} - 2 \text{ m}| = 2 \text{ m},$$

$$2 \text{ s} < t < 4 \text{ s} : \Delta x = |5 \text{ m} - 4 \text{ m}| = 1 \text{ m},$$

$$0 \text{ s} < t < 4 \text{ s} : \Delta x = |5 \text{ m} - 4 \text{ m}| + |4 \text{ m} - 2 \text{ m}| = 3 \text{ m},$$

sehingga laju rata-rata adalah

$$0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} : s_{\text{avg}} = \frac{\text{jarak tempuh}}{\Delta t} = \frac{|4 \text{ m} - 2 \text{ m}|}{2 \text{ s} - 0 \text{ s}} = 1 \text{ m/s},$$

$$2 \text{ s} < t < 4 \text{ s} : s_{\text{avg}} = \frac{\text{jarak tempuh}}{\Delta t} = \frac{|5 \text{ m} - 4 \text{ m}|}{4 \text{ s} - 2 \text{ s}} = 0.5 \text{ m/s},$$

$$0 \text{ s} < t < 4 \text{ s} : s_{\text{avg}} = \frac{\text{jarak tempuh}}{\Delta t} = \frac{|5 \text{ m} - 4 \text{ m}| + |4 \text{ m} - 2 \text{ m}|}{4 \text{ s} - 0 \text{ s}} = 0.75 \text{ m/s}.$$

**Soal 4.** Seorang sedang berjalan. Pada  $t = 0 \text{ s}$  ia berada pada posisi  $x = 0 \text{ m}$ , pada  $t = 2 \text{ s}$  ia berada pada posisi  $x = 4 \text{ m}$ , dan pada  $t = 4 \text{ s}$  ia berada pada posisi  $x = 2 \text{ m}$ . Tentukanlah perpindahan dan jarak yang ditempuh benda untuk selang waktu  $0 \text{ s} < t < 2 \text{ s}$ ,  $2 \text{ s} < t < 4 \text{ s}$ , dan  $0 \text{ s} < t < 4 \text{ s}$ . Tentukanlah pula kecepatan rata-rata dan laju rata-rata pada selang-selang waktu di atas.

**Jawab 4.** Perpindahan pada selang waktu yang ditanyakan adalah

$$0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} : \Delta x = 4 \text{ m} - 0 \text{ m} = 4 \text{ m},$$

$$2 \text{ s} < t < 4 \text{ s} : \Delta x = 2 \text{ m} - 4 \text{ m} = -2 \text{ m},$$

$$0 \text{ s} < t < 4 \text{ s} : \Delta x = 2 \text{ m} - 0 \text{ m} = 2 \text{ m}.$$

Dengan demikian dapat dihitung kecepatan rata-rata adalah

$$0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} : v_{\text{avg}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4 \text{ m} - 0 \text{ m}}{2 \text{ s} - 0 \text{ s}} = 2 \text{ m/s},$$

$$2 \text{ s} < t < 4 \text{ s} : v_{\text{avg}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2 \text{ m} - 4 \text{ m}}{4 \text{ s} - 2 \text{ s}} = -1 \text{ m/s},$$

$$0 \text{ s} < t < 4 \text{ s} : v_{\text{avg}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2 \text{ m} - 0 \text{ m}}{4 \text{ s} - 0 \text{ s}} = 0.5 \text{ m/s}.$$

Sedangkan perpindahan adalah

$$0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} : \Delta x = |4 \text{ m} - 0 \text{ m}| = 4 \text{ m},$$

$$2 \text{ s} < t < 4 \text{ s} : \Delta x = |2 \text{ m} - 4 \text{ m}| = 2 \text{ m},$$

$$0 \text{ s} < t < 4 \text{ s} : \Delta x = |4 \text{ m} - 0 \text{ m}| + |2 \text{ m} - 4 \text{ m}| = 6 \text{ m},$$

sehingga laju rata-rata adalah

$$0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} : s_{\text{avg}} = \frac{\text{jarak tempuh}}{\Delta t} = \frac{|4 \text{ m} - 0 \text{ m}|}{2 \text{ s} - 0 \text{ s}} = 2 \text{ m/s},$$

$$2 \text{ s} < t < 4 \text{ s} : s_{\text{avg}} = \frac{\text{jarak tempuh}}{\Delta t} = \frac{|2 \text{ m} - 4 \text{ m}|}{4 \text{ s} - 2 \text{ s}} = 1 \text{ m/s},$$

$$0 \text{ s} < t < 4 \text{ s} : s_{\text{avg}} = \frac{\text{jarak tempuh}}{\Delta t} = \frac{|4 \text{ m} - 0 \text{ m}| + |2 \text{ m} - 4 \text{ m}|}{4 \text{ s} - 0 \text{ s}} = 1.5 \text{ m/s}.$$

## 2.3 Kecepatan sesaat dan laju sesaat

Kecepatan sesaat  $v$  memiliki definisi yang mirip dengan kecepatan rata-rata  $v_{\text{avg}}$  akan tetapi dalam hal ini diambil nilai selang waktu  $\Delta t$  menuju nol atau hanya sesaat, yaitu

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (2.5)$$

Dalam grafik  $x-t$  kecepatan (sesaat) adalah kemiringan kurva pada suatu saat  $t$ , dan bukan lagi kemiringan garis antara dua buah titik sebagaimana halnya kecepatan rata-rata. Kecepatan juga merupakan besaran vektor.

Sedangkan untuk laju sesaat tak lain adalah besar dari kecepatan, yaitu

$$s = |v|. \quad (2.6)$$

**Soal 5.** Tunjukkan bahwa  $s = |v|$  dan jelaskan mengapa tidak berlaku  $s_{\text{avg}} = v_{\text{avg}}$ .

**Jawab 5.** Untuk selang waktu yang amat kecil,  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta x$  dianggap tidak pernah berubah arah. Pada suatu selang waktu di mana kecepatan tidak berubah baik besar maupun arahnya dapat diperoleh  $s_{\text{avg}}$  melalui  $v_{\text{avg}}$  yaitu

$$s_{\text{avg}} = \frac{\text{jarak tempuh}}{\Delta x} = \frac{|x_f - x_i|}{t_f - t_i} = \left| \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \right| = \left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| = |v_{\text{avg}}|.$$

Untuk selang waktu yang amat kecil, persamaan di atas selalu berlaku sehingga

$$s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} s_{\text{avg}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |v_{\text{avg}}| = |v|.$$

## 2.4 Percepatan

Percepatan rata-rata dihitung melalui

$$a_{\text{avg}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}, \quad (2.7)$$

sedangkan percepatan sesaat tak lain adalah

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (2.8)$$

**Soal 6.** Posisi setiap saat partikel dinyatakan dengan  $x(t) = (2t + \sin \omega t + 1)$  m, di mana  $\omega = 1$  rad/s. Tentukanlah kecepatan sesaat  $v(t)$  dan percepatan sesaat  $a(t)$  serta hitung nilai  $x$ ,  $v$ , dan  $a$  pada saat  $t = 3.14$  s.

**Jawab 6.** Dengan menggunakan Persamaan (2.5) dan (2.8) dapat diperoleh bahwa

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t + \sin t + 1) = 2 + \cos t,$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2 + \cos t) = -\sin t.$$

Dengan demikian dapat diperoleh bahwa  $x(3.14) = 7.28$  m,  $v(3.14) = 1$  m/s, dan  $a(3.14) = 0$  m/s<sup>2</sup>.

## 2.5 Gerak lurus dengan percepatan tetap

Dalam suatu kasus khusus, yaitu gerak dengan percepatan tetap  $a$ , dapat dituliskan lima buah persamaan kinematika, yaitu seperti dalam Tabel 2.2

Tabel 2.2: Persamaan-persamaan kinematika dan variabel yang tidak diketahui.

Variabel yang tidak diketahui	Persamaan
$x - x_0$	$v = v_0 + at$
$v$	$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$t$	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$
$a$	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$
$v_0$	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$

Dua persamaan terakhir dalam Tabel 2.2 di atas umumnya belum diketahui, akan tetapi dapat diturunkan dari ketiga persamaan pertama yang sudah diketahui.

**Soal 7.** Turunkanlah persamaan  $x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$  dan  $x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$  dari persamaan-persamaan kinematika yang telah diketahui.

**Jawab 7.** Dapat dituliskan bahwa

$$\begin{aligned}
 x - x_0 &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\
 \Rightarrow x - x_0 &= v_0 t + \frac{1}{2} \left( \frac{v - v_0}{t} \right) t^2 = v_0 t + \frac{1}{2} v t - \frac{1}{2} v_0 t \\
 &\Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2} (v_0 + v) t
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 x - x_0 &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\
 \Rightarrow x - x_0 &= (v - at)t + \frac{1}{2} a t^2 = vt - at^2 + \frac{1}{2} a t^2 \\
 &\Rightarrow x - x_0 = vt - \frac{1}{2} a t^2.
 \end{aligned}$$

## 2.6 Diferensiasi dan integrasi terhadap waktu

Dalam Persamaan (2.5) dan (2.8) telah ditunjukkan hubungan melalui proses diferensiasi antara  $v$  dengan  $x$  dan  $a$  dengan  $v$ . Karena pasangan dari proses diferensiasi adalah proses integrasi maka dapat pula diperoleh hubungan antara  $v$  dengan  $a$  dan  $x$  dengan  $v$  melalui proses integrasi. Di sini masih dibahas gerak lurus dengan percepatan tetap  $a$ .

Umumnya digunakan notasi tanpa indeks untuk  $x$  dan  $v$  untuk besaran pada waktu  $t$  dan dengan indeks nol untuk  $x_0$  dan  $v_0$  untuk besaran pada waktu  $t_0$ . Waktu  $t_0$  secara umum tidak harus sama dengan nol, akan tetapi merupakan waktu awal, yang umumnya besaran-besaran pada waktu tersebut telah diketahui sehingga dapat digunakan sebagai syarat awal (atau syarat batas) untuk mencari besaran-besaran lain yang belum diketahui pada saat  $t$ .

Bila pada saat  $t_0 = 0$  kecepatan benda adalah  $v_0$  dan diketahui pula bahwa percepatan tetap benda  $a$ , maka dapat dicari kecepatan setiap saatnya  $v$  melalui

$$\begin{aligned}
 v - v_0 &= \int_{t_0}^t a dt = a(t - t_0) = a(t - 0) \\
 &\Rightarrow v = v_0 + at.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

**Soal 8.** Sebuah benda bergerak lurus dalam satu dimensi dengan percepatan tetap  $2 \text{ m/s}^2$ . Bila saat  $t = 1 \text{ s}$  kecepatannya adalah  $5 \text{ m/s}$ , tentukanlah kecepatan setiap saatnya dan hitunglah kecepatannya saat  $t = 10 \text{ s}$ .

**Jawab 8.** Dengan menggunakan Persamaan (2.9) dapat diperoleh

$$v = v_0 + a(t - t_0) = 5 + 2(t - 1) = (2t + 3) \text{ m/s},$$

$$t = 10 \text{ s} : v = 2(10) + 3 = 23 \text{ m/s}.$$

Dengan cara yang sama dapat dituliskan pula hubungan antara  $x$  dan  $v$  dengan mengetahui pada saat  $t_0$  nilai-nilai dari  $v_0$  dan  $x_0$ . Bila diketahui kecepatan setiap saat  $v = v_0 + a(t - t_0)$  dan pada saat  $t_0 = 0$  kecepatan adalah  $v_0$  dan posisi adalah  $x_0$  maka posisi setiap saat menjadi

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \int_{t_0}^t v dt = \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)] dt = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \\ &= v_0(t - 0) + \frac{1}{2}a(t - 0)^2 = v_0t + \frac{1}{2}at^2, \\ &\Rightarrow x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dalam Persamaan (2.9) dan (2.10) sengaja dipilih  $t_0 = 0$  agar hasil yang diperoleh menjadi bentuk yang sudah tidak asing lagi.

**Soal 9.** Sebuah benda bergerak lurus dalam satu dimensi dengan percepatan tetap  $-2 \text{ m/s}^2$ . Bila saat  $t = 2 \text{ s}$  kecepatannya adalah  $4 \text{ m/s}$ , dan posisinya berada di  $x = 1 \text{ m}$ , tentukanlah posisi setiap saatnya dan hitunglah posisinya saat  $t = 10 \text{ s}$ .

