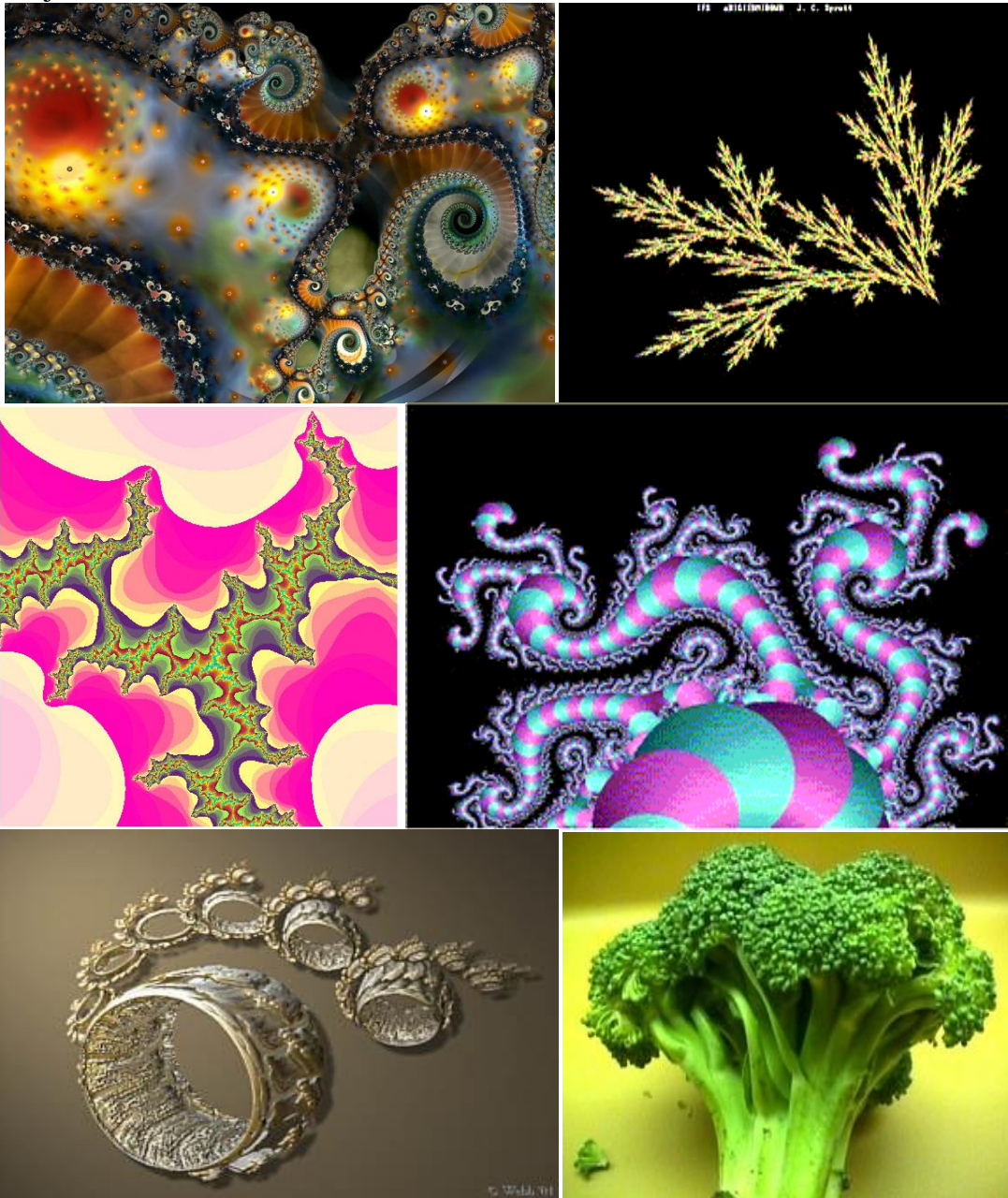


FRACTALII CA ATRACTORI AI SISTEMELOR DINAMICE

MIRCEA OLTEANU

Introducere

Ce este un fractal? Termenul este intrat de multa vreme in limbajul comun si face parte (intr-o oarecare masura) din cultura generala. Asadar toti vom recunoaste in figurile de mai jos fractali:



Totusi, intrebari cum ar fi: ce sunt fractalii, ce proprietati au, cum se pot genera, etc. nu au un raspuns in matematica elementara. Din simpla observare a acestor obiecte se poate constata ca metodele geometriei clasice euclidiene nu pot fi folosite in studiul fractalilor.

Subiectul este vast si permite multe abordari. In acest scurt curs vom puncta urmatoarele aspecte ale teoriei fractalilor:

- fractalii ca limite (atractori) ale unor procese iterative deterministe ;
- fractalii ca limite ale unor procese iterative nedeterministe;
- fractalii ca structuri cu dimensiune un numar neintreg.
- metoda seriilor de timp pentru studiul atractorilor.

In prima parte vom face o prezentare foarte succinta a unor idei si rezultate matematice care permit o descriere riguroasa a fractalilor. In partea a doua vom studia citeva proprietati remarcabile ale fractalilor (atractori, autosimilaritate, dimensiune), iar in partea a treia este descrisa metoda seriilor de timp; ultima parte este rezervata aplicatiilor.

Nota: Aceasta lectie urmeaza ideile din lucrari clasice dedicate subiectului, lucrari pe care le recomandam cititorilor pentru un studiu avansat:

H-O Peitgen, H. Jurgens, D. Saupe: *Chaos and Fractals*, (2-nd edition), Springer, 2004.
B.B. Mandelbrot: *Fractals: Form, Chance and Dimension*, W.H. Freeman and Co, 1977.
B.B. Mandelbrot : *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Co, 1982.

De asemenea, mentionez ca implementarea diferitilor algoritmi numerici utilizati (care au ca punct de pornire rezultatele teoretice prezentate) a fost facuta de ing. Mihai Tanase.

I. FUNDAMENTE TEORETICE

Principiul contractiei

Fie (X, d) un spatiu metric; o aplicatie $T : X \rightarrow X$ se numeste contractie daca exista $k \in (0,1)$ astfel incat $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \forall x, y \in X$. Numarul k se numeste factor de contractie.

Teorema

Daca (X, d) este un spatiu metric complet si $T : X \rightarrow X$ este o contractie (de factor k) atunci exista un unic $\xi \in X$ astfel incat $T\xi = \xi$.

Punctul ξ se numeste punct fix al aplicatiei T .

Demonstratie

Punctul fix ξ se obtine prin metoda "aproximatiilor succesive": daca $x_0 \in X$ este arbitrar fixat, atunci sirul (numit al aproximatiilor succesive) definit prin relatia de recurenta $x_{n+1} = T(x_n), n \geq 0$ este sir Cauchy deoarece:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1), \quad \forall n, p \in \mathbb{N}$$

Deoarece spatiul metric X este complet, rezulta ca sirul $(x_n)_n$ este convergent ; notand cu $\xi \in X$ limita sa , se demonstreaza simplu egalitatea $T(\xi) = \xi$ si se obtine o evaluare a erorii la pasul n :

$$d(x_n, \xi) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sa mai observam ca sirul $(x_n)_n$ este rezultatul unui proces iterativ:

$$x_0, \quad T(x_0), \quad T(T(x_0)), \dots$$

Definitie

Daca X este un spatiu metric si $f : X \rightarrow X$ este o aplicatie continua, sistemul dinamic discret (proces iterativ) asociat lui f este (prin definitie) aplicatia

$$F : \mathbb{N} \times X \rightarrow X, \quad F(n, x) = f^n(x),$$

unde f^n este compunerea lui f cu el insusi (de n ori).

Distanta Hausdorff

Fie (X, d) un spatiu metric complet si fie $K(X)$ multimea partilor compacte ale lui X .

Vom defini pe $K(X)$ o distanta (numita distanta Hausdorff) dupa cum urmeaza. Pentru

orice $A \in K(X)$ si pentru orice $\tau > 0$ definim $A_\tau = \{x \in X; \exists y \in A, d(x, y) \leq \tau\}$.

Distanta Hausdorff pe $K(X)$ este

$$h(A, B) = \inf\{\tau; A \subset B_\tau \text{ si } B \subset A_\tau\}, \quad \forall A, B \in K(X).$$

Se demonstreaza ca spatiul $(K(X), h)$ este spatiu metric complet.

Operatorul Hutchinson

Consideram \mathbb{R}^2 (planul euclidian) ca un spatiu metric complet cu distanta uzuala

(euclidian). Fie n un numar natural fixat (nenul) si fie, pentru orice $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, o

contractie $W_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avand factorul de contractie k_j . Daca A este o submultime

oarecare din \mathbb{R}^2 , notam cu $W_j(A)$ imaginea multimii A prin functia W_j . Definim

aplicatia (operatorul lui Hutchinson):

$$H : K(\mathbb{R}^2) \rightarrow K(\mathbb{R}^2), \quad H(A) = W_1(A) \cup W_2(A) \cup \dots \cup W_n(A)$$

Vom nota $H = (W_1, W_2, \dots, W_n)$.

Teorema

Operatorul lui Hutchinson este contractie pe spatiul metric complet al partilor compacte din plan cu distanta Hausdorff. In plus, factorul de contractie al lui H este cel mai mare element al multimii $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$.

Vom schita demonstratia pentru cazul $n=2$, deci $H = (W_1, W_2)$. Fie A si B doua submultimi compacte in plan si fie $h(A, B) = \tau$. Atunci $B \subset A_\tau$. Aplicand transformarile

W_1 si W_2 rezulta: $W_1(B) \subset W_1(A_\tau)$ si $W_2(B) \subset W_2(A_\tau)$. Deoarece W_1 si W_2 sint contractii (in raport cu distanta euclidiana) rezulta incluziunile: $W_1(A_\tau) \subset W_1(A)_{k_1\tau}$ si $W_2(A_\tau) \subset W_2(A)_{k_2\tau}$.

Fie $k = \max \{k_1, k_2\}$; atunci $W_1(B)$ si $W_2(B)$ sint ambele continute in $(W_1(A) \cup W_2(A))_{c\tau}$. Analog se demonstreaza ca $W_1(A)$ si $W_2(A)$ sint ambele continute in $(W_1(B) \cup W_2(B))_{c\tau}$.

Din definitia distantei Hausdorff rezulta ca $h(H(A), H(B)) \leq kh(A, B)$ deci operatorul lui Hutchinson este contractie cu factorul k .

Evident ca notiunile si rezultatele anterioare se pot generaliza la un spatiu metric complet oarecare (in loc de R^2)

Sisteme iterative (IFS)

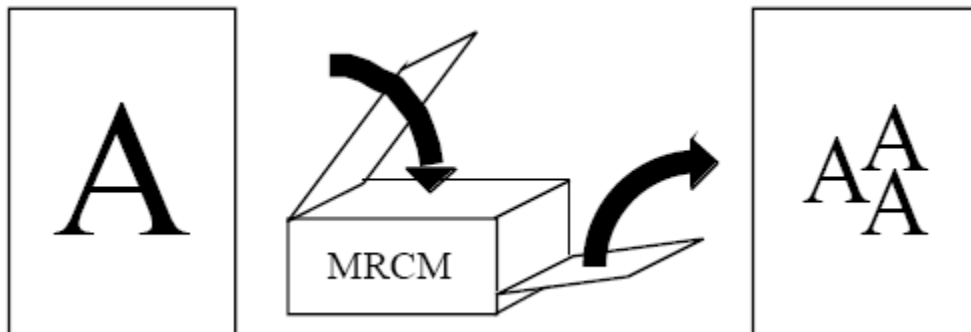
Sa consideram ca mai sus un operator Hutchinson $H = (W_1, W_2, \dots, W_n)$.

Fie $H^2 = H \circ H, H^3 = H \circ H \circ H, \dots$ etc, compunerile lui H cu el insusi. Aplicatiile $H, H^2, H^3, \dots, H^m, \dots$ definesc un sistem dinamic discret (iterativ) asociat functiei H , sau, pe scurt, IFS (Iterated Function System).

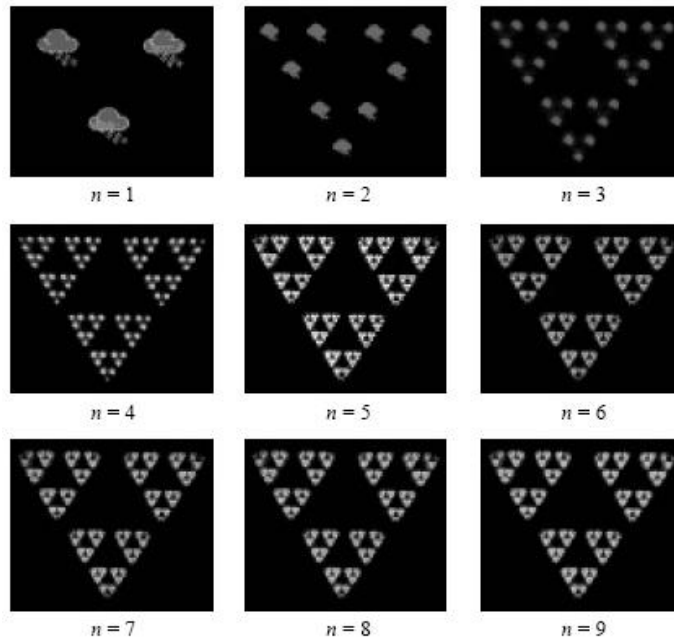
Fie $A \in K(R^2)$ si fie iteratiile $A, H(A), H^2(A), \dots$ etc. Din teorema contractiei (spatiul $(K(R^2), h)$ este complet si H este contractie) rezulta ca sirul (aproximatiilor succesive) de mai sus este convergent in spatiul metric $K(R^2)$ la un compact, pe care-l notam A_∞ . Acesta are proprietatea ca este punct fix al aplicatiei H , deci $H(A_\infty) = A_\infty$. Se mai spune ca multimea A_∞ este invarianta la aplicatia H . In continuare vom numi multimea compacta A_∞ atractorul sistemului dinamic asociat lui H .

