Fonctions eulériennes

Pierre-Jean Hormière

____

« *Une humeur toujours égale, une gaieté douce et naturelle, une certaine causticité mêlée de bonhomie, une manière de raconter naïve et plaisante, rendaient sa conversation aussi agréable que recherchée.* »

Nicolas Fuss, à propos d'Euler

De premières tentatives pour définir n ! pour des valeurs non entières remontent à Stirling et Daniel Bernoulli. Dans une lettre à Christian Goldbach du 13 octobre 1729, Euler (1707-1783) découvre (ou invente ?) une fonction de variable réelle prolongeant de manière naturelle la fonction $n!$. D'abord introduite comme limite de produits, cette fonction fut plus tard présentée sous forme intégrale et reliée à des fonctions voisines.

Les fonctions eulériennes sont les plus importantes « fonctions spéciales » de l'analyse classique, réelle et complexe. Legendre (1752-1833) les a nommées, classifiées et étudiées. Elles ont aussi été étudiées par Gauss, Binet, Plana, Malmsten, Raabe, Weierstrass, Hankel, H. Bohr, Mollerup, Artin... Elles sont ici présentées de manière progressive.

Il y a bien des façons de prolonger la fonction $n!$ au domaine réel, même en se limitant aux fonctions continues. Une idée naturelle est de partir de la formule $n! = \int_0^{+\infty} t^n.e^{-t}.dt$. Cette forme intégrale de la factorielle suggère de considérer la fonction $F(x) = \int_0^{+\infty} t^x.e^{-t}.dt$. Cette fonction, définie sur $]-1, +\infty[$, prolonge intelligemment la factorielle, en ce sens qu'elle possède des propriétés nombreuses et cohérentes. Par commodité, on considère plutôt $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}.e^{-t}.dt$.

Nous allons commencer par étudier successivement les trois intégrales eulériennes :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}.e^{-t}.dt \qquad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}.(1-t)^{y-1}.dt \qquad \Delta(r, s) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{r-1}}{(1+u)^s}.du$$

et étudierons au passage les fonctions $\Omega(x) = \ln \Gamma(x)$ et $\Psi(x) = \Omega'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

1. La fonction Gamma.

1.1. Expression intégrale de $n!$ [1]

Il est facile de vérifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n.e^{-t}.dt$ converge, et a pour valeur n !.

Pour montrer cela, commençons par calculer les intégrales $F_n(x) = \int_0^x t^n.e^{-t}.dt$.

On a $F_0(x) = 1 - e^{-x}$. Une intégration par parties donne : $F_n(x) = - x^n e^{-x} + n.F_{n-1}(x)$ (*).

On peut en déduire de proche en proche $F_n(x)$, mais il est plus élégant de faire apparaître une loi de simplification en divisant (*) par $n!$. Il vient : $\frac{F_n(x)}{n!} = \frac{F_{n-1}(x)}{(n-1)!} - \frac{x^n}{n!}.e^{-x}$.

Additionnant ces relations, il vient : $F_n(x) = n! - n!\, e^{-x} [1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}]$.

Lorsqu'on fait tendre x vers $+\infty$, il vient : $\int_0^{+\infty} t^n.e^{-t}.dt = n!$.

Cette formule s'écrit aussi bien $\forall n \in \mathbf{N} \quad n! = \int_0^{+\infty} t^n.e^{-t}.dt$, car a = b $\Rightarrow$ b = a !

Cependant, entre ces deux énoncés, il y a une différence de point de vue : le premier donne l'intégrale d'une exponentielle-polynôme, le second exprime $n!$ sous forme intégrale.

Montrons avec Laplace comment on peut exprimer n ! sous forme intégrale, sans trop d'*a priori*.

Supposons qu'il existe un intervalle I = (a, b) et une fonction f suffisamment régulière sur I, tels que

$$\forall n \quad n! = \int_I t^n.f(t).dt .$$

Intégrons par parties : $n! = \int_I t^n.f(t).dt = \int_I f(t).d(\frac{t^{n+1}}{n+1}) = [\, f(t).t^{n+1}]_a^b - \frac{1}{n+1} \int_I t^{n+1}.f'(t).dt$

Cela s'écrit $\frac{1}{n+1} \int_I t^{n+1}.[f'(t)+ f(t)].dt = [\, f(t).t^{n+1}]_a^b$.

Si l'on peut trouver une fonction f telle que $f' + f = 0$ et $f(t).t^{n+1}$ s'annule en a et b, alors c'est gagné. Or la fonction $f(t) = e^{-t}$ et l'intervalle I = [0, $+\infty$[conviennent.

Remarque : Cette idée inductive est générale. Certes, une suite quelconque n'est pas toujours la suite des moments d'une fonction sur un intervalle, mais la plupart des suites rencontrées en analyse et en combinatoire sont de ce type. Ainsi, le nombre t_n des involutions de $\{1, 2, \dots, n\}$ vérifie $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, et $t_n = t_{n-1} + (n-1).t_{n-2}$ pour $n \geq 3$ et l'on peut l'exprimer sous forme intégrale.

L'expression intégrale $n! = \int_0^{+\infty} t^n.e^{-t}.dt$ suggère de considérer la fonction de variable réelle

$F(x) = \int_0^{+\infty} t^x.e^{-t}.dt$, ou, ce qui revient au même, la fonction $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}.e^{-t}.dt$.

1.2. La fonction Γ.[2]

Exercice 1 : Étudier les variations des fonctions $f_x(t) = e^{-t}.t^{x-1}$ pour différentes valeurs du paramètre $x > 0$. Etudier les positions relatives et les déformations des graphes lorsque x augmente.

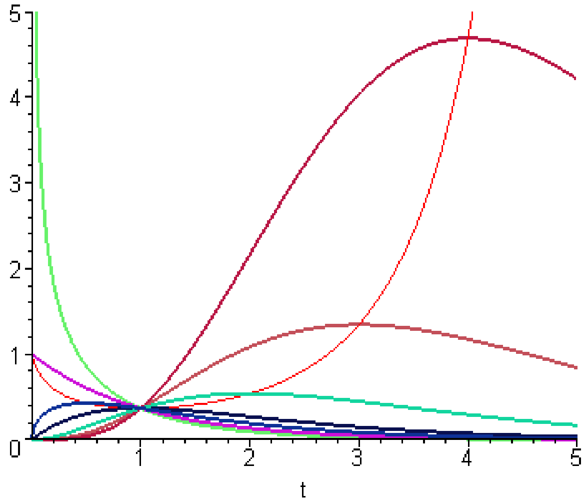
Quel est le lieu des extrema locaux ? Equation différentielle de cette famille de fonctions

```
> with(plots):f:=(x,t)->t^(x-1)*exp(-t);
p:=x->plot(f(x,t),t=0..5,0..5,color=COLOR(RGB, rand()/10^12,
rand()/10^12,rand()/10^12),thickness=2);
q:=plot(t^t/exp(t),t=0..5,color=red):
```

[1] La notation $n!$, universellement utilisée, fut créée en 1808 par un mathématicien peu connu, Christian Kramp, dans un texte algébrique. Avant lui, Euler notait $[n]$, et Gauss $\pi(n)$, la fonction factorielle.

[2] Notation due à Legendre.

```
display({q,p(0.5),p(1),p(1.5),p(2),p(3),p(4),p(5)});
```



Proposition 1 : i) La fonction $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}.e^{-t}.dt$ est définie pour $x > 0$;

ii) On a $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(x + 1) = x.\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$;
iii) On a $\Gamma(x + n) = \Gamma(x).x.(x + 1) \dots (x + n - 1)$ pour tout $x > 0$ et tout $n \geq 1$;
iv) En particulier $\Gamma(n) = (n - 1)!$ pour tout entier $n \geq 1$.

<u>Preuve</u> : i) La fonction $f_x(t) = e^{-t}.t^{x-1}$ est continue positive sur $]0, +\infty[$.
Pour tout x, elle est intégrable sur $[1, +\infty[$, car $0 \leq f_x(t) \leq e^{-t/2}$ ou $1/t^2$ pour t assez grand.
Au voisinage de 0+ , $f_x(t) \sim \frac{1}{t^{1-x}}$, donc f_x est intégrable ssi $1 - x < 1$, i.e. $x > 0$.

Notons en passant que si $x \geq 1$, l'intégrale est faussement impropre en 0 (cf. figure ci-dessus).
ii) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}.dt = 1$, $\Gamma(x + 1) = x.\Gamma(x)$ se montre par intégration par parties :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^{x}.e^{-t}.dt = \int_0^{+\infty} t^{x}.d(-e^{-t}) = -\,e^{-t}.t^{x-1}\Big|_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}.e^{-t}.dt = x.\Gamma(x).$$

En toute rigueur, il faudrait intégrer par parties $\int_\varepsilon^{A} t^{x}.e^{-t}.dt$, puis faire $\varepsilon \to 0+$ et $A \to +\infty$.

iii) se montre par récurrence sur n, et iv) s'en déduit en faisant $x = 1$.
Ainsi, la fonction Gamma prolonge ou interpole (à translation près) la fonction $n \to (n - 1)!$.

Proposition 2 : La fonction Γ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^*_+$, et vérifie :

$$\boxed{(\forall n \geq 0) \quad (\forall x > 0) \quad \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^n t.t^{x-1}.e^{-t}.dt\ .}$$

<u>Preuve</u> : $f(x, t) = e^{-t}.t^{x-1}$ et ses dérivées partielles $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) = e^{-t}\, t^{x-1} \ln^n t$ sont continues sur ${\mathbf{R}^*_+}^2$

(H 1) Pour tout n , et tout $x > 0$, $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, .) = e^{-t}\, t^{x-1} \ln^n t$ est réglée intégrable.

car $O(e^{-t/2})$ au $V(+\infty)$ et $\sim t^{x-1}\,|\ln^n t\,| = O(t^{x/2-1})$ au $V(0+)$;
(H 2) Pour tout n , et tout $t > 0$, $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(\,.\,, t) = e^{-t}\, t^{x-1} \ln^n t$ est continue.

(H 3) <u>Majorantes intégrables</u>.
Leur recherche demande un peu de soin, et oblige à séparer $t \geq 1$ et $t \leq 1$. Soit $0 < a < A$, $x \in [a, A]$.

$$\left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq e^{-t}.t^{a-1}.|\ln^n t| \quad \text{si } t \leq 1$$

$$\leq e^{-t}.t^{A-1}.|\ln^n t| \quad \text{si } t \geq 1 .$$

La majorante ainsi trouvée $\varphi_n(t)$, est intégrable sur $]0, +\infty[$ en vertu des arguments donnés en (H 1). On conclut par applications répétées du théorème de dérivation des intégrales impropres à paramètres.

Exercice 2 : Retrouver ce résultat en considérant la suite de fonctions $\Gamma_n(x) = \int_{1/n}^{n} t^{x-1}.e^{-t}.dt$.

Indication : Ces fonctions sont C^∞ sur $\mathbf{R}^*_+$ en vertu du théorème de dérivation des intégrales à paramètres sur les *segments*, et, pour tout p, $\Gamma_n^{(p)}(x) = \int_{1/n}^{n} t^{x-1}\ln^p t.e^{-t}.dt$. Il reste à montrer que ces dérivées obéissent au théorème de dérivation des *suites* de fonctions, c'est-à-dire convergent vers $\int_0^{+\infty} t^{x-1}\ln^p t.e^{-t}.dt$ uniformément sur tout segment [a, b], 0 < a < b.

Corollaire 1 : $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ au V(0+) .

Preuve : En effet $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(1 + x) = \frac{1}{x}[\,\Gamma(1) + o(1)\,] = \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$ quand $x \to 0+$, par continuité de Γ en 1. Γ admet même en 0+ le développement asymptotique d'origine taylorienne :

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} + \Gamma'(1) + \Gamma''(1).\frac{x^1}{1!} + \ldots + \Gamma^{(n+1)}(1).\frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}) .$$

Corollaire 2 : Γ est strictement convexe. Il existe $c \in \,]1, 2[$ tel que Γ soit décroissante sur $]0, c]$, et croissante sur $[c, +\infty[$, et Γ tend vers $+\infty$ en 0+ et $+\infty$.

Preuve : $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} \ln^2 t.t^{x-1}.e^{-t}.dt > 0$ (intégrale d'une fonction continue positive et non nulle), donc Γ' est croissante, et Γ est strictement convexe.
Comme $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, le théorème de Rolle affirme l'existence de $c \in \,]1, 2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.

Remarques : 1) La convexité de Γ peut s'établir directement en notant que, pour tout t > 0, la fonction $x \to e^{-t}.t^{x-1}$ est convexe (calculer sa dérivée seconde), puis en intégrant l'inégalité de convexité correspondante.
2) Maple donne $c \approx 1{,}462$ et $\Gamma(c) \approx 0{,}886$.

```
> c:=fsolve(D(GAMMA)(x)=0,x);GAMMA(c);
```

$c := 1.461632145$ .8856031944

Corollaire 3 : $\Gamma(x)$ et $\frac{\Gamma(x)}{x}$ tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Preuve : C'est immédiat si x tend vers l'infini par valeurs entières.
Si x est réel, conclure par croissance de Γ sur $[c, +\infty[$ et encadrement.

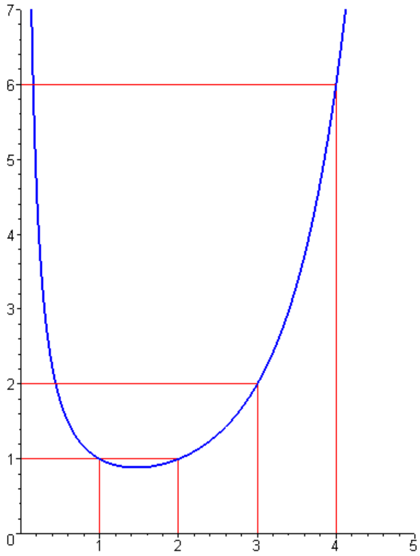
$$2 \leq n \leq x < n+1 \Rightarrow (n-1)! \leq \Gamma(x) \leq n! \quad \text{et} \quad \frac{(n-1)!}{n+1} \leq \frac{\Gamma(x)}{x} \leq \frac{n!}{n} .$$

Ou bien $\frac{\Gamma(x)}{x} = \frac{x-1}{x}.\Gamma(x-1) \sim \Gamma(x-1) \to +\infty$. Plus généralement $\frac{\Gamma(x)}{x^k} \to +\infty$.