**Jawab 9.** Dengan menggunakan Persamaan (2.10) dapat diperoleh

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 = 1 + 4(t - 2) + \frac{1}{2}(-2)(t - 2)^2 \\ &= (-t^2 + 8t - 11) \text{ m}, \\ t = 10 \text{ s} : v &= -(10)^2 + 8(10) - 11 = -31 \text{ m}. \end{aligned}$$

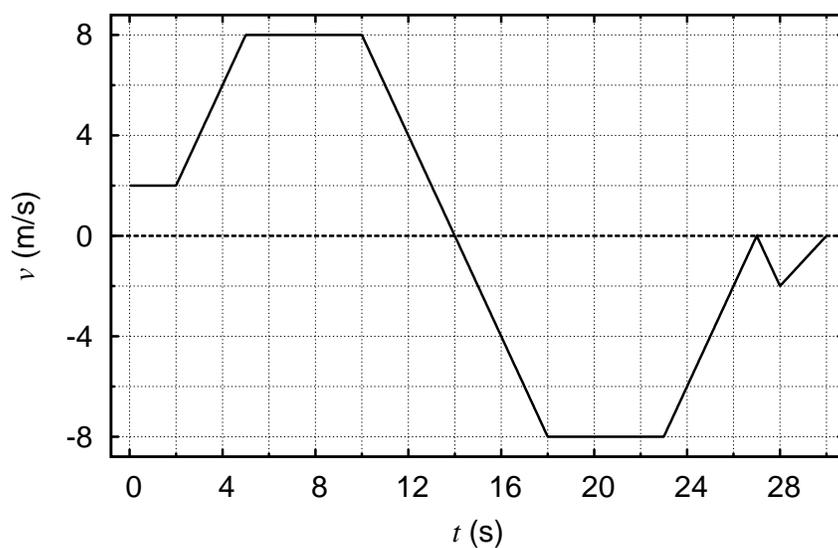
**Soal 10.** Dalam grafik  $v - t$  dan  $a - t$  apa yang dimaksud dengan perpindahan, jarak, kecepatan, dan laju.

**Soal 10.** Perpindahan adalah luas di bawah kurva  $v - t$  (dapat berharga positif atau negatif) sedangkan jarak adalah luas mutlak di bawah kurva  $v - t$ . Hal yang sama berturut-turut berlaku pula untuk kecepatan dan laju untuk kurva  $a - t$ .

**Soal 11.** Berikan contoh suatu rangkaian GLBB yang memberikan perpindahan nol dengan menggambarkan grafik  $v - t$ -nya.

**Jawab 11.** Grafik yang dimaksud diberikan dalam Gambar 2.1.

**Soal 12.** Tuliskan persamaan kecepatan  $v(t)$  dan percepatan  $a(t)$  dari Gambar 2.1. Bila ingin dicari fungsi posisinya  $x(t)$  apa parameter gerak yang diperlukan? Apakah harus saat  $t = 0$  informasi parameter itu didapatkan?



Gambar 2.1: ( Suatu contoh grafik  $v - t$  suatu rangkaian GLBB yang memberikan perpindahan nol.)

**Jawab 12.** Persamaan kecepatan dalam Gambar 2.1 adalah

$$v(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 2 \\ 2x - 2, & 2 < t < 5 \\ 8, & 5 < t < 10 \\ -2x + 28, & 10 < t < 18 \\ -8, & 18 < t < 23 \\ 2x - 54, & 23 < t < 27 \\ -2x + 54, & 27 < t < 28 \\ x - 30, & 28 < t < 30 \end{cases}, \quad (2.11)$$

dengan  $v(t)$  dalam m/s dan  $t$  dalam s. Sedangkan untuk percepatannya adalah

$$a(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 2 \\ 2, & 2 < t < 5 \\ 0, & 5 < t < 10 \\ -2, & 10 < t < 18 \\ 0, & 18 < t < 23 \\ 2, & 23 < t < 27 \\ -2, & 27 < t < 28 \\ 1, & 28 < t < 30 \end{cases}, \quad (2.12)$$

dengan  $v(t)$  dalam  $\text{m/s}^2$ . Untuk mencari posisi benda setiap saat  $x(t)$  diperlukan informasi tambahan yaitu suatu nilai  $x_0$  saat  $t = t_0$ . Informasi tersebut tidak

harus saat  $t = 0$  atau dalam hal ini  $t_0 \neq 0$  (walaupun dapat pula saat nol).

Pengertian yang diperoleh dalam soal terakhir ini dapat pula diterapkan dalam kasus untuk menghitung potensial listrik dari medan listrik pada kasus susunan pelat luas bermuatan seragam, di mana kedua kasus memiliki langkah-langkah pemecahan secara kalkulus yang sama 2.

## Referensi

1. David Halliday, Robert Resnick, and Jearl Walker, "Fundamentals of Physics", John Wiley & Sons (Asia), 8th, Extended, Student, Edition, pp. 12-37 (2008)
2. Sparisoma Viridi, Siti Nurul Khotimah, dan Euis Sustini, "Analogi Penyelesaian Secara Kalkulus Hubungan Kecepatan-Percepatan dalam Kasus Rangkaian Gerak Lurus Berubah Beraturan dan Hubungan Potensial Listrik-Medan Listrik dalam Kasus Susunan Pelat-pelat Luas Bermuatan Seragam", Jurnal Pengajaran Fisika Sekolah Menengah 1 (4), 86-90 (2009)

# 3

## Rangkaian Gerak Lurus 1-D

Beberapa gerak dengan percepatan yang berbeda-beda dapat dirangkaikan menjadi suatu gerak yang disebut sebagai, secara umum, Rangkaian Gerak Lurus Berubah Beraturan (RGLBB) [1]. Dalam hal ini hanya akan dibahas sampai bentuk persamaannya sebagai fungsi dari waktu, tidak memperhatikan bagaimana bentuk percepatan tersebut dapat terwujud. Hubungan antara percepatan-kecepatan dan kecepatan-posisi dapat dipahami lewat proses integrasi dan diferensiasi dengan waktu [2]

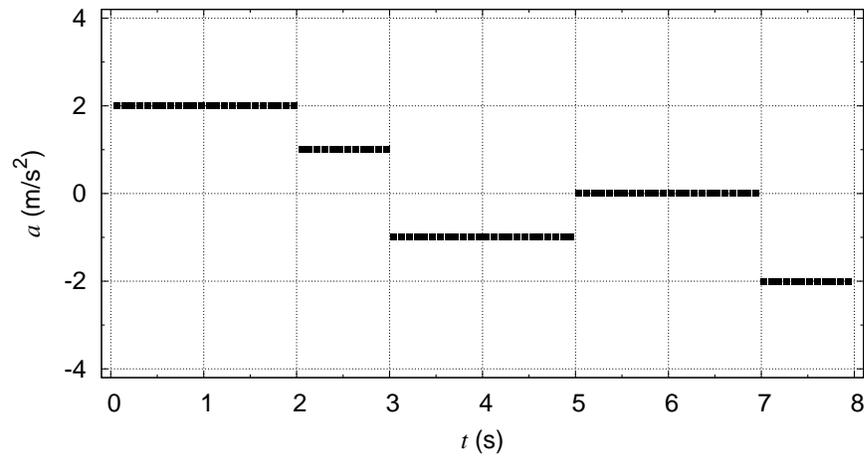
### 3.1 Rangkaian Gerak Lurus Berubah Beraturan (RGLBB)

Suatu RGLBB memiliki bentuk umum dalam percepatannya  $a(t)$

$$a(t) = \begin{cases} a_1, & 0 < t < t_1 \\ a_2, & t_1 < t < t_2 \\ a_3, & t_2 < t < t_3 \\ \dots, & \dots \\ a_i, & t_{i-1} < t < t_i \\ \dots, & \dots \\ a_N, & t_{N-1} < t < t_N \end{cases}, \quad (3.1)$$

di mana  $i = 1, 2, 3, \dots, N-1, N$ . Nilai-nilai percepatan  $a(t)$  berubah-ubah dengan waktu, akan tetapi konstan dalam selang  $t_{i-1} < t < t_i$  dengan nilai  $a_i$ .

Percepatan  $a(t)$  dalam Gambar 3.1 dapat dirumuskan dalam bentuk



Gambar 3.1: Ilustrasi sebuah RGLBB dengan percepatannya yang berubah-ubah.

$$a(t) = \begin{cases} 2 \text{ m/s}^2, & 0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ 1 \text{ m/s}^2, & 2 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ -1 \text{ m/s}^2, & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \\ 0 \text{ m/s}^2, & 5 \text{ s} < t < 7 \text{ s} \\ -2 \text{ m/s}^2, & 7 \text{ s} < t < 8 \text{ s} \end{cases}, \quad (3.2)$$

**Soal 1.** Dengan menggunakan aplikasi `gnuplot` buatlah grafik seperti dalam Gambar 3.1 dengan menggunakan sebuah berkas script. Laporkan berkas script tersebut.

**Jawab 1.** Salah satu variasi isi berkas script untuk membuat Gambar 3.1 adalah sebagai berikut ini.

```
set output "rglbb.eps"
set term post eps enhanced 24 lw 1
set size 1.2, 0.9

set grid
set xrange[-0.1:8.1]
set xtics 1
set mxtics 2
set xlabel "{/Italics t} (s)"
set yrange[-4.2:4.2]
set ytics 2
set mytics 2
set ylabel "{/Italics a} (m/s^2)"

a(x) = \
(x > 0) ? \
```

### 3.1. RANGKAIAN GERAK LURUS BERUBAH BERATURAN (RGLBB)23

```
(x > 2 ) ? \
(x > 3 ) ? \
(x > 5 ) ? \
(x > 7 ) ? \
(x > 8 ) ? \
1/0 \
: -2 \
: 0 \
: - 1 \
: 1 \
: 2 \
: 1/0
```

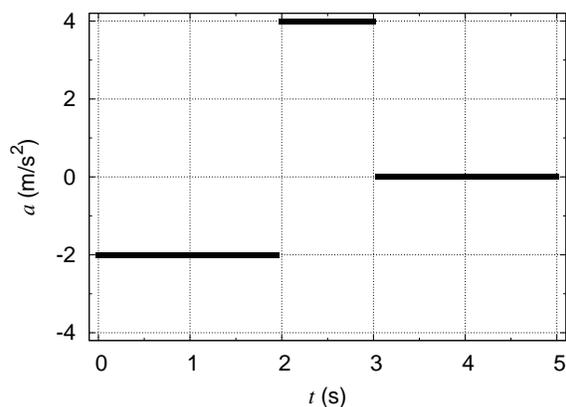
```
plot a(x) w p pt 5 t ""
```

Dengan menerapkan syarat batas, yaitu diketahuinya nilai  $v(t_a)$  dan  $x(t_b)$ , di mana secara umum  $t_a \neq t_b$  dapat dicari bentuk dari  $v(t)$  dan  $a(t)$ . Bentuk dalam Persamaan (3.2) membutuhkan waktu yang cukup lama untuk menyelesaikannya. Pada bagian selanjutnya akan dibahas contoh dengan hanya tiga nilai percepatan yang berbeda.

**Soal 2.** Gambarkanlah  $a(t)$  sebuah benda memiliki bentuk

$$a(t) = \begin{cases} -2 \text{ m/s}^2, & 0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ 4 \text{ m/s}^2, & 2 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ 0 \text{ m/s}^2, & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases} . \quad (3.3)$$

**Jawab 2.**



Gambar 3.2: Kurva  $a(t)$  dari Persamaan (3.3).

### 3.2 Menentukan kecepatan dari percepatan

Kecepatan benda dapat diperoleh dengan menggunakan

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^t a dt, \quad (3.4)$$

di mana berlaku pada semua selang. Akan tetapi saat menerapkan syarat batas, integrasi hanya berlaku pada selang di mana syarat batas didefinisikan karena pada selang lain, percepatan memiliki nilai yang lain. Hubungan antar selang adalah nilai kecepatan pada batas-batas selang harus sama. Ini karena percepatan merupakan turunan dari kecepatan terhadap waktu. Suatu fungsi dapat memiliki turunan terhadap waktu apabila ia kontinu terhadap waktu. Oleh karena itu kecepatan harus kontinu dalam waktu.

**Soal 3.** Apabila diketahui bahwa pada saat  $t = 4$  s kecepatan benda  $v = 2$  m/s, tentukanlah  $v(t)$  dari Persamaan (3.3). Gunakan Persamaan (3.4). Gambarkan pula bentuk fungsi  $v(t)$ .