O reprezentare intuitiva a unui IFS este MRCM (Multiple Reduction Copy Machine), un aparat de reducere (micsorare) si apoi multiplicare (intr-o anumita configuratie) a unei multimi plane.

Exemplu; sa presupunem ca aparatul considerat micsoreaza o imagine de 3 ori si apoi o multiplica de 3 ori astfel:



Iata in figurile de mai jos rezultatul aplicarii succesive de 7 ori a operatiei de mai sus:

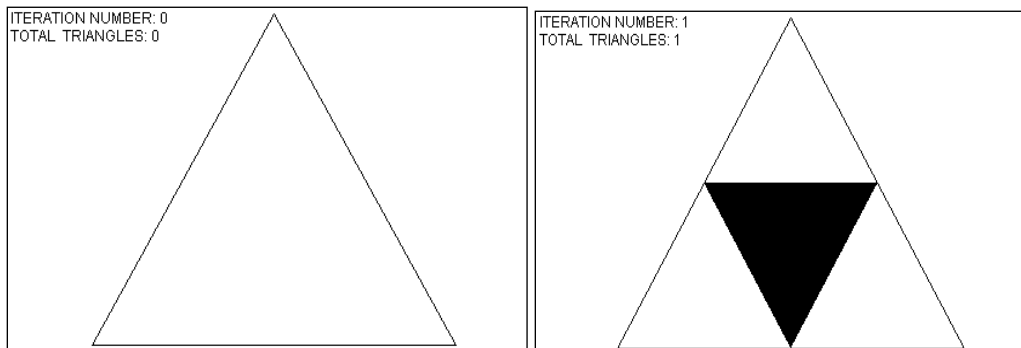


Fractali Clasici

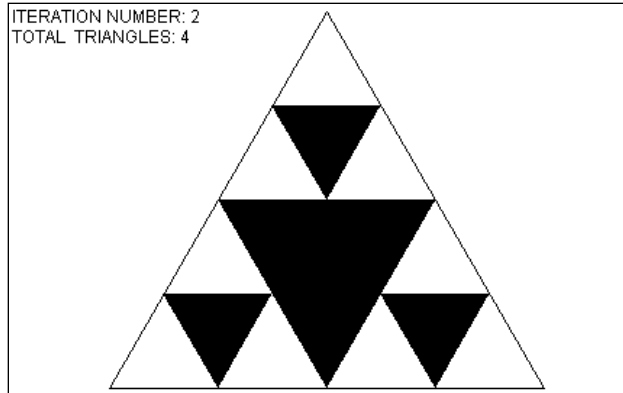
In continuare vom “descrie” modul de obtinere a catorva fractali clasici.

Triunghiul lui Sierpinski

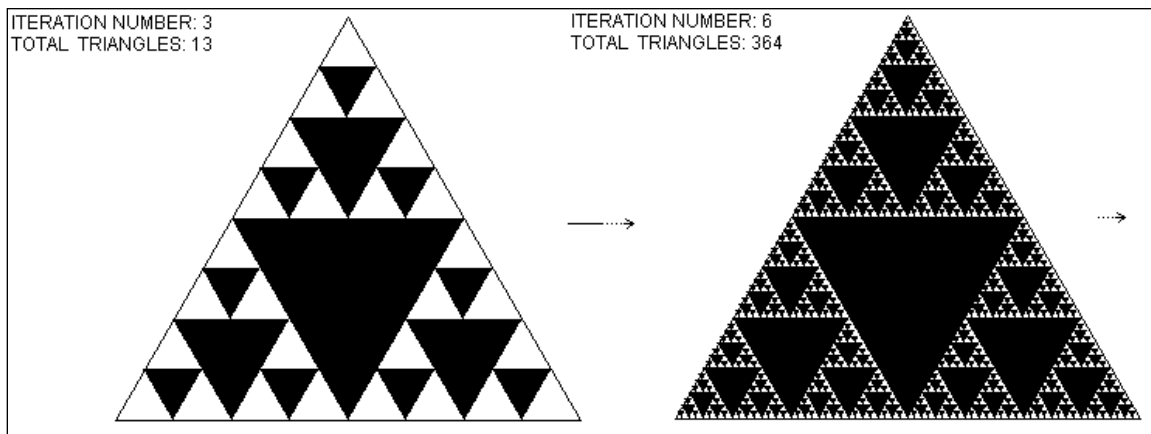
Consideram un triunghi (in continuare prin triunghi intelegem intreaga suprafata plana delimitata de laturi) caruia ii vom aplica urmatoarea transformare (repetitiva): “eliminam” triunghiul definit de mijloacele laturilor .



Acesta a fost primul pas. La pasul al doilea, aplicam aceeași transformare fiecăruia din cele trei triunghiuri ramase.:



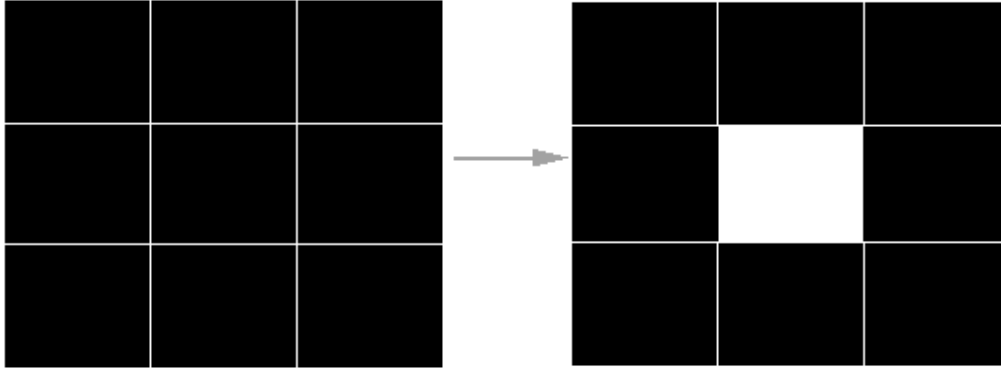
Iteratie	Numarul de triunghiuri
0	0
1	1
2	4
3	13
4	40
5	121
6	364



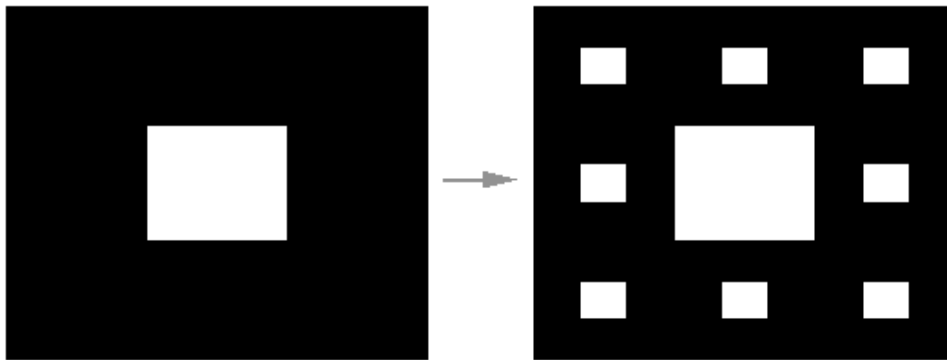
Triunghiul lui Sierpinski este multimea punctelor ramase dupa ce repetam transformarea de mai sus de o infinitate de ori. Evident, multimea ramasa nu este vida (contine cel putin virfurile triunghiului initial).

Covorul lui Sierpinski

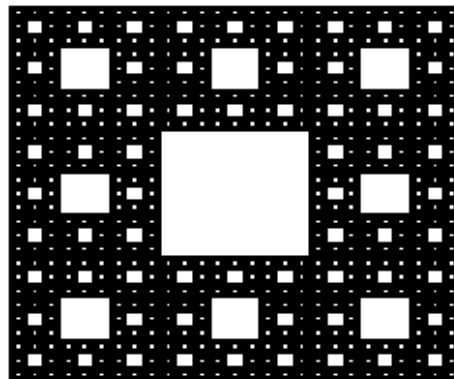
Fie de aceasta data un patrat (aceeasi conventie ca si in cazul triunghiului, patratul este "plin"). Impartim patratul in 9 patrate egale, fiecare avand latura de 3 ori mai mica decat a celui initial. Eliminam acum patratul din mijloc:



Acesta a fost primul pas. La pasul doi, aplicam aceeași transformare fiecăruia dintre cele 8 patrate ramase :



Continuand procedeul, obtinem:



Covorul lui Sierpinski este multimea de puncte ramase dupa ce repetam procedeul de mai sus de o infinitate de ori.

Multimea lui Cantor

Fie intervalul $[0,1]$; il impartim in trei parti egale si eliminam intervalul deschis din mijloc, deci obtinem multimea $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Acesta este primul pas al constructiei. La pasul doi repetam pasul 1 pentru fiecare din intervale ramase, ceea ce ne conduce la o reuniune de 4 intervale, fiecare de lungime $\frac{1}{9}$. Continuand, la pasul n obtinem o reuniune de 2^n intervale inchise, fiecare de lungime $\frac{1}{3^n}$.

Multimea lui Cantor este multimea punctelor care raman dupa repetarea de o infinitate de ori a procedurii descris mai sus. Evident, multimea este nevida deoarece contine cel putin capetele intervalelor $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \dots$. De fapt se poate arata ca multimea nu este numarabila (deci contine si alte puncte).

Pentru a caracteriza elementele multimii lui Cantor, reamintim scrierea in baza 3 a unui numar arbitrar $x \in [0,1]$:

$$x = a_1 3^{-1} + a_2 3^{-2} + a_3 3^{-3} + \dots, \quad a_j \in \{0,1,2\}, \forall j \in \mathbb{N},$$

sau, in forma triadica (analogul scrierii zecimale): $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$

Are loc urmatorul rezultat:

Multimea lui Cantor este multimea punctelor din $[0,1]$ pentru care exista o dezvoltare triadica fara cifra 1.

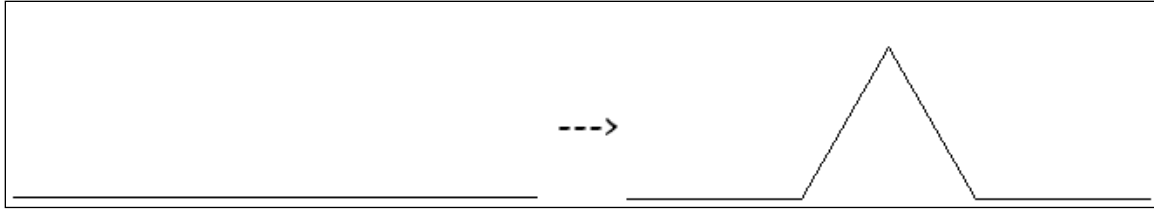
Facem mentiunea ca (la fel ca si in sistemul zecimal) scrierea triadica nu este unica ; de exemplu, $\frac{1}{3} = 0,1 = 0,222\dots$, deci el apartine multimii lui Cantor.

Primii 6 pasi in constructia multimii Cantor:

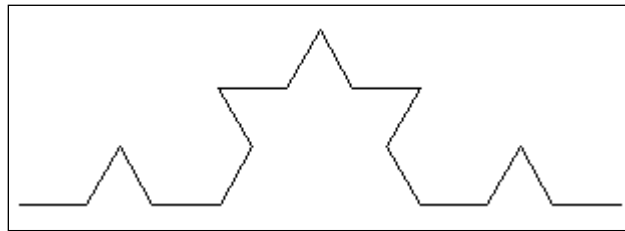


Curba lui Koch

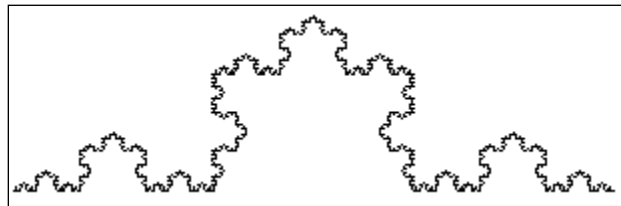
Consideram un segment de dreapta (acesta se numeste “initiator”). Impartim segmentul in trei parti egale si pe segmentul din mijloc construim un triunghi echilateral; eliminam apoi acest segment (baza triunghiului). Acesta este primul pas:



In concluzie, dupa primul pas am inlocuit segmentul initial cu o linie poligonala (numita “generator”) formata din 4 segmente (fiecare cu o lungime de 3 ori mai mica decit a segmentului initial). La pasul doi aplicam procedeul fiecaruia dintre cele patru segmente:



Continuand procedeul de o infinitate de ori se obtine curba lui Koch; iata rezultatul catorva pasi din acest proces:



Demonstram acum ca lungimea curbei lui Koch este infinita.