Exercice 3 : Retrouver ce résultat en montrant que $\forall A > 0 \quad \forall x > 0 \quad \Gamma(x) \geq e^{-A}\frac{A^x}{x}$.

```
> with(plots):alias(G=GAMMA):
p:=plot(G(x),x=0..5,0..7,numpoints=700,color=blue,thickness=2):
v:=k->plot([k,t,t=0..G(k)]):h:=k->plot([t,(k-1)!,t=0..k]):
display({p,seq(v(k),k=1..4),seq(h(k),k=2..4)});
```

Proposition 3 : $(\forall x > 0)\ \ \Gamma'(x)^2 \le \Gamma(x).\Gamma''(x)$. La fonction $\Omega = \ln \Gamma$ est convexe.



Preuve : Il s'agit d'établir que

$$\Big(\int_0^{+\infty} \ln t.t^{x-1}.e^{-t}.dt\Big)^2 \le \Big(\int_0^{+\infty} t^{x-1}.e^{-t}.dt\Big)\Big(\int_0^{+\infty} \ln^2 t.t^{x-1}.e^{-t}.dt\Big).$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\Big(\int_0^{+\infty} f(t)g(t).dt\Big)^2 \le \Big(\int_0^{+\infty} f(t)^2.dt\Big)\Big(\int_0^{+\infty} g(t)^2.dt\Big)$$

aux deux fonctions de carré intégrable

$$f(t) = t^{\frac{x-1}{2}}.e^{-t/2} \quad \text{et} \quad g(t) = t^{\frac{x-1}{2}}.e^{-t/2}\ \ln t.$$

La fonction $\Omega = \ln \Gamma$ est C^2 comme composée et

$$\Omega'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\ ,\quad \Omega''(x) = \frac{\Gamma''(x).\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2} \ge 0.$$

Donc $\Omega = \ln \Gamma$ est convexe, décroissante sur $]0, c]$, croissante sur $[c, +\infty[$.

Remarque : Harald Bohr et Mollerup ont démontré en 1922 que la fonction Γ est la seule fonction $\mathbf{R}^*_+ \to \mathbf{R}^*_+$ telle que :

(i) $\Gamma(1) = 1$ (ii) $\Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$ (iii) $\ln \Gamma$ est convexe.

Nous reviendrons sur ce sujet au § 9.

Proposition 4 : La fonction Γ est analytique sur $]0, +\infty[$.

Preuve : Il s'agit de montrer qu'elle est développable en série entière en tout point $x_0 > 0$.

Ecrivons : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x_0-1}\, t^{x-x_0}\,.dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x_0-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^n.\ln^n t}{n!}.dt$.

Formellement : $\Gamma(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{x_0-1}\frac{(x-x_0)^n.\ln^n t}{n!}.dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{x_0-1}\ln^n t.dt\Big).\frac{(x-x_0)^n}{n!}$.

Il reste à justifier l'interversion des sommations à l'aide du théorème d'intégration des séries.

Or ce théorème s'applique pour $|\,x - x_0\,| < x_0$. Notons en effet $u_n(t) = e^{-t} \ln^n t\ t^{x_0-1}\dfrac{(x-x_0)^n}{n!}$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} |u_n(t)|.dt = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n(t)|.dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x_0-1}e^{|x-x_0||\ln t|}.dt < +\infty \quad \text{pour } |\,x - x_0\,| < x_0 .$$

Le premier échange de sommation découle d'un argument d'associativité de bornes supérieures.

Remarque : ce résultat est plus fort que celui de la prop. 2, et il l'implique.

Métamorphoses de Γ. Les intégrales suivantes se ramènent facilement à la fonction Γ :

1) $(\forall x > 0)\ \ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^1 \ln^{x-1}\frac{1}{t}.dt = \int_0^1 (-\ln t)^{x-1}.dt = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^{x-1} u}{u^2}.du$.

2) Pour tout $b > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^b}.dt = \Gamma\Big(1 + \frac{1}{b}\Big)$. Cas où $b = 2$?

3) Plus généralement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ct^b}t^{a-1}.dt$ est définie ssi $\dfrac{a}{b} > 0$ et $c > 0$, et vaut $\dfrac{\Gamma(a/b)}{|b|.c^{a/b}}$.

4) Nature et calcul éventuel de $\displaystyle\int_0^1 u^a.(-\ln u)^b.du$.

5) $(\forall x > 0)\ \ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}.(t-x).e^{-t}.\ln t.dt$. 6) $(\forall x > 0)\ \ \Gamma(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(xt - e^t).dt$.

2. Formules de Gauss et de Weierstrass.

Introduction.

Soit x un réel > 0 fixé. Cherchons un équivalent de la suite $P_n = (x+1)(x+2)\dots(x+n)$ quand $n \to +\infty$. Passons au logarithme : $\ln \frac{P_n}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{x}{k}) = \sum_{k=1}^{n}(\frac{x}{k} + O(\frac{1}{k^2}))$

$= x.(\ln n + \gamma + 1) +$ somme partielle d'une série absolument convergente.

Bref, $\ln \frac{P_n}{n!} = x.\ln n + A + o(1)$, donc $P_n \sim n^x.n!.e^A$, où e^A est une constante dépendant de x, donc une fonction de x. Nous trouverons au § 3 un équivalent de $n!$.

Nous allons montrer ici, avec Gauss, que $e^A = \frac{1}{\Gamma(x+1)}$. [3]

C'est facile à vérifier si $x = k \in \mathbf{N}$, car $k!.P_n = (k+n)! = n!.(n+1)\dots(n+k) \sim n^k.n!$.

2.1. Formule de Gauss.

Théorème 1 : Pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x.n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ (formule de **Gauss**).

Preuve :

L'idée est que $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} I_n(x)$ où $I_n(x) = \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n.t^{x-1}.dt$.

Ecrivons en effet : $I_n(x) = \int_0^{+\infty} f_n(t).dt$, où

$f_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n\ t^{x-1}$ si $0 \le t \le n$, 0 si $t \ge n$.

Or, pour tout t $f_n(t) \to e^{-t}\ t^{x-1}$ et, pour tout t : $0 \le f_n(t) \le e^{-t}\ t^{x-1}$ car $\ln(1+u) \le u$.

Le théorème de convergence dominée s'applique, et conclut.

Or par changement de variable et I.P.P.

$$I_n(x) = n^x \int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.du = n^x J_n(x)$$

$$J_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n.d(\frac{u^x}{x}) = \frac{n}{x}\int_0^1 (1-u)^{n-1} u^x.du = \frac{n}{x} J_{n-1}(x+1) = \frac{n(n-1)\dots1}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Remarques : 1) On peut montrer que $f_n(t) \uparrow e^{-t}\ t^{x-1}$, la convergence étant uniforme sur tout segment [a, b], 0 < a < b. Il y a donc convergence dominée du pauvre.

2) Le chgt de var $t = nu$ évite un problème. Une i.p.p. ramène $\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n.t^{x-1}.dt$ à $\int_0^n (1-\frac{t}{n})^{n-1}.t^x.dt$ ce qui est gênant. Mieux vaut alors considérer $\int_0^a (1-\frac{t}{a})^n.t^{x-1}.dt$.

3) En fait $I_n(x) = n^x \int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.du = n^x B(x, n+1)$ et le caclul fait anticipe sur le § 2..

4) On a $I_n(x) = n\int_0^1 e^{-n(u-\ln(1-u))}du$, et la méthode de Laplace donne un développement asymptotique à tous ordres de $I_n(x)$.

Exercice 5 : On note $g_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n$ si $0 \le t \le n$, 0 si $t \ge n$.

1) Montrer que $\forall t \ge 0\quad 0 \le e^{-t} - g_n(t) \le \frac{t^2}{n}.e^{-t}$ (se placer sur $[0, \sqrt{n}[$, $[\sqrt{n}, n]$, $[n, +\infty[$)

---

[3] On pourrait partir de cette formule pour définir la fonction Γ.

2) Retrouver que $I_n(x) \to \Gamma(x)$ sans convergence dominée.

Corollaire 1 : Pour tout $x > 0$, $x(x+1)\dots(x+n) \sim \dfrac{n^x.n!}{\Gamma(x)}$ quand n tend vers $+\infty$.

Preuve : ce n'est qu'une autre formulation de Gauss.

Exercice : Soient a et $b > 0$. Discuter la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(a+1)...(a+n)}{b(b+1)...(b+n)}$.

Corollaire 2 : Pour $0 < x < 1$, $\dfrac{1}{\Gamma(x).\Gamma(1-x)} = x\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{x^2}{n^2})$.

Preuve : $\dfrac{1}{\Gamma(x).\Gamma(1-x)} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{x(x+1)...(x+n)(1-x)(2-x)...(n+1-x)}{n.(n!)^2}$

$$= \lim_{n\to+\infty} x\frac{(x+1)...(x+n)(1-x)(2-x)...(n-x)}{(n!)^2}\,\frac{n+1-x}{n} = \lim_{n\to+\infty} x\frac{n+1-x}{n}\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{x^2}{k^2}).$$

Remarque : ce résultat annonce la formule des compléments.

Corollaire 3 : $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(\frac{1}{2}+n) = \dfrac{1.3...(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}.n!}\sqrt{\pi}$.

Preuve : Si l'on fait $x = ½$ dans la formule de Gauss, il vient :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1/2}.n!.2^{n+1}}{1.3.5...(2n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1/2}.n!.2^{2n+1}}{(2n+1).(2n)!} = \sqrt{\pi}$$

par l'équivalent de Stirling, ou par celui de Wallis. Les $\Gamma(\frac{1}{2}+n)$ s'en déduisent.

2.2. Formule de Weierstrass.

La formule de Weierstrass, qui se déduit aisément de celle de Gauss, présente $\Gamma(x)$ sous forme d'un produit infini. Elle a permis à Weierstrass de prolonger Γ à la variable complexe.

Proposition 2 : Pour tout $x > 0$,

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(x)} = x\,e^{\gamma x}\prod_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{x}{n}}\left(1+\frac{x}{n}\right) \quad \text{(formule de \textbf{Weierstrass})}}$$

Preuve : Il découle de la formule de Gauss que :

$$\ln\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} x\ln n - \ln x - \sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{x}{k})$$

$$= \lim_{n\to+\infty} x(\ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}) - \ln x + \sum_{k=1}^{n}(\frac{x}{k}-\ln(1+\frac{x}{k})) = -\gamma x - \ln x + \sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{x}{k}-\ln(1+\frac{x}{k}))$$

La série converge car son terme général est $O(1/k^2)$.

2.3. Les fonctions Ω et Ψ.

Définition 1 : On note Ω et Ψ les fonctions définies par $\Omega(x) = \ln\Gamma(x)$ et $\Psi(x) = \Omega'(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

Proposition 3 : La fonction $\Omega :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ vérifie :

i) $\Omega(1) = 0$; ii) $\forall x > 0$ $\Omega(x+1) - \Omega(x) = \ln x$; iii) Ω est convexe.

Elle est de classe C^∞ et est donnée par :

$$\Omega(x) = \lim_{n\to+\infty} x.\ln n - \ln x - \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{x}{k}) = -\ln x - \gamma x + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln(1+\frac{x}{n})\right).$$

Preuve : Tout cela récapitule des résultats antérieurs.

Proposition 4 : La fonction Ψ vérifie $(\forall x > 0)\quad \Psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n})$.

Preuve : Il s'agit de dériver terme à terme la série $\sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{x}{n} - \ln(1+\frac{x}{n}))$.

Or la série dérivée $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(n+x)}$ converge normalement sur tout segment [0, a].

Corollaire 1 : $\gamma = -\Gamma'(1) = 1 - \Gamma'(2) = -\int_0^{+\infty} e^{-t}.\ln t.dt$.

Preuve : $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}.\ln t.dt$ découle de l'expression de $\Gamma'(x)$.

$\Gamma'(1) = \Psi(1) = -1 - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = -\gamma$, car la série est télescopique.

Enfin $\Gamma'(x+1) = x.\Gamma'(x) + \Gamma(x)$ fournit $\Gamma'(2)$, et de proche en proche $\Gamma'(3)$, $\Gamma'(4)$, en fonction de γ.

Corollaire 2 : Pour tout $x > 0$, et tout $k \geq 1$, $D^k(\frac{\Gamma'}{\Gamma})(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^k(k-1)!}{(x+n)^k}$.

Application : Développement limité et en série de Γ au V(1).

$$1-\gamma h+\left(\frac{1}{12}\pi^2+\frac{1}{2}\gamma^2\right)h^2+\left(-\frac{1}{3}\zeta(3)-\frac{1}{12}\pi^2\gamma-\frac{1}{6}\gamma^3\right)h^3+$$
$$\left(\frac{1}{160}\pi^4+\frac{1}{3}\zeta(3)\gamma+\frac{1}{24}\pi^2\gamma^2+\frac{1}{24}\gamma^4\right)h^4+$$
$$\left(-\frac{1}{5}\zeta(5)-\frac{1}{160}\pi^4\gamma-\frac{1}{36}\zeta(3)\pi^2-\frac{1}{6}\zeta(3)\gamma^2-\frac{1}{72}\pi^2\gamma^3-\frac{1}{120}\gamma^5\right)h^5+\left(\frac{61}{120960}\pi^6\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\zeta(5)\gamma+\frac{1}{320}\pi^4\gamma^2+\frac{1}{18}\zeta(3)^2+\frac{1}{36}\zeta(3)\pi^2\gamma+\frac{1}{18}\zeta(3)\gamma^3+\frac{1}{288}\pi^2\gamma^4+\frac{1}{720}\gamma^6\right)$$
$$h^6+O(h^7)$$

Exercice : 1) Quelle est la forme générale des $\Gamma^{(p)}(1)$?
2) Justifier ces observations en partant de la formule $\Gamma' = \Gamma.\Psi$.

2.4. Quelques représentations intégrales de Ψ et Ω.

Proposition 5 : $(\forall x > 0)\quad \Psi(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}.dt = -\gamma - \frac{1}{x} + \int_0^1 \frac{1-(1-u)^x}{u}.dt$.