**Jawab 3.** Diketahui bahwa saat  $t = 4$  s kecepatan benda  $v = 2$  m/s. Dengan demikian Persamaan (3.4) digunakan dalam selang  $3 \text{ s} < t < 5 \text{ s}$ , di mana  $a = 0 \text{ m/s}^2$ .

$$\begin{aligned} v(t) - v(4) &= \int_4^t a dt \\ \Rightarrow v(t) - 2 &= \int_4^t 0 dt \\ \Rightarrow v(t) - 2 &= [c]_{t=4}^t \\ \Rightarrow v(t) - 2 &= (c - c) \\ \Rightarrow v(t) &= 2 + 0 = 2 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Apakah sebenarnya perlu dilakukan integrasi untuk selang ini? Sebenarnya tidak apabila telah disadari bahwa bila dalam suatu selang nilai percepatannya adalah nol, atau disebut sebagai Gerak Lurus Beraturan (GLB), maka dalam tersebut nilai kecepatannya akan tetap.

Selanjutnya adalah menentukan kecepatan dalam selang  $2 \text{ s} < t < 3 \text{ s}$  yang memiliki nilai  $4 \text{ m/s}^2$ . Di sini syarat batas adalah bahwa pada  $t = 3$  s kecepatannya adalah  $v = 2$  m/s.

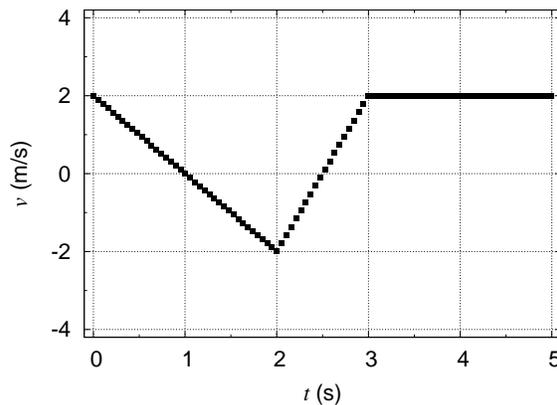
$$\begin{aligned}
 v(3) - v(t) &= \int_t^3 a dt \\
 \Rightarrow 2 - v(t) &= \int_t^3 4 dt \\
 \Rightarrow 2 - v(t) &= [4t]_{t=t}^3 \\
 \Rightarrow 2 - v(t) &= (4 \cdot 3 - 4 \cdot t) = 12 - 4t \\
 \Rightarrow v(t) &= (4t - 10) \text{ m/s.}
 \end{aligned}$$

Bagian terakhir adalah mencari bentuk fungsi  $v(t)$  dalam selang waktu  $0 \text{ s} < t < 2 \text{ s}$  yang dalam hal ini  $a = -2 \text{ m/s}^2$ . Dengan tetap menggunakan langkah yang sama dan dengan syarat batas  $v(2)$  diperoleh dari  $v(2) = (4 \cdot 2 - 10) = -2 \text{ m/s}$ .

$$\begin{aligned}
 v(2) - v(t) &= \int_t^2 a dt \\
 \Rightarrow -2 - v(t) &= \int_t^2 -2 dt \\
 \Rightarrow -2 - v(t) &= [-2t]_{t=t}^2 \\
 \Rightarrow -2 - v(t) &= (-2 \cdot 2 + 2 \cdot t) = -4 + 2t \\
 \Rightarrow v(t) &= (-2t + 2) \text{ m/s.}
 \end{aligned}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$v(t) = \begin{cases} (-2t + 2) \text{ m/s,} & 0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ (4t - 10) \text{ m/s,} & 2 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ 2 \text{ m/s,} & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases} . \quad (3.5)$$



Gambar 3.3: Kurva  $v(t)$  dari Persamaan (3.5).

### 3.3 Menentukan posisi dari kecepatan

Posisi benda dapat diperoleh dengan menggunakan

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t v dt, \quad (3.6)$$

di mana berlaku pada semua selang. Akan tetapi saat menerapkan syarat batas, integrasi hanya berlaku pada selang di mana syarat batas didefinisikan karena pada selang lain, kecepatan memiliki nilai atau fungsi yang berbeda. Hubungan antar selang adalah nilai posisi pada batas-batas selang harus sama. Ini karena kecepatan merupakan turunan dari posisi terhadap waktu. Suatu fungsi dapat memiliki turunan terhadap waktu apabila ia kontinu terhadap waktu. Oleh karena itu posisi harus kontinu dalam waktu.

**Soal 4.** Apabila diketahui bahwa pada saat  $t = 0$  s posisi benda  $x = 4$  m, tentukanlah  $x(t)$  dari Persamaan (3.5). Gunakan Persamaan (3.6). Gambarkan pula bentuk fungsi  $x(t)$ .

**Jawab 4.** Diketahui bahwa saat  $t = 0$  s posisi benda  $x = -2$  m. Dengan demikian Persamaan (3.6) digunakan dalam selang  $0 \text{ s} < t < 2 \text{ s}$ , di mana  $v = (-2t + 2)$  m/s.

$$\begin{aligned} x(t) - x(0) &= \int_0^t v dt \\ \Rightarrow x(t) - (-2) &= \int_0^t (-2t + 2) dt \\ \Rightarrow x(t) + 2 &= [-t^2 + 2t]_{t=0}^t \\ \Rightarrow x(t) + 2 &= -t^2 + 2t + 0^2 - 2 \cdot 0 \\ \Rightarrow x(t) &= -t^2 + 2t - 2 \text{ m.} \end{aligned}$$

Dari hasil di atas dapat diperoleh bahwa  $x(2) = -2$  m. Nilai ini akan digunakan sebagai syarat batas pada integrasi dalam selang waktu  $2 \text{ s} < t < 3 \text{ s}$ .

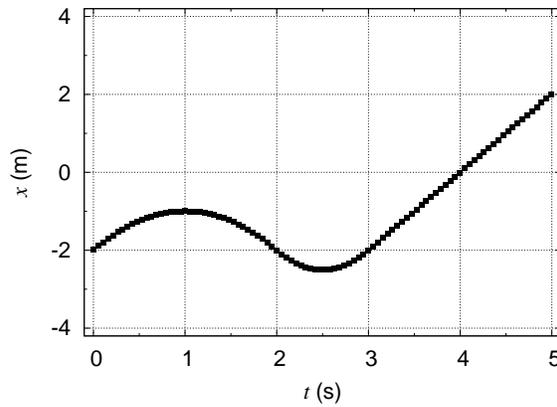
$$\begin{aligned} x(t) - x(2) &= \int_2^t v dt \\ \Rightarrow x(t) - (-2) &= \int_2^t (4t - 10) dt \\ \Rightarrow x(t) + 2 &= [2t^2 - 10t]_{t=2}^t \\ \Rightarrow x(t) + 2 &= 2t^2 - 10t - 2 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 \\ \Rightarrow x(t) &= (2t^2 - 10t + 10) \text{ m.} \end{aligned}$$

Saat  $t = 3$  s dapat diperoleh bahwa  $x(3) = -2$ . Hasil ini akan digunakan sebagai syarat batas pada integrasi dalam selang waktu  $3 \text{ s} < t < 5 \text{ s}$ .

$$\begin{aligned} x(t) - x(3) &= \int_3^t v dt \\ \Rightarrow x(t) - (-2) &= \int_3^t 2 dt \\ \Rightarrow x(t) + 2 &= [2t]_{t=3}^t \\ \Rightarrow x(t) + 2 &= 2t - 2 \cdot 3 \\ \Rightarrow x(t) &= (2t - 8) \text{ m.} \end{aligned}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$x(t) = \begin{cases} (-t^2 + 2t - 2) \text{ m,} & 0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ (2t^2 - 10t + 10) \text{ m,} & 2 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ (2t - 8) \text{ m,} & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases} . \quad (3.7)$$



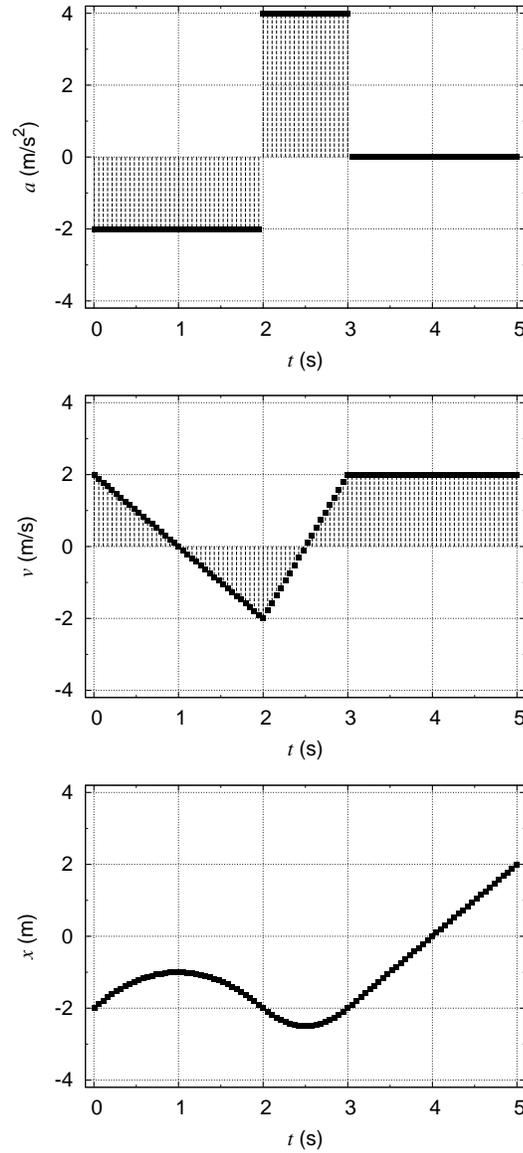
Gambar 3.4: Kurva  $x(t)$  dari Persamaan (3.7).

**Soal 5.** Dengan menggunakan persamaan-persamaan

$$\begin{aligned} a(t) &= \begin{cases} -2 \text{ m/s}^2, & 0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ 4 \text{ m/s}^2, & 2 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ 0 \text{ m/s}^2, & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases} , \\ v(t) &= \begin{cases} (-2t + 2) \text{ m/s,} & 0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ (4t - 10) \text{ m/s,} & 2 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ 2 \text{ m/s,} & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases} , \\ x(t) &= \begin{cases} (-t^2 + 2t - 2) \text{ m,} & 0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ (2t^2 - 10t + 10) \text{ m,} & 2 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ (2t - 8) \text{ m,} & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases} . \end{aligned}$$

Gambarkanlah ketiga gambarnya dan arsirlah daerah-daerah yang merupakan luas integrasi dan kaitkan dengan grafik hasil integrasinya.

**Jawab 5.** Ketiga grafik fungsi  $a(t)$ ,  $v(t)$ , dan  $x(t)$  yang dimaksud adalah seperti dalam Gambar 3.5.



Gambar 3.5: Kurva  $a(t)$ ,  $v(t)$ , dan  $x(t)$ .

Luas di bawah kurva  $a(t)$  dari  $t = 0$  sampai suatu  $t$  tertentu ditambahkan dengan nilai  $v(0)$  adalah nilai  $v(t)$ . Demikian pula dengan luas di bawah kurva  $v(t)$  dari  $t = 0$  sampai suatu  $t$  tertentu ditambahkan dengan nilai  $x(0)$  adalah nilai  $x(t)$ .

### 3.4 Perpindahan dan jarak

**Soal 6.** Bila perpindahan dari  $t = 0$  sampai  $t$  dihitung dengan menggunakan

$$\Delta x_{0-t} = x(t) - x(0)$$

Buatlah grafik  $\Delta r_{0-t}$  dari

$$x(t) = \begin{cases} (-t^2 + 2t - 2) \text{ m}, & 0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ (2t^2 - 10t + 10) \text{ m}, & 2 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ (2t - 8) \text{ m}, & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases} .$$

Dan bandingkan dengan grafik  $x(t)$ . Jelaskan apa perbedaannya.

**Jawab 6.** Nilai  $x(0) = -2$  m dengan demikian dapat diperoleh bahwa  $\Delta x_{0-t} = x(t) - x(0)$  adalah

$$\Delta x_{0-t} = \begin{cases} (-t^2 + 2t) \text{ m}, & 0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ (2t^2 - 10t + 12) \text{ m}, & 2 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ (2t - 6) \text{ m}, & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases} .$$

Dengan demikian grafiknya adalah sebagai berikut.