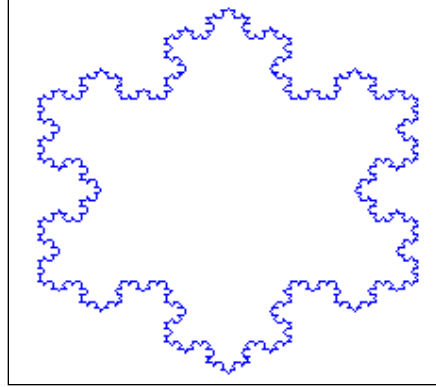
Daca presupunem ca segmentul initial are lungimea L , atunci, linia poligonala care se obtine dupa primul pas are lungimea $\frac{4}{3}L$, dupa pasul al doilea se obtine o linie

poligonala de lungime $\left(\frac{4}{3}\right)^2 L$, etc. La pasul k se obtine o linie poligonala de lungime

$\left(\frac{4}{3}\right)^k L$. Se observa usor ca lungimea tinde la infinit pentru $k \rightarrow \infty$.

Insula lui Koch

Insula lui Koch se obtine reunind trei curbe (egale) ale lui Koch astfel :



Un mod iterativ de a defini insula lui Koch este urmatorul :

- (i) alegem un triunghi echilateral T de latura a .
- (ii) Scalăm (micsorăm) triunghiul cu factorul $\frac{1}{3}$, facem 3 copii și le reunim la triunghiul inițial (vezi figura de mai jos). Figura rezultată este marginită de $3 \times 4 = 12$ segmente, fiecare de lungime $\frac{1}{3}a$
- (iii) Scalăm triunghiul T cu factorul $\frac{1}{3^2}$, facem $3 \times 4 = 12$ copii și le reunim astfel ca în figura de mai jos. Figura rezultată este marginită de $3 \times 4 \times 4 = 48$ segmente, fiecare de lungime $\frac{1}{3^2}a$.

Insula lui Koch se obține repetând de o infinitate de ori construcția anterioară.



Să calculăm aria acestor mulțimi. Aria triunghiului T este $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. La pasul unu adăugăm

o mulțime cu aria $3 \times \left(\frac{1}{3^2} \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right)$. În general, la pasul n , adăugăm la mulțimea obținută

la pasul anterior o mulțime având aria $3 \cdot 4^{n-1} \times \left(\frac{1}{3^{2n}} \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right)$. În concluzie, aria mulțimii obținute după primii n pași este:

$$A_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \dots + \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}} \right) a^2 = \frac{2}{5} \sqrt{3} a^2$$

Insula lui Koch este o mulțime cu arie finită delimitată de o frontieră cu lungime infinită!

Evident, “construcțiile ” anterioare nu satisfac condițiile unor definiții (în sens riguros, matematic). Totuși să remarcăm că ele au în comun ideea de iteratie, idee care este prezentă și în teorema contractiei (șirul aproximărilor succesive).

Vom prezenta în continuare un alt proces iterativ (definit riguros), generator al unor mulțimi celebre în matematică.

Mulțimi Julia

Să considerăm aplicația $f(z) = z^2$, $z \in \mathbb{C}$ definită pe întreg planul complex și să considerăm iterațiile $z, z^2, z^4, z^8, \dots, z^{2^n}, \dots$. Este ușor de observat că:

- (i) dacă $|z| < 1$ atunci $|z^{2^n}| < 1, \forall n \in \mathbb{N}$; de fapt: $z^{2^n} \rightarrow 0$ pentru $n \rightarrow \infty$.
- (ii) dacă $|z| = 1$ atunci $|z^{2^n}| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
- (iii) dacă $|z| > 1$ atunci $|z^{2^n}| \rightarrow \infty$, pentru $n \rightarrow \infty$.

În concluzie, dinamica sistemului discret definit de funcția $z \rightarrow z^2$ poate fi rezumată astfel:

- (i) dacă punctul inițial este în discul unitate deschis, atunci toate iterațiile rămân în acest disc;
- (ii) dacă punctul inițial este în exteriorul discului unitate închis, atunci iterațiile (pt n suficient de mare) “ies” în afara oricărui disc
- (iii) dacă punctul inițial este pe cercul unitate, atunci toate iterațiile rămân pe acest cerc.

Cercul unitate este deci frontiera dintre “mulțimea prizonieră” (prisoner set) și “mulțimea de evadare” (escape set). Cercul unitate se numește (în acest caz) mulțimea Julia a sistemului iterativ $z \rightarrow z^2$. Să observăm că mulțimea Julia este invariabilă pentru funcția $z \rightarrow z^2$. De asemenea, punctul 0 este un atractor pentru sistemul iterativ iar discul unitate deschis este bazinul atractiv. Un alt atractor este punctul de la ∞ , bazinul sau de atracție fiind exteriorul discului unitate închis.

Vom generaliza acum exemplul de mai sus, considerând, pentru orice $c \in \mathbb{C}$, aplicația $f_c(z) = z^2 + c$, $z \in \mathbb{C}$. Considerăm de asemenea iterațiile sale: $z_{n+1} = f_c(z_n)$, $z_0 \in \mathbb{C}$

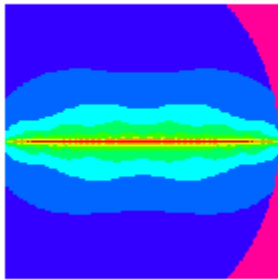
Evident, exemplul anterior se obține pentru $c = 0$.

Prin definiție, o mulțime Julia este frontiera mulțimii (de evadare):

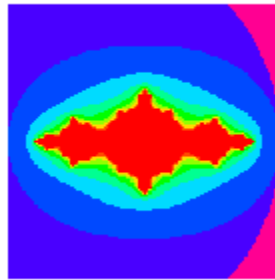
$$E_c = \{z_0 \in \mathbb{C}; |z_n| \rightarrow \infty, \text{ pentru } n \rightarrow \infty\}$$

Exemple de mulțimi Julia cu diferite constante c :

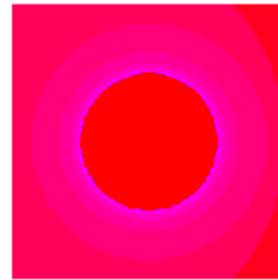
$c = -2$



$c = -1$



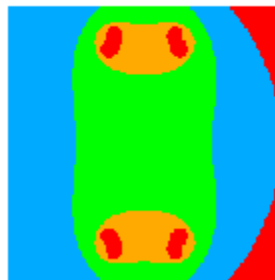
$c = 0$



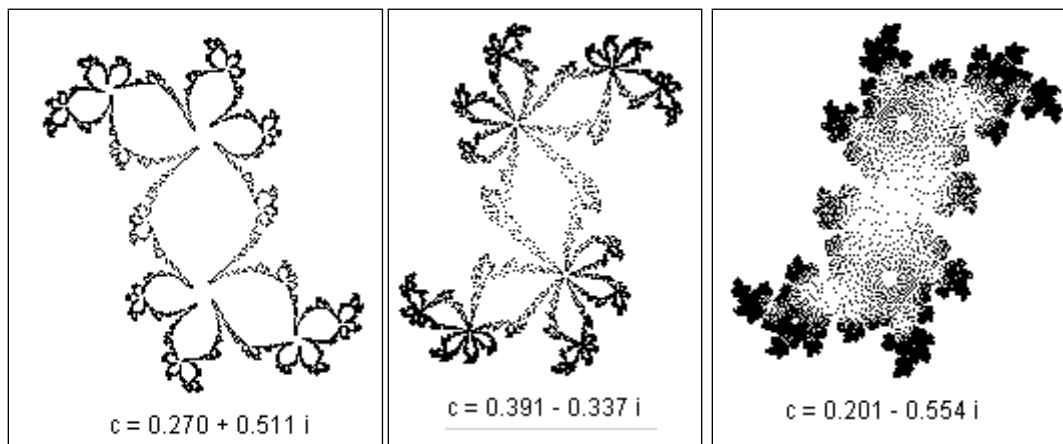
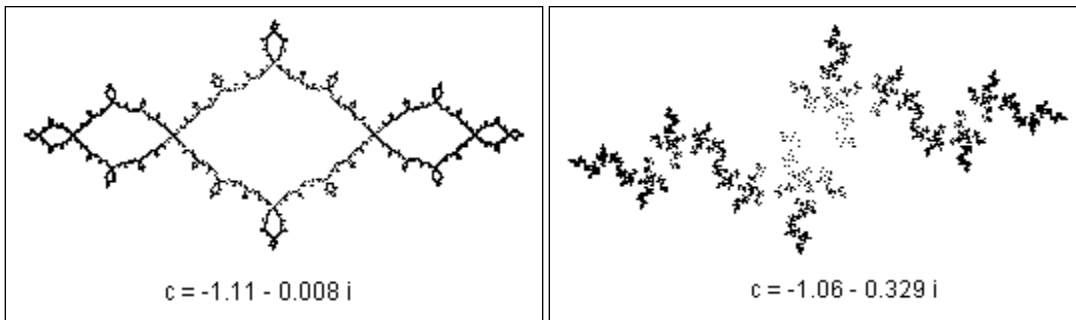
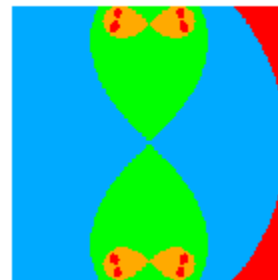
$c = 1$



$c = 2$



$c = 3$



Fractali clasici ca atractori ai IFS

In continuare vom defini operatorul lui Hutchinson corespunzator curbei lui Koch, multimii lui Cantor, triunghiului lui Sierpinski si covorului lui Sierpinski.

Acest fapt va duce la o demonstratie riguroasa a existentei acestor multimii a caror "descriere" intuitiva a fost facuta anterior.

Curba lui Koch

Fie transformarile similare (in plan):

$$w_1(x, y) = \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y \right), \quad w_2(x, y) = \left(\frac{1}{6}x - \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y \right)$$
$$w_3(x, y) = \left(\frac{1}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{\sqrt{3}}{6} \right), \quad w_4(x, y) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y \right)$$

Se poate demonstra usor (prin transformari geometrice elementare) ca operatorul lui Hutchinson $H = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ are drept attractor (punct fix) curba lui Koch, sau, cu alte cuvinte curba lui Koch este solutia ecuatiei $H(X) = X$. Teorema contractiei este fundamentul matematic al existentei (si unicitatii) solutiei acestei ecuatii, deci am demonstrat acum ca procesul iterativ descris (intuitiv anterior) defineste o multime.

Multimea lui Cantor

Fie transformarile similare (pe dreapta):

$$w_0(x) = \frac{1}{3}x, \quad w_1(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, \quad w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Observam ca w_0 transforma intervalul $[0, 1]$ in $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, w_1 transforma intervalul $[0, 1]$

in intervalul $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, iar w_2 transforma $[0, 1]$ in $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Operatorul lui Hutchinson

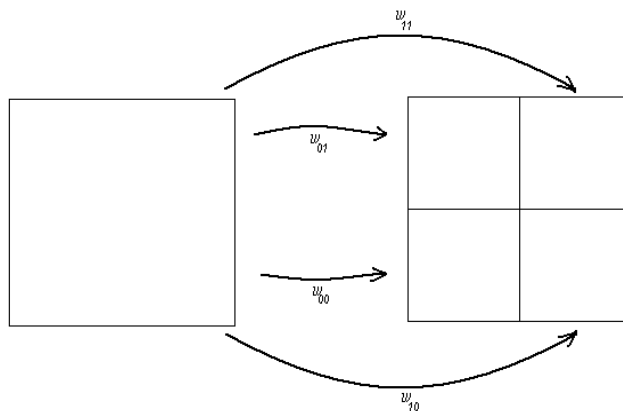
$H = (w_0, w_1, w_2)$ are ca attractor multimea lui Cantor.