Preuve : L'intégrale $\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}.dt$ est faussement impropre en 1. Ecrivons :

$$\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}.dt = \int_0^1 (1+t+\ldots+t^{n-1}-1-t^x-\ldots-t^{n-1+x}+\frac{t^n-t^{x+n}}{1-t}).dt = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}) + \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}.t^n.dt.$$

Or cette dernière intégrale tend vers 0 par convergence dominée ou par les gendarmes.

Corollaire : $(\forall x > 0)\quad \Psi(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + x + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n.n!}$ (formule de **Stern**)

Preuve : Développer $\int_0^1 \frac{1-(1-u)^x}{u}.dt$ en série à l'aide de la formule du binôme de Newton.

S'assurer ensuite que l'on peut intervertir intégration et sommation.

Proposition 6 : $(\forall x > 0) \quad \Psi(x) = -\gamma + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{1-e^{-t}}.dt$.

Preuve : Simple corollaire de la prop. 5. Le chgt de var. $u = e^{-t}$ donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{1-e^{-t}}.dt = \int_0^1 \frac{1-u^{x-1}}{1-u}.du = \int_0^1 \frac{1-u^x}{1-u}.du + \int_0^1 \frac{u^x-u^{x-1}}{1-u}.du = \Psi(x) + \gamma + \frac{1}{x} - \frac{1}{x}.$$

Proposition 7 : $(\forall x > 0) \quad \Omega(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \left[(x-1).e^{-t} - \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right].\mathrm{dt}$ (formule de **Plana**)

Preuve : Observons d'abord que le second membre est bien défini. L'intégrale est faussement impropre en 0, et convergente en $+\infty$. Cette formule s'établit par dérivation sous $\int$.

Proposition 8 : (formule de **Cauchy-Binet**).

$$\boxed{(\forall x > 0) \quad \Omega(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right).e^{-xt}.\mathrm{dt} .}$$

Preuve : Si l'on dérive deux fois les deux membres, il vient, après justifications aisées :

$\Omega''(x) = \Psi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t.e^{-xt}}{1-e^{-t}}.dt$. Or cela découle de la prop. 6.

Par conséquent $\Psi(x) = -\frac{1}{2x} + \ln x - \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right).e^{-xt}.\mathrm{dt} + a$.

Comme $\Psi(x) = \ln x + o(1)$ au $V(+\infty)$, $a = 0$.

D'où $\Omega(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right).\ln x - x + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right).e^{-xt}.\mathrm{dt} + b$.

En vertu de Stirling, $b = 0$ (cf. § 3) [4].

Proposition 9 : $\boxed{\forall x > 0 \quad \int_x^{x+1} \Omega(t).dt = x(\ln x - 1) + \frac{1}{2}\ln(2\pi).}$ (intégrale de **Raabe**).

Preuve : Les deux membres ont même dérivée, car $\Omega(x+1) - \Omega(x) = \ln x$.
Il reste à montrer qu'ils ont même valeur en un point. On peut procéder par deux méthodes.
1ère méthode : faire tendre x vers $+\infty$.
Il découle de la prop. 8, par convergence dominée ou par les gendarmes, que :

$$\Omega(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1) \text{ au } V(+\infty).$$

Par intégration de relations de comparaison, on en déduit que :

$$\int_x^{x+1} \Omega(t).dt = \int_x^{x+1} \left(\left(t-\frac{1}{2}\right).\ln t - t + \frac{\ln(2\pi)}{2}\right).dt + o(1) = x.\ln x - x + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1) \text{ au } V(+\infty).$$

La constante cherchée est donc nulle.

2ème méthode : faire tendre x vers $0+$.

Tout d'abord $\Omega(x) \sim -\ln x$ au $V(0+)$ (pourquoi ?), donc l'intégrale $\int_0^1 \Omega(t).dt$ converge.

[4] En 3.2, on reprendra cette formule pour pousser plus avant le développement asymptotique de $\Omega(x)$. Il n'y a donc pas pétition de principe.

Comme $\Omega(x)$ est décroissante sur]0, 1], par encadrement $\int_0^1 \Omega(t).dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Omega(\frac{k}{n})$.

Or la formule de multiplication de Legendre-Gauss (cf. § 7) montre que :

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Omega(\frac{k}{n}) = \frac{n-1}{2n}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\frac{\ln n}{n}$. On en déduit que $\int_0^1 \Omega(t).dt = \frac{1}{2}\ln(2\pi)$. Cqfd.

3. Formule de Stirling.

Nous allons étudier le comportement de $\Gamma(x)$ en $+\infty$, par des méthodes intégrales gravitant autour de la méthode de Laplace. Rappelons que $\Gamma(½) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}.dt = \sqrt{\pi}$.

3.1. Formule de Stirling.

Théorème 5 : $\boxed{\Gamma(x+1) \sim (\frac{x}{e})^{x}\sqrt{2\pi x} \quad \text{quand } x \to +\infty}$ (formule de **Stirling**).

1) Preuve heuristique.

Notons pour commencer que $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x.e^{-t}.dt = \int_0^{+\infty} e^{-t+x\ln t}.dt$.

La fonction $t \to -t + x\ln t$ est croissante sur $]0, x]$, décroissante sur $[x, +\infty[$.

Les changements de variable $t = xs$, puis $v = s - 1$ donnent $\Gamma(x+1) = x^{x+1}e^{-x}\int_{-1}^{+\infty} e^{x(v-\ln(1+v))}.dv$.

Ils ont pour effet de placer le pic en 0.

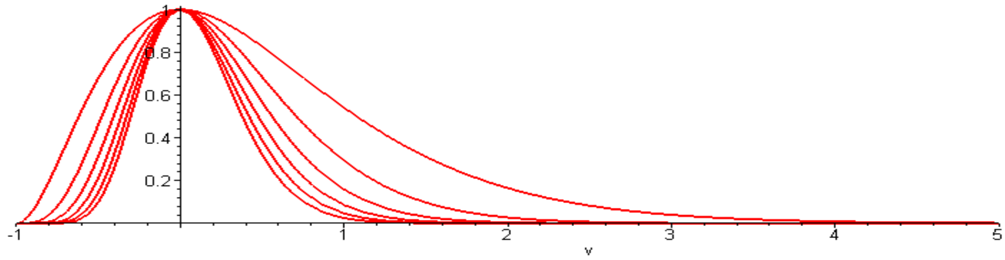
$$\Gamma(x+1) = x^{x+1}e^{-x}F(x) \text{ , où } F(x) = \int_{-1}^{+\infty} e^{x.h(v)}.dv \text{ , avec } h(v) = -v + \ln(1+v).$$

La fonction $h(v)$ est croissante sur $]-1, 0]$, décroissante sur $[0, +\infty[$

A mesure que x augmente, $F(x) \to 0$ par convergence dominée, mais surtout la masse se concentre au V(0), de sorte que l'on peut remplacer h(v) par son équivalent en 0.

On pressent que $F(x) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xv^2/2}.dv = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}$, après changement de variable $t = v\sqrt{\frac{x}{2}}$.

```
> with(plots):h:=v->-v+ln(1+v);f:=(x,v)->exp(x*h(v));
> p:=x->plot(f(x,v),v=-1..5):display([seq(p(2*k),k=1..6)],thickness=2);
```



2) Démonstration par découpe à la Chasles.

Fixons une fois pour toutes $\varepsilon \in]0, 1[$. L'équivalence $h(v) \sim -\frac{v^2}{2}$ au V(0) se traduit par :

$$\exists\alpha \in]0, 1[\quad \forall v \in [-\alpha, \alpha] \qquad -(1+\varepsilon)\frac{v^2}{2} \le h(v) \le -(1-\varepsilon)\frac{v^2}{2}.$$

Chasles $F(x) = \int_{-1}^{+\infty} e^{x.h(v)}.dv = \int_{-1}^{-\alpha} e^{x.h(v)}.dv + \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{x.h(v)}.dv + \int_{\alpha}^{+\infty} e^{x.h(v)}.dv = A(x) + B(x) + C(x)$ resp.

$$\sqrt{\frac{2}{1+\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_{-\alpha\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}x}}^{+\alpha\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}x}} e^{-t^2}.dt = \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-(1+\varepsilon)x.\frac{v^2}{2}}.dv \le B(x) \le \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-(1-\varepsilon)x.\frac{v^2}{2}}.dv = \sqrt{\frac{2}{1-\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_{-\alpha\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}x}}^{+\alpha\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}x}} e^{-t^2}.dt$$

par changements de variables $t = v\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}x}$.

$B_1(x) = \sqrt{\frac{2}{1-\varepsilon}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\int_{-\alpha\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}x}}^{+\alpha\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}x}} e^{-t^2}.dt$ est équivalent à $\sqrt{\frac{2}{1-\varepsilon}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}.dt = \sqrt{\frac{2\pi}{1-\varepsilon}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$, donc

$B_1(x) \leq \sqrt{\frac{2\pi}{1-\varepsilon}}\,\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{x}}$ pour x assez grand. De même, $B_2(x)$ $\sqrt{\frac{2}{1+\varepsilon}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\int_{-\alpha\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}x}}^{+\alpha\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}x}} e^{-t^2}.dt \geq \sqrt{\frac{2\pi}{1+\varepsilon}}\,\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{x}}$.

Ainsi, pour x assez grand $\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}}\sqrt{\frac{2\pi}{x}} \leq B(x) \leq \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}$.

Montrons que $C(x) = \int_{\alpha}^{+\infty} e^{x.h(v)}.dv = o(\frac{1}{\sqrt{x}})$ au $V(+\infty)$.

La majoration $0 < C(x) \leq \int_{\alpha}^{+\infty} e^{x.h(\alpha)}.dv = +\infty$ ne conclut pas, mais, si $x > 1$:

$C(x) \leq e^{(x-1)h(\alpha)}\int_{\alpha}^{+\infty} e^{h(v)}.dv$. On conclut par comparaison exponentielle-puissance.

Idem pour $A(x) = \int_{-1}^{-\alpha} e^{x.h(v)}.dv$. Par conséquent, pour x assez grand :

$$\left(\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} - 2\varepsilon\right)\sqrt{\frac{2\pi}{x}} \leq F(x) \leq \left(\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon}} + 2\varepsilon\right)\sqrt{\frac{2\pi}{x}}.$$

C'est-à-dire $(1 - \varepsilon')\sqrt{\frac{2\pi}{x}} \leq F(x) \leq (1 + \varepsilon'')\sqrt{\frac{2\pi}{x}}$.

3) <u>Démonstration par convergence dominée</u>.

Ecrivons $h(v) = \frac{-v^2}{2}.\theta(v)$, où $\theta(v) = \frac{v-\ln(1+v)}{v^2/2}$. Je dis que θ est C^1 sur $]-1, +\infty[$ et décroissante.

Une méthode consiste à noter que $\theta(v) = 2\int_0^1 \frac{s}{1+vs}.ds$ et $\theta'(v) = -2\int_0^1 \frac{s^2}{(1+vs)^2}.ds$.

On peut aussi noter que θ est DSE en 0 et C^∞ ailleurs, puis étudier ses variations.

On a : $F(x) = \int_{-1}^{+\infty} e^{-\frac{xv^2}{2}\theta(v)}.dv = \sqrt{\frac{2}{x}}\int_{-\sqrt{x/2}}^{+\infty} e^{-t^2\theta(t\sqrt{\frac{2}{x}})}.dt = \sqrt{\frac{2}{x}}\,G(x)$.

Or $G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,t).dt \to \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}.dt = \sqrt{\pi}$ par convergence dominée.

Ici $g(x, t) = \exp(-t^2\,\theta(t\sqrt{\frac{2}{x}}))$ si $t \geq -\sqrt{\frac{x}{2}}$, 0 sinon.

Convergence simple : $g(x, t) \to \exp(-t^2)$ quand $x \to +\infty$,

Domination : pour $x \geq 2$, $0 \leq g(x, t) \leq \varphi(t)$, où $\varphi(t) = \exp(-t^2)$ pour $t \leq 0$, $\exp(-t^2\,\theta(t))$ pour $t \geq 0$.

4) <u>Une variante par convergence dominée</u>.

Le changement de variable $y = x + t\sqrt{x}$ donne $\Gamma(x + 1) = \int_0^{+\infty} y^x.e^{-y}.dy = (\frac{x}{e})^x\sqrt{x}\int_R f(x,t).dt$,

où $f(x, t) = 0$ si $t \leq -\sqrt{x}$, $f(x, t) = (1 + \frac{t}{\sqrt{x}})^x\, e^{-t\sqrt{x}}$ si $t \geq -\sqrt{x}$.

Fixons t. Quand x tend vers $+\infty$, $f(x, t) = \exp\left[x\ln(1 + \frac{t}{\sqrt{x}}) - t\sqrt{x}\right]$ tend vers $\exp -\frac{t^2}{2}$.

Supposons $x \geq 1$. Je dis que $0 < f(x, t) \leq (1 + t).e^{-t}$ si $t \geq 0$ et $0 < f(x, t) \leq e^{-t^2/2}$ si $-\sqrt{x} < t \leq 0$.

$A(t) = \ln(1 + t) - x\ln(1 + \frac{t}{\sqrt{x}}) + t(\sqrt{x} - 1)$ vérifie $A'(t) = \frac{(\sqrt{x}-1).t^2}{(t+1)(t+\sqrt{x})} \geq 0$.

A est croissante sur $\mathbf{R}_+$; comme $A(0) = 0$, $A(t) \geq 0$ pour $t \geq 0$.

$B(u) = \ln(1 + u) \leq u - \frac{u^2}{2}$ pour $-1 < u \leq 0$, par étude des variations ou développement en série.

On en déduit $B(\frac{t}{\sqrt{x}}) \leq 0$ pour $-\sqrt{x} < t \leq 0$.

Le théorème de convergence dominée s'applique, avec une majorante intégrable

$$0 < f(x, t) \leq \varphi(t) \ , \ \text{où} \quad \varphi(t) = (1+t).e^{-t} \ \text{ si } t \geq 0 \ , \ e^{-t^2/2} \ \text{ si } t \leq 0.$$

Par conséquent, $\int_R f(x,t).dt \to \int_R e^{-t^2/2}.dt$ quand $x \to +\infty$.