Perbedaan grafik keduanya adalah pada titik awalnya. Karena perpindahan  $\Delta x_{0-t}$  yang dicari selalu dihitung dari titik  $x(0)$  maka sudah pasti ia dimulai dari  $x = 0$  sedangkan  $x(t)$  tidak harus dimulai dari  $x = 0$  karena  $x(0)$  tidak selalu sama dengan nol.

**Soal 7.** Bila kecepatan rata-rata dari  $t = 0$  sampai  $t$  dihitung dengan menggunakan

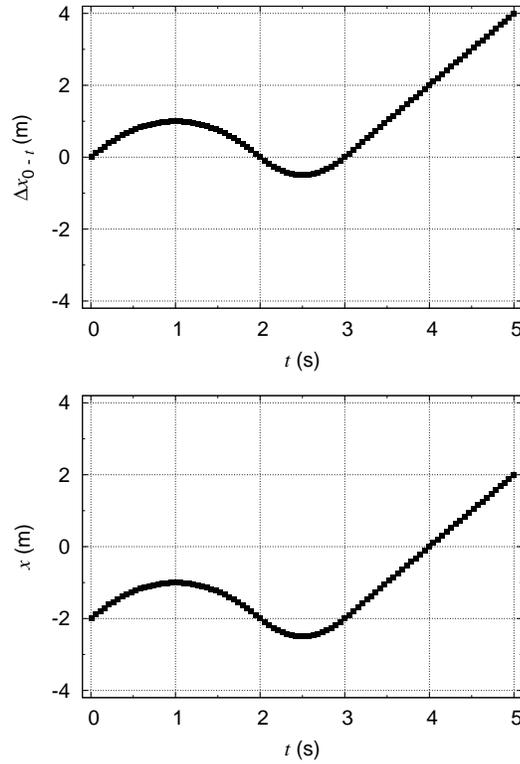
$$v_{\text{avg},0-t} = \frac{x(t) - x(0)}{t - 0}$$

Buatlah grafik  $v_{\text{avg},0-t}$  dari

$$x(t) = \begin{cases} (-t^2 + 2t - 2) \text{ m}, & 0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ (2t^2 - 10t + 10) \text{ m}, & 2 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ (2t - 8) \text{ m}, & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases} .$$

Bandingkan hasilnya dengan  $v(t)$ .

**Jawab 7.** Dengan menggunakan jawaban dari soal sebelumnya dan bahwa pembagi  $t - 0 = t$  maka akan diperoleh bahwa



Gambar 3.6: Kurva  $\Delta x_{0-t}$  (atas) dan  $x(t)$  (bawah).

$$v_{\text{avg},0-t} = \begin{cases} (-t+2) \text{ m/s}, & 0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ (2t-10+12/t) \text{ m/s}, & 2 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ (2-6/t) \text{ m/s}, & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases} .$$

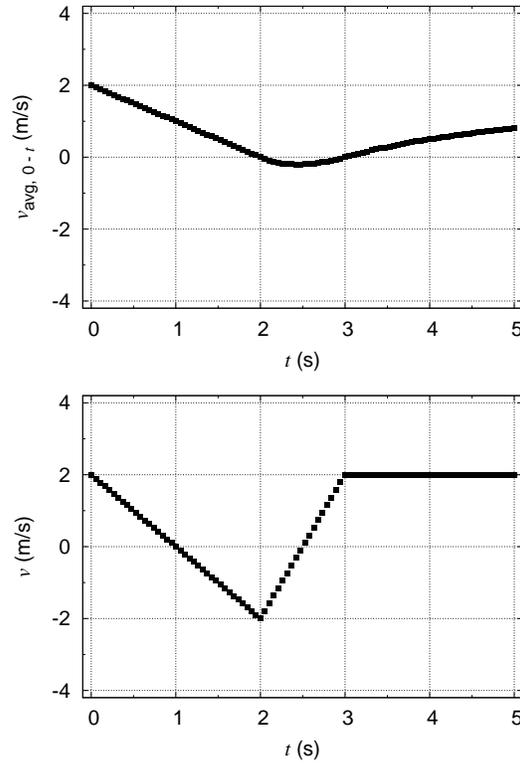
Dengan demikian dapat diperoleh Gambar 3.5. Hasil dalam Gambar 3.5 (atas) dan (bawah) akan berbeda karena keduanya dihitung dengan cara yang berbeda.

**Soal 8.** Tentukanlah jarak dari

$$v(t) = \begin{cases} (-2t+2) \text{ m/s}, & 0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ (4t-10) \text{ m/s}, & 2 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ 2 \text{ m/s}, & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases}$$

Gambarkan pula posisi  $x(t)$  dan perpindahan  $s(t)$ .

**Jawab 8.** Jarak dapat diperoleh dengan menghitung integral dari  $v(t)dt$  akan tetapi dengan membuat semua nilai di bawah kurva menjadi positif. Dengan demikian akan diperoleh

Gambar 3.7: Kurva  $\Delta v_{\text{avg},0-t}$  (atas) dan  $v(t)$  (bawah).

$$|v(t)| = \begin{cases} |-2t + 2| \text{ m/s}, & 0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ |4t - 10| \text{ m/s}, & 2 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ 2 \text{ m/s}, & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases}$$

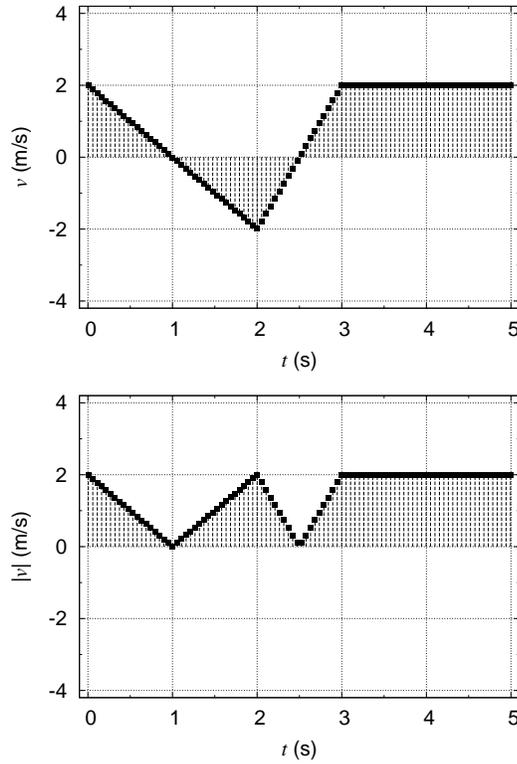
Perbedaan luas di bawah kurva dari  $v(t)$  dan  $|v(t)|$  adalah

Integral dari Gambar 3.6 (atas) ditambah dengan syarat batas akan memberikan  $x(t)$  sedangkan integral dari Gambar 3.6 (bawah) akan memberikan jarak. Ingatlah bahwa jarak selalu bernilai positif.

Dengan melihat Gambar 3.6, persamaan sebelumnya dapat diubah sehingga dapat lebih mudah diintegrasikan, yaitu menjadi

$$|v(t)| = \begin{cases} -2t + 2 \text{ m/s}, & 0 \text{ s} < t < 1 \text{ s} \\ 2t - 2 \text{ m/s}, & 1 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ -4t + 10 \text{ m/s}, & 2 \text{ s} < t < 2.5 \text{ s} \\ 4t - 10 \text{ m/s}, & 2.5 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ 2 \text{ m/s}, & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases}$$

Selanjutnya adalah mengintegrasikan persamaan di atas dengan menggunakan

Gambar 3.8: Kurva  $v(t)$  (atas) dan laju (bawah).

$x(0) = 0$  m untuk menghitung jarak  $s$ .

$$0 \text{ s} < t < 1 \text{ s} :$$

$$s(t) = s(0) + \int_0^t (-2t + 2) dt = 0 + [-t^2 + 2t]_{t=0}^t = (-t^2 + 2t) \text{ m}$$

$$s(1) = -(1)^2 + 2(1) = -1 + 2 = 1 \text{ m}$$

$$1 \text{ s} < t < 2 \text{ s} :$$

$$s(t) = s(1) + \int_1^t (2t - 2) dt = 1 + [t^2 - 2t]_{t=1}^t = 1 + t^2 - 2t - (1)^2 + 2(1)$$

$$= (t^2 - 2t + 2) \text{ m}$$

$$s(2) = (2)^2 - 2(2) + 2 = 4 - 4 + 2 = 2 \text{ m}$$

(3.8)

$$2 \text{ s} < t < 2.5 \text{ s} :$$

$$\begin{aligned} s(t) &= s(2) + \int_2^t (-4t + 10) dt = 2 + [-2t^2 + 10t]_{t=2}^t \\ &= 2 - 2t^2 + 10t + 2(2)^2 - 10(2) = (-2t^2 + 10t - 10) \text{ m} \\ s(2.5) &= -2(2.5)^2 + 10(2.5) - 10 = -12.5 + 25 - 10 = 2.5 \text{ m} \end{aligned}$$

$$2.5 \text{ s} < t < 3 \text{ s} :$$

$$\begin{aligned} s(t) &= s(2.5) + \int_{2.5}^t (4t - 10) dt = 2.5 + [2t^2 - 10t]_{t=2.5}^t \\ &= 2.5 + 2t^2 - 10t - 2(2.5)^2 + 10(2.5) = (2t^2 - 10t + 15) \text{ m} \\ s(3) &= 2(3)^2 - 10(3) + 15 = 18 - 30 + 15 = 3 \text{ m} \end{aligned}$$

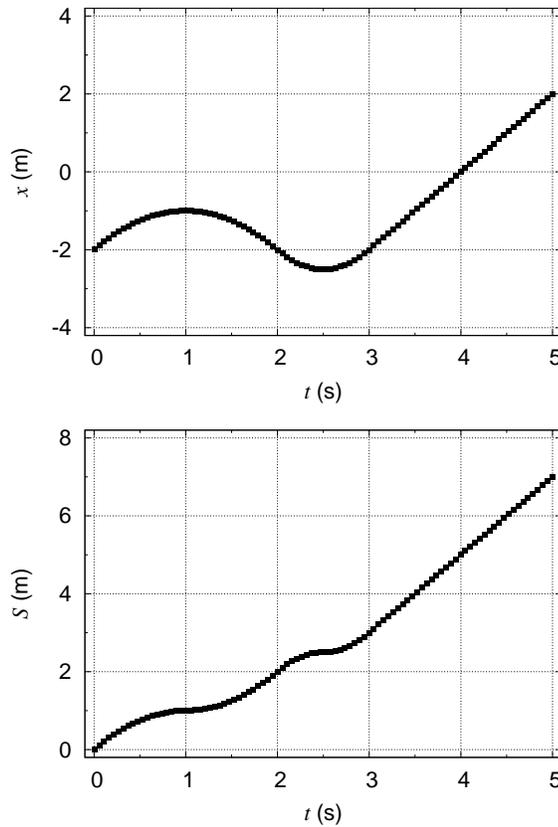
$$2.5 \text{ s} < t < 3 \text{ s} :$$

$$\begin{aligned} s(t) &= s(3) + \int_3^t 2 dt = [2t]_{t=3}^t = 3 + 2t - 2(3) = (2t - 3) \text{ m} \\ s(5) &= 2(5) - 3 = 10 - 3 = 7 \text{ m} \end{aligned}$$

Dengan demikian perpindahan total dari  $t = 0$  s sampai  $t = 5$  s adalah 7 m. Perpindahannya secara lengkap dapat dituliskan menjadi

$$s(t) = \begin{cases} (-t^2 + 2t) \text{ m}, & 0 \text{ s} < t < 1 \text{ s} \\ (t^2 - 2t + 2) \text{ m}, & 1 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ (-2t^2 + 10t - 10) \text{ m}, & 2 \text{ s} < t < 2.5 \text{ s} \\ (2t^2 - 10t + 15) \text{ m}, & 2.5 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ (2t - 3) \text{ m}, & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases} .$$

Perhatikan bahwa  $x(t)$  dapat berharga negatif sedangkan harga  $s(t)$  selalu positif. Dari Gambar 3.9 dapat terlihat bahwa saat gradien  $x(t)$  berharga negatif, kelengkungannya seakan-akan dicerminkan terhadap sumbu mendatar di nilai ordinat tersebut dan lalu diteruskan pada nilai  $x(t)$  sebelumnya – dan menjadi grafik  $s(t)$ .



