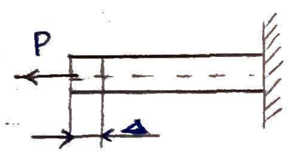
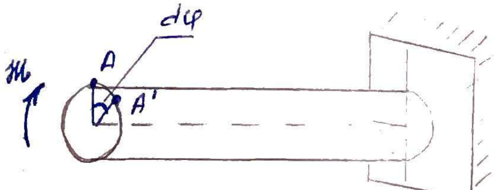
Глава 5

Определение упругих перемещений. Расчеты на жесткость

§1. Условие жесткости. Виды перемещений

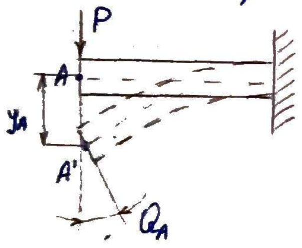
Перемещение – совокупность деформаций тела.





dφ - угловое перемещение

Δ - линейное перемещение



y_A, Q_A - линейное и угловое перемещение свободного конца бруса

Перемещение бывает линейное и угловое

При проектировании конструкций необходимо ограничивать упругие перемещения их элементов, для этого вводится условие жесткости

$$\boxed{\Delta \leq [\Delta]} \qquad (1)$$

Допускаемое перемещение определяется условиями эксплуатации и назначения конструкции

Расчеты на жесткость:

1. Конструкторский расчет: по известной длине бруса, форме поперечного сечения и заданной нагрузке, подбираются размеры сечения, чтобы выполнялось условие (1)

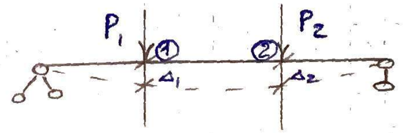
2. Определение грузоподъемности:

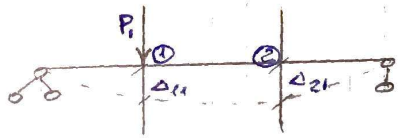
по известным размерам бруса и сечения, в схеме загрузки находят максимальную величину внешних сил, которые вызывают перемещения равные допускаемым

(5) Проверочные расчеты:
по известным размерам и нагрузке определяют перемещение и сравнивают с допускаемыми.

Окончательные размеры конструкции и величины нагрузки определяют с помощью 2х расчетов: на прочность и жесткость

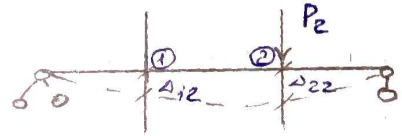
§2 Теоремы о взаимности работ и перемещений

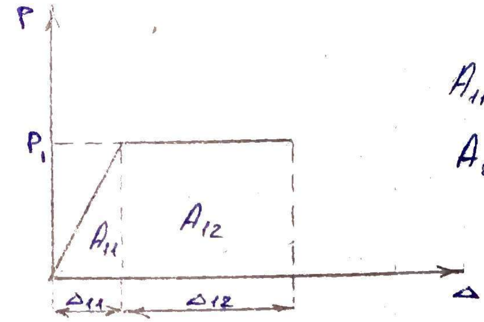


1)


$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12}$

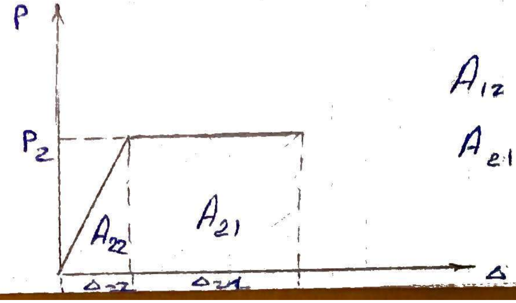
$\Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22}$

2)


1)


$A_{11} = \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11}$

$A_{22} = \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22}$

2)