Triunghiul lui Sierpinski (varianta)

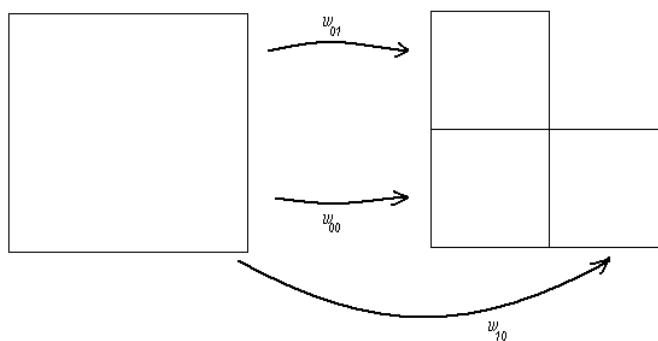
Fie transformarile similare (in plan):

$$w_{00}(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y \right), \quad w_{01}(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \right)$$
$$w_{10}(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y \right), \quad w_{11}(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \right)$$

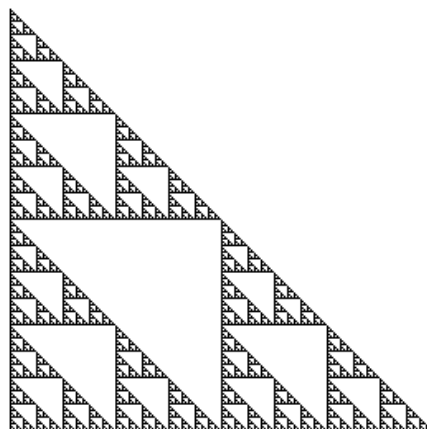
Sa observam ca un patrat este transformat prin cele 4 aplicatii de mai sus astfel:



Consideram acum operatorul Hutchinson $H = (w_{00}, w_{01}, w_{10})$. Schematic:

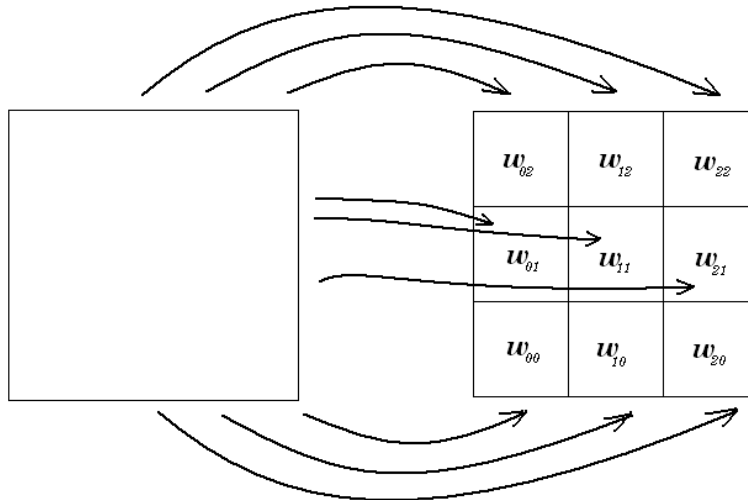


Atractorul asociat este urmatoarea varianta a triunghiului lui Sierpinski :



Covorul lui Sierpinski

Acesta se obtine intr-un mod asemanator cu cel anterior; de data aceasta vom considera 9 transformari similare care sa transforme un patrat astfel:



Propunem cititorului sa scrie formulele corespunzatoare pentru $w_{ij}, i, j \in \{0,1,2\}$

Operatorul Hutchinson care are ca punct fix covorul lui Sierpinski este

$$H = (w_{00}, w_{01}, w_{02}, w_{10}, w_{12}, w_{20}, w_{21}, w_{22}).$$

Sisteme iterative nedeterministe (aleatoare, haotice)

Sistemele iterative (IFS) considerate anterior sunt deterministe in sensul ca fiecare iteratie este unic determinata. Se pot considera sisteme iterative care au un caracter aleator (haotic) in sensul ca o anumita iteratie este aleasa dintr-o lista de posibili operatori (fiecare cu o anumita probabilitate).

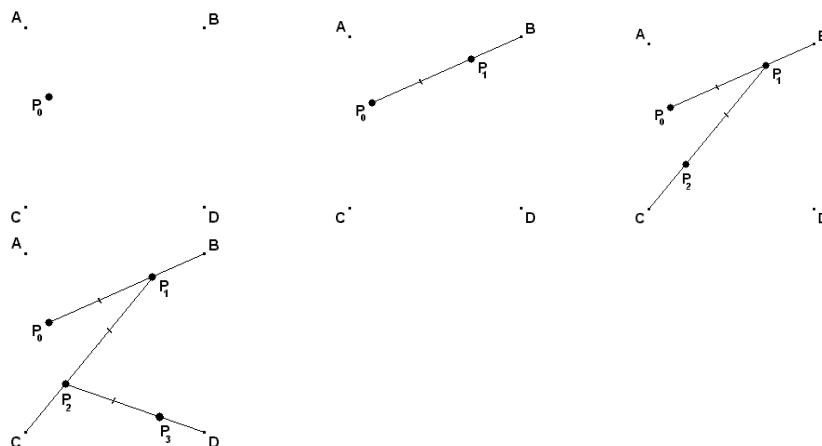
Incepem cu un exemplu. Sa consideram urmatorul "joc aleator" (random, chaotic game).

Fie $ABCD$ un patrat si fie un zar cu 4 fete (notate A, B, C, D).

Pasul zero: jocul incepe alegand la intamplare un punct P_0 in planul patratului.

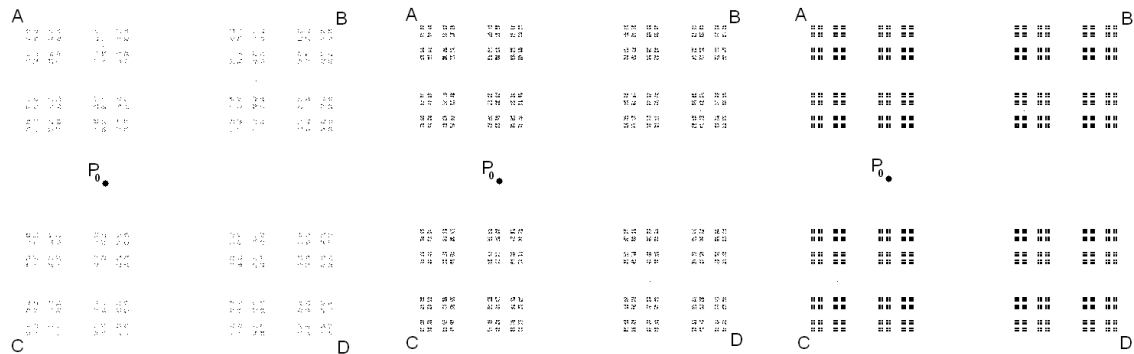
Primul pas: se arunca zarul si se obtine o litera $L \in \{A, B, C, D\}$. Pe segmentul P_0L consideram punctul P_1 situat la o treime de L .

Pasul doi: se repeta primul pas cu P_1 in locul lui P_0 , s.a.m.d. Mai jos sunt ilustrati primii patru pasi:



Intrebarea care se pune este daca acest proces (cu caracter aleator) are ca rezultat (ca in cazul sistemelor iterative deterministe) un atractor. In plus, cum poate fi studiat rezultatul (atractorul) acestui proces aleator cu metodele descrise mai sus (teorema contractiei, IFS).

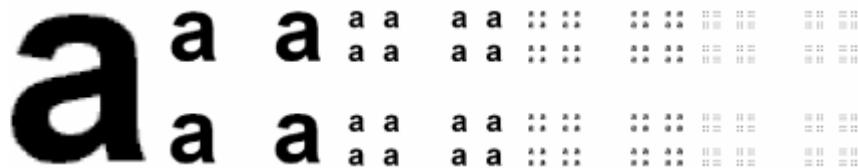
In exemplul considerat, continuand iteratiile, obtinem (dupa 1000, 2000, 1000000 iteratii):



Aparent, “la limita”, rezultatul nu depinde de punctul P_0 si nici de diferitele alegeri ale punctului $L \in \{A, B, C, D\}$. Vom reveni la aceasta idee. Acum sa consideram operatorul Hutchinson asociat contractiilor

$$w_1(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right), w_2(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3}\right), w_3(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} + \frac{2}{3}\right), w_4(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3} + \frac{2}{3}\right)$$

Rezultatul a patru iteratii ale operatorului Hutchinson este



Concluzia (in acest caz) este ca atractorul asociat operatorului Hutchinson este aproximarea teoretica a structurii obtinute prin sistemul iterativ (nedeterminist) definit anterior.

Exemplul de mai sus se poate generaliza dupa cum urmeaza.

Sa consideram un operator Hutchinson $H = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ avand ca atractor A_∞ . Fie p_1, p_2, \dots, p_n numere pozitive cu proprietatea $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Un sistem iterativ aleator (random iterated function system) se defineste astfel:

- se alege z_0 un punct arbitrar in plan.

- pentru $k = 0, 1, 2, \dots$, fie $z_{k+1} = w_{s(k)}(z_k)$, unde $s(k) \in \{1, 2, \dots, n\}$; contractia $w_{s(k)}$ a fost aleasa (aleator) cu probabilitatea p_k .

In termeni asemanatori cu MRCM, sistemul aleator poate fi descris de FRCM (Fortune Wheel Reduction Copy Machine) astfel:

- se porneste cu un punct arbitrar;
- la un anumit pas, nu se aplica toate contractiile, ci numai una, aleasa aleator (cu probabilitatea corespunzatoare);
- in final (dupa un numar infinit de pasi) se deseneaza toate punctele generate.

Se poate demonstra urmatorul rezultat:

Teorema

Pentru orice punct $P \in A_\infty$ si pentru orice $\varepsilon > 0$, exista un numar natural $n \in \mathbb{N}$ astfel incat la pasul n sistemul iterativ aleator sa produca puncte situate la distanta mai mica decat ε fata de P .

Propunem cititorului ca exercitiu sa defineasca "jocuri haotice" (ca in modelul de mai sus) avand ca atractori triunghiul lui Sierpinski, etc.

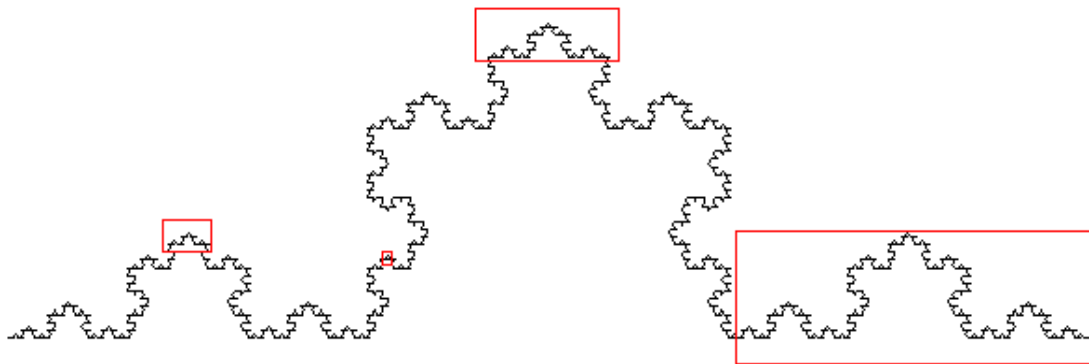
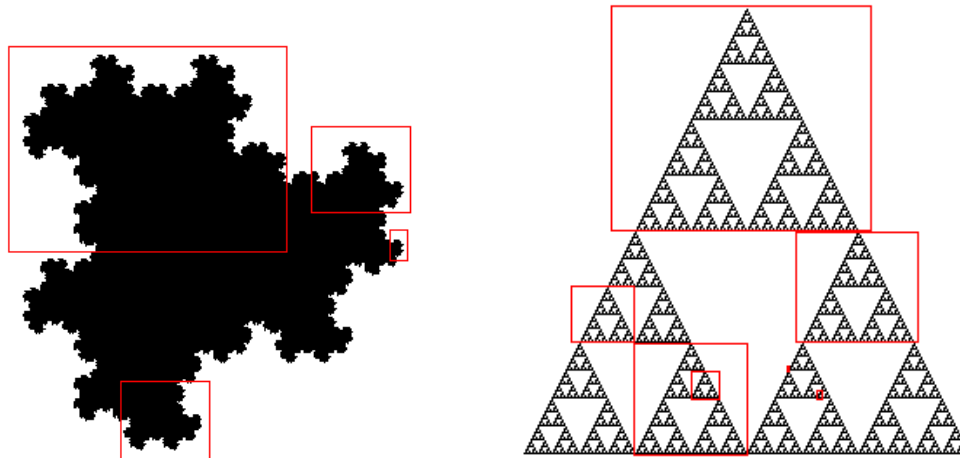
II. AUTOSIMILARITATE SI DIMENSIUNE

Autosimilaritate

Intuitiv, doua obiecte sint similare (asemenea) daca au aceeasi forma, indiferent de marimea lor. Unghiurile corespunzatoare sint egale in timp ce segmentele sint proportionale.

O transformare geometrica intre doua obiecte asemenea se numeste o asemanare (sau similaritate). Transformarile similare sint compuneri de omotetii (scalari), rotatii si translatii. Este clar ca multimile introduse mai sus au o autosimilaritate, in sensul ca daca scalam (marim) o anumita portiune dintr-un pas avansat al constructiei vom regasi o portiune obtinuta deja la un pas anterior.

In figurile de mai jos sunt puse in evidenta multimi similare :





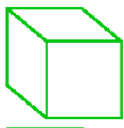

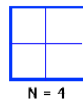
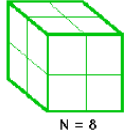

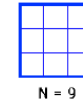
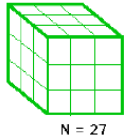
Dimensiune fractala

Notiunea de dimensiune este, pina la un punct destul de intuitiva. Se spuna ca un segment are dimensiune 1, un patrat are dimensiune 2, un cub dimensiune 3. Vom indica in continuare un mod de a calcula aceste dimensiuni pe care apoi sa-l generalizam la multimi mai complicate. Autosimilaritatea va juca un rol esential in cele ce urmeaza.

Daca impartim un segment in N segmente de lungime egale (congruente), atunci segmentul initial este de N ori mai mare decit fiecare dintre cele N segmente mici obtinute; in plus, sa observam ca orice segment este autosimilar, deci cele N segmente sint copii (de N ori mai mici) ale segmentului initial.

In cazul unui patrat, acesta se poate descompune in N^2 copii, fiecare de N ori mai mic decat patratul initial.

In sfarsit, in cazul unui cub, acesta se descompune in N^3 copii, fiecare de N ori mai mic decit cubul initial.