3.2. Développement asymptotique de Γ en +∞.

Pour obtenir ce développement, partons de la formule de Cauchy-Binet :

$$(\forall x > 0) \quad \Omega(x) = (x - \frac{1}{2}) \ln x - x + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \int_0^{+\infty} \frac{1}{t}(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}).e^{-xt}\,dt \ .$$

Cette formule, qui a été établie à l'aide de 3.1, fait apparaître Ω comme somme d'une fonction élémentaire et d'une transformée de Laplace. Or on sait que le comportement asymptotique en +∞ de la transformée de Laplace de $f(s)$ dépend du comportement de $f(s)$ en 0+.

Avec **Maple** :

```
> with(inttrans);f:=s->1/s*(1/(1-exp(-s))-1/s-1/2);
```

$$[addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable]$$

```
> dl:=series(f(s),s=0,9);
```

$$dl := \frac{1}{12} - \frac{1}{720}s^2 + \frac{1}{30240}s^4 + O(s^6)$$

```
> (x-1/2)*ln(x)-x+1/2*ln(2*Pi)+laplace(dl,s,x);
```

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\ln(x) - x + \frac{1}{2}\ln(2\,\pi) + \frac{\frac{1}{12}}{x} - \frac{1}{360}\frac{1}{x^3} + \frac{\frac{1}{1260}}{x^5}$$

```
> asympt(exp((x-1/2)*ln(x)-x+1/2*ln(2*Pi)+laplace(dl,s,x)),x,5);
```

$$\left(\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{1}{12}\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{x}\right)^{(3/2)} + \frac{1}{288}\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{x}\right)^{(5/2)} - \frac{139}{51840}\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{x}\right)^{(7/2)} - \frac{571}{2488320}\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{x}\right)^{(9/2)} + O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(11/2)}\right)\right) \Bigg/ \left(\left(\frac{1}{x}\right)^x \mathbf{e}^x\right)$$

```
> Omega:=x->ln(GAMMA(x));series(Omega(x),x=infinity,9);
asympt(GAMMA(x),x,5);
```

$$(\ln(x) - 1)\,x + \ln(\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}) - \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{\frac{1}{12}}{x} - \frac{1}{360}\frac{1}{x^3} + \frac{\frac{1}{1260}}{x^5} + O\left(\frac{1}{x^7}\right)$$

$$\left(\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{1}{12}\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{x}\right)^{(3/2)} + \frac{1}{288}\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{x}\right)^{(5/2)} - \frac{139}{51840}\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{x}\right)^{(7/2)} - \frac{571}{2488320}\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{x}\right)^{(9/2)} + O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{(11/2)}\right)\right) \Bigg/ \left(\left(\frac{1}{x}\right)^x \mathbf{e}^x\right)$$

Remarque : on peut expliciter de développement asymptotique à tous ordres à l'aide des nombres de Bernoulli. Bourbaki le fait à l'aide de la variable complexe, et de la formule sommatoire d'Euler Mac-Laurin, je le fais plus élémentairement.

4. Les fonctions B et Δ.

4.1. La fonction B. [5]

[5] Notation due à Binet.

Proposition 1 : Si x et y sont réels, l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}.(1-t)^{y-1}.dt$ converge ssi x et y sont > 0.

On note $B(x, y)$ sa valeur.

<u>Preuve</u> : La fonction $t \to t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue positive sur]0, 1[, équivalente à $\frac{1}{t^{1-x}}$ en 0+ et à $\frac{1}{(1-t)^{1-y}}$ en 1 – 0. Donc elle est intégrable sur]0, ½] ssi $x > 0$ et en [½, 1 [ssi $y > 0$.

<u>Remarque</u> : Si x et/ou y sont ≥ 1, l'intégrale est faussement impropre et/ou en 0 et en 1.

Proposition 2 : La fonction B vérifie

i) $B(x, y) = B(y, x)$ ii) $B(x + 1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$

iii) $B(a, n) = \frac{(n-1)!}{a(a+1)...(a+n-1)}$ pour $a > 0$, $n \in \mathbf{N}^*$.

iv) $B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$ pour $(p, q) \in \mathbf{N}^{*2}$.

<u>Preuve</u> : i) découle du changement de variable $u = 1 - t$.

ii) Intégrons par parties ! $B(x + 1, y) = \int_0^1 t^x.(1-t)^{y-1}.dt = \int_0^1 t^x.d(\frac{-1}{y}(1-t)^y)$

$= [\dots] + \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}.(1-t)^y.dt = \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}.(1-t)^{y-1}.(1-t).dt = \frac{x}{y}[B(x, y) - B(x + 1, y)]$,

d'où $B(x + 1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$. iii) se déduisent de i) et ii) par récurrence sur n.

Proposition 3 : Pour x et $y > 0$, $B(x, y) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta.\sin^{2y-1}\theta.d\theta$.

<u>Preuve</u> : Faire le changement de variable $t = \cos^2\theta$, ou plutôt $\theta = \text{Arccos}\sqrt{t}$.

Corollaire : La fonction de Wallis $W(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x\theta.d\theta$ est définie pour $x > -1$, et liée à la fonction B par la formule $W(x) = \frac{1}{2} B(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2})$.

<u>Exemples</u> : i) $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \pi$ en vertu de la prop. 3.

ii) $B(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = \frac{2\pi}{3}\sqrt{3}$.

C'est une intégrale abélienne associée à la cubique $y^3 = x^2(1-x)$. Cette cubique admet l'origine comme point double, donc elle est unicursale. Si on la paramètre par $x/y = u$, on obtient le paramétrage $x = \frac{u^3}{1+u^3}$, $y = \frac{u^2}{1+u^3}$, d'où $B(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = 3\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3}$.

Exercice : Soient x et y réels. Etudier la suite $S_n = \frac{1}{n^{x+y-1}} \sum_{k=1}^{n-1} k^{x-1}(n-k)^{y-1}$.

Exercice : Discuter l'existence des intégrales suivantes, et les exprimer à l'aide de B :

$\int_{(0,1)} u^a.(1-u^c)^b.du$ $\int_{(a,b)} (u-a)^{x-1}.(b-u)^{y-1}.du$ ($a < b$) $\int_{-1}^{+1} \frac{(1+x)^{2p-1}.(1-x)^{2q-1}}{(1+x^2)^{p+q}}.dx$.

4.2. <u>La fonction Δ.</u>

Proposition 4 : Le domaine de définition réel de : $\Delta(\mathrm{r, s}) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{r-1}}{(1+u)^s}.du$ est $0 < r < s$.

Preuve : La fonction $u \to \frac{u^{r-1}}{(1+u)^s}$ est continue positive sur $]0, +\infty[$,

équivalente à $\frac{1}{u^{1-r}}$ en 0+, donc intégrable ssi r > 0, et à $\frac{1}{u^{s+1-r}}$ en $+\infty$, donc intégrable ssi s > r.

La fonction Δ peut être aisément reliée à la fonction B.

Proposition 5 : On a les formules :

♣ Pour $0 < r < s-1$ $\quad \Delta(r, s) + \Delta(r+1, s) = \Delta(r, s-1)$

♦ Pour $0 < r < s$ $\quad \Delta(r, s) = \frac{s}{r}.\Delta(r+1, s+1)$.

♥ Pour $0 < r < s-1$ $\quad \Delta(r, s) = \frac{s-1-r}{r}.\Delta(r+1, s+1)$.

♠ Pour $0 < r < s$ $\quad \Delta(r, s) = B(s-r, r)$.

Preuve : Les trois premières formules sont faciles et laissées au lecteur.

♠ découle du changement de variable $t = \frac{u}{u+1}$.

Corollaire 1 : Soit $c > 0$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u^c)^b}.du$ converge ssi $b > \frac{a+1}{c} > 0$, et alors :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u^c)^b}.du = \frac{1}{c}\, B\left(b - \frac{a+1}{c}, \frac{a+1}{c} \right).}$$

Corollaire 2 : L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^c}$ converge ssi $c > 1$, et alors :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^c} = \frac{1}{c}\, B\left(1 - \frac{1}{c}, \frac{1}{c} \right).}$$

Corollaire 3 : Pour tout $b > ½$, $\int_0^{+\infty} \frac{du}{(u^2+1)^b} = \frac{1}{2} B\left(b - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$.

Corollaire 4 : Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\int_0^{+\infty} \frac{du}{(u^2+1)^n} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}\theta.d\theta = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}.(n-1)!^2} \frac{\pi}{2}$.

Corollaire 5 : Pour tous x et $y > 0$, $B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}.dt$.

5. Applications de la fonction Γ à des équivalents.

La fonction Γ fournit des équivalents simples de fonctions définies comme séries ou intégrales.

5.1. Méthode de Laplace.

Théorème : Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbf{C}$ une fonction réglée vérifiant les deux propriétés :

i) $\exists r \in \mathbf{R}$ $f(s) = O(e^{rs})$ au $V(+\infty)$; ii) $f(s) \sim A.s^{a-1}$ ($A \in \mathbf{C}^*$, $a > 0$) au $V(0+)$.

Alors $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xs}.f(s).ds$ converge pour x assez grand, et $F(x) \sim A.\frac{\Gamma(a)}{x^a}$ quand $x \to +\infty$.

Preuve : L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xs}.f(s).ds$ est impropre en 0 et en $+\infty$.

Elle converge sur]0, 1] en vertu de ii) et sur $[1, +\infty[$ pour $x > r$.

La fonction $g(s) = f(s).e^{-(r+1)s}.s^{1-a}$ est bornée au V(0+) et au V(+∞).

Pour x > r + 1, écrivons :

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xs}.f(s).ds = \int_0^{+\infty} e^{-(x-r-1)s}.g(s).s^{a-1}.ds = \frac{1}{(x-r-1)^a}\int_0^{+\infty} e^{-t}.g(\frac{t}{x-r-1}).t^{a-1}.dt .$$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-t}.g(\frac{t}{x-r-1}).t^{a-1}.dt \to \mathrm{A}.\Gamma(a)$ par convergence dominée. Cqfd.

<u>**Application 1** : Equivalent des intégrales</u> $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^a)^n}$ (a > 0).

Tout d'abord, I_n existe pour na > 1. Ecrivons $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} e^{-n\ln(1+t^a)}.dt$.

Le changement de variable $s = \ln(1 + t^a)$ donne $\mathrm{I}_n = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-ns}.(e^s-1)^{\frac{1}{a}-1}.e^s.ds$.

Ici $f(s) \sim s^{\frac{1}{a}-1}$ en 0+ , donc $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^a)^n} \sim \frac{1}{n^{1/a}}\Gamma(1+\frac{1}{a})$ quand $n \to +\infty$.

<u>**Application 2** : Equivalent de</u> $\mathrm{F}(x) = \int_{-1}^{+\infty} e^{x(-v+\ln(1+v))}.dv$ <u>quand $x \to +\infty$</u>.

Soit $h_1(v) = -v + \ln(1 + v)$ pour $v \geq 0$, $h_2(v) = -v + \ln(1 + v)$ pour $-1 < v \leq 0$.

$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} e^{x.h_1(v)}.dv + \int_{-1}^{0} e^{x.h_2(v)}.dv$. Posons $s = -h_1(v)$ dans la 1ère intégrale, $s = -h_2(v)$ dans la 2ème.

$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xs}.f_1(s).ds + \int_0^{+\infty} e^{-xs}.f_2(s).ds$.

Or $f_1(s) = \frac{dv}{ds} = \frac{1+v}{v} \sim \frac{1}{v} \sim \frac{1}{\sqrt{2s}}$ au V(0+), donc $\int_0^{+\infty} e^{-xs}.f_1(s).ds \sim \int_0^{+\infty} e^{-xs}.\frac{ds}{\sqrt{2s}} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

De même, $\int_0^{+\infty} e^{-xs}.f_2(s).ds \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$. Au final, $\mathrm{F}(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x}}$.

On en déduit aussitôt l'équivalent de Stirling de 3.1.

Remarque : les fonctions f_1 et f_2 peuvent s'expliciter à l'aide des fonctions de Lambert.

5.2. <u>Equivalents de séries entières</u>.

Rappelons les deux lemmes suivants :

Lemmes de pincements : 1) Soit f :]0, +∞[→ $\mathbf{R}_+$ une fonction décroissante et intégrable.

Pour tout h > 0, la série $h\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh)$ converge, et : $\lim_{h\to 0+} h.\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(x).dx$.

2) Soit f : [0, +∞[→ $\mathbf{R}$ une fonction réglée, décroissante sur [A, +∞[, et intégrable.

Pour tout h > 0, la série $h.\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh)$ converge, et : $\lim_{h\to 0+} h.\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(x).dx$.

Ces deux lemmes s'appliquent aux fonctions $f_a(t) = e^{-t}.t^{a-1}$ pour a > 0.

$$h\sum_{n=1}^{+\infty}(nh)^{a-1}.e^{-nh} = h^a\sum_{n=1}^{+\infty} n^{a-1}.e^{-nh} \to \Gamma(a) \quad \text{quand } h \to 0+ \text{ . Donc}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } a > 0 \text{ , } \sum_{n=1}^{+\infty} n^{a-1}.e^{-nh} \sim \frac{\Gamma(a)}{h^x} \quad \text{quand } h \to 0+}$$

Considérons les séries entières $f_a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^a}$, dites <u>polylogarithmes</u>.

Leur rayon de convergence est 1. Intéressons-nous ici à leur comportement quand $x \to 1-0$.

Par associativité de bornes supérieures, $f_a(x) \uparrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ quand $x \uparrow 1$, c'est-à-dire vers $+\infty$ si $a \leq 1$.

Si $a = 1$, $f_1(x) = -\ln(1-x)$. Si $a < 1$, posons $x = e^{-h}$; alors en vertu des lemmes de pincement :

$$f_a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nh}}{n^a} = h^{a-1}.h \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nh}}{n^a} \sim h^{a-1} \int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{-a}.dt = \frac{\Gamma(1-a)}{h^{1-a}} \sim \frac{\Gamma(1-a)}{(1-x)^{1-a}} \quad \text{quand } x \to 1-0.$$

Le lemme est appliqué à la fonction $\varphi(t) = e^{-t}.t^{-a}$, fonction qui obéit aux hypothèses de ces lemmes : elle est intégrable, décroissante sur $]0, +\infty[$ si $a \leq 0$, croissante puis décroissante si $0 < a < 1$.