$A_{12} = P_1 \cdot \Delta_{12}$

$A_{21} = P_2 \cdot \Delta_{21}$

Полная работа

1) $A_1 = A_{11} + A_{22} + A_{12} = \frac{1}{2}P_1\Delta_{11} + \frac{1}{2}P_2\Delta_{22} + P_1\Delta_{12}$

2) $A_2 = A_{22} + A_{11} + A_{21} = \frac{1}{2}P_2\Delta_{22} + \frac{1}{2}P_1\Delta_{11} + P_2\Delta_{21}$

$$A_1 = A_2 \Rightarrow \boxed{P_1\Delta_{12} = P_2\Delta_{21}}$$

Формулировка:
Работа внешних сил 1 состояния на перемещение 2ого состояния равна работе сил 2 состояния на перемещениях, вызванных силами 1ого состояния

– т. Э. Бетти

Если взять условные силы равные 1, а перемещение от единичной силы обозначить через δ, то

$$\boxed{\delta_{12} = \delta_{21}} \qquad (1\cdot\delta_{12} = 1\cdot\delta_{21})$$

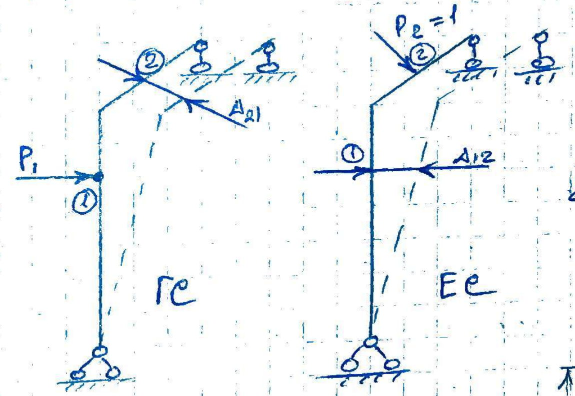
– т. о взаимности перемещений

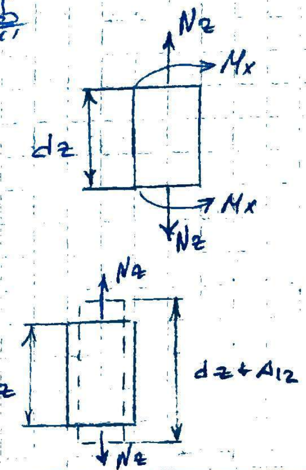
– т. Максвелла

Формулировка:
Перемещение точки приложения 1ой силы вдоль ее направления, вызванной действием 2ой силы, равно перемещению точки приложения второй силы вдоль ее направления, вызванного действием первой силы.

§3 Определение перемещений методом Мора

Рассмотрим плоскую раму под действием внешних нагрузок





Растяжение:

$$\Delta(dz) = \frac{N_z dz}{EA}$$

Под воздействием силы все точки конструкции получат перемещение.

Задача: определить перемещение точки произвольной в заданном направлении.

Метод Мора - общий метод определения перемещения. Подходит для любой линейно-деформированной системы и любого характера нагрузок в том числе температурной

Уравнение метода Мора выполняется из принципа возможных перемещений - если система находится в равновесии под действием приложенной нагрузке, внутренних сил то сумма работ внешних и внутренних сил на любом возможном бесконечно малом перемещении точек этой системы будет = 0

$A_{внеш} + A_{внутр} = 0$

В качестве возможного перемещения выбираем перемещение, которое конструкция получит от единичной силы, приложенной в нужной нам точке и в выбранном нами направлении

Рассматривая 2 состояния - грузовое и единичное, мы согласно теореме о взаимности работ и перемещений, вместо отыскания работ всех сил грузового состояния на единичных перемещениях, будем искать работы единичных сил на грузовых перемещениях, что существенно облегчает задачу

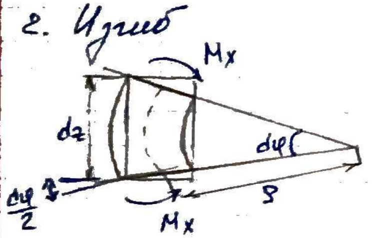
Термин перемещение подразумевает перемещение, как линейное, для отыска-