	D = 1	D = 2	D = 3	Obiect	Numar de parti	Factor de scalare
r = 1				sg. dreapta	3	1/3
r = 2				sg. dreapta	6	1/6
				sg. dreapta	173	1/173
				patrat	9 = 3 ²	1/3
				patrat	36 = 6 ²	1/6
				patrat	29929 = 173 ²	1/173
				cub	27 = 3 ³	1/3
				cub	216 = 6 ³	1/6
				cub	5177717 = 173 ³	1/173
r = 3				curba Koch	4	1/3
				curba Koch	16	1/9
				curba Koch	4 ^k	1/3 ^k

Se observa ca putem obtine o “formula” de calcul a dimensiunii : impartim obiectul in copii autosimilare, fiecare de N ori mai mica decat obiectul initial. Daca P este numarul de copii astfel obtinute, atunci dimensiunea $D_s = \frac{\log P}{\log N}$. Formula este corecta

pentru exemplele (simple) de mai sus.

Vom defini deci dimensiunea (de autosimilaritate) a unui obiect astfel:

$$D_s = \frac{\log(\text{numarul de copii autosimilare})}{\log(\text{factorul de scalare})}$$

Sa aplicam acum metoda (si formula de mai sus) pentru triunghiul lui Sierpinski. Evident, acesta este format din 3 copii , fiecare de 2 ori mai mica decit triunghiul initial, deci dimensiunea de autosimilaritate a triunghiului lui Sierpinski este $\frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1,585$.

In cazul covorului lui Sierpinski, exista 8 copii ale patratului initial, fiecare de 3 ori mai mica decat acesta, deci dimensiunea de autosimilaritate este $\frac{\log(8)}{\log(3)} \approx 1,8928$.

Pentru multimea lui Cantor dimensiunea de autosimilaritate este $\frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0,6309$.

Curba lui Koch este formata din 4 copii identice, fiecare de 3 ori mai mica decit intreaga curba. Deci dimensiunea sa este $\frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1,2619$.

Desigur in rationamentele de mai sus un rol determinant l-a avut autosimilaritatea (evidenta) a multimii careia i-am calculat dimensiunea. Pentru multimii mai complicate este nevoie mai intai de o fundamentare teoretica si apoi de metode de calcul aproximativ. Este subiectul pe care il vom aborda in continuare.

Dimensiune Hausdorff

Fundamentarea teoretică a ideilor de mai sus aparține lui Hausdorff. Prezentăm în continuare, pe scurt, ideile principale din definiția dimensiunii fractale (sau Hausdorff).

Fie $R^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in R\}$ și fie $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ distanța euclidiană. Diametrul unei submulțimi $U \subset R^n$ se definește prin egalitatea $diam(U) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in U\}$. Fie $A \subset R^n$ and let U_1, U_2, \dots o acoperire deschisă a sa. Pentru orice numere pozitive s și ε , definim

$$h_\varepsilon^s(A) = \inf\left\{\sum_i [diam(U_i)]^s, diam(U_i) < \varepsilon\right\}$$

Măsura s -dimensională Hausdorff a lui A este $h^s(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon^s(A)$. Se demonstrează că există un număr $D_H(A)$ astfel încât $h^s(A) = \infty$ dacă $s < D_H(A)$ și $h^s = 0$ dacă $s > D_H(A)$. Numărul $D_H(A)$ este prin definiție dimensiunea Hausdorff a mulțimii A . De asemenea

$$D_H(A) = \inf\{s \mid h^s(A) = 0\} = \sup\{s \mid h^s(A) = \infty\}.$$

Proprietățile (uzuale) ale dimensiunii Hausdorff sunt :

- (1) Dacă $A \subset R^n$ atunci $D_H(A) \leq n$.
- (2) Dacă $A \subset B$ atunci $D_H(A) \leq D_H(B)$.
- (3) Dacă A este multime cel mult numărabilă, atunci $D_H(A) = 0$.
- (4) Dacă $D_H(A) < 1$ atunci A este total neconexă.

Pentru cele mai multe mulțimi, calculul dimensiunii fractale (Hausdorff) este practic imposibil. De aceea, sunt importante metode de calcul aproximativ (care cel puțin pentru cazurile simple să fie exacte!). Vom prezenta în continuare două astfel de metode.

Metoda compasului

Geometria a avut întotdeauna două fațete, iar amândouă la un loc au jucat un rol foarte important. Pe de o parte avem analiza formelor iar pe de altă parte avem măsurarea formelor. Problema lungimii diagonalei unui pătrat a fost la început o problemă de măsurare, iar mai apoi s-a mutat în sfera teoretică și a stat la baza introducerii numerelor irrationale. Încercările de a calcula lungimea circumferinței cercului au dus la decoperirea misteriosului număr π . Măsurarea ariei mulțimii dintre curbe a fost o importantă sursă de inspirație în dezvoltarea calculului diferențial și integral.

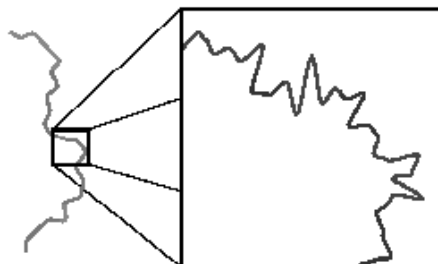
Astăzi, măsurarea lungimii, a ariei și a volumului nu par să mai ridice vreo problemă cel puțin din punct de vedere tehnic. În principiu, obișnuim să credem că aceste probleme sunt de mult rezolvate și că putem măsura orice vedem dacă dorim cu adevărat

acest lucru. Sau ne inselam ?... Aceasta este tema articolului lui Mandelbrot din 1967 intitulat “*How long is the coast of Britain ?*” und se demonstreaza ca din punct de vedere practic liniile de coasta nu au o lungime, sau au o lungime infinita. Aceasta afirmatie pare ridicola sau cel putin contrazice intuitia conform careia o insula cu o arie bine determinata va avea, de asemenea, si o lungime bine determinata. Sa ne reamintim insa modelul (teoretic) al insulei lui Koch.

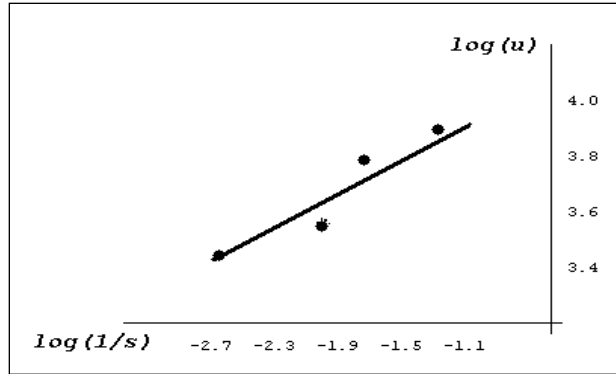
Daca incercam sa masuram lungimea coastei Marii Britanii pe harta cu un compas, vom remarca faptul urmator: cu cat vom mica deschiderea compasului, cu atat lungimea obtinuta este mai mare, ea neapara sa converga catre o valoare.



Acest lucru se datoreaza detaliilor de pe frontiera obiectului masurat, micile irregularitati ducand in final la distante totale din ce in ce mai mari.



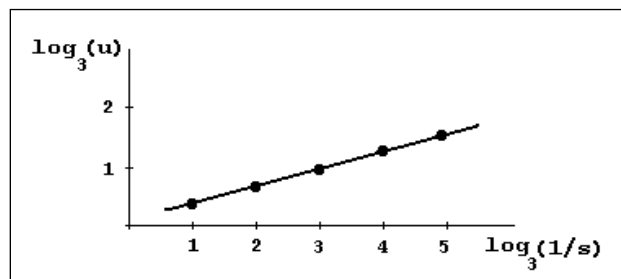
Daca reprezentam pe o diagrama punand pe axa orizontala $\log(1/s)$, unde s este deschiderea compasului si pe axa verticala $\log(u)$, unde u este lungimea coastei obtinute cu acel compas (adica rezultatul masuratorii pentru s) se obtine o diagrama ca in figura:



Pentru aceasta diagrama vom desena dreapta de regresie corespunzatoare punctelor obtinute. Observam ca punctele obtinute (pentru valori foarte diferite ale compasului!) sunt foarte aproape dreapta de regresie. Acesta este un rezultat surprinzator, care ne conduce la ideea ca panta dreptei de regresie este o caracteristica a structurii studiate. Calculand panta (in cazul particular al coastei Marii Britanii) se obtine o valoare aproximativa $d = 0.36$. Asadar ecuatia dreptei de regresie este $\log(u) = d \cdot \log(1/s) + b$

si in consecinta rezulta ca $u = c \cdot \left(\frac{1}{s}\right)^d$. Pentru a obtine valori cit mai precise, trebuie valori cit mai mici ale lui s ; pentru $s \rightarrow 0$, lungimea u tinde la infinit!

Daca vom aplica acum acelasi procedeu curbei lui Koch, vom obtine urmatoarea diagrama:



Panta dreptei de regresie este $d = \log_3 \frac{4}{3} \approx 0.2619$.

Aici metoda compasului este exacta deci metoda compasului poate fi folosita pentru a studia dimensiunea (si deci complexitatea) unei structuri a carei arie este nula (are numai lungime). Aceasta valoare este mai mica decat cea pe care am obtinut-o pentru coasta Marii Britanii, cu alte cuvinte, coasta Marii Britanii este mai "incretita", mai complicata decat curba Koch. Astfel, d este o masura a complexitatii figurii respective. Se pune in mod natural intrebarea: care este relatia intre dimensiunea de autosimilaritate si panta dreptei rezultate prin metoda compasului? Raspunsul este dat in teorema urmatoare.

Teorema

Relatia dintre dimensiunea de autosimilaritate D_s si panta (notata d) dreptei de regresie obtinute prin metoda compasului este $D_s = 1 + d$.

Demonstratie

Relatia dintre u si d (din metoda compasului) se poate scrie sub forma simplificata (alegand o unitate de masura astfel incat constanta $c=1$): $u = \frac{1}{s^d}$. Logaritmand aceasta

relatie rezulta: $\log u = d \log \frac{1}{s}$. Pe de alta parte, formula pentru calculul dimensiunii de

autosimilaritate este se scrie: $\log k = D_s \log \frac{1}{s}$, unde s este factorul de scalare iar k este numarul de copii (scalate cu k). Nu este dificil de observat ca relatia intre u , s si k este $u = ks$. Logaritmand, se obtine: $\log u = \log k + \log s$. Inlocuind in aceasta ultima relatie pe $\log u$ si pe $\log k$ din egalitatile de mai sus rezulta:

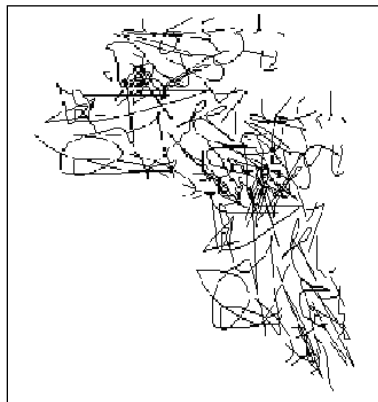
$$d \log \frac{1}{s} = D_s \log \frac{1}{s} + \log s,$$

si deci $D_s = 1 + d$. Sa mai observam ca pentru curba lui Koch rezultatul coincide cu calculele anterioare.

Metoda Box-Counting

Cea mai importanta metoda de calcul aproximativ pentru evaluarea dimensiunii fractale (Hausdorff) este metoda Box-Counting. Acest concept este strans legat de cel de dimensiune de autosimilaritate; in multe cazuri si valoarea numerica a lor este aceeasi, in alte cazuri insa nu.

Fie urmatoarea imagine:



O structura cu unele
proprietati de autosimilaritate

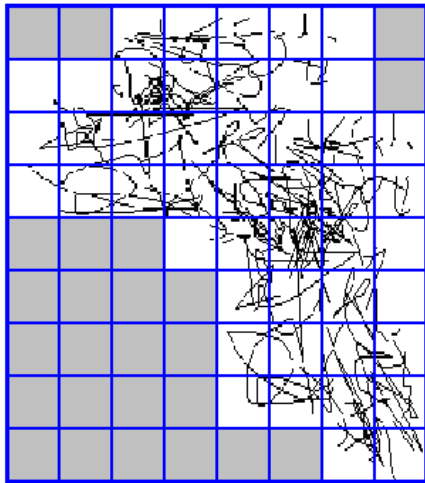
Intr-un astfel de caz nu mai poate fi vorba de o curba ce poate fi masurata cu compasul , nici autosimilaritate nu exista; exista totusi anumite microstructuri care se repeta. . Daca ne uitam mai atent, observam ca o portiune din dreapta-jos seamana foarte mult cu una din stanga-sus. Metoda Box-Counting este un procedeu sistematic ce poate fi aplicat oricarei figuri din plan. In principiu este metoda compasului adaptata la structuri bidimensionale. Mai jos sunt redate etapele metodei:

(i) punem structura intr-o grila de patrate toate de aceeasi marime s , si numaram cate patrate din grila cuprind parti din structura. Notam acest numar cu $N(s)$.

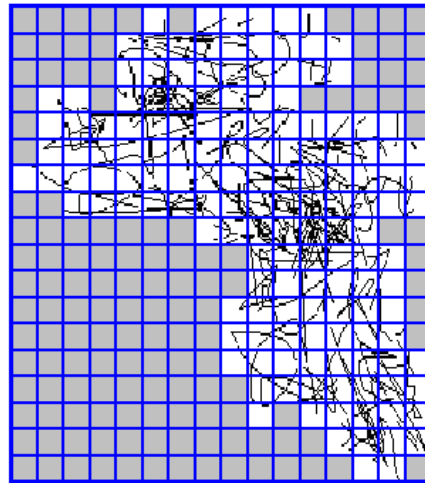
(ii) schimbam s progresiv catre marimi din ce in ce mai mici obtinem mai multe valori pentru $N(s)$.