Quand $x \to 1-0$, $f_a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^a}$ est équivalent à $\zeta(a)$ si $a > 1$, $-\ln(1-x)$ si $a = 1$, $\frac{\Gamma(1-a)}{(1-x)^{1-a}}$ si $a < 1$.

Exercice : 1) Domaine de définition de $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^x}{n^2}$? Continuité ?

2) Montrer que $F(x) \sim \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^x}{t^2}.dt = \Gamma(x+1)$ quand $x \to +\infty$.

5.3. <u>Equivalents d'intégrales elliptiques</u>.

Problème : 1) Soient g et h deux fonctions continues : $[0, a] \to \mathbf{R}^*_+$.

On suppose qu'au V(0+) : $g(t) \sim A.t^{\alpha-1}$ et $h(t) \sim B.t^{\beta}$ où B, α et β sont > 0.

Soit $\mu \geq \alpha/\beta$. Montrer que, quand $x \to 0+$, $F(x) = \int_{]0,a]} \frac{g(t)}{[h(t)+x]^{\mu}}.dt$

est équivalent à : $C\, x^{\alpha/\beta - \mu}$ si $\mu \geq \alpha/\beta$,

$C \ln \frac{1}{x}$ si $\mu = \alpha/\beta$,

où C est une constante qu'on exprimera à l'aide de A, B, α, β, μ et de la fonction Δ.

[<u>Indication</u> : On prouvera qu'on peut remplacer g et h par leurs parties principales.]

2) <u>Applications</u> : montrer que :

a) Quand $k \to 1-$, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \sim -\frac{\ln(1-k)}{2}$

b) Quand $x \to 0+$, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}} \sim -\ln x$

c) Quand $k \to 1-$, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t^2)}} \sim -\ln(1-k)$.

6. <u>Formule d'Euler</u>.

Une importante formule due à Euler relie les fonctions B et Γ.

$$(\forall x \;\&\; y > 0) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x).\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} .$$

Nous allons donner trois démonstrations de cette formule. La première repose sur la méthode de Laplace. La seconde, plus naturelle, passe par des intégrales doubles. La troisième anticipe sur la suite.

<u>1ère méthode : méthode de Laplace</u>.

Utilisons le résultat de 5.1 pour retrouver la formule de Gauss, puis démontrer celle d'Euler.

Soient x, a, $b > 0$. Le changement de variable $t = e^{-s}$ donne :

$$B(x + a , b) = \int_0^1 t^{x+a-1}.(1-t)^{b-1}.dt = \int_0^{+\infty} e^{-xs}.f(s).ds \text{ , où } f(s) = (1 - e^{-s})^{b-1}. e^{-as}$$

Comme $f(s) \sim s^{b-1}$ en 0+ , le théorème précédent donne : $B(x + a , b) \sim \dfrac{\Gamma(b)}{x^b}$ quand $x \to +\infty$.

1) Faisons $a = 1$, $x = n$. Il vient $B(n + 1 , b) = \dfrac{n!}{b(b+1)...(b+n)} \sim \dfrac{\Gamma(b)}{n^b}$

On en déduit la formule de Gauss $\Gamma(b) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^b.n!}{b(b+1)...(b+n)}$.

2) On a, en vertu de la formule de Gauss :

$$B(a, b) = \frac{(a+b)(a+b+1)...(a+b+n)}{a(a+1)...(a+n)} B(a + n +1, b) \sim \frac{n^{a+b}.n!}{\Gamma(a+b)}\,\frac{\Gamma(a)}{n^a.n!}\,\frac{\Gamma(b)}{(n+1)^b} \sim \frac{\Gamma(a).\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} .$$

<u>2ème méthode : intégrales doubles</u>.

Le schéma de calcul est le suivant :

$$\Gamma(x).\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}.e^{-t}.dt \int_0^{+\infty} u^{x-1}.e^{-u}.du = \iint_D t^{x-1}.u^{y-1}.e^{-t-u}.dt.du \text{ , où } D =]0, +\infty[^2$$

Dans cette intégrale double, effectuons le changement de variables (s, t) = (u + t, t).

Alors le domaine D devient $\Delta = \{ (s, t) ; 0 < t < s \}$ et le jacobien $\dfrac{D(t,u)}{D(s,t)} = 1$.

$$\text{D'où } \iint_D t^{x-1}.u^{y-1}.e^{-t-u}.dtdu = \iint_\Delta t^{x-1}.(s-t)^{y-1}.e^{-s}.ds.dt = \int_0^{+\infty} e^{-s} \left(\int_0^s t^{x-1}(s-t)^{y-1}.dt\right).ds .$$

Le changement de variable $t = sv$ donne $\int_0^s t^{x-1}(s-t)^{y-1}.dt = s^{x+y-1} \int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}.dv = B(x, y)\, s^{x+y-1}$

Par conséquent, $\Gamma(x).\Gamma(y) = B(x, y). \int_0^{+\infty} s^{x+y-1}.e^{-s}.ds = B(x, y).\Gamma(x + y)$.

Une <u>variante</u> consiste à poser $t = v^2$, $u = w^2$ et à passer en polaires :

$$\Gamma(x).\Gamma(y) = 4\int_0^{+\infty} v^{2x-1}.e^{-v^2}.dv \int_0^{+\infty} w^{2y-1}.e^{-w^2}.dw = 4\iint_D v^{2x-1}.w^{2y-1}.e^{-v^2-w^2}.dv.dw \text{ , où } D =]0, +\infty[^2$$

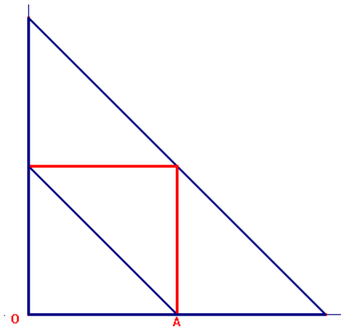
$$= 4\iint_D r^{2x+2y-1}.\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta.e^{-r^2}.dr.d\theta = 4\int_0^{+\infty} r^{2x+2y-1}.e^{-r^2}.dr . \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta.\sin^{2y-1}\theta.d\theta$$

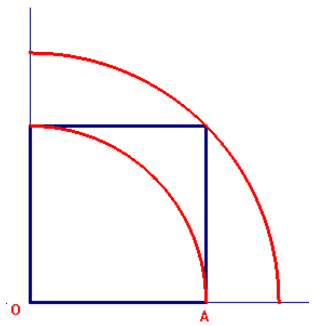
$$= B(x, y).\Gamma(x + y).$$

Cependant, ce sont là des intégrales doubles impropres. Si l'on veut montrer cela rigoureusement, voici comment procéder :

1) On commence par supposer x et $y \geq 1$. L'intégrale double est impropre sur $D = [0, +\infty[^2$.

2) On encadre $\iint_{C(A)} t^{x-1}.u^{y-1}.e^{-t-u}.dtdu$, où $C(A) = [0, A]^2$, en notant que le carré C(A) est compris entre les deux triangles pleins $t + u \leq A$ et $t + u \leq 2A$ de $[0, +\infty[^2$. Puis on change de variables.





Ou bien on encadre $4\iint_{D(A)} v^{2x-1}.w^{2y-1}.e^{-v^2-w^2}.dv.dw$, où C(A) = [0, A]^2 est compris entre deux quarts de disques de rayons A et A$\sqrt{2}$. Dans lesdites intégrales doubles, on passe en polaires.
Il reste à faire tendre A vers +∞.

3) Pour revenir à x et $y > 0$, il suffit de noter que $\Gamma(x + 1).\Gamma(y + 1) = B(x + 1, y + 1).\Gamma(x + y + 2)$ implique $\Gamma(x).\Gamma(y) = B(x, y).\Gamma(x + y)$.

<u>3ème méthode : équation fonctionnelle</u>.

Fixons $y > 0$. Il s'agit de montrer que $\forall x > 0 \quad \frac{1}{\Gamma(y)} B(x, y).\Gamma(x + y) = \Gamma(x)$.

La fonction $Y(x) = \frac{1}{\Gamma(y)} B(x, y).\Gamma(x + y)$ vérifie les trois propriétés fondamentales de Γ.

• $Y(1) = \frac{1}{\Gamma(y)} B(1, y).\Gamma(1 + y) = \frac{y}{y} = 1$.

• $Y(x + 1) = \frac{1}{\Gamma(y)} B(x + 1, y).\Gamma(x + 1 + y) = \frac{1}{\Gamma(y)} \frac{x}{x+y} B(x , y).(x + y).\Gamma(x + y) = x.Y(x)$.

• ln Y est convexe, car $\ln Y(x) = \ln B(x, y) + \ln \Gamma(x + y) - \ln \Gamma(y)$ est convexe comme somme de fonctions convexes. Cela est laissé en exercice.

Or nous montrerons au § 9 que ces trois propriétés caractérisent la fonction Γ.

<u>Applications</u>.

1) <u>Calcul de</u> $\Gamma(\frac{1}{2})$, <u>de</u> $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ <u>et de l'intégrale de Gauss</u> $\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}.dx$.

$\Gamma(\frac{1}{2})^2 = B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$, donc $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{2n-1}{2} \dots \frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}.(n!)^2}\sqrt{\pi}$. Et $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}.dx = \frac{1}{2}\Gamma(n + \frac{1}{2})$.

2) <u>Formule de duplication de Legendre</u>.

Montrons pour commencer que : $(\forall x > 0) \quad B(x , x) = 2^{-2x+1}.B(\frac{1}{2}, x)$.

$$B(x , x) = 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2x-1}\theta.\sin^{2x-1}\theta.d\theta = \frac{1}{2^{2x-2}}\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}(2\theta).d\theta$$

$$= \frac{1}{2^{2x-1}}\int_0^{\pi}\sin^{2x-1}\varphi.d\varphi = \frac{1}{2^{2x-2}}\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\varphi.d\varphi = \frac{1}{2^{2x-1}}B(\frac{1}{2}, x) .$$

La formule d'Euler donne $\frac{\Gamma(x)^2}{\Gamma(2x)} = \frac{1}{2^{2x-1}}\frac{\sqrt{\pi}.\Gamma(x)}{\Gamma(x+1/2)}$, donc $\Gamma(x).\Gamma(x + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(2x)}{2^{2x-1}}$.

On en déduit, en remplaçant x par $x/2$, la formule de duplication de **Legendre** :

$$\boxed{(\forall x > 0) \quad \Gamma(\frac{x}{2}).\Gamma(\frac{x+1}{2}) = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(x)}{2^{x-1}} .}$$

Nous reviendrons sur cette formule au § 8.

Exercice : <u>Fonction de Wallis</u> : $W(x) = \int_0^{\pi/2}\sin^x t.dt$.

1) Domaine de définition de W ? Montrer que W est de classe C^∞ sur son domaine.
2) Monotonie, convexité, limites ; calcul de W(0), W(1), W'(0) et W'(1) ; graphe ?
3) Relation entre $W(x + 2)$ et $W(x)$? Que dire de $(x + 1).W(x).W(x + 1)$?
4) Équivalents de $W(x)$ en $-1+$ et en $+\infty$?

7. Formule des compléments d'Euler.

Théorème : $\boxed{\forall x \in \ ]0, 1[\quad \Gamma(x).\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}}$ (formule des **compléments**).

Commençons par donner des énoncés équivalents de cette formule :

i) $B(1-x, x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$ ii) $\Delta(x, 1) = \int_0^{+\infty} \dfrac{t^{x-1}}{1+t}.dt = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$ iii) $x\prod_{n=1}^{+\infty}(1-\dfrac{x^2}{n^2}) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi}$.

i) en vertu de la formule d'Euler,
ii) en vertu des liens entre Δ et B, puis de la formule d'Euler,
iii) en vertu de la formule de Gauss (cf. § 2)

Il suffit donc de démontrer l'une ou l'autre des quatre formes.

La formule $\forall x \in \mathbf{R} \quad x\prod_{n=1}^{+\infty}(1-\dfrac{x^2}{n^2}) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi}$, valable aussi dans **C**, est due à Euler.

Elle peut se montrer de multiples façons, la plus simple étant de passer par les séries de Fourier.

La relation $\Delta(x, 1) = \int_0^{+\infty} \dfrac{t^{x-1}}{1+t}.dt = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$ peut se démontrer pour les rationnels $x = \dfrac{p}{q} \in \ ]0, 1[$ par des calculs algébriques, puis pour les réels $0 < x < 1$ par une argument de continuité et densité. Mais on peut aussi l'établir par transformation de Laplace.

La formule des compléments, qui met en jeu les valeurs de Γ uniquement sur]0, 1[, peut sembler anecdotique. Il n'en est rien, car elle peut servir à prolonger la fonction Γ à la droite réelle : si l'on pose $\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}\dfrac{1}{\Gamma(x)}$ pour $x > 0$ n'annulant pas $\sin(\pi x)$, on prolonge Γ à la droite réelle.

Nous reviendrons sur ce sujet au § 10.

1ère méthode : développement eulérien par séries de Fourier.

Les séries de Fourier permettent d'obtenir à peu de frais d'importantes identités dues à Euler.
Soit f la fonction 2π–périodique définie par $f(t) = \cos(\alpha t)$ si $|t| \le \pi$. On suppose $\alpha \in \mathbf{C}-\mathbf{Z}$ (sinon ?).
f est paire, continue et C^1 par morceaux, donc :

$$f(t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}.\cos(nt)\ ,$$

et il y a convergence normale de la série vers f. Si l'on fait $t = 0$ puis $t = \pi$, on obtient :

$$\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2} \quad \text{et} \quad \pi.\text{cotan}(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2} \quad (*).$$

Si $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Z}$, Parseval donne $\dfrac{\pi^2}{\sin^2(\alpha\pi)} = \sum_{n\in Z}\dfrac{1}{(\alpha-n)^2}$.

La fonction $g(x) = \text{cotan}\, x - \dfrac{1}{x}$ est définie et continue sur]–π, π[, et $\int_0^x g(t).dt = \ln\dfrac{\sin x}{x}$.