ним используем единичную силу),
так и угловое (для отыскания использ-
уем единичный момент)

Найдем выражение для компонентов
при перемещении:

1) Выберем участок dz. Растяжение
(рисунок, где рамы)

2. Изгиб



Под воздействием изгибающего момента
сечения повернутся друг относительно
друга на угол $d\varphi$ (ρ - радиус кривизны)

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}}$$

$$d\varphi = \frac{dz}{\rho}$$

$$tg\,d\varphi = \frac{dz}{\rho}$$

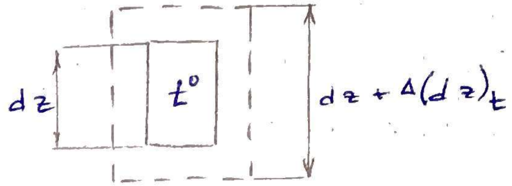
$2\,d\varphi$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dz}$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_x}{EI_x} \Rightarrow \boxed{d\varphi = \frac{M_x\,dz}{EI_x}}$$

Перерезывающей силой Q_y пренебрегаем,
т.к. ее влияние очень мало.

* Если присутствует нагрев



$$\Delta(dz)_t = \alpha t\, dz$$

t - температура

α - коэф. теплового расширения

2) Определим работу внешних сил на
их перемещение

$$A_{внеш} = \overline{P}_2 \cdot \Delta_{21} = 1 \cdot \Delta_{21}$$

3) Определим работу внутренних сил на
их перемещениях

$$-dA_{внут} = \frac{\bar N_z N_z dz}{EA} + \frac{\bar M_x M_x dz}{EI_x} \left(+\bar N_z \alpha t \, dz\right)$$

Проинтегрируем по длине бруса

$$-A_{внут} = \sum_{i=1}^{n}\int_0^L \frac{\bar N_z N_z dz}{EA_i} + \sum_{i=1}^{n}\int_0^L \frac{\bar M_{x_i} M_{x_i} dz}{EI_{x_i}} + \left(\sum_{i=1}^{n}\int_0^L N_z \alpha t \, dz\right)$$

Суммирование идет по кол-ву участков!

n - кол-во участков

i - длина конкретного участка

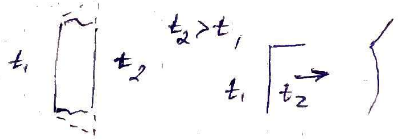
Так как сумма внешних и внутренних работ = 0 ($A_{внеш} + A_{внут} = 0$), то

(3) $$\Delta_{21} = \sum_{i=1}^{n}\int_0^L \frac{\bar N_z N_z dz}{EA} + \sum_{i=1}^{n}\int_0^L \frac{\bar M_x M_x dz}{EI_x} \left(+ t;\ M_x;\ Q_y \ldots\right) + \sum_{i=1}^{n}\int_0^L \frac{\bar M_z M_z dz}{G I_{p(k)}}$$

(4)

$+\sum_{i=1}^{n}\int_0^L N_z \alpha t \, dz$ - если (есть нагрев) (переход t по высоте сечения)

$+\sum_{i=1}^{n}\int_0^L \alpha \Delta t \frac{M_x}{h} dz$



$-\sum_{i=1}^{n}\int_0^L \bar R \Delta_R dz$ - если есть осадка опор

Если в пространственной системе есть

$+\sum_{i=1}^{n}\int_0^L \frac{\bar M_y M_y dz}{EI_y}$ изгиб вокруг оси Y

EI_y жесткость на изгиб

N_z, M_x, M_z, M_y - ВСФ от внешних сил

$\bar N_z, \bar M_x, \bar M_z, \bar M_y$ - ВСФ от единичных сил

α - коэф. теплового расширения материала

t - t равномерного нагрева

$\Delta t = t_2 - t_1$ - перепад t по высоте сечения

Δ_R - осадка опоры

$\bar R$ - реакция опоры от действия единичной силы, приложенной в искомого перемещ…

Алгоритм определения перемещения по формуле Мора:

1. Рядом с заданной ГС изображаем ЕС с единичной нагрузкой, соответствующей искомому перемещению.
2. Определяем реакции опор для ГС и ЕС

3. Составляем аналитические выражения для ВСФ по участкам для ГС и ЕС

4. Данные выражения подставляем в формулу Мора (3 и 4), производим интегрирование по длине каждого участка и суммируем (искомые) по участкам. Результат — искомое перемещ.