(iii) trasam un graphic cu valorile $\log[N(s)]$ versus $\log(1/s)$ si calculam panta dreptei de regresie determinate de punctele obinute. Aceasta panta se numeste dimensiunea Box-Counting si o notam cu D_b .

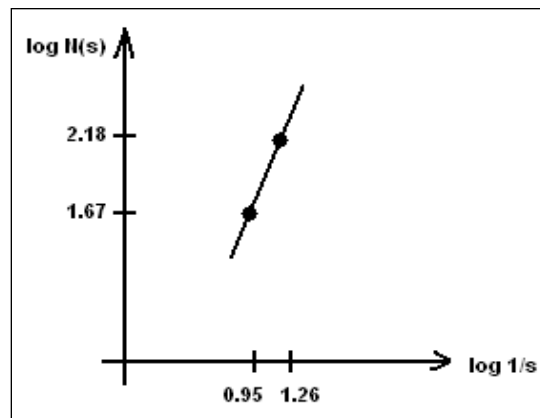
In figura de mai jos sunt ilustrate doua etape (pentru valori diferite ale lui s):



$s = 1/9$ $N(s) = 47$



$s = 1/18$ $N(s) = 152$



$$\log(9) \approx 0.95$$

$$\log(47) \approx 1.67$$

$$\log(18) \approx 1.26$$

$$\log(152) \approx 2.18$$

In acest exemplu, logaritmiile sînt zecimale. Panta a dreptei de regresie este (aproximativ) $D_b = 1.65$.

Pentru dimensiunea box counting a coastei Marii Britanii se obtine o valoare aproximativa de 1.31. Acest rezultat este in concordanta cu rezultatul obtinut prin metoda compasului ($1+d=1,36$).

Din descrierea metodei Box-Counting rezulta urmatoarea formula pentru calculul pantei dreptei de regresie. Din motive practice, la fiecare pas este avantajos ca lungimea s a laturii patratului sa fie injumatatita, deci valorile succesive ale lui s sînt:

$$s = 2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, \dots, 2^{-k}, 2^{-(k+1)}, \dots$$

Notand ca mai sus cu $N(s)$ numarul de patrute care acopera structura, rezulta urmatoare formula pentru panta dreptei de regresie (intre pasul k si pasul $k+1$):

$$D_b = \frac{\log(N(2^{-(k+1)})) - \log(N(2^{-k}))}{\log(2^{k+1}) - \log(2^k)} = \log\left(\frac{N(2^{-(k+1)})}{N(2^k)}\right)$$

In formula de mai sus logaritmiile au baza 2.

Metoda Box-Counting se poate generaliza la spatiul R^n , considerand cuburi (in R^3) in loc de patrute, etc

Incheiem consideratiile cu privire la dimensiunile discutate mai sus cu unele observatii.

Dimensiunea Box-Counting nu poate depasi (pentru o figura plana) valoarea 2. Dimensiunea de autosimilaritate poate fi mai mare decit 2, de exemplu atunci cand figura are multe parti care se suprapun (sau autointersectii). Acestea sunt numarate o singura data in metoda Box-Counting, in timp ce in calculul dimensiunii de autosimilaritate ele se numara in conformitate cu numarul de multiplicari.

In legatura cu relatia dintre dimensiunea Box-Counting si dimensiunea Hausdorff, desi in multe cazuri prima constituie o buna aproximare pentru cea de a doua, sa notam totusi ca dimensiunea Box Counting a oricarei submultimi dense (in R^2) este 2 in timp ce dimensiunea Hausdorff este 0.

Concluzii

In finalul acestei scurte prezentari teoretice putem concluziona ca un fractal este o multime a carui dimensiune Hausdorff este un numar neintreg si care poate fi obtinut ca atractor al unui sistem iterativ Hutchinson.

III. SERII DE TIMP SI ATRACTORI

Studiul atractoriilor (introdusi in sectiunile precedente ca puncte fixe ale operatorilor Hutchinson) constituie o problema interesanta dar care, in general, este dificila. Printre metodele care s-au dovedit eficiente in aceasta incercare este si metoda seriilor de timp. Prezentam in continuare (pe scurt) ideile acestei tehnici. Incepem cu o definitie mai generala a sistemelor dinamice (decat cea folosita pana acum).

Fie $(S, +)$ un semigrup si fie M un spatiu metric cu distanta d (numit si spatiul starilor). Un sistem dinamic este orice aplicatie $T : S \times M \rightarrow M$, astfel incat

- i) $T(0, x) = x$, pentru orice $x \in M$
- ii) $T(t, T(s, x)) = T(t+s, x)$, pentru orice $t, s \in S$ si $x \in M$.

O aplicatie $F: M \rightarrow M$ este interpretata ca o masura in spatiul starilor. Daca $t, \tau \in S$ sunt fixate (τ este numit "intarziere") si $x \in M$ este o stare fixata, atunci secventa de masuratori

$$F(x), F(T(t+\tau, x)), F(T(t+2\tau, x)), F(T(t+3\tau, x)), \dots, F(T(t+(d-1)\tau, x))$$

se numeste serie de timp (incepand de la (t, x)) asociata lui T .

Sistemele dinamice discrete sunt un caz particular al definitiei de mai sus. Un sistem dinamic T se spune ca este un sistem dinamic discret daca exista o aplicatie $\varphi : M \rightarrow M$, asa incat

$$T : \mathbb{N} \times M \rightarrow M, T(n, x) = (\varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi)(x) = \varphi^n(x), \text{ (de } n \text{ ori).}$$

Pentru o stare fixata $x \in M$, seria de timp asociata sistemului dinamic discret este

$$F(x), F(\varphi(x)), \dots, F(\varphi^{n-1}(x)).$$

O multime nevida $K \subset M$ se numeste atractor (sau multime atractoare) a sistemului T daca

- i) K este inchisa.
- ii) K este invarianta, i.e. $T(x) \in K$, pentru orice $x \in K$.
- iii) Exista o vecinatate U a lui K asa incat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(T(t, x), K) = 0, \text{ pentru orice } x \in U.$$

Teorema de scufundare a lui Takens sta la baza reconstructiei atractoriului pentru un sistem dinamic pornind de la o serie de timp. Prezentam mai jos o varianta a teoremei lui Takens (T. Sauer, J. Yorke, M. Casdagli).

Teorema

Fie $T : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ un sistem dinamic neted (de clasa C^2 pe M) si $F: M \rightarrow M$ o masura de clasa C^2 . Fie $t \in \mathbb{R}$ un moment fixat si fie $\tau > 0$ o intarziere in timp. Daca K este o multime compacta invarianta la T si daca b este dimensiunea box-counting a lui K , atunci aplicatia $H: K \rightarrow \mathbb{R}^{2b+1}$ definita prin:

$$H(x) = (F(T(t, x)), F(T(t-\tau, x)), \dots, F(T(t-2b\tau, x)))$$

este, generic, injectiva. (O proprietate este generica daca este adevarata pe o multime ce contine o intersectie numarabila de multimi dense deschise).

Reconstructia atracteurului si dimensiunea de autocorelatie

In aplicatiile practice (analiza imaginilor, etc) se cunoaste o serie de timp (asociata atracteurului) si se pune problema reconstructiei atracteurului. Pentru aceasta se considera diferite dimensiuni de scufundare (embedding dimension) $d \in \{2,3,4,\dots\}$ (pentru spatiul starilor).

Pentru fiecare d se considera puncte in spatiul starilor de forma

$$(F(x), F(T(t+\tau, x)), F(T(t+2\tau, x)), F(T(t+3\tau, x)), \dots, F(T(t+(d-1)\tau, x))),$$

obtinute prin trunchierea seriei de timp. Multimea acestor puncte constituie o "reprezentare" a atracteurului intr-un (pseudo) spatiu de scufundare de dimensiune d .

Pentru fiecare d fixat si pentru orice $r > 0$, integrala de autocorelatie $C(r)$ a atracteurului este, prin definitie, probabilitatea ca doua puncte din spatiul starilor sa fie la o distanta euclidiana mai mica sau egala cu r . Se demonstreaza ca $C(r)$ este o functie putere de forma r^D . Exponentul D se numeste dimensiunea de autocorelatie a atracteurului. Aceasta procedura este repetata pentru diferite valori ale lui d . In final vom trasa graficul dimensiunii de corelatie in functie de dimensiunea de scufundare si calculam panta dreptei de regresie pentru punctele obtinute. Aceasta panta este o aproximare pentru dimensiunea de autocorelatie.

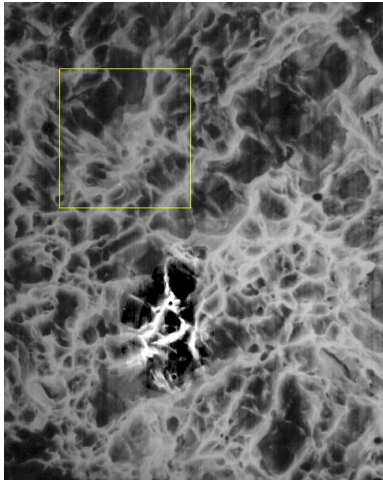
Serii de timp si analiza imaginilor

O modalitate de a asocia o serie de timp (mai exact o serie "spatiala") unei imagini este descrisa in continuare.

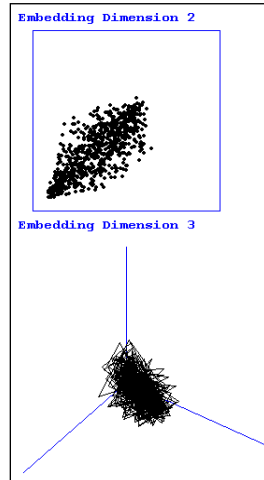
Se imparte imaginea in benzi de lungimi egale cu latimea imaginii si inaltime egala cu un numar H (ales de obicei din intervalul $[4,32]$), apoi se concateneaza fasiile obtinute rezultand o fasie de inaltime H si lungime $W=(w*h)/H$, unde w este latimea imaginii, iar h este inaltimea imaginii. Aceasta fasie va fi practic alcatuita dintr-un sir de W coloane de cate H pixeli fiecare. Pentru fiecare din aceste coloane calculam media nivelurilor de gri ale pixelilor pe care ii contine. Vom obtine astfel o serie de W valori numerice cuprinse in intervalul $[0,255]$. Normand acest interval prin impartirea valorilor la 255 vom obtine o serie de W valori numerice in intervalul $[0,1]$ care reprezinta seria de timp asociata imaginii respective. In continuare se reconstruieste atracteurul in diferite dimensiuni de scufundare, se calculeaza dimensiunea de autocorelatie, etc.

Exemplu

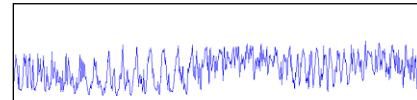
Mai jos este exemplificata tehnica descrisa anterior pentru doua zone ale aceleiasi imagini (microfractografie a aliajului Zy-4). Reconstructia atracteurului s-a facut pentru toate dimensiunile de scufundare de la 1 la 10, calculandu-se pentru fiecare caz dimensiunea de autocorelatie. Panta dreptei de regresie (care aproximeaza dimensiunea de autocorelatie) difera semnificativ la cele doua zone selectate. A fost de asemenea reprezentat atracteurul pentru dimensiunile de scufundare 2 si 3.