On déduit de ceci et de (*) que $\forall x \in \ ]-\pi, \pi[\quad \sin x = x\prod_{n=1}^{+\infty}(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2})$, puis on étend ceci à tout x.

2ème méthode : transformation de Laplace.

Cette méthode utilise une partie des résultats précédents, mais permet de conclure sans passer par la formule de Gauss. Notons $J(x) = \Delta(x, 1)$ pour simplifier.

Fixons $0 < x < 1$ et considérons la transformée de Laplace $F(y) = \int_0^{+\infty}\dfrac{t^{x-1}}{1+t}.e^{-ty}.dt$.

Elle est définie, C^0 sur $\mathbf{R}_+$, C^1 sur $\mathbf{R}^*_+$, et vérifie l'équation différentielle $F(y) - F'(y) = \dfrac{\Gamma(x)}{y^x}$.

On en déduit que $F(y) = \Gamma(x)\, e^y \int_y^{+\infty} t^{-x}.e^{-t}.dt$ (seule solution tendant vers 0 en $+\infty$).

Du coup $F(0) = J(x) = \Gamma(x) \int_0^{+\infty} t^{-x}.e^{-t}.dt = \Gamma(x)\,\Gamma(1-x)$.

Reste à montrer que $J(x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

Pour cela, en vertu de ce qui précède, il suffit d'établir que $J(x) = \dfrac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n . \dfrac{2x}{x^2 - n^2}$.

Ecrivons $J(x) = \int_0^1 \dfrac{t^{x-1}}{1+t}.dt + \int_1^{+\infty} \dfrac{t^{x-1}}{1+t}.dt = H(x) + H(1-x)$, où $H(x) = \int_0^1 \dfrac{t^{x-1}}{1+t}.dt$.

Or $H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$, et l'on conclut aisément.

<u>3ème méthode : densité.</u>

Problème

0) Soient $u \in \mathbf{C} - \{1\}$, $q \in \mathbf{N}^*$. Montrer $\sum_{k=0}^{q-1} k.u^k = \dfrac{(q-1)u^{q+1} - qu^q + u}{(u-1)^2}$.

1) a) Soit x une variable réelle. Quel est le domaine de définition de $J(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{t^{x-1}}{1+t}.dt$?

b) Soit $x = \dfrac{p}{q} \in \mathbf{Q} \cap]0, 1[$. Montrer que $J(x) = q \int_0^{+\infty} \dfrac{u^{p-1}}{u^q+1}.du$.

2) Résoudre l'équation $u^q + 1 = 0$. Exprimer ses racines $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{q-1}$ à l'aide de leur arguement réduit (i.e. compris entre 0 et 2π).

3) Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{x^{p-1}}{x^q+1} = \sum_{k=0}^{q-1} \dfrac{A_k}{x-\eta_k}$.

Trouver A_k et montrer que $\sum_{k=0}^{q-1} A_k = 0$.

4) On veut calculer $\int_0^{+\infty} \dfrac{u^{p-1}}{u^q+1}.dt$ sans regrouper les éléments simples associés aux pôles conjugués.

Montrer que si $0 < a < b$, $\int_a^b \dfrac{du}{u-\eta_k} = \ln\left|\dfrac{b-\eta_k}{a-\eta_k}\right| + i \operatorname{Arg} \dfrac{b-\eta_k}{a-\eta_k}$ ($-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$)

Montrer que si $a \to 0$ et $b \to +\infty$, $\int_a^b \dfrac{u^{p-1}}{u^q+1}.du \to \dfrac{2\pi.i}{q^2} \sum_{k=0}^{q-1} k.(\eta_k)^p$.

6) En déduire que $J(\dfrac{p}{q}) = \dfrac{\pi}{\sin(p\pi/q)}$. Etendre ce résultat à tout réel $x \in]0, 1[$.

Applications : 1) <u>Limite et développement de</u> $J_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{1+t^n}$.

J_n existe pour $n \geq 2$, et tend vers $\int_0^1 dt = 1$ par convergence dominée.

Le changement de variable $u = t^n$ et les résultats précédents donnent :

$$J_n = \frac{1}{n}.\Delta(\frac{1}{n},1) = \frac{1}{n}.B(1-\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}.\Gamma(1-\frac{1}{n}).\Gamma(\frac{1}{n}) = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

```
> J:=n->Pi/(n*sin(Pi/n));asympt(J(n),n,15);
```

$$1+\frac{\frac{1}{6}\pi^2}{n^2}+\frac{\frac{7}{360}\pi^4}{n^4}+\frac{\frac{31}{15120}\pi^6}{n^6}+\frac{\frac{127}{604800}\pi^8}{n^8}+\frac{\frac{73}{3421440}\pi^{10}}{n^{10}}+\frac{\frac{1414477}{653837184000}\pi^{12}}{n^{12}}+\frac{\frac{8191}{37362124800}\pi^{14}}{n^{14}}+O\left(\frac{1}{n^{16}}\right)$$

2) <u>Le Pi lemniscatique</u> $\varpi = \int_{-1}^{+1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

$$\varpi = 2\int_0^{+1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{2}\int_0^{+1}u^{-3/4}(1-u)^{-1/2}.du = \frac{1}{2}B(\frac{1}{4},\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)} = \frac{\Gamma(1/4)^2}{2\sqrt{2\pi}}.$$

3) <u>Montrons que</u> $c = \int_0^{+1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} = \frac{\Gamma(1/3)^3}{2^{4/3}.\pi\sqrt{3}}$.

Tout d'abord $c = \frac{1}{3}\int_0^{+1}u^{-2/3}(1-u)^{-1/2}.du = \frac{1}{3}B(\frac{1}{3},\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}\frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(5/6)}$.

Or Legendre donne : $\Gamma(\frac{2}{3}) = \frac{1}{2^{1/3}\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{1}{3}).\Gamma(\frac{5}{6})$, et les compléments : $\Gamma(\frac{1}{3}).\Gamma(\frac{2}{3}) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ …

8. <u>Formule de multiplication de Legendre-Gauss</u>.

Avant d'énoncer cette formule, je ne résiste pas au plaisir de reproduire ici, à côté d'une gravure officielle repésentant Adrien-Marie Legendre, un talentueux et savoureux portrait -charge, découvert en 2008 dans les notes d'un étudiant du XIXème siècle, si j'en crois internet. Comme on voit, Legendre n'était pas le gendre idéal !

Proposition 1 : La fonction Γ vérifie la formule de duplication de **Legendre** :

$$\boxed{(\forall x > 0)\quad \Gamma(\frac{x}{2}).\Gamma(\frac{x+1}{2}) = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(x)}{2^{x-1}}.}$$

<u>Preuve</u> : nous avons déjà démontré cette formule au § 6.
Voici une preuve fondée sur la formule de Gauss.

$$\Gamma(\frac{x}{2})\Gamma(\frac{x+1}{2}) \sim \frac{n^{\frac{x}{2}}.n!}{\frac{x}{2}(\frac{x}{2}+1)\dots(\frac{x}{2}+n)}\frac{n^{\frac{x+1}{2}}.n!}{\frac{x+1}{2}(\frac{x+1}{2}+1)\dots(\frac{x+1}{2}+n)} \sim \frac{n^{x+\frac{1}{2}}.(n!)^2.2^{2n+2}}{x(x+1)(x+2)\dots(x+2n+1)}$$

$$\sim \frac{n^{x+\frac{1}{2}}.(n!)^2.2^{2n+2}.\Gamma(x)}{(2n+1)^x(2n+1)(2n)!} \sim \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(x)}{2^{x-1}}\ ,\ \text{via Stirling.}$$

En prime, indiquons une autre preuve, fondée sur la fonction :

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in S_2^{++}(\mathbf{R}) \;\to\; \exp(-\operatorname{tr} A).(\det A)^{p-1} .$$

Exercice : Soit D = { (x, y, z) ; $x > 0$, $y > 0$, $xz - y^2 > 0$ }.

On définit pour tout réel $p > 0$: $\mathrm{I}(p) = \iiint_D \exp(-x-z).(xz-y^2)^{p-1}.dx.dy.dz$.

Calculer I(p) à l'aide des deux changements de variables suivants :

$$\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix} \quad (\text{ X et Y} > 0) \quad \text{et} \quad (x, y, z) \to (\frac{x+z}{2}, \text{y}, \frac{x-z}{2}) .$$

On exprimera les résultats à l'aide de la fonction Γ.

[Réponse : On trouve $\mathrm{I}(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Gamma(p).\Gamma(p+\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2^{2p}}\,\Gamma(2p)$.]

Théorème 2 : Plus généralement, la fonction Γ vérifie la forume de multiplication de **Gauss** :

$$\boxed{\forall q \in \mathbf{N}^* \quad \forall x > 0 \quad \Gamma(qx) = (2\pi)^{\frac{1-q}{2}}\; q^{qx-\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{q-1}\Gamma(x+\frac{k}{q})}$$

Preuve :

$$\prod_{k=0}^{q-1}\Gamma(\frac{x+k}{q}) \sim \frac{n^{\frac{x}{q}}.n!}{\frac{x}{q}(\frac{x}{q}+1)...(\frac{x}{q}+n)}\;\frac{n^{\frac{x+1}{q}}.n!}{\frac{x+1}{q}(\frac{x+1}{q}+1)...(\frac{x+1}{q}+n)} \cdots \frac{n^{\frac{x+q-1}{q}}.n!}{\frac{x+q-1}{q}(\frac{x+q-1}{q}+1)...(\frac{x+q-1}{q}+n)}$$

$$= \frac{n^{x+\frac{q-1}{2}}.(n!)^q.q^{q(n+1)}}{x(x+1)(x+2)...(x+q+qn-1)} \sim \frac{n^{x+\frac{q-1}{2}}.(n!)^q.q^{q(n+1)}.\Gamma(x)}{(q+qn-1)^x.(q+qn-1)!} \sim \frac{n^{x+\frac{q-1}{2}}.(n!)^q.q^{q(n+1)}.\Gamma(x).q(n+1)}{q^x.n^x.(q(n+1))!} .$$

On conclut par Stirling et on change x en qx.

9. Théorie de H. Bohr et J. Mollerup.

Dans un article de 1922, les danois Harald Bohr et J. Mollerup ont caractérisé simplement la fonction Γ. Prolongeant leur travail, Emil Artin a rattaché en 1931 toutes les propriétés de la fonction Γ à cette présentation.

9.1. Convexité logarithmique.

Définition : Soit I un intervalle de **R**. Une fonction f : I → $\mathbf{R}^*_+$ est dite **logarithmiquement convexe** si la fonction ln f est convexe.

Proposition 1 : Si f et g sont logarithmiquement convexes sur I, il en est de même de $f.g$, de $f^{\,a}$ (pour $a > 0$), et de $f + g$. Enfin, une limite simple de fonctions logarithmiquement convexes, à valeurs > 0, l'est également.

Preuve : laissée en exercice.

Proposition 2 : Une fonction logarithmiquement convexe est convexe. La réciproque est fausse.
En fait f est logarithmiquement convexe si et seulement si, pour tout réel a, la fonction $x \to e^{ax} f(x)$ est convexe.

Preuve : laissée en exercice.

Exercice 1 : Montrer que chacune des fonctions $f_{\mathrm{n}}(x) = \dfrac{n^x.n!}{x(x+1)...(x+n)}$ est logarithmiquement convexe. En déduire que la fonction Γ est logarithmiquement convexe.

Exercice 2 : Soit $f : I \to \mathbf{R}^*_+$ une fonction deux fois dérivable. Montrer que f est logarithmiquement convexe ssi $\forall (x, t) \in I\times\mathbf{R}$ $f(x)\, t^2 + 2 f'(x)\, t + f''(x) \geq 0$.

9.2. <u>Présentations axiomatiques des fonctions Γ, Ω, Ψ</u>.

Théorème 1 : Il existe une unique fonction $\Gamma :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ vérifiant :
i) $\Gamma(1) = 1$ ii) $\forall x > 0$ $\Gamma(x + 1) = x.\Gamma(x)$ iii) Γ est logarithmiquement convexe.

Théorème 2 : Il existe une unique fonction $\Omega :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ vérifiant :
i) $\Omega(1) = 0$ ii) $\forall x > 0$ $\Omega(x + 1) - \Omega(x) = \ln x$ iii) Ω est convexe

<u>Preuve</u> : Ces deux énoncés sont équivalents, si l'on pose $\Omega = \ln \Gamma$. Montrons le second théorème.

<u>Analyse</u>. Soit f une fonction satisfaisant les hypohèses de ce théorème.

Tout d'abord, pour tout entier $n \geq 1$, $f(n) = \ln (n - 1)!$. Cela découle par récurrence de i) et ii).

Je dis que $\forall x \in]0, 1]$ $\forall n \in \mathbf{N}^*$ $x.\ln(n - 1) \leq f(n + x) - f(n) \leq x.\ln n$.
En effet, la convexité de f implique que la pente de la corde joignant les points $M(n, f(n))$ et $P(n + x, f(n + x))$ est comprise entre la pente de la corde joignant les points $A(n-1, f(n-1))$ et M, et la pente de la corde joignant les points M et $B(n + 1, f(n + 1))$.
Du coup, pour tout $x \in]0, 1]$, $f(n + x) = f(n) + x.\ln n + o(1)$ quand $n \to +\infty$.

Cette formule est également vraie pour $x + 1$, $x + 2$, etc., et de proche en proche pour tout $x > 0$.
En effet $f(n + x) = f(n) + x.\ln n + o(1)$ implique

$$f(n + x + 1) = f(n + x) + \ln(n + x) = f(n) + x.\ln n + \ln n + o(1) = f(n) + (x + 1).\ln n + o(1).$$

Fixons $x > 0$.
$$\begin{aligned} f(x) &= f(x + n) - \ln x - \ln(x + 1) - \dots - \ln(x + n) \\ &= f(n) + x.\ln n - \ln x - \ln(x + 1) - \dots - \ln(x + n) + o(1) \\ &= \lim_{n \to +\infty} x.\ln n - \ln x - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{x}{k}\right). \end{aligned}$$

Cela montre l'unicité de la fonction f cherchée.