* В брусьях с плавноменяющимися характеристиками сечения, эти характеристики должны входить в формулу Мора как функции от z $(A(z), I_x(z), I_y(z), I_{p(k)}(z))$

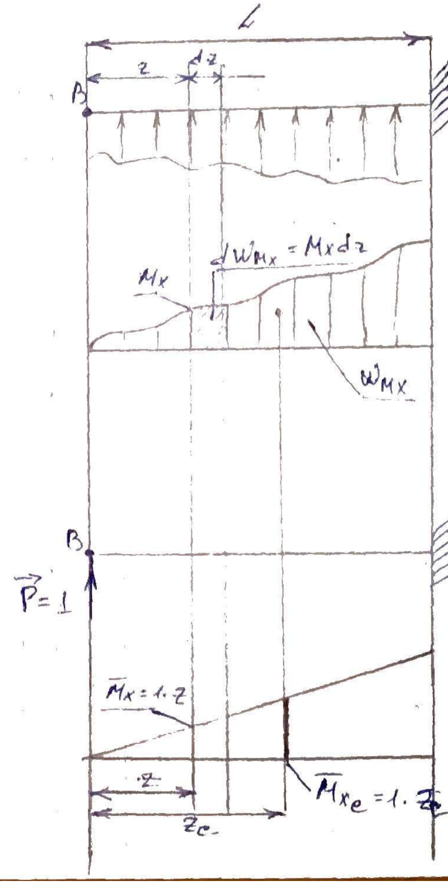
Знаки перемещений

Единичную силу или момент задаём произвольно, знак + в найденном перемещении означает, что оно совпадает с направлением приложенной единичной нагрузки

§ 4. Способ Верещагина

для вычисления интеграла Мора (графоаналитический способ)

Данный способ применяется для брусьев с прямолинейной осью и постоянной жёсткостью в пределах каждого участка



ГС Для приведённой схемы ГС определить ЕС

$$\Delta_B = \int_0^l \frac{M_x \bar{M}_x dz}{E I_x}$$

M_x 1) $d\omega_{M_x} = M_x dz$ — элементарная площадь грузовой эпюры

$\boxed{ЕС}$ 2) $\bar{M}_x = 1 \cdot z$

единичные эпюры не интегрируются

$\bar{M}_x$ 3) $\Delta_B = \int_\omega \frac{1 \cdot z \, d\omega_{M_x}}{E I_x}$ = статический момент площади эпюры M_x относит. оси проходящ. ч/з (·) B (верши

$= S = \int_A y \, dA$

$$\boxed{\Delta_B = \frac{\omega_{Mx} \cdot \overline{M}_{x_c}}{EI_x}} \quad (5)$$ Формула Верещагина

$\overline{M}_{x_c} = 1 \cdot z_c$

c - точка тяжести грузовой эпюры

M_{x_c} - ордината единичной эпюры, взятая под центром тяжести грузовой

Из эпюры M_x видно, что произведение $M_x \cdot dz$ представляет собой элементарную площадь $d\omega$ грузовой эпюры M_x, тогда

$\int_\omega z\,d\omega$ это статический момент эпюры площади относительно оси проходящей через 1.) B

Если площадь эпюры и коорд-ты центра тяжести известны, то статический момент площади эпюры может быть найден без интегрирования

координата z_c определяется из единичной эпюры $\quad z_c = \frac{\overline{M}_{x_c}}{P} = \overline{M}_{x_c}$