Gambar 3.9: Kurva posisi  $x(t)$  (atas) dan jarak  $s(t)$  (bawah).

### 3.5 Laju dan kecepatan

Laju dihitung dari jarak dan kecepatan dihitung dari perpindahan.

**Soal 9.** Hitunglah laju dari perpindahan  $s(t)$  berikut ini

$$s(t) = \begin{cases} (-t^2 + 2t) \text{ m}, & 0 \text{ s} < t < 1 \text{ s} \\ (t^2 - 2t + 2) \text{ m}, & 1 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ (-2t^2 + 10t - 10) \text{ m}, & 2 \text{ s} < t < 2.5 \text{ s} \\ (2t^2 - 10t + 15) \text{ m}, & 2.5 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ (2t - 3) \text{ m}, & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases}$$

dan bandingkan hasilnya dengan kecepatan dari  $x(t)$  ini

$$x(t) = \begin{cases} (-t^2 + 2t - 2) \text{ m}, & 0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ (2t^2 - 10t + 10) \text{ m}, & 2 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ (2t - 8) \text{ m}, & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases} .$$

Jelaskan mengapa, walau  $u(t)$  tidak dapat berharga negatif, akan tetapi gradiennya dapat lebih kecil dari nol, sedangkan gradien dari  $s(t)$  selalu lebih besar atau sama dengan nol.

**Jawab 9.** Dengan laju adalah  $u(t) = s(t)/(t - 0)$  dapat diperoleh bahwa

$$u(t) = \begin{cases} (-t + 2) \text{ m}, & 0 \text{ s} < t < 1 \text{ s} \\ (t - 2 + 2/t) \text{ m}, & 1 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ (-2t + 10 - 10/t) \text{ m}, & 2 \text{ s} < t < 2.5 \text{ s} \\ (2t - 10 + 15/t) \text{ m}, & 2.5 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ (2 - 3/t) \text{ m}, & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases}$$

dan untuk kecepatan

$$v(t) = \begin{cases} (-2t + 2) \text{ m}, & 0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ (4t - 10) \text{ m}, & 2 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ 2 \text{ m}, & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases} .$$

Ilustrasi mengenai  $u(t)$  dan  $v(t)$  adalah sebagai berikut.

Gradien  $u(t)$  dapat bernilai negatif saat penambahan  $s(t)$  kalah dengan penambahan  $t$  karena  $u(t) = s(t)/t$  (sebenarnya lebih tepat  $u(t) = s(t)/(t - 0)$  dengan  $s(t)$  diukur dari posisi  $x(0)$ ).

### 3.6 Laju dari percepatan

**Soal 10.** Apakah laju  $n(t)$  dapat dihitung dari percepatan berikut ini

$$a(t) = \begin{cases} -2 \text{ m/s}^2, & 0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ 4 \text{ m/s}^2, & 2 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ 0 \text{ m/s}^2, & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases} .$$

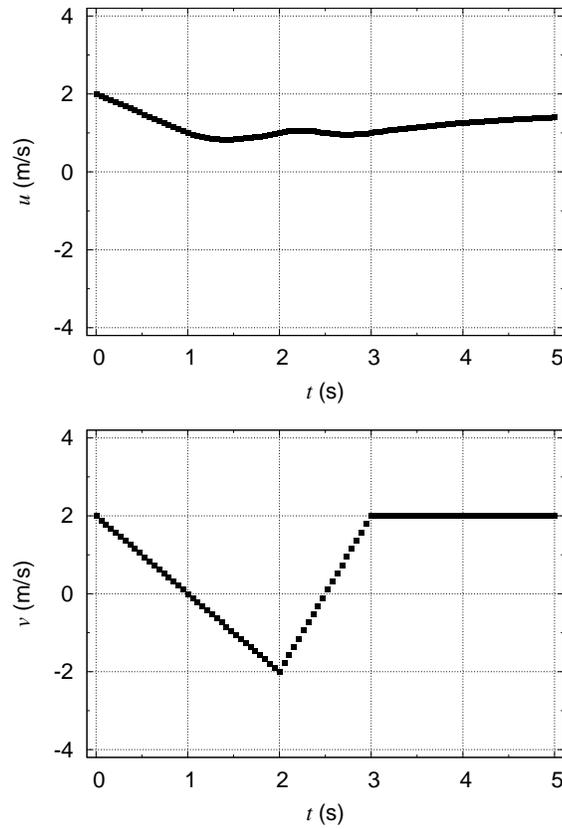
Gambarkan pula grafiknya.

**Jawab 10.** Laju, bila dapat, dihitung bukan dari integral persamaan di atas melainkan dari integral

$$|a(t)| = \begin{cases} 2 \text{ m/s}^2, & 0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ 4 \text{ m/s}^2, & 2 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ 0 \text{ m/s}^2, & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases}$$

yang grafik keduanya berturut-turut adalah sebagai berikut ini.

Laju  $n(t)$  diduga dapat dihitung dari Gambar 3.10 (bawah) tanpa perlu menggunakan syarat batas.



Gambar 3.10: Kurva laju  $u(t)$  (atas) dan kecepatan  $v(t)$  (bawah).

$$0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} :$$

$$n(t) = n(0) + \int_0^t a dt = 0 + \int_0^t 2 dt = [2t]_{t=0}^t = 2t - 2(0) = 2t \text{ m/s}$$

$$n(2) = 2(2) = 4 \text{ m/s}$$

$$2 \text{ s} < t < 3 \text{ s} :$$

$$n(t) = n(2) + \int_2^t a dt = 4 + \int_2^t 4 dt = 4 + [4t]_{t=2}^t = 4 + 4t - 4(2)$$

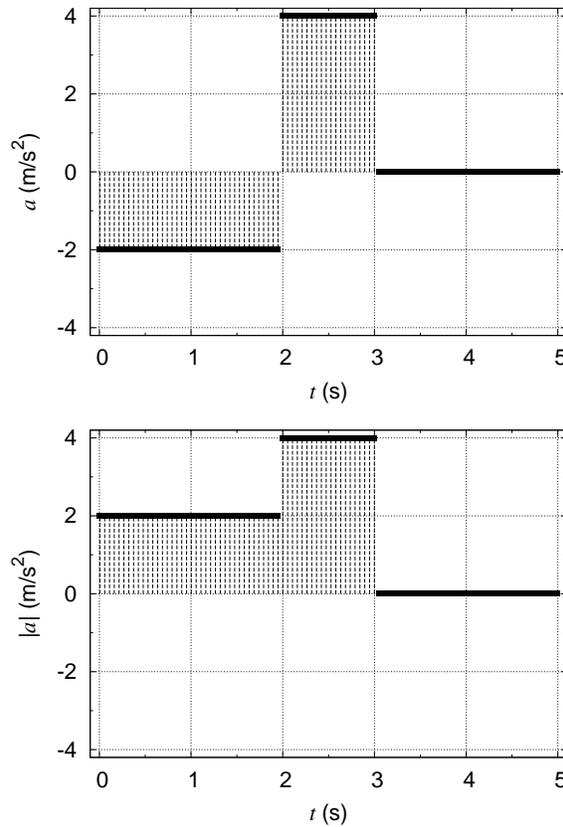
$$= (4t - 4) \text{ m/s}$$

$$n(3) = 4(3) - 4 = 12 - 4 = 8 \text{ m/s}$$

$$3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} :$$

$$n(t) = n(3) + \int_3^t a dt = 8 + \int_3^t 0 dt = 8 + [c]_{t=2}^t = 8 + c - c = 8 \text{ m/s}$$

$$n(5) = 8 \text{ m/s}$$



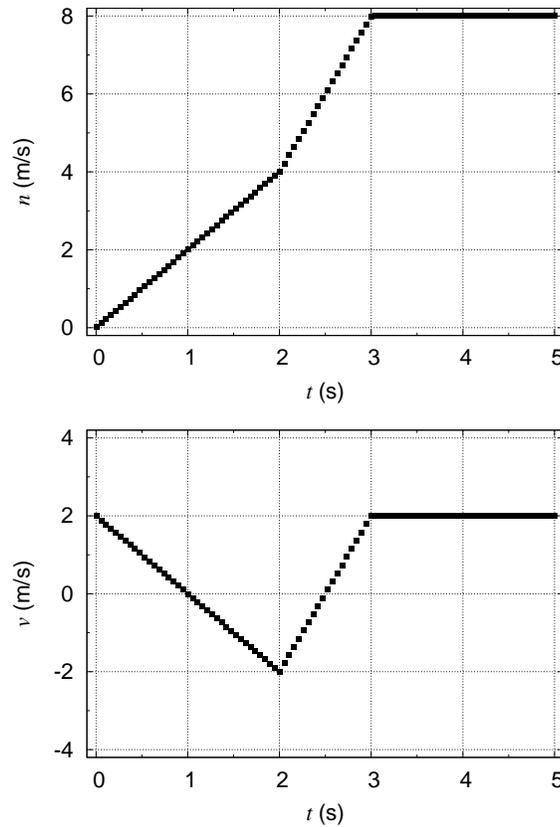
Gambar 3.11: Kurva percepatan  $a(t)$  (atas) dan harga mutlaknya  $|a(t)|$  (bawah).

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$n(t) = \begin{cases} 2t \text{ m/s,} & 0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ (4t - 4) \text{ m/s,} & 2 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \\ 8 \text{ m/s,} & 3 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases} .$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa laju  $u(t)$  tidak dapat dihitung dari percepatan, karena menghasilkan  $n(t)$ , di mana  $n(t) \neq u(t)$ . Untuk itu perhitungan laju yang benar adalah dengan menggunakan jarak dibagi selang waktu. Apakah laju dapat dihitung dari percepatan, jawabannya adalah tidak secara langsung. Secara tidak langsung adalah sebagai berikut

- kecepatan = syarat batas +  $\int$  percepatan dt
- jarak =  $\int$  |kecepatan| dt
- laju = jarak / selang waktu



Gambar 3.12: Kurva kecepatan  $v(t)$  (atas) dan laju (diduga)  $n(t)$  (bawah).

Perbedaan dari  $n(t)$  terhadap  $u(t)$  dapat dilihat dari Gambar 3.12 (atas) dan Gambar 3.10 (atas). Laju umumnya tidak diberi simbol seperti dalam catatan ini, yaitu  $u(t)$ . Demikian pula dengan  $n(t)$  yang biasanya tidak dibahas.

## Referensi

1. Sparisoma Viridi, Siti Nurul Khotimah, dan Euis Sustini, "Analogi Penyelesaian Secara Kalkulus Hubungan Kecepatan-Percepatan dalam Kasus Rangkaian Gerak Lurus Berubah Beraturan dan Hubungan Potensial Listrik-Medan Listrik dalam Kasus Susunan Pelat-pelat Luas Sejajar Bermuatan Seragam", *Jurnal Pengajaran Fisika Sekolah Menengah* 1(4), 86-90 (2009)
2. David Halliday, Robert Resnick, and Jearl Walker, "Fundamentals of Physics", John Wiley & Sons (Asia), 8th, Extended, Student, Edition, p. 58-86 (2008)

## 4

# Vektor dan Contoh Aplikasinya

Vektor, suatu jenis besaran dengan sifat tertentu, memainkan peranan penting dalam fisika. Banyak besaran-besaran fisis yang merupakan jenis besaran vektor, misalnya saja adalah posisi dan turunan-turunannya terhadap waktu, momentum dan turunannya terhadap waktu, medan magnetik dan medan listrik, dan medan gravitasi. Beberapa operasi dasar vektor [1] akan dijelaskan dalam catatan ini, dilengkapi dengan contoh aplikasinya. Pembahasan vektor secara mendalam [2] di luar cakupan catatan kuliah ini.

## 4.1 Skalar dan vektor

Hal mendasar yang membedakan besaran vektor dengan besaran skalar adalah, bahwa selain vektor memiliki besar seperti halnya besaran skalar, ia juga memiliki arah yang memiliki arti dalam ruang spasial. Arah ini akan ditandai dengan adanya vektor satuan atau pun hanya sekedar tanda positif ataupun negatif. Untuk masalah tanda, terdapat tanda (positif ataupun negatif) yang menyatakan arah suatu besaran sebagai vektor secara implisit, ataupun hanya nilai dibandingkan suatu acuan.