<u>Synthèse</u>. Notons $\Omega_n(x) = x.\ln n - \ln x - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$.

Démontrons que la suite $(\Omega_n(x))$ converge. Pour cela, fixons x et transformons cette suite en série :

$$\Omega_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \text{ , où pour } n > 1 \ \ u_n(x) = \Omega_n(x) - \Omega_{n-1}(x) = -x.\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, $(\Omega_n(x))$ converge en tant que suite des sommes partielles d'une série absolument convergente.
On peut aussi montrer qu'elle est de Cauchy. Il reste à montrer que $\Omega(x)$ vérifie les trois hypothèses.

i) $\Omega_n(1) = \ln n - \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1)-\ln(k)] = -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 0$.

ii) $\forall x > 0$ $\Omega_n(x + 1) - \Omega_n(x) = \ln n - \ln(x + 1) + \ln x - \ln(x + n + 1) + \ln(x + 1)$
$$= \ln x - \ln\left(1 + \frac{x+1}{n}\right) \to \ln x.$$

iii) Chaque fonction Ω_n est convexe, comme somme de fonctions convexes, ou parce que

$\Omega_n''(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)^2}$. Or une limite simple de fonctions convexes est convexe.

Proposition 3 : La fonction $\Psi = \Omega' = \Gamma'/\Gamma$ est la seule fonction $]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ vérifiant
i) $\forall x > 0$ $\Psi(x + 1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}$ ii) $\Psi(x) = \ln x + o(1)$ au $V(+\infty)$.

<u>Preuve</u> : Tout d'abord, la fonction Ψ vérifie ces deux conditions.
La seconde conditon découle de ce que ψ est croissante sur $]0, +\infty[$ et telle que $\Psi(n + 1) = H_n - \gamma$.

Réciproquement, si F est une fonction vérifiant ces deux conditions, F – Ψ est 1-périodique et tend vers 0 en +∞, donc est nulle.

Exercice : Montrer que Γ est l'unique fonction f :]0, +∞[→ **R** vérifiant :

i) $f(1) = 1$ ii) $\forall x > 0 \quad f(x+1) = x.f(x)$ iii) $g(x) = \left(\frac{e}{x}\right)^x f(x)$ est décroissante.

10. Prolongement réel de la fonction Γ.

Les fonctions Γ, Ω, Ψ, précédemment rencontrées sont définies sur $\mathbf{R}^*_+$. Il y a bien des façons de les prolonger à **R** ou à **C**. Mais il n'y a qu'une façon de les prolonger de manière cohérente, c'est-à-dire en préservant la validité des formules rencontrées en chemin.

Nous noterons $D = \mathbf{R} - \mathbf{N} = \mathbf{R} - \{ 0, -1, -2, -3, \dots \}$.

La formule $\Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)$ permet de prolonger la fonction Γ de proche en proche sur les intervalles]–1, 0[,]–2, –1[, etc., donc sur D. Il suffit, pour $-(n+1) < x < -n$, de poser

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n+1)}\,\Gamma(x+n+1).$$

Conséquences : 1) Pour tout $n \geq 1$, $\Gamma(-n + ½) = \dfrac{(-1)^n 2^n \sqrt{\pi}}{1.3.5\dots(2n-1)}$.

2) Γ reste C^∞ sur D, et même dse en tout point.

3) $\Gamma(x) \sim \dfrac{1}{x}$ au V(0±) , et $\Gamma(x) \sim \dfrac{(-1)^n}{n!.(x+n)}$ au V(–n ±).

4) Γ(x) prend des valeurs alternativement < 0 et > 0 sur les intervalles]–1, 0[,]–2, –1[,]–3, –2[, etc.

Les formules de Gauss et Weierstrass restent valables, ainsi que la formule des compléments.

♣ Pour tout $x \in D$, $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^x.n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ (formule de **Gauss**).

♦ Pour tout $x \in D$, $\dfrac{1}{\Gamma(x)} = x\,e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{x}{n}} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$ (formule de **Weierstrass**)

♥ Pour tout $x \in D$, $\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \dfrac{1}{x} + \sum_{n\geq1}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{x+n}\right)$

♠ Pour tout $x \in D$, et tout $k \geq 1$, $D^k\left(\dfrac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(x) = \sum_{n\geq0} \dfrac{(-1)^k(k-1)!}{(x+n)^k}$.

On en déduit par dérivation que $\Gamma''(x).\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2 \geq 0$, donc Γ''($x$) est du signe de Γ($x$).
Γ est donc alternativement concave et convexe sur les intervalles]–1, 0[,]–2, –1[,]–3, –2[, etc.
De plus, en appliquant le théorème de Rolle à 1/Γ(x) sur chacun des segments [–n, –n+1], on voit que Γ' s'annule en un point $x_n \in$]–n, –n+1[.
Ses variations sur chacun de ces segments s'en déduisent aisément.

La relation des compléments s'étend sans peine à **R** :

Proposition : Formule des compléments.

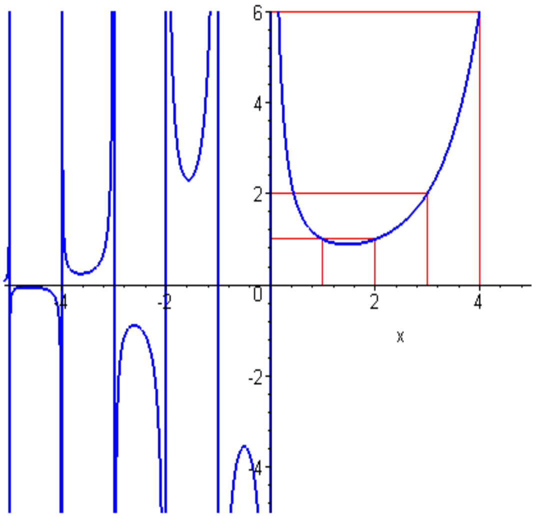
$\forall x \in \mathbf{R} - \mathbf{Z} \quad \Gamma(x).\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$, ou encore : $\forall x \in \mathbf{R} \quad \dfrac{1}{\Gamma(x).\Gamma(1-x)} = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi}$.

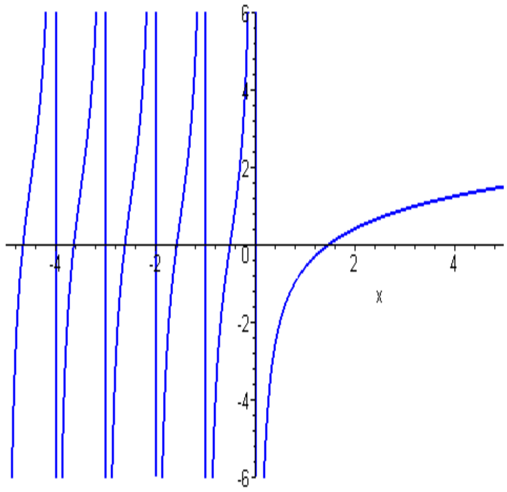
La 2ème forme est plus maniable que la première, car la fonction 1/Γ est définie et continue sur **R**.

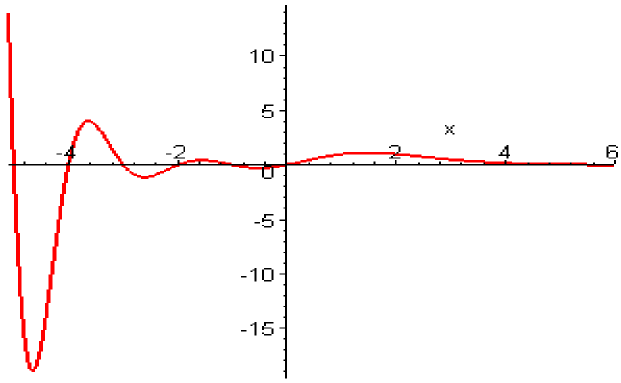
Voici les graphes des fonctions Γ, digamma Ψ = Γ'/Γ, et 1/Γ.

```
> with(plots):alias(G=GAMMA):
```

```
p:=plot(G(x),x=-5.1..5,-5..6,numpoints=1000,color=blue,thickness=2):
v:=k->plot([k,t,t=0..G(k)]):h:=k->plot([t,(k-1)!,t=0..k]):
display({p,seq(v(k),k=1..4),seq(h(k),k=2..4)});
➢    plot(Psi(x),x=-5..5,-6..6,numpoints=2000,color=blue,thickness=2);
> plot(1/GAMMA(x),x=-5.1..6,thickness=2);
```







L'écrasement progressif des branches de Γ vers la gauche s'explique et se mesure par :

Proposition : Si Γ' s'annule en un point $x_n \in\ ]-n, -n+1[$, alors :

$$\boxed{x_n = -n + \frac{1}{\ln n} + O\Big(\frac{1}{\ln^2 n}\Big) \quad \text{et} \quad \Gamma(x_n) \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\, n^{-n-\frac{1}{2}}\, e^{n+1} \ln n.}$$

<u>Preuve</u> : écrivons $x_n = -n + a_n$, où $0 < a_n < 1$, et $\Psi(x_n) = 0$.

Comme la fonction Ψ vérifie $\forall x \in D \quad \Psi(x+1) - \Psi(x) = \dfrac{1}{x}$, on a :

$$\Psi(x_n + n + 1) = \Psi(x_n) + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n+1} + \dots + \frac{1}{x_n+n} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n+1} + \dots + \frac{1}{x_n+n}.$$

ou encore : $\Psi(a_n + 1) = \dfrac{1}{-n+a_n} + \dfrac{1}{-n+a_n+1} + \dots + \dfrac{1}{a_n-1} + \dfrac{1}{a_n}$.

$$\frac{1}{a_n-1} + \frac{1}{a_n} = \Psi(a_n+1) + \frac{1}{n-a_n} + \frac{1}{n-1-a_n} + \dots + \frac{1}{2-a_n}.$$

Ψ est bornée sur $[1, 2]$ et un encadrement donne $\dfrac{1}{a_n-1} + \dfrac{1}{a_n} = \ln n + O(1)$.

La fonction $h(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$ est un homéomorphisme décroissant de]0, 1[sur $\mathbf{R}_+$; on a facilement donc $h^{-1}(y) = \frac{1}{y} + O(\frac{1}{y^2})$ quand $y \to +\infty$. Donc $a_n = h^{-1}(\ln n + O(1)) = \frac{1}{\ln n} + O(\frac{1}{\ln^2 n})$.

$$\Gamma(x_n) = \frac{\Gamma(x_n+n)}{x_n(x_n+1)\dots(x_n+n-1)} = \frac{\Gamma(a_n)}{(a_n-n)(a_n-n+1)\dots(a_n-1)} = \frac{(-1)^n.\Gamma(a_n)}{(1-a_n)(2-a_n)\dots(n-a_n)} .$$

$$= \frac{(-1)^n.\Gamma(a_n)}{n!.(1-\frac{a_n}{1})(1-\frac{a_n}{2})\dots(1-\frac{a_n}{n})} \sim \frac{(-1)^n}{n!.a_n.\exp(a_n.H_n)} \quad \text{après justification…}$$

11. Prolongement complexe de la fonction Γ.

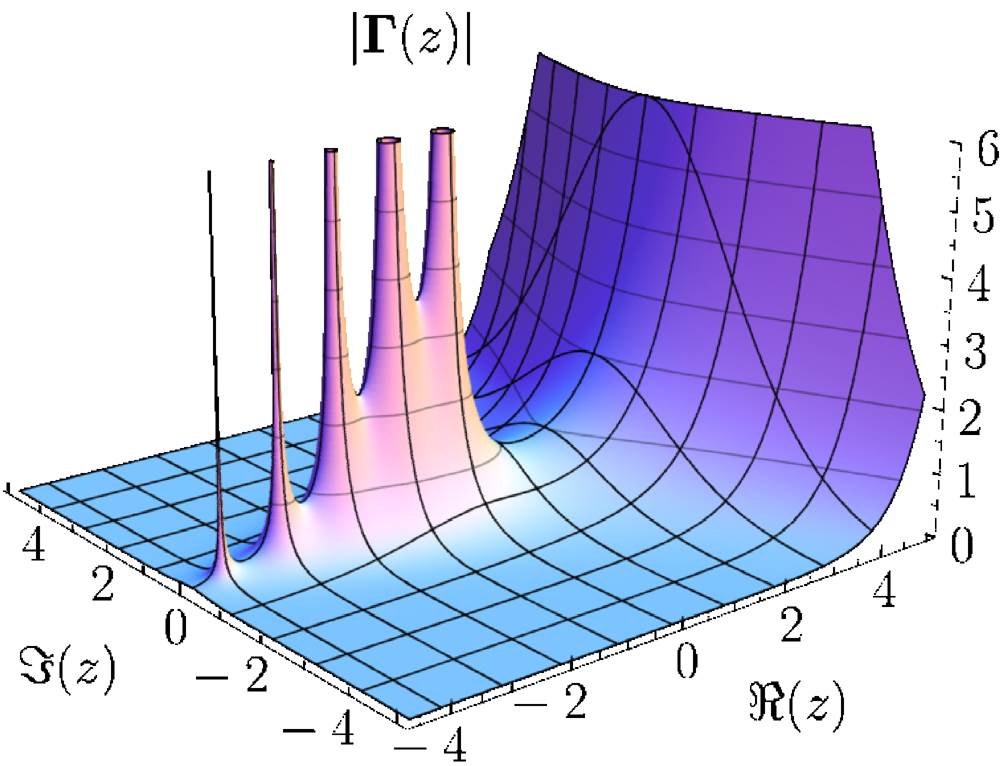
Comment prolonger Γ au plan complexe ? On peut observer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{z-1}.e^{-t}.dt$ converge absolument pour Re z > 1, définissant une fonction analytique dans cet ouvert. Mais cela ne règle pas la question. Le plus efficace est ici de partir de la formule de Weierstrass :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\, e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} (1+\frac{x}{n}).e^{-\frac{x}{n}} .$$

Théorème : La fonction $P(z) = z\, e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} (1+\frac{z}{n}).e^{-\frac{z}{n}}$ est définie et continue dans le plan **C**, et s'annule aux points 0, −1, −2, −3, … . C'est une fonction entière.