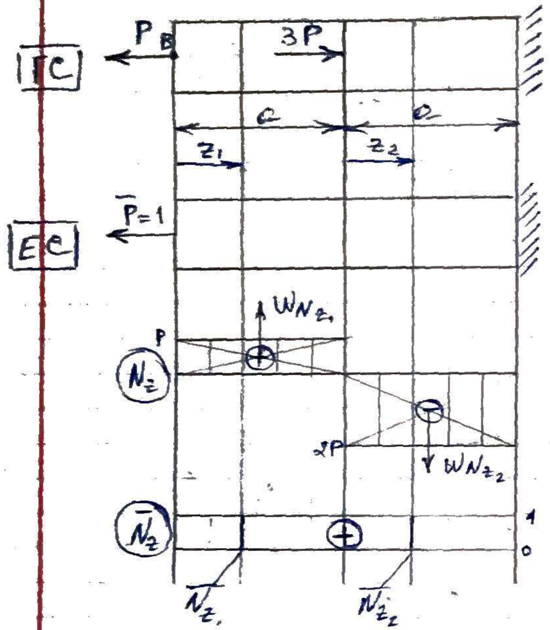
Таким образом для вычисления интеграла Мора по способу Верещагина необходимо площадь грузовой эпюры умножить на ординату единичной, взяв их под центром тяжести грузовой

$$(6)\quad \begin{cases} \Delta = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_{N_z} \overline{N}_z}{EA}}_{\text{при раст-сжс}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_{Mx} \overline{M}_x}{EI_x}}_{\text{при изгибе}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_{M_z} \overline{M}_{z_c}}{GI_{p(k)}}}_{\text{при кручен.}} + \ldots \\ + \sum_{i=1}^{n} \overline{N}_{z_c}\, \alpha\, \omega_t \text{ - при нагреве} \\ + \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{M}_{x_c}}{h}\, \alpha\, \omega_{\Delta t} \text{ - при перепаде } t \text{ по высоте сечения} \\ - \sum_{i=1}^{n} \overline{R}\,\Delta_R \text{ - при проседании опор} \\ + \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_{Mx} \overline{M}_{x_c}}{EI_y} \text{ - если пространственная система} \end{cases}$$

Полный вид формулы Верещагина

§ 5 Частные случаи

5.1 Растяжение – сжатие



Δ_B – ?

1) $\Delta_B = \int_0^a \frac{\bar{N}_{z_i} N_{z_i}\, dz_i}{EA} = (*)$

2) составляем выражения ВСФ для ГС и ЕС по участкам

• $0 \le z_1 \le a$

$N_{z_1} = P$

$\bar{N}_{z_1} = 1$

• $0 \le z_2 \le a$

$N_{z_2} = P - 3P = -2P$

$\bar{N}_{z_2} = 1$

3) $(*) = \int_0^a \frac{P\cdot 1 dz_1}{EA} + \int_0^a \frac{(-2P)\cdot 1 dz_2}{EA} = \frac{1}{EA}\left[Pz_1 + (-2Pz_2)\right]_0^a =$

$= \frac{1}{EA}\left[Pa - 2Pa\right] = -\frac{Pa}{EA}$

Знак минус означает, что перемещение направлено против направления единичной силы.