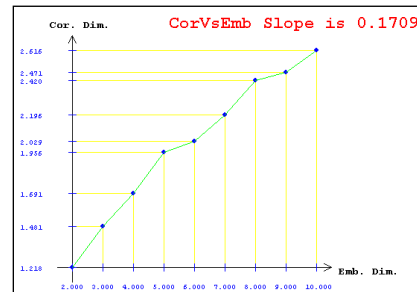
Zona selectata



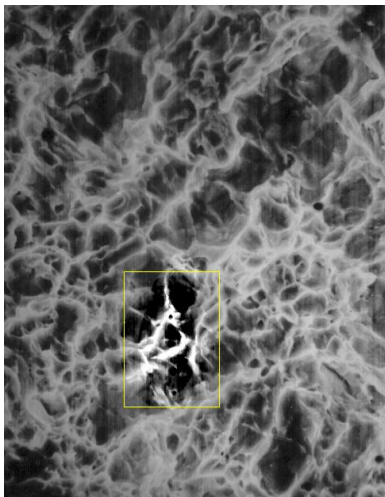
Atractorul obtinut pentru aceasta zona ($d=2$ – sus) ($d=3$ – jos)



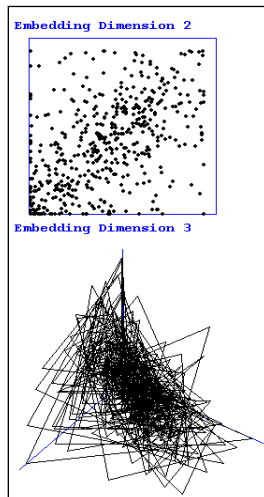
Seria de timp asociata zonei selectate



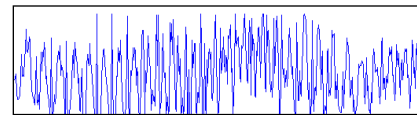
Graficul dimensiunii de autocorelatie in functie de dimensiunea de scufundare ($panta = 0.17$)



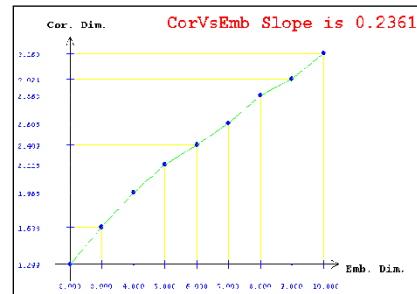
Zona selectata



Atractorul in $d=2$ si $d=3$



Seria de timp asociata zonei selectate



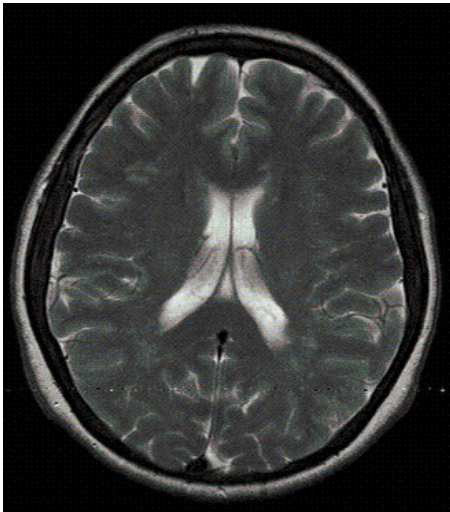
Graficul dimensiunii de autocorelatie in functie de dimensiunea de scufundare ($panta 0.24$)

IV. APLICATII

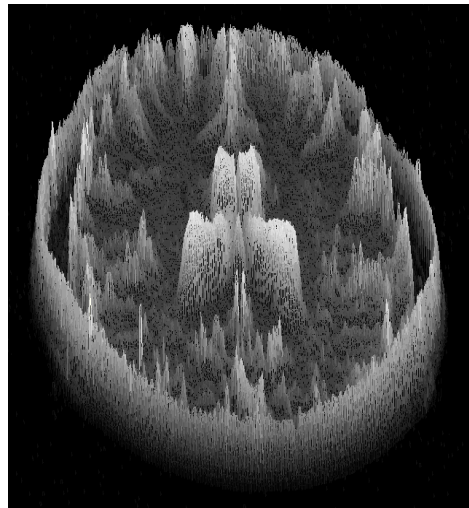
Analiza imaginilor constituie este un domeniu in care teoria fractalilor are (in mod natural) foarte multe aplicatii. Vom prezenta in continuare o metoda bazata pe calculul dimensiunii fractale (prin metoda Box-Counting) si pe studiul seriilor de timp pentru a analiza imagini reale.

Algoritmul clasic de Box Counting nu poate fi aplicat decat pe imagini binare. In practica se lucreaza in general cu imagini cu nuante de gri sau color.

Transformarea acestora in imagini binare este posibila insa pierderea de informatie este de multe ori considerabila. Pentru a evita pierderea de informatie si alte aspecte negative legate de binarizarea imaginilor se poate implementa un algoritm de tip Box Counting aplicabil direct pe imagini cu nuante de gri. Pentru a introduce acest algoritm vom privi o imagine cu nuante de gri ca pe un obiect in spatiul cu 3 dimensiuni. Obiectul va fi asemanator unui obiect tridimensional construit dupa regula urmatoare: pentru fiecare pixel din imagine de o intensitate de gri $W(x,y)$ cuprinsa intre 0 si 255 ridicam o verticala de lungime $W(x,y)$ care va reprezenta inaltimea obiectului in acel punct. Un exemplu de astfel de obiect spatial asociat unei imagini cu nuante de gri este urmatorul:



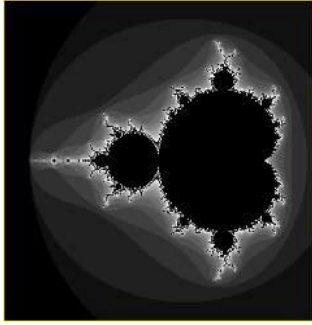
Imaginea in nuante de gri



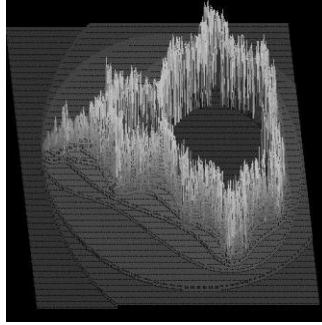
Obiectul tridimensional asociat imaginii

Cand este vorba de o imagine care contine o textura (sau mai multe) in care dorim sa detectam posibilele defecte (anomalii, nepotriviri, etc.) trebuie sa facem o analiza globala a acelei imagini, totodata avand drept tinta caracteristici locale. In astfel de probleme se foloseste dimensiunea (Box-Counting) locala .

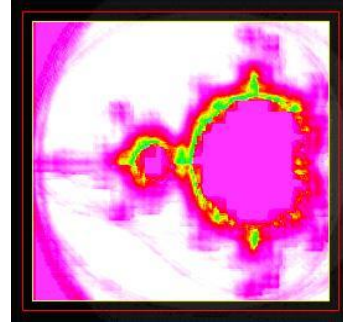
Fie A un pixel din imagine si fie K o vecinatate a acestuia de forma unui patrat de latura k centrat in A . Pentru aceasta vecinatate calculam dimensiunea Box Counting 3D care va fi un numar real cuprins intre 0 si 3. Repetam procedeul aplicat pixelului A pentru fiecare pixel din imagine. In continuare asociem fiecarei valori a dimensiunii Box-Counting o culoare (aici se pot face diverse conventii). In final, se obtine o "harta" a dimensiunilor Box-Counting, ce pune in evidenta regiunile care au aceeasi dimensiune Box-Counting.



Un exemplu de imagine
cu nuante de gri
(multimea Mandelbrot)



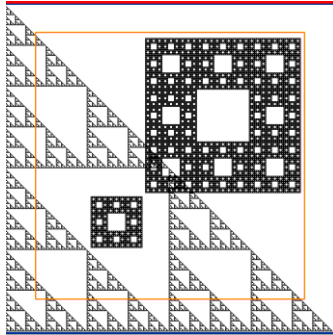
Obiectul 3D asociat imaginii



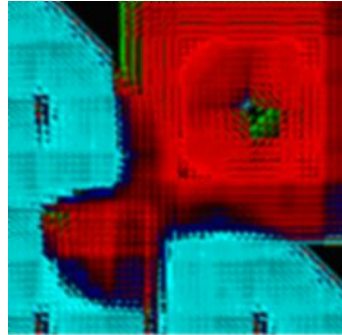
Harta dimensiunilor fractale
pentru imaginea analizata

Pentru a arata modul cum functioneaza acest tip de analiza, in cele ce urmeaza vom prezenta rezultatele obtinute pe imagini continand fractali clasici.

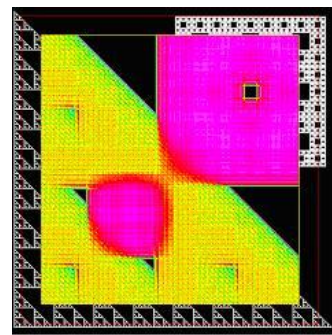
In exemplul urmatoar sunt utilizati triunghiul lui Sierpinski si covorul lui Sierpinski.



Doi fractali



Harta dimensiunilor fractale



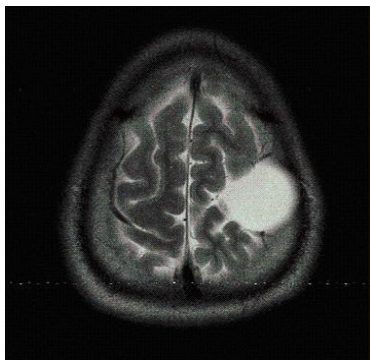
Harta dimensiunilor fractale

Cele doua "harti" corespund unor conventii diferite de a asocia culori dimensiunilor Box-Counting. Este important ca structuri diferite au dimensiuni Box-Counting diferite si deci sunt colorate diferit.

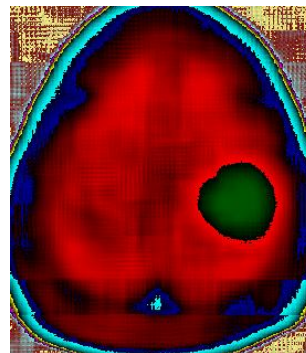
Aplicatii in imagistica medicala

In imagistica medicala este importanta detectarea posibilelor parti de tesut patogen. Este acceptat astazi faptul ca tesutul biologic are o structura local fractala.

In continuare prezentam cateva imagini CT (cu modificari patogene) si hartile cu dimensiunile lor Box-Counting. De fiecare data se constata variatii semnificative ale dimensiunii in zonele modificate. Analiza va fi completata prin compararea seriilor de timp asociate diferitelor zone din imagine.

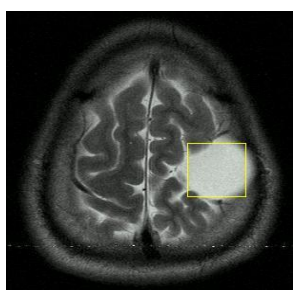


O imagine CT pe creier; se remarca tumoarea din dreapta.



Harta dimensiunilor fractale

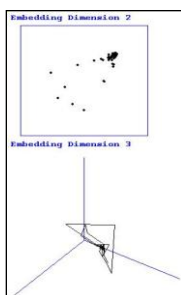
Analizam acum diferite zone ale imaginii.



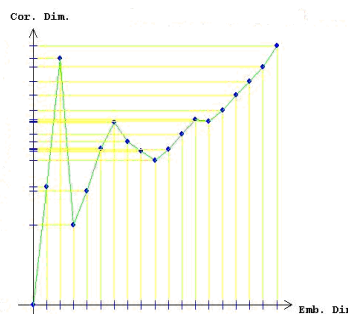
Zona selectata



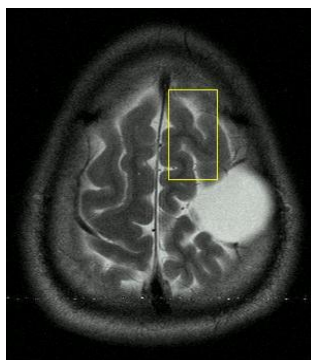
seria de timp



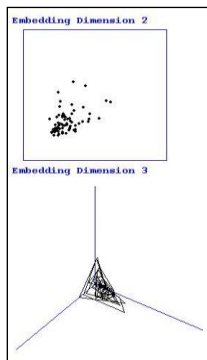
atractorul



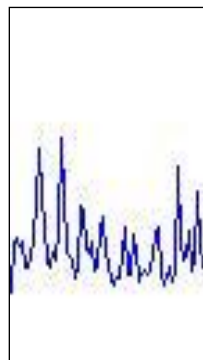
dimensiunea de autocorelatie



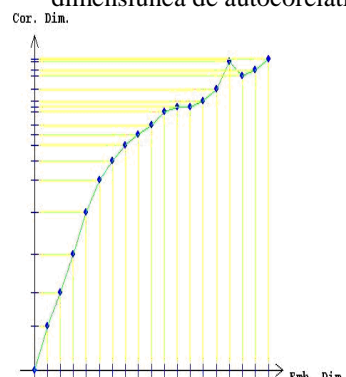
O zona cu tesut sanatos



Atractorul obtinut.



Seria de timp



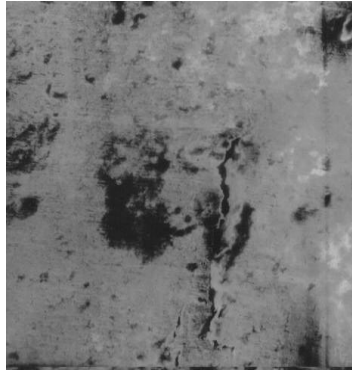
Dimensiunea de autocorelatie

Aplicatii in evaluarea calitatii materialelor

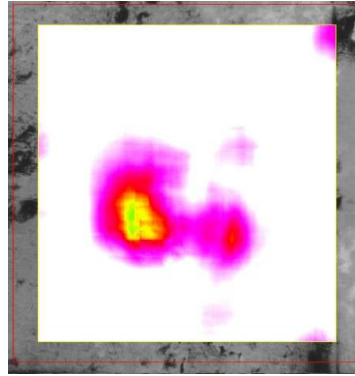
Pentru a testa aceasta metoda in domeniul evaluarii calitatii materialelor, am folosit imagini ale aliajului Zircaloy-4 (imaginile se numesc microfractografii SEM).

De mare interes sunt tuburile cu pereti subtiri din Zircaloy-4 care sunt amenintate de mici fisuri sau deformari datorate in special suprasolicitarii. Scopul este acela de a detecta la timp printr-un sistem automat aceste deficiente de material si de a preveni astfel producerea unor accidente.