**Soal 1.** Temperatur, tekanan, energi, kerja, massa, waktu, volume, massa jenis, jari-jari, resistansi, induktansi, kapasitansi, dan fluks termasuk dalam contoh besaran skalar. Apakah terdapat nilai negatif dari besaran-besaran tersebut? Bila ya, apakah maksudnya bukan arah secara spasial?

**Jawab 1.** Massa tidak memiliki nilai negatif. Dengan mudah ia dapat dilihat sebagai suatu besaran skalar. Demikian pula dengan energi kinetik. Untuk energi potensial, harus agak hati-hati melihatnya. Energi potensial diukur terhadap suatu nilai acuan tertentu sehingga ia dapat berharga positif ataupun negatif. Ini yang membuat temperatur pun dapat memiliki kedua tanda di de-

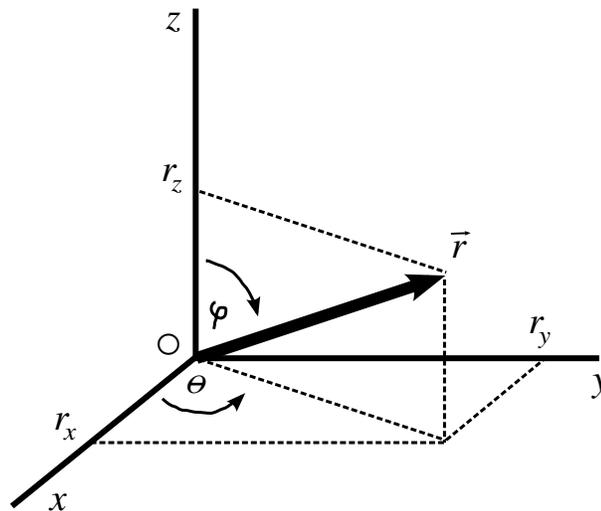
pannya, demikian pula dengan tekanan. Waktu sebagai suatu ukuran perioda osilasi misalnya akan selalu memiliki nilai positif, akan tetapi apabila ditanyakan mana peristiwa yang lebih dulu terjadi, waktu dapat berharga negatif. Untuk fluks, yang merupakan besaran skalar, tanda negatif dan positif memiliki arti medan yang dihitung searah atau berlawanan arah dengan luas permukaan yang ditembus medan.

Untuk volume, massa jenis, resistansi, kapasitansi, dan jari-jari sudah cukup jelas, karena dapat dilihat bahwa tidak terdapatnya nilai negatif.

**Soal 2.** Berikan contoh besaran-besaran vektor. Ingatlah bahwa vektor harus memiliki arti arah secara spasial.

**Jawab 2.** Contoh besaran-besaran vektor misalnya adalah posisi, perpindahan, kecepatan, percepatan, gaya, momentum, impuls, medan, luas, dan rapat arus.

## 4.2 Komponen vektor dan besarnya



Gambar 4.1: Ilustrasi sebuah vektor dalam ruang tiga dimensi dengan aturan sudut-sudutnya secara umum.

Vektor secara umum, karena setidaknya terdapat tiga arah dalam ruang spasial tempat kita berada, memiliki komponen dalam beberapa arah. Dalam sistem koordinat kartesian  $(x, y, z)$  sebuah vektor dapat dituliskan dalam bentuk

$$\vec{r} = r_x \hat{e}_x + r_y \hat{e}_y + r_z \hat{e}_z$$

atau

$$\vec{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k}$$

atau

$$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z).$$

Lambang  $\hat{e}_x$  atau  $\hat{i}$  (atau kadang dituliskan juga dengan  $\mathbf{i}$ ) merupakan vektor satuan pada arah- $x$ . Demikian pula dengan  $\hat{e}_y$  atau  $\hat{j}$  (atau kadang dituliskan juga dengan  $\mathbf{j}$ ) merupakan vektor satuan pada arah- $y$  dan  $\hat{e}_z$  atau  $\hat{k}$  (atau kadang dituliskan juga dengan  $\mathbf{k}$ ) merupakan vektor satuan pada arah- $z$ .

Sebuah vektor dituliskan dengan memerinci komponen-komponennya seperti telah dituliskan dalam persamaan-persamaan di atas. Umumnya terdapat dua cara penulisan vektor dalam teks, yaitu dengan menggunakan panah di atasnya dan dicetak miring, misalnya  $\vec{a}$  ataupun dicetak miring dan tebal tanpa tanda panah di atasnya, misalnya  $\mathbf{a}$ .

Besar suatu vektor adalah panjang vektor itu yang dibentuk secara tegak lurus oleh komponen-komponen vektornya, yang dapat dihitung melalui

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}. \quad (4.1)$$

**Soal 3.** Dengan menggunakan definisi dari perkalian titik (dot product) bahwa  $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$  dan  $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$ , buktikan bahwa  $r = |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$  akan memberikan  $\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$ . Uraikan dengan detail.

**Jawab 3.** Dengan  $\vec{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k}$  maka

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{r} &= (r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k}) \cdot (r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k}) \\ &= r_x r_x (\hat{i} \cdot \hat{i}) + r_x r_y (\hat{i} \cdot \hat{j}) + r_x r_z (\hat{i} \cdot \hat{k}) \\ &\quad + r_y r_x (\hat{j} \cdot \hat{i}) + r_y r_y (\hat{j} \cdot \hat{j}) + r_y r_z (\hat{j} \cdot \hat{k}) \\ &\quad + r_z r_x (\hat{k} \cdot \hat{i}) + r_z r_y (\hat{k} \cdot \hat{j}) + r_z r_z (\hat{k} \cdot \hat{k}) \\ &= r_x r_x (1) + r_x r_y (0) + r_x r_z (0) \\ &\quad + r_y r_x (0) + r_y r_y (1) + r_y r_z (0) \\ &\quad + r_z r_x (0) + r_z r_y (0) + r_z r_z (1) \\ &= r_x^2 + r_y^2 + r_z^2. \end{aligned}$$

**Soal 4.** Hitunglah besarnya vektor  $\vec{p} = 24\hat{i} + 7\hat{k}$  dan  $\vec{q} = 12\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$

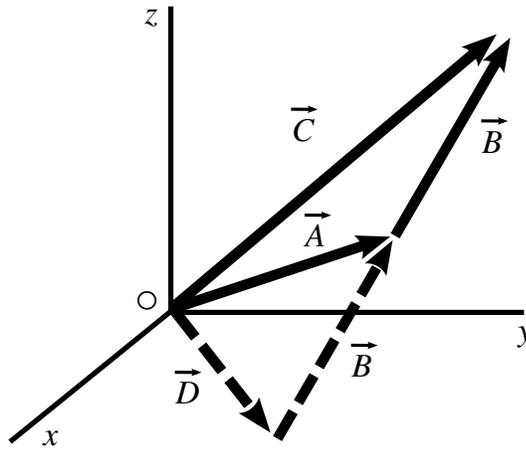
**Jawab 4.** Dengan menggunakan Persamaan (4.1) dapat diperoleh bahwa

$$p = \sqrt{24^2 + 0^2 + 7^2} = \sqrt{576 + 0 + 49} = \sqrt{625} = 25.$$

dan

$$q = \sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{144 + 16 + 9} = \sqrt{169} = 13.$$

### 4.3 Penjumlahan dan pengurangan dua buah vektor



Gambar 4.2: Ilustrasi penjumlahan dan pengurangan dua buah vektor.

Apabila terdapat dua buah vektor, misalnya saja  $\vec{A} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$  dan  $\vec{B} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$  maka keduanya dapat dijumlahkan secara vektor

$$\begin{aligned}\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} &= (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) + (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) \\ &= (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k}\end{aligned}\quad (4.2)$$

ataupun dikurangkan secara vektor

$$\begin{aligned}\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} &= (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) - (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) \\ &= (a_x - b_x)\hat{i} + (a_y - b_y)\hat{j} + (a_z - b_z)\hat{k}.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Dalam Persamaan (4.2) ataupun (4.3) di atas terlihat bahwa penjumlahan dan pengurangan vektor tak lain adalah penjumlahan atau pengurangan masing-masing komponen vektor.

**Soal 5.** Lengkapilah tabel di bawah ini.

Tabel 4.1: Pengurangan dan penjumlahan vektor (soal).

$\vec{A}$	$\vec{B}$	$\vec{A} - \vec{B}$	$\vec{A} + \vec{B}$
$2\hat{i} + \hat{j}$	$\hat{k}$		
$\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$	$\hat{k}$		
$\hat{k} + \hat{j} + \hat{i}$	$\hat{j} + 2\hat{k} + 3\hat{i}$		
$-2\hat{j} + 2\hat{i} + 4\hat{k}$	$5\hat{i} + 2\hat{k} - \hat{j}$		

**Jawab 5.** Dengan menggunakan Persamaan (4.2) ataupun (4.3) dapat diperoleh bahwa

Tabel 4.2: Pengurangan dan penjumlahan vektor (jawaban).

$\vec{A}$	$\vec{B}$	$\vec{A} - \vec{B}$	$\vec{A} + \vec{B}$
$2\hat{i} + \hat{j}$	$\hat{k}$	$2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$	$2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$
$\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$	$\hat{k}$	$\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$	$\hat{i} - \hat{j}$
$\hat{k} + \hat{j} + \hat{i}$	$\hat{j} + 2\hat{k} + 3\hat{i}$	$-2\hat{i} - \hat{k}$	$4\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$
$-2\hat{j} + 2\hat{i} + 4\hat{k}$	$5\hat{i} + 2\hat{k} - \hat{j}$	$-3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$	$7\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

Pada pengurangan dan penjumlahan vektor berlaku pula hukum-hukum penjumlahan seperti hukum komutatif

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (4.4)$$

dan hukum asosiatif

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}. \quad (4.5)$$

**Soal 6.** Gunakan hukum komutatif dan asosiatif dalam penjumlahan vektor sehingga dapat diperoleh

$$\vec{c} + (\vec{b} + \vec{a})$$

dari

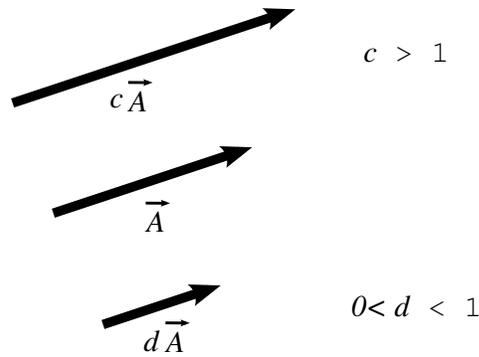
$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

dan tuliskan hukum yang digunakan pada per langkah saat memanipulasi persamaan awalnya.

**Jawab 6.** Dengan menggunakan Persamaan (4.4) dan (4.5) dapat dituliskan

$$\begin{aligned} & \text{persamaan asal : } \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \\ & \text{hukum asosiatif : } \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \\ & \text{hukum komutatif : } \Rightarrow \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b}) \\ & \text{hukum komutatif : } \Rightarrow \vec{c} + (\vec{b} + \vec{a}). \end{aligned}$$

#### 4.4 Perkalian dan pembagian vektor dengan skalar



Gambar 4.3: Ilustrasi perkalian suatu vektor dengan skalar: memperkecil atau memperbesar panjang vektor dan tidak mengubah arahnya. Perkalian dengan skalar negatif akan mengubah arah vektor berlawanan dengan arah semula.

Vektor saat dikalikan (atau dibagi) dengan suatu skalar adalah sama dengan masing-masing komponen vektor tersebut dikalikan (atau dibagi) dengan skalar tersebut.

$$m\vec{r} = m(r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k}) = mr_x\hat{i} + mr_y\hat{j} + mr_z\hat{k}. \quad (4.6)$$

**Soal 7.** Sebuah benda memiliki percepatan  $\vec{a} = (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$  m/s<sup>2</sup>, tentukanlah gaya total yang bekerja pada benda apabila massanya adalah 0.01 kg.

**Jawab 7.** Hukum kedua Newton  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ , sehingga

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = (0.02\hat{i} + 0.01\hat{j} - 0.01\hat{k}) \text{ N.}$$

**Soal 8.** Sebuah benda memiliki momentum  $\vec{p} = (4\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})$  kg m/s, tentukanlah kecepatan benda apabila massanya adalah 2 kg.