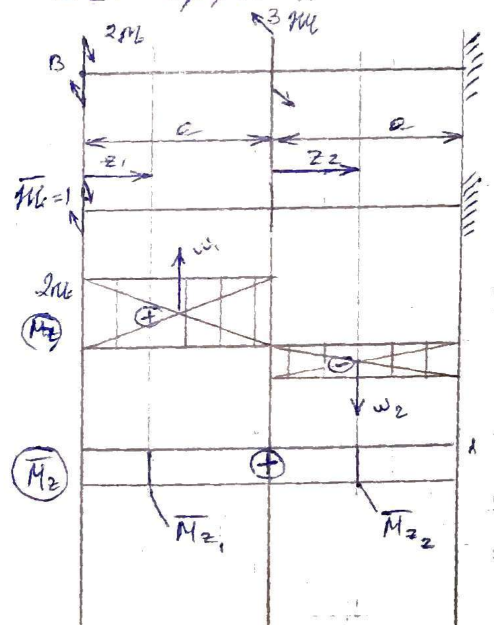
2. Способ Верещагина

Строим эпюры ВСФ для ГС и ЕС, отмечаем центры тяжести

$$\Delta_B = \sum_{i=1} \frac{\omega_{N_{z_i}} \bar{N}_{z_i}}{EA} = \frac{1}{EA}\left[\overbrace{Pa\cdot 1}^{\omega_1} - \overbrace{2Pa\cdot 1}^{\omega_2}\right] = -\frac{Pa}{EA}$$

i	ω_i	$\bar{N}_{z_i}$	Знак
1	Pa	1	+
2	$2Pa$	1	−

5.2 Кручение



ГС

ЕС

φ_B – ?

1) с. Мора

$$\varphi_B = \sum_{i=1}^{2} \int_0^a \frac{\bar{M}_z M_z\, dz}{GI_p} = \frac{1}{GI_p}\left[\int_0^a 2\mathfrak{M}\cdot 1 dz + \int_0^a (-\mathfrak{M})\cdot 1 dz\right] = (*)$$

• $0 \le z_1 \le a$

$M_{z_1} = 2\mathfrak{M}$

$\bar{M}_{z_1} = 1$

• $0 \le z_2 \le a$

$M_{z_2} = 2\mathfrak{M} - 3\mathfrak{M} = -\mathfrak{M}$

$\bar{M}_z = 1$

$(*) = \frac{1}{GI_p}\left[2\mathfrak{M}z - \mathfrak{M}z\right]_0^a = \frac{\mathfrak{M}}{GI_p}$

② Верещагин

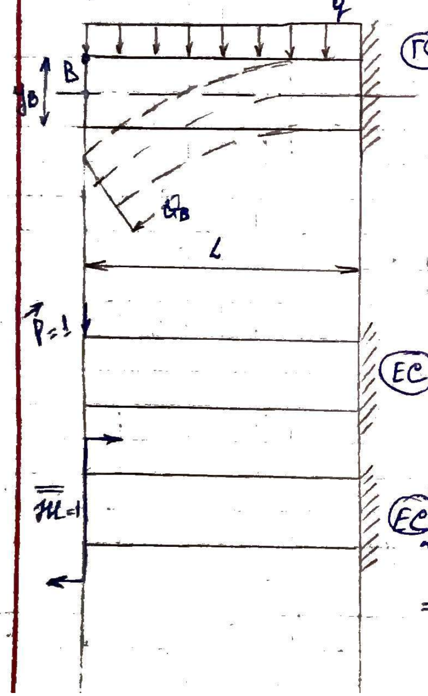
$$\varphi_B = \sum_{i=1}^{2} \frac{\omega_{M_z} \overline{M}_{z_c}}{GI_p} = \frac{1}{GI_p}\left[2M_1 a \cdot 1 - M_2 a \cdot 1\right] =$$

i	ω_i	M_{z_i}
1	$2M_1 a$	1
2	$-M_2 a$	1

$$= \frac{M_1 a}{GI_p}$$

5.3 Изгиб

Определить вертикальное перемещение и угол поворота свободного конца балки.