Preuve :

Définition : On note Γ la fonction définie sur **C** – { 0, −1, −2, −3, … } par la formule Γ(z) = 1/P(z).



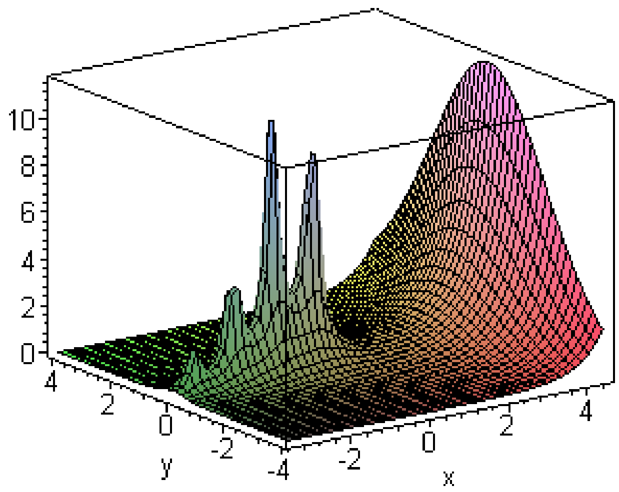

```
> alias(G=GAMMA);evalf(G(I));
```

$$G$$
$$-.1549498283 - .4980156681\,I$$

```
> f:=(x,y)->min(abs(G(x+I*y)),12);
```

$$f := (x, y) \to \min(|G(x + I\,y)|, 12)$$

```
> plot3d(f(x,y),x=-3.5..4.5,y=-4..4,numpoints=2000,axes=boxed);
```



12. Applications.

12.1. Volumes des boules.

Proposition 1 : Boules euclidiennes. Soit $S_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \,;\, x_1^2 + \dots + x_n^2 \le 1 \}$.

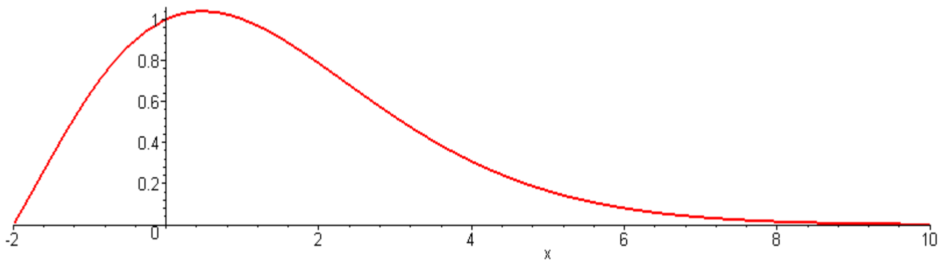
Le volume de S_n, c'est-à-dire $V_n = \int\dots\int_{S_n} dx_1 \dots dx_n$, est donné par :

$V_n = \dfrac{\pi^m}{m!}$ si $n = 2m$, $V_n = \dfrac{2^n \pi^m m!}{n!}$ si $n = 2m+1$, et dans les deux cas : $\boxed{V_n = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}}$.

Corollaire : $V_n \sim \left(\dfrac{2\pi.e}{n}\right)^n \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ quand $n \to +\infty$; en particulier $\dfrac{V_n}{2^n} \to 0$.

La suite $\left(\dfrac{V_n}{2^n}\right)$ est décroissante, si l'on en croît Maple :

```
> f:=x->Pi^(x/2)/GAMMA(1+x/2)/2^x;plot(f(x),x=-2..10,thickness=2);
```



Quand n augmente, le volume relatif de S_n dans l'hypercube $[-1, 1]^n$ tend en décroissant vers 0.

Corollaire : Soit A une matrice symétrique définie positive d'ordre n.

Le volume de la boule $B_A = \{ X \in \mathbf{R}^n \; ; \; {}^tX.A.X \leq 1 \}$ est donné par $\dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})} \dfrac{1}{\sqrt{\det A}}$.

Proposition 2 : Soit $\Delta_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_+{}^n \; ; \; x_1 + \dots + x_n \leq 1 \}$ le simplexe unité de $\mathbf{R}^n$.

$$\int\!\!\dots\!\!\int_{\Delta_n} x_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}.dx_1\dots dx_n = \frac{a_1!a_2!\dots a_n!}{(a_1+a_2+\dots+a_n+n)!} \quad \text{lorsque } a_1, \dots, a_n \text{ sont naturels}$$

$$\int\!\!\dots\!\!\int_{\Delta_n} x_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}.dx_1\dots dx_n = \frac{\Gamma(a_1+1)\dots\Gamma(a_n+1)}{\Gamma(a_1+a_2+\dots+a_n+n+1)} \quad \text{lorsque } a_1, \dots, a_n \text{ sont réels} > 0, \text{ puis réels} > -1.$$

Corollaire : Soit $p \geq 1$; on équipe $\mathbf{R}^n$ de la norme $N_p : x = (x_1, \dots, x_n) \to [\, |x_1|^p + \dots + |x_n|^p \,]^{1/p}$.
Soit $B_n(p) = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \; ; \; |x_1|^p + \dots + |x_n|^p \leq 1 \}$ la boule unité de $\mathbf{R}^n$ pour cette norme.

Son volume $V_n(p)$ est donné par $V_n(p) = (\frac{2}{p})^n \dfrac{\Gamma(1/p)^n}{\Gamma(n/p+1)}$. Il tend vers 2^p quand $p \to +\infty$.

12.2. <u>Primitives d'ordre *a* d'une fonction</u>.

Soit f une fonction continue $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$. Définissons par récurrence $f_0(x) = f(x)$, $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t).dt$.

Ainsi, f_n est la primitive n-ème de f, dont toutes les dérivées d'ordre $< n$ s'annulent en 0.

Il est facile de démontrer que $\quad f_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.f(t).dt$.

Prolongeant cette idée, définissons, pour tout $a > 0$, la « primitive a-ème » de f par la formule :

$$\boxed{f_a(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{a-1}}{\Gamma(a)}.f(t).dt.}$$

<u>Exercice</u> : 1) Montrer que la fonction f_a est bien définie et continue sur $\mathbf{R}_+$.

2) Calculer $f_a(x)$ lorsque f est un monôme, un polynôme, une exponentielle, etc.

3) Montrer que $f_a(x) \to f(x)$ quand $a \to 0+$.

4) Montrer que $f_{a+b} = (f_a)_b$, autrement dit que la primitive d'ordre $(a + b)$ de f est la primitive d'ordre b de sa primitive d'ordre a.

5) En déduire qu'il existe un endomorphisme T de $C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ tel que $(T \circ T)(f)(x) = \int_0^x f(t).dt$.

12.3. <u>Laplace, Fourier</u>.

Soit $a > 0$. La fonction $f_a : s \to s^{a-1}.e^{-s}$ a pour transformée de Laplace

$$(\,L\, f_a\,)(x) = \int_0^{+\infty} s^{a-1}.e^{-s}.e^{-sx}.ds = \frac{\Gamma(a)}{(x+1)^a}.$$

Par ailleurs, la convolée de f_a et f_b est donnée par :

$$(\, f_a * f_b \,)(x) = \int_0^x f_a(t).f_b(x-t).dt = B(a, b).\, f_{a+b}(x).$$

La formule $L(\, f * g\,) = (\,L f\,).(\,L g\,)$ donne ici : $\dfrac{\Gamma(a)}{(x+1)^a} \dfrac{\Gamma(b)}{(x+1)^b} = B(a, b) \dfrac{\Gamma(a+b)}{(x+1)^{a+b}}$.

On retrouve la formule d'Euler. Il resterait néanmoins à préciser dans quel espace fonctionnel s'effectuent cette convolution et cette transformation de Laplace.

<u>Problème : transformées de Fourier</u>.

1) Soit a un réel > 0. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $t \to t^{a-1} e^{-t} e^{ixt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On note $F_a(x) = \int_0^{+\infty} t^{a-1}\ e^{-t}\, e^{ixt}\,.dt$.

2) Montrer que F_a est de classe C^1, et vérifie l'équation différentielle $-(\,i + x\,).F'_a(x) = a.F_a(x)$.
En déduire $F_a(x) = \Gamma(a)\,(\,x^2 + 1\,)^{a/2}.\exp(i.a.\text{Arctan}\, x)$.

3) En déduire les formules suivantes, pour tout x réel :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}}.dt = \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}\,.\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}}.dt = \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}\,.\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1+x^2}}\ .$$

12.4. Applications probabilistes.

Définition 1 : Soient α, μ deux réels > 0. On dit que la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbf{R}^*_+$ suit la **loi Gamma** de paramètres (α, μ), et l'on note $X \sim \gamma_{\alpha,\mu}$, si X a pour densité $f_{\alpha,\mu}$

$$f_{\alpha,\mu}(x) = \frac{\alpha^\mu}{\Gamma(\mu)}\, x^{\mu-1}\, e^{-\alpha x} \text{ si } x > 0 \quad , \quad f_{\alpha,\mu}(x) = 0 \text{ si } x \le 0\ .$$

Si μ = 1, on retrouve la densité exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$.

On vérifie sans peine que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha,\mu}(x).dx = \int_0^{+\infty} f_{\alpha,\mu}(x).dx = 1$.

Proposition 1 : caractéristiques des lois gamma. Si $X \sim \gamma_{\alpha,\mu}$, alors :

$$\boxed{E(X) = \frac{\mu}{\alpha}\ ,\ V(X) = \frac{\mu}{\alpha^2}\ ,\ \sigma(X) = \frac{\sqrt{\mu}}{\alpha}\ ,\ m_k(X) = E(X^k) = \frac{\mu(\mu+1)\dots(\mu+k-1)}{\alpha^k}\ .}$$

Proposition 2 : stabilité des lois gamma.
Si les v. a. r. X et Y sont indépendantes et suivent resp. $\gamma_{\alpha,\mu}$ et $\gamma_{\alpha,\nu}$, alors $X + Y \sim \gamma_{\alpha,\mu+\nu}$.

Proposition 3 : Si les variables indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$ suivent la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, la variable $S = \sum (X_i)^2$ suit la loi $\gamma(\frac{1}{2\sigma^2}, \frac{n}{2})$.

Définition 2 : Soient μ et ν deux réels > 0. On dit que la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (0, 1)$ suit la **loi Bêta** de paramètres (μ, ν), et l'on note $X \sim B(\mu, \nu)$, si X a pour densité $g_{\mu,\nu}$

$$g_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{B(\mu,\nu)}\, x^{\mu-1}\,(\,1 - x\,)^{\nu-1} \text{ si } 0 < x < 1 \quad , \quad g_{\mu,\nu}(x) = 0 \text{ sinon}\ .$$

En particulier, la loi B(½, ½), de densité $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ sur]0, 1[, est dite **loi de l'Arcsinus**.

Ici encore, on vérifie que $\int_0^1 g_{\mu,\nu}(x).dx = 1$.

Proposition 4 : caractéristiques des lois bêta. Si $X \sim B(\mu, \nu)$, alors :

$$\boxed{E(X) = \frac{\mu}{\mu+\nu}\ ,\ V(X) = \frac{\mu\nu}{(\mu+\nu)^2.(\mu+\nu+1)}\ ,\ m_k(X) = E(X^k) = \frac{\mu(\mu+1)\dots(\mu+k-1)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu+1)\dots(\mu+\nu+k-1)}\ .}$$

Proposition 5 : Si les v.a.r. X et Y sont indépendantes et suivent respectivement $\gamma_{1,\mu}$ et $\gamma_{1,\nu}$, alors $X + Y$ et $\frac{X}{X+Y}$ sont indépendantes, $\frac{X}{X+Y} \sim B(\mu, \nu)$ et $\frac{Y}{X+Y} \sim B(\nu, \mu)$.

Proposition 6 : Si les v.a.r. X et Y sont indépendantes et suivent $B(\mu, \nu)$ et $B(\mu', \nu')$, où $\mu' = \mu + \nu$, alors $XY \sim B(\mu, \nu + \nu')$.

12.5. Lien avec les fonctions ζ et η.

Les fonctions $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ sont définies resp. sur]1, +∞[et sur]0, +∞[.

Elles sont liées par la formule : $\forall x > 1 \;\; \eta(x) = \left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right).\zeta(x)$.

Mais surtout, elles sont liées à la fonction Γ par les formules :

Proposition : $\forall x > 1 \;\; \zeta(x).\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}.dt$ et $\forall x > 0 \;\; \eta(x).\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t + 1}.dt$.

Preuve :

Proposition : La fonction η est strictement croissante sur]0, +∞[.

Preuve :

Enfin, les relations entre les fonctions ζ et.Γ ne s'arrêtent pas là.

Théorème de Riemann : La fonction $\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1).\pi^{-s/2}\,\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$ vérifie $\xi(s) = \xi(1-s)$ pour tout s ∈]0, 1[et en fait pour tout s ∈ **C**, après prolongement.

Une autre expression du premier résultat est : $\forall s \in \,]0, 1[\;\; \zeta(s) = 2(2\pi)^{-s}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\zeta(s)$.

Cf. Centrale PSI 1999.

Bibliographie

P. S. Laplace : Théorie analytique des probabilités, Œuvres, t. 7 (éd. 1847)
N. Bourbaki : Fonctions de variable réelle, chap. VII
J.-M. Arnaudiès : L'intégrale de Lebesgue sur la droite (Vuibert)
M. R. Spiegel : Transformation de Laplace (Schaum)
A. Erdélyi : Asymptotic expansions (Dover)
N. G. De Bruijn : Asymptotic methods in analysis (Dover)
G. Andrews, R. Askey, R. Roy : Special functions (Cambridge)
W. Feller : Introduction to Probability theory, t. 2, p. 47 (Wiley)
D. E. Knuth : Fundamental algorithms (Addison Wesley)
Encyclopedia universalis :
Calculs asymptotiques, Calcul symbolique, Fonction Gamma (Jean-Luc Verley),
Euler, Gauss, Artin.
Problèmes (entre autres) :
Tuloup (XA'1 1970-71), Capes 1982, 1988, EITPE 1980, Ingénieurs de Marseille 1988
Formule des compléments : Mines 1984, Centrale 1998 (PC), Centrale 2009
Equation fonctionnelle de ζ : Centrale PSI 1999.