**Jawab 8.** Rumusan momentum adalah  $\vec{p} = m\vec{v}$  sehingga  $\vec{v} = \vec{p}/m$ , dengan demikian

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} = (2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}) \text{ m/s.}$$

## 4.5 Perkalian titik dua buah vektor

Dua buah vektor dapat dikalikan secara skalar atau titik (dot product) dengan menggunakan aturan bahwa

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1, \quad (4.7)$$

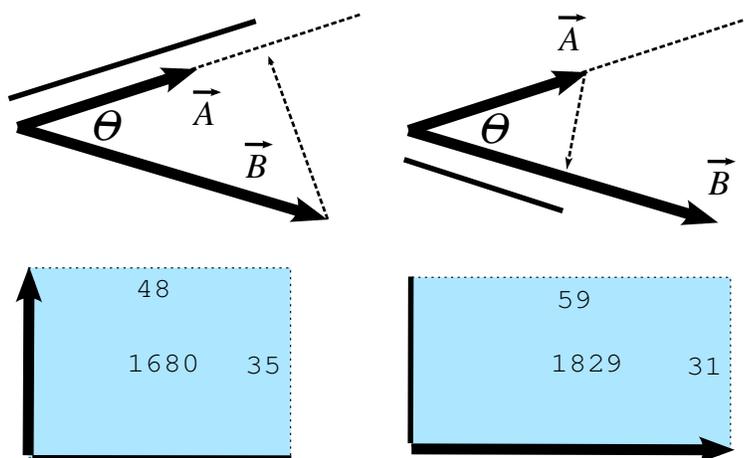
$$\hat{j} \cdot \hat{j} = 1, \quad (4.8)$$

$$\hat{k} \cdot \hat{k} = 1, \quad (4.9)$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{i} = 0, \quad (4.10)$$

$$\hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{j} = 0, \quad (4.11)$$

$$\hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{i} \cdot \hat{k} = 0. \quad (4.12)$$



Gambar 4.4: Ilustrasi perkalian titik dua buah vektor yang (seharusnya) bersifat komutatif.

Dengan demikian apabila terdapat  $\vec{A} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$  dan  $\vec{B} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$ , maka

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (4.13)$$

**Soal 9.** Bila  $\vec{A} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$  dan  $\vec{B} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$ , buktikan bahwa  $\vec{A} \cdot \vec{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ .

**Jawab 9.** Dengan menggunakan Persamaan (4.13) dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \cdot \vec{B} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) \\
 &= a_x b_x (\hat{i} \cdot \hat{i}) + a_x b_y (\hat{i} \cdot \hat{j}) + a_x b_z (\hat{i} \cdot \hat{k}) \\
 &\quad + a_y b_x (\hat{j} \cdot \hat{i}) + a_y b_y (\hat{j} \cdot \hat{j}) + a_y b_z (\hat{j} \cdot \hat{k}) \\
 &\quad + a_z b_x (\hat{k} \cdot \hat{i}) + a_z b_y (\hat{k} \cdot \hat{j}) + a_z b_z (\hat{k} \cdot \hat{k}) \\
 &= a_x b_x (1) + a_x b_y (0) + a_x b_z (0) \\
 &\quad + a_y b_x (0) + a_y b_y (1) + a_y b_z (0) \\
 &\quad + a_z b_x (0) + a_z b_y (0) + a_z b_z (1) \\
 &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.
 \end{aligned}$$

**Soal 10.** Pada sebuah benda bekerja gaya  $\vec{F} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$  N dan sehingga benda berpindah sejauh  $\vec{s} = (2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k})$  m, tentukanlah usaha yang dilakukan oleh gaya tersebut pada benda.

**Jawab 10.** Dengan menggunakan  $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$  maka dapat diperoleh bahwa  $W = 2$  J.

**Soal 11.** Tuliskan setidaknya empat persamaan dalam fisika yang menggunakan perkalian titik dua buah vektor.

**Jawab 11.** Beberapa contoh adalah

- energi kinetik:  $K = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v}$ ,
- fluks magnetik:  $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A}$  (atau lebih tepatnya  $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ ),
- daya:  $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ ,
- potensial listrik:  $V = -\vec{E} \cdot \vec{l}$  (atau lebih tepatnya  $V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ ),
- energi potensial:  $U = -\vec{F} \cdot \vec{x}$  (atau lebih tepatnya  $U = -\int \vec{F} \cdot d\vec{x}$ ),
- usaha:  $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$  (atau lebih tepatnya  $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$ ).

## 4.6 Perkalian silang dua buah vektor

Dua buah vektor dapat dikalikan secara vektor atau silang (cross product) dengan menggunakan aturan bahwa

$$\hat{i} \times \hat{i} = 0, \quad (4.14)$$

$$\hat{j} \times \hat{j} = 0, \quad (4.15)$$

$$\hat{k} \times \hat{k} = 0, \quad (4.16)$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} = -(\hat{j} \times \hat{i}), \quad (4.17)$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} = -(\hat{k} \times \hat{j}), \quad (4.18)$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} = -(\hat{i} \times \hat{k}). \quad (4.19)$$

Dengan demikian apabila terdapat  $\vec{A} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$  dan  $\vec{B} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$ , maka

$$\vec{A} \times \vec{B} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}. \quad (4.20)$$

**Soal 12.** Bila  $\vec{A} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$  dan  $\vec{B} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$ , buktikan bahwa  $\vec{A} \times \vec{B} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}$ .

**Jawab 12.** Dengan menggunakan Persamaan (4.20) dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) \\ &= a_x b_x (\hat{i} \times \hat{i}) + a_x b_y (\hat{i} \times \hat{j}) + a_x b_z (\hat{i} \times \hat{k}) \\ &\quad + a_y b_x (\hat{j} \times \hat{i}) + a_y b_y (\hat{j} \times \hat{j}) + a_y b_z (\hat{j} \times \hat{k}) \\ &\quad + a_z b_x (\hat{k} \times \hat{i}) + a_z b_y (\hat{k} \times \hat{j}) + a_z b_z (\hat{k} \times \hat{k}) \\ &= a_x b_x (0) + a_x b_y (\hat{k}) + a_x b_z (-\hat{j}) \\ &\quad + a_y b_x (-\hat{k}) + a_y b_y (0) + a_y b_z (\hat{i}) \\ &\quad + a_z b_x (\hat{j}) + a_z b_y (-\hat{i}) + a_z b_z (0) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}. \end{aligned}$$

**Soal 13.** Tuliskan setidaknya empat persamaan dalam fisika yang menggunakan perkalian silang dua buah vektor.

**Jawab 13.** Beberapa contoh adalah

- torsi:  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ ,
- momentum sudut:  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ,
- gaya magnetik:  $\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$ ,

- hukum Biot-Savart  $d\vec{B} = (\mu_0/4\pi)(I d\vec{l} \times \vec{r}/r^3)$ ,
- vektor Poynting:  $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{B})/\mu_0$ .

**Soal 14.** Tuliskan setidaknya empat persamaan dalam fisika yang menggunakan perkalian sebuah skalar dengan sebuah vektor.

**Jawab 14.** Beberapa contoh adalah

- gaya:  $\vec{F} = m\vec{a}$ ,
- momentum:  $\vec{p} = m\vec{v}$ ,
- gaya berat:  $\vec{W} = m\vec{g}$
- gaya listrik:  $\vec{F}_E = q\vec{E}$
- gaya pegas:  $\vec{F}_k = -k\vec{x}$

## 4.7 Besar hasil perkalian skalar dan vektor

Selain dengan Persamaan (4.20) dan (4.13), besar hasil perkalian skalar dan vektor dapat pula dicari lewat

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \quad (4.21)$$

dan

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta \quad (4.22)$$

apabila sudut antara dua vektor yang dikalikan, yaitu  $\theta$  diketahui.

## 4.8 Referensi

1. David Halliday, Robert Resnick, and Jearl Walker, "Fundamentals of Physics", John Wiley & Sons (Asia), 8th, Extended, Student, Edition, pp. 38-57 (2008)
2. H. B .Phillips, "Vector Analysis", John Wiley & Sons, London, 15th Printing, 1933, pp. 1-18

## 5

# Gerak dalam 2- dan 3-D

Selain dapat bergerak dalam 1-D, benda dapat pula bergerak dalam 2- dan 3-D. Contoh gerak dalam 2-D misalnya saja adalah gerak peluru dan gerak melingkar, sedangkan contoh gerak dalam 3-D adalah gerakan melingkar seperti pegas atau gerak parabola yang tertiuip angin dari arah tegak lurus bidang parabola. Dalam catatan ini akan dibahas mengenai kinematika dalam 2- dan 3-D [1].

### 5.1 Posisi dan perpindahan

Dalam 2- dan 3-D posisi dan perpindahan suatu benda titik dinyatakan dengan menggunakan notasi vektor, yaitu

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (5.1)$$

dan

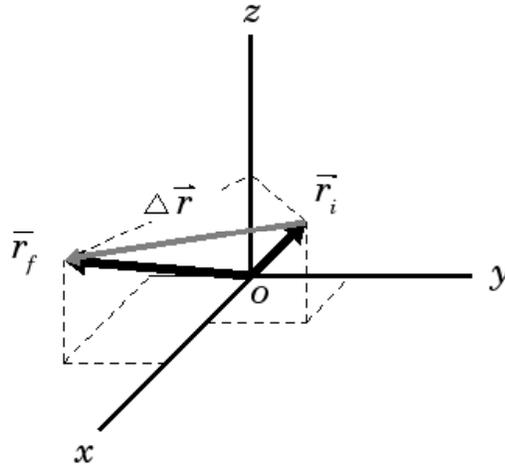
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = (x_f - x_i)\hat{i} + (y_f - y_i)\hat{j} + (z_f - z_i)\hat{k} \quad (5.2)$$

berturut-turut. Sebenarnya terdapat pula jarak, akan tetapi karena secara matematika jarak dalam 2- dan 3-D memerlukan matematika yang cukup rumit, untuk sementara tidak dibahas.

**Soal 1.** Gambarkan partikel dengan posisi awal  $\vec{r}_i = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  dan posisi akhir  $\vec{r}_f = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ . Dan gambarkan pula perpindahannya  $\Delta\vec{r}$ .

**Jawab 1.** Secara kualitatif perpindahan  $\Delta\vec{r}$  diilustrasikan dalam Gambar 5.1.

Persamaan yang mirip dengan perpindahan, akan tetapi bukan untuk satu benda yang sama, adalah posisi relatif. Posisi benda A relatif terhadap benda B adalah



Gambar 5.1: Perpindahan dari  $\vec{r}_i = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  ke  $\vec{r}_f = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ .

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k}. \quad (5.3)$$

**Soal 2.** Apakah anda menyadari bahwa  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  sebenarnya adalah posisi relatif terhadap pusat sistem koordinat global? Gambarkan dua sistem koordinat lokal dan satu sistem koordinat global (hanya boleh ada satu sistem koordinat global) dan tunjukkan bahwa walaupun posisi benda dapat dinyatakan berbeda oleh masing-masing sistem koordinat lokal, akan tetapi keduanya memiliki koordinat yang sama dalam sistem koordinat global.

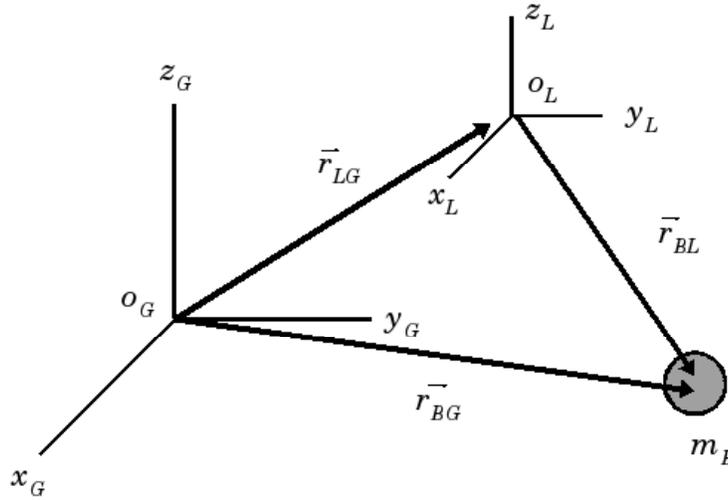
**Jawab 2.** Selain penggambaran secara langsung, dapat pula digunakan ilustrasi dengan kata-kata berikut ini. Misalkan terdapat sebuah benda yang terletak di atas meja. Dengan mengambil salah satu sudut meja sebagai pusat koordinat lokal, posisi benda dapat ditentukan. Kemudian misalkan bahwa koordinat global berpusat di salah satu sudut ruangan. Dengan menetapkan posisi sudut meja yang merupakan pusat koordinat lokal terhadap sudut ruang yang merupakan pusat koordinat global, maka posisi benda di atas meja dapat ditentukan.