ГС

① Метод Мора

$y_B, \theta_B = ?$

$$y_B = \int_0^L \frac{M_x \cdot \overline{M}_x}{EI} dz \ominus$$

все по уч-кам:

$0 \le z \le L$

ЕС$_1$ $M_x = -qz \cdot \frac{z}{2} = -\frac{qz^2}{2}$

$\overline{M}_x = -1 \cdot z$

ЕС$_2$ ⊖ $\frac{1}{EI_x}\int_0^L \left(-\frac{qz^2}{2}\right)(-z)\,dz =$

$$= \frac{q}{2EI_x}\int_0^L z^3 dz = \frac{q}{2EI_x} \cdot \frac{z^4}{4}\Big|_0^L =$$

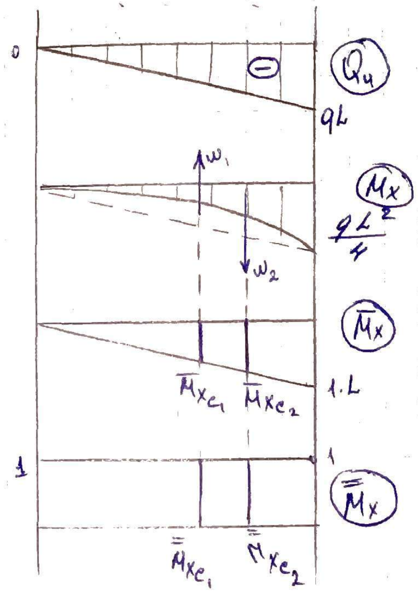
$$= \frac{qL^4}{\dots}$$

$$\theta_B = \int_0^L \frac{M_x \overline{\overline{M}}_x}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x}\int_0^L \left(-\frac{qz^2}{2}\right) dz =$$

$$= -\frac{q}{2EI_x} \cdot \frac{z^3}{3}\Big|_0^L = -\frac{qL^3}{6EI_x}$$

② Метод Верещагина

$$y_B = \frac{\omega_{M_x} \cdot \overline{M}_x}{EI_x} = \frac{1}{EI_x}\left[\frac{qL}{12}\cdot\left(-\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{4} qL^3 \cdot \frac{2}{3} L =\right.$$



i	ω_i	$\overline{M}_{xc_i}$	$\overline{\overline{M}}_{xc_i}$
1	$\frac{qL^3}{12}$	$-\frac{L}{2}$	1
2	$-\frac{1}{2}\frac{qL^2}{2}L$	$-\frac{2}{3}L$	1

$$= \dots = \frac{qL^4}{8EI_x}$$

$$\theta_B = \frac{\omega_{M_x} \cdot \overline{\overline{M}}_x}{EI_x} = \frac{1}{EI_x}\left[\frac{qL^3}{12}\cdot 1 + \left(-\frac{1}{4}qL^3\right)\right]$$

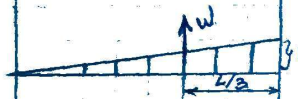
$$= \dots = -\frac{qL^3}{6EI_x}$$

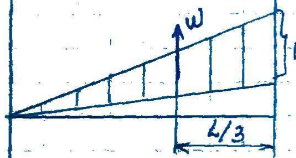
$$\frac{qL^4}{EI_x} = \frac{\frac{H}{M}\cdot M^4}{\frac{H}{M^2}\cdot M^4} = M$$

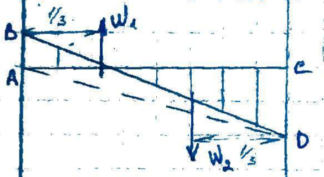
угол в радианах (безразмерный)

§6. Рациональные способы нахождения площадей грузовых эпюр

1)  $w = Lh$

2)  $w = \frac{1}{2}Lh$

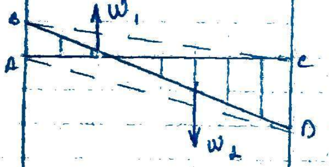
3)  $w = \frac{1}{2}Lh$

4) 

$w_1 = w_{ABD}$

$w_2 = w_{ACD}$

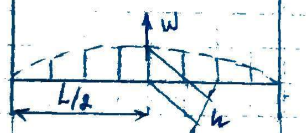
$w = w_1 + w_2$

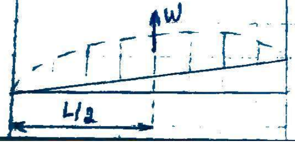
4a) 