Mai jos este o astfel de imagine si harta dimensiunilor fractale:

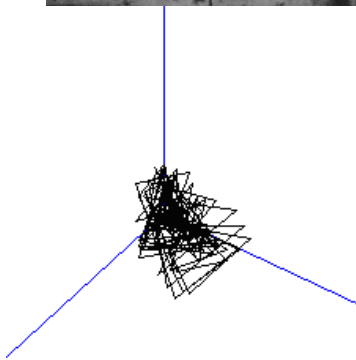
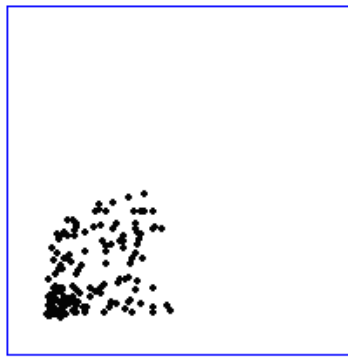
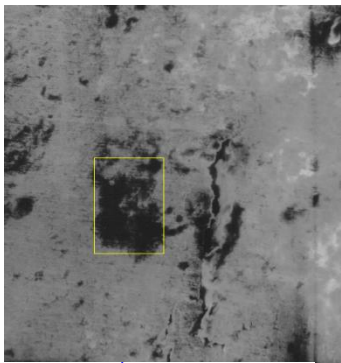


Imagine analizata



Harta dimensiunilor fractale

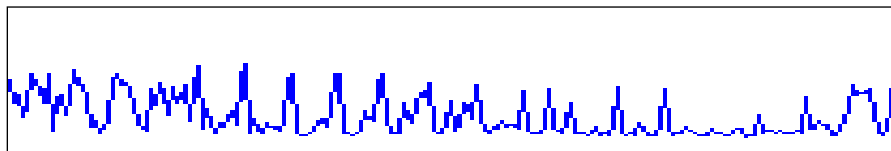
. Daca dorim o analiza mai avansata a imaginii, vom utiliza metoda seriilor de timp.



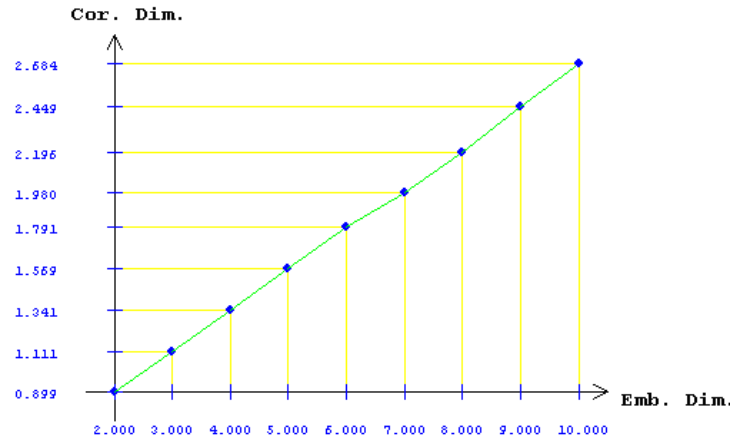
Zona selectata

Atractorul $d=2$

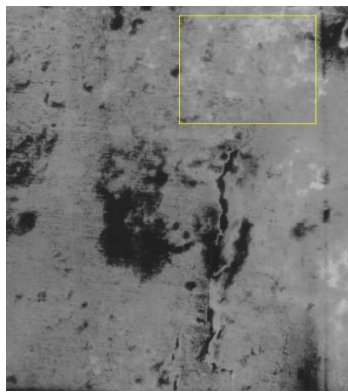
Atractorul $d=3$



Seria de timp asociata zonei selectate



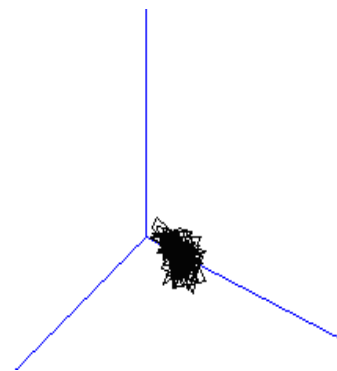
Dimensiunea de autocorelatie in functie de dimensiunea de scufundare (panta=0,22)



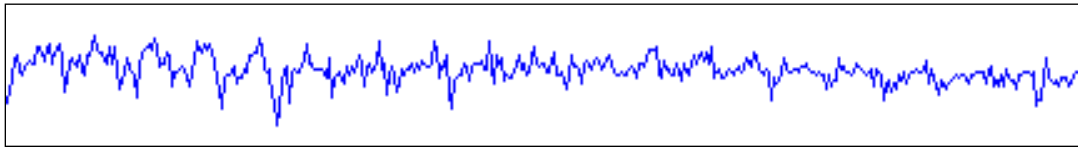
Zona selectata



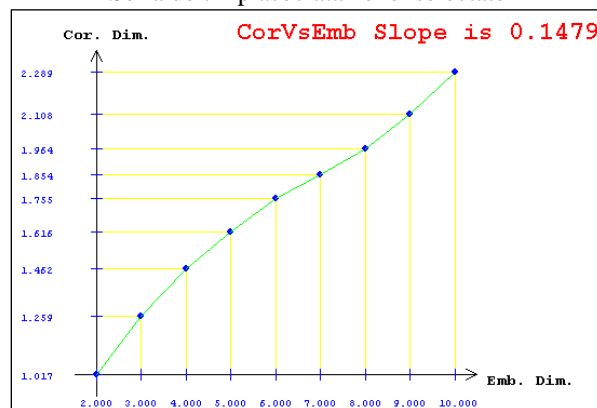
Atractorul d=2



Atractorul d=3



Seria de timp asociata zonei selectate



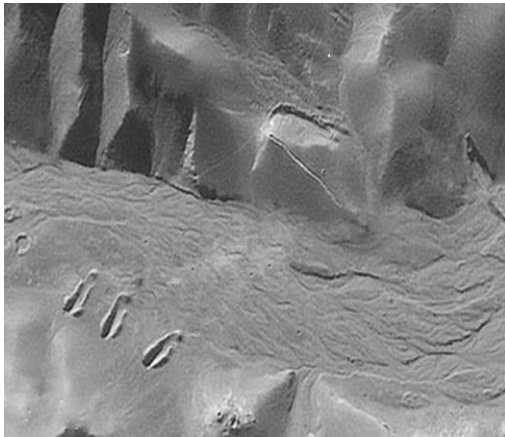
Dimensiunea de autocorelatie in functie de dimensiunea de scufundare (panta= 0,147)

Se constata diferente semnificative ale caracteristicilor atractorilor pentru zonele selectate.

Analiza imaginilor realizate de satelitul de observatie

In domeniul aplicatiilor militare, analiza imaginilor realizate din satelitia de observatie are ca scop detectarea facilitatilor si infrastructurii. De multe ori, acestea sunt greu de depistat in imaginea initiala. Analizarea lor cu metoda hartii dimensiunilor Box-Counting scoate in evidenta structurile care nu se incadreaza in peisajul inconjurator.

In continuare prezentam analiza unor astfel de imagini de pe site-ul <http://www.globalsecurity.org/military/world/afghanistan/darunta.htm>



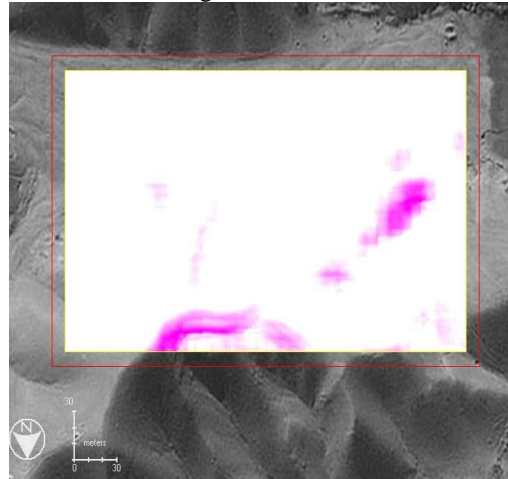
Imagine analizata



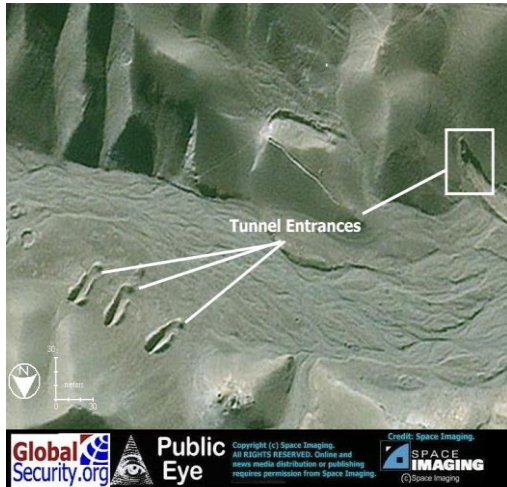
Imagine analizata



Harta dimensiunilor fractale



Harta dimensiunilor fractale



Rezultatele analizei oficiale (de pe site)



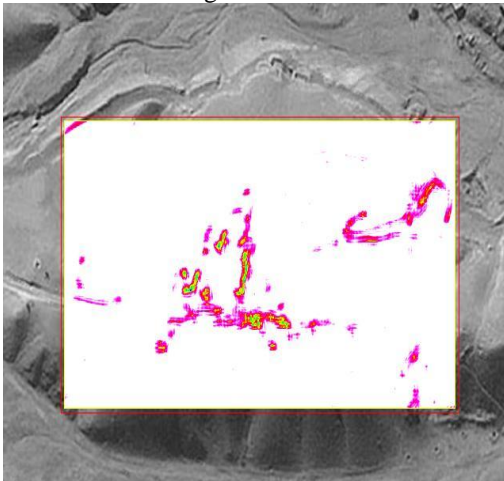
Rezultatele analizei oficiale (de pe site)



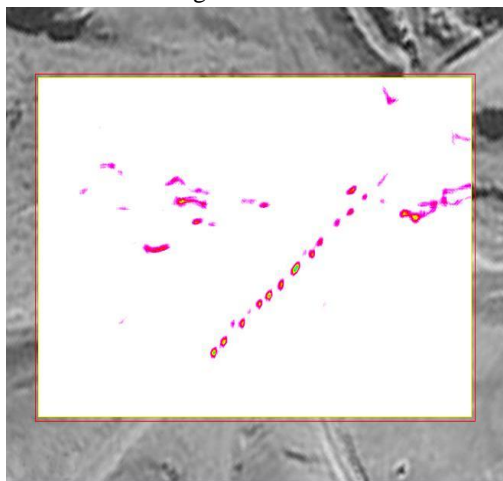
Imaginea analizata



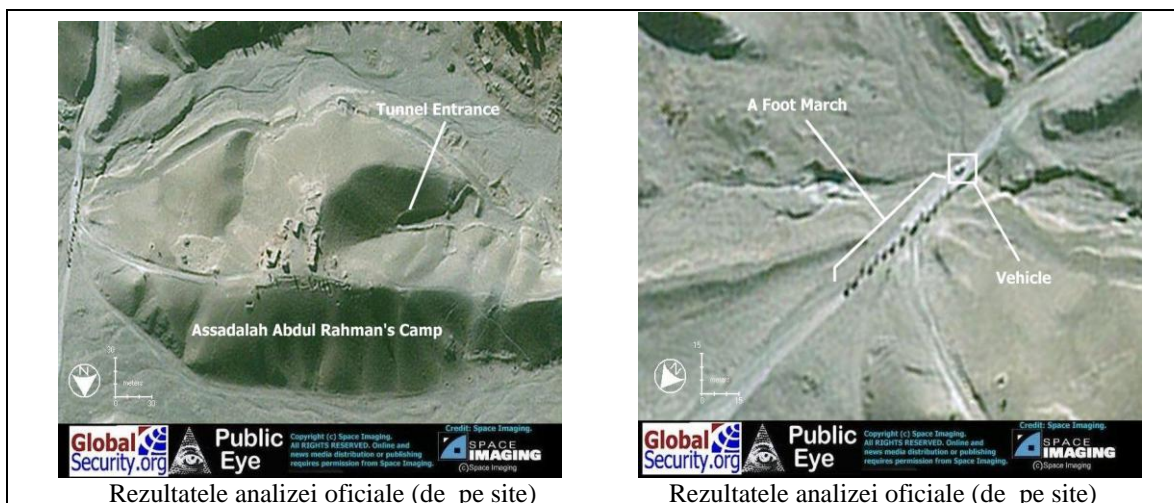
Imaginea analizata



Harta dimensiunilor fractale



Harta dimensiunilor fractale



In imaginile analizate dimensiunile fractale au relevat structuri “artificiale”, diferite de peisajul natural inconjurator.

Bibilografie

Pentru partea teoretica:

- H-O Peitgen, H. Jurgens, D. Saupe: *Chaos and Fractals* , (2-nd edition), Springer, 2004.
 B.B. Mandelbrot: *Fractals: Form, Chance and Dimension*, W.H. Freeman and Co, 1977.
 B.B. Mandelbrot : *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Co, 1982.

Pentru aplicatii

- M. Olteanu, M. Tanase : *An algorithm for the analysis of fractal-like structures and miscellaneous applications* , Proc. of 2004 IEEE-TTTC Int. Conf. On Automation , Quality and Testing, Robotics, tome 2, p.200-206, may 13-15, Cluj Napoca.
 M. Olteanu, M. Tanase : *The fractal analysis of Darunta Military Camp Satellite Images.* , Proc. of IEEE Int. Conf. “Communications 2004”, p.245-250, June 2004, Bucharest.
 R.Dragomir, M.Olteanu, M. Tanase: “*The detection of modified structure in human tissues by computing the local fractal dimension*” in Interdisciplinary applications of fractal and chaos theory, p. 255-264, (editors: R. Dobrescu, C. Vasilescu), Ed. Acad. Romane, 2004.
 M Olteanu, V. Paun, M. Tanase : *Fractal Analysis of Zircaloy-4 Fracture Surface* , Rev. Chim (Buc), 2005, vol.56, part 1, pag 96-100, ISSN 0034-7752.