Jadi, suatu benda tersebut dapat dinyatakan posisinya terhadap koordinat lokal meja atau koordinat global ruangan. Kedua sistem koordinat memberikan nilai-nilai  $(x, y, z)$  yang berbeda akan tetapi mengacu pada posisi spasial yang sama.

Gambar 5.2 memberikan ilustrasi bahwa terdapat hubungan

$$\vec{r}_{BG} = \vec{r}_{BL} + \vec{r}_{LG},$$

yang berlaku pula pada topik gerak relatif. Umumnya indeks  $G$  tidak digunakan karena merupakan koordinat global.



Gambar 5.2: Posisi suatu benda dinyatakan dengan koordinat lokal (indeks  $L$ ) dan koordinat global (indeks  $G$ ).

## 5.2 Kecepatan rata-rata dan kecepatan sesaat

Mirip dengan definisinya dalam 1-D kecepatan rata-rata dan kecepatan sesaat, berturut-turut adalah

$$\vec{v}_{\text{avg}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{(x_f - x_i)\hat{i} + (y_f - y_i)\hat{j} + (z_f - z_i)\hat{k}}{t_f - t_i} \quad (5.4)$$

dan

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (5.5)$$

**Soal 3.** Gambarkan lintasan suatu benda dalam 2-D pada grafik  $y$  terhadap  $x$ . Pilihlah dua titik pada lintasan tersebut dan gambarkan apa yang dimaksud dengan kecepatan rata-rata dan apa yang dimaksud dengan kecepatan sesaat.

**Jawab 3.** Kecepatan rata-rata adalah kemiringan garis lurus yang menghubungkan kedua titik yang dipilih sedangkan kecepatan sesaat adalah kemiringan kurva pada masing-masing titik.

**Soal 4.** Posisi benda setiap saat  $t$  dapat dinyatakan dengan bentuk  $\vec{r}(t) = 2\hat{i} + (3 + 2t)\hat{j} + (10 - t^2)\hat{k}$ . Tentukanlah kecepatan rata-rata antara  $t = 2$  dan  $t = 4$ , serta tentukan kecepatan sesaat pada kedua waktu tersebut.

**Jawab 4.** Pada  $t = 2$  diperoleh  $\vec{r}(2) = 2\hat{i} + 7\hat{j} + 6\hat{k}$ , sedangkan pada  $t = 4$  diperoleh  $\vec{r}(4) = 2\hat{i} + 11\hat{j} - 6\hat{k}$ . Dengan menggunakan Persamaan (5.4) diperoleh

bahwa  $\vec{v}_{\text{avg}} = 2\hat{j} - 6\hat{k}$ . Sedangkan kecepatan sesaat pada  $t = 2$  dan 4 adalah  $2\hat{j} - 4\hat{k}$  dan  $2\hat{j} - 8\hat{k}$ , berturut-turut.

Sebagaimana jarak, laju yang terkait dengannya, tidak dibahas dalam 2- dan 3-D dengan alasan yang sama. Selain itu kecepatan (bila tidak disebutkan, berarti kecepatan sesaat) dapat pula dinyatakan terhadap suatu acuan tertentu, yang disebut sebagai kecepatan relatif.

### 5.3 Percepatan rata-rata dan percepatan sesaat

Mirip dengan definisinya dalam 1-D percepatan rata-rata dan percepatan sesaat, berturut-turut adalah

$$\vec{v}_{\text{avg}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{(v_f - v_i)\hat{i} + (v_f - v_i)\hat{j} + (v_f - v_i)\hat{k}}{t_f - t_i} \quad (5.6)$$

dan

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (5.7)$$

**Soal 5.** Suatu benda bergerak dalam 2-D menempuh lintasan berbentuk lingkaran dengan persamaan  $R^2 = x^2 + y^2$ , di mana  $R$  adalah konstanta yang menyatakan jari-jari lintasan. Tentukanlah kecepatan benda dan percepatan benda dengan menggunakan

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad dR = \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial t} dt.$$

Bentuk  $x(t)$  dan  $y(t)$  apakah yang kira-kira cocok dengan hasil yang diperoleh? Jelaskan. Bagaimana dengan  $x(t) = R \cos(\omega t)$  dan  $y(t) = R \sin(\omega t)$ ?

**Jawab 5.** Terdapat satu syarat lagi yang kurang, yaitu bahwa harus terpenuhi  $(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 = \omega^2 R^2$ .

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0. \quad (5.8)$$

Dari persamaan lintasan lingkaran dapat diperoleh bahwa

$$x = \sqrt{R^2 - y^2}. \quad (5.9)$$

Syarat penjumlahan kuadrat kedua turunan akan memberikan

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\omega^2 R^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}. \quad (5.10)$$

Substitusi Persamaan (5.9) dan (5.10) ke Persamaan (5.8) sehingga memberikan

$$\sqrt{R^2 - y^2} \sqrt{\omega^2 R^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} + y \frac{dy}{dt} = 0 \quad (5.11)$$

Sedikit manipulasi Persamaan (5.11) membuatnya dapat dituliskan sebagai

$$(R^2 - y^2) \left[ \omega^2 R^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right] = y^2 \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \quad (5.12)$$

yang merupakan suatu persamaan diferensial hanya dalam  $y$ . Selanjutnya dapat diperoleh bahwa

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \omega^2 y^2 - \omega^2 R^2 = 0.$$

Persamaan terakhir dapat dituliskan kembali dalam bentuk

$$\frac{dy}{dt} = \omega$$

atau

$$\frac{dy}{\sqrt{R^2 - y^2}} = \omega dt.$$

Dengan mengambil permisalah bahwa  $y = R \sin \theta$  maka dapat diperoleh bahwa  $dy = R \cos \theta d\theta$ . Substitusi hasil ini ke persamaan terakhir akan memberikan

$$d\theta = \omega dt + \varphi_0,$$

yang memberikan solusi bahwa  $\theta = \omega t$ . Substitusikan kembali ke persamaan semula akan memberikan

$$\arcsin\left(\frac{y}{R}\right) = \omega t + \varphi_0.$$

Persamaan terakhir lebih umum dituliskan sebagai

$$y(t) = \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Dengan menggunakan Persamaan (5.9) dapat diperoleh bahwa

$$x(t) = \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Dengan demikian telah diperoleh solusi fungsi  $x(t)$  dan  $y(t)$  yang memenuhi  $x^2 + y^2 = R^2$ .

**Soal 6.** Lintasan gerak suatu benda adalah  $h = y + cx^2$ , di mana  $h$  adalah suatu konstanta. Tentukanlah  $v_x$  dan  $v_y$  dengan

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad dR = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial t} dt.$$

Bentuk  $x(t)$  dan  $y(t)$  apakah yang kira-kira cocok dengan hasil yang diperoleh? Jelaskan. Bagaimana dengan  $y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$  dan  $x(t) = v_0t$ ?

## 5.4 Gerak parabola

Suatu benda dapat bergerak menempuh lintasan berbentuk parabola dalam bidang- $xy$  apabila percepatan yang dialaminya adalah  $\vec{a} = a_y \hat{j}$  dan kecepatan awalnya adalah  $\vec{v}_0 = v_{0x} \hat{i} + v_{0y} \hat{j}$ .

**Soal 7.** Dengan melakukan integrasi  $\int \vec{a} dt$  dan menggunakan syarat awal  $\vec{v}_0$ , tentukanlah  $\vec{v}$  setiap saat.

Kemudian apabila telah diketahui bahwa  $\vec{v} = v_{0x} t \hat{i} + (v_{0y} t + a_y t) \hat{j}$  dan posisi awal  $\vec{r}_0 = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j}$ , dapat dicari posisi setiap saat  $\vec{r}$ .

**Soal 8.** Dengan melakukan integrasi  $\int \vec{v} dt$  dan menggunakan syarat awal  $\vec{r}_0$ , tentukanlah  $\vec{r}$  setiap saat.

**Soal 9.** Bagaimanakah cara menentukan jarak jangkauan suatu gerak parabola  $L = (v_0^2/g) \sin(2\theta)$ ? Pada satu nilai jangkauan tertentu, umumnya terapat berapa kemungkinan sudut tembakkah apabila besar kecepatan tembak dijaga tetap? Bagaimana menentukan jangkauan maksimum?

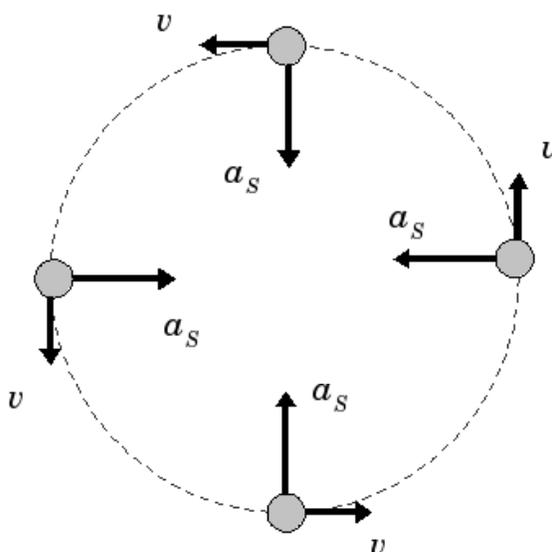
## 5.5 Gerak melingkar beraturan

Pada suatu gerak melingkar beraturan terdapat percepatan yang arahnya selalu menuju pusat lintasan. Percepatan ini disebut sebagai percepatan sentripetal

$$a_S = \frac{v^2}{R} \quad (5.13)$$

dengan periode gerakan adalah

$$T = \frac{2\pi R}{v}. \quad (5.14)$$

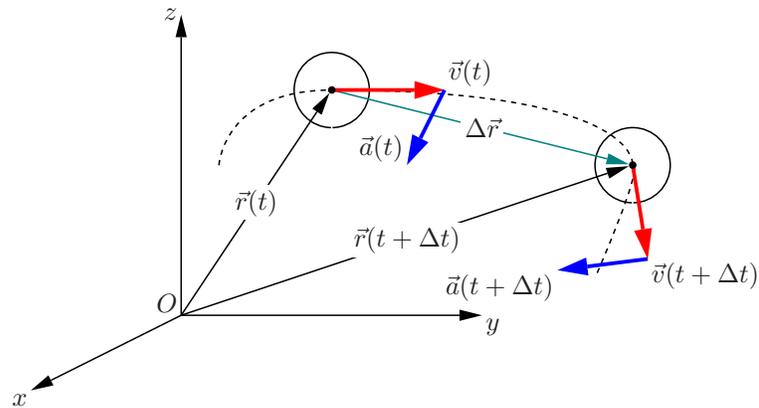


Gambar 5.3: Ilustrasi suatu gerak melingkar beraturan (GMB) dengan laju atau kecepatan tangensial  $v$  dan percepatan sentripetal  $a_S$ .

**Soal 10.** Bila  $x = R \sin(\omega t)$  dan  $y = R \cos(\omega t)$ , tentukanlah  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$ , dan  $\vec{a}$ . Gambarkan pula ketiga vektor tersebut pada  $t = 0, \pi/2\omega, \pi/\omega, 3\pi/2\omega$ . Bagaimanaka sifat dari percepatannya? Apakah merupakan percepatan sentripetal?

## 5.6 Ilustrasi gerak secara umum

Secara umum sebuah benda yang bergerak dalam ruang 3-D, dalam hal ini adalah sebuah bola, dapat diilustrasikan seperti tampak dalam Gambar 5.4 berikut ini.



Gambar 5.4: Ilustrasi sebuah bola dengan posisinya saat  $t$  dan  $t + \Delta t$  dalam sistem koordinat kartesian. Lintasan bola digambarkan dengan garis putus-putus. Digambarkan pula vektor-vektor posisi  $\vec{r}$ , kecepatan  $\vec{v}$ , dan percepatan  $\vec{a}$  pada saat  $t$  dan  $t + \Delta t$  [2].

## 5.7 Referensi

1. David Halliday, Robert Resnick, and Jearl Walker, "Fundamentals of Physics", John Wiley & Sons (Asia), 8th, Extended, Student, Edition, p. 58-86 (2008)
2. Sparisoma Viridi, "Bola: Implementasi Dinamika Molekuler dalam C++ untuk Simulasi Material Granular", Versi Agustus, p. 24 (2010)