$w_1 = w_{ABC}$

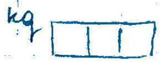
$w_2 = w_{ACD}$

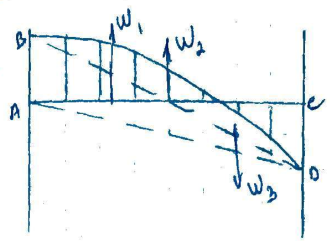
$w = w_1 - w_2$

5)  $w = \frac{2}{3}Lh = -\frac{qL^3}{12}$

 $h = \frac{qL^2}{8}$

 $w = \frac{L^2 q}{12}$

 $w = \frac{kqL^2}{12}$

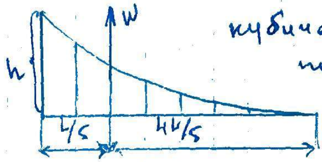
7) 

$w_1 = w_{ABD}$

$w_2 = w_{пар(BD)}$ синей парал.

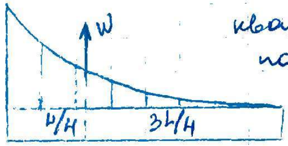
$w_3 = w_{ACD}$

$w = w_1 + w_2 - w_3$



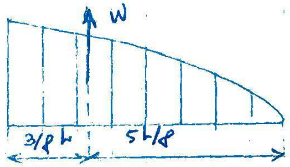
кубическая парабола

$w = \frac{Lh}{4}$



квадрат. парабола

$w = \frac{hL}{3}$

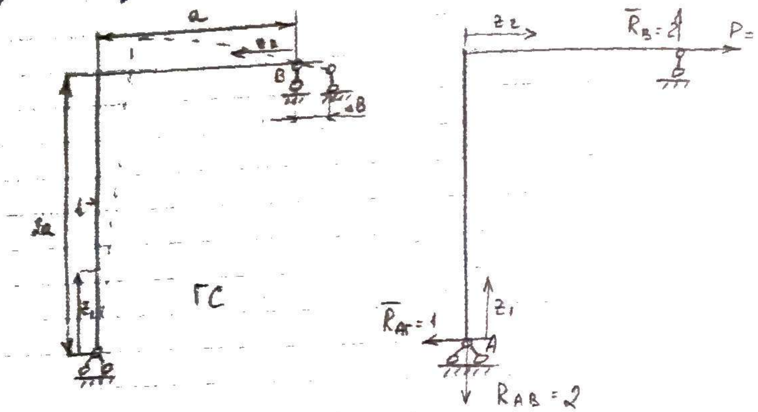


$w = \frac{2}{3}hL$

Не использовать!

§7. Температурное нагружение стержня

Найти горизонтальное перемещение опоры В, если вертикальный участок рамы будет равномерно нагрет на $t°$ градусов.-?



$\Delta(dz)_t = \alpha t dz$

$$\Delta B = \sum_{i=1}^{2}\int^{l_i} \bar{N}_z \alpha t dz = \int_0^{2a} 2\alpha t° dz_1 + \int_0^{a} 1\cdot 0 dz_2 = 2\alpha t° z_1 \Big|_0^{2a} = \boxed{4a\alpha t°}$$

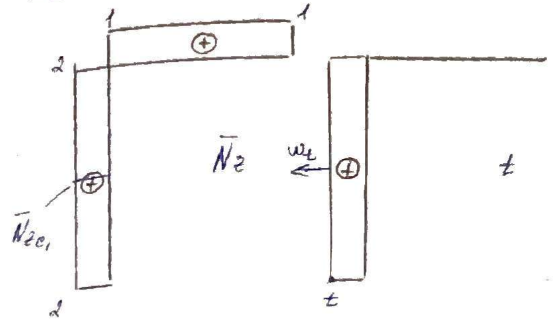
$0 \le z_1 \le 2a$ — $0 \le z_2 \le a$

$\bar{N}_{z_1} = 2$ — $\bar{N}_{z_2} = 1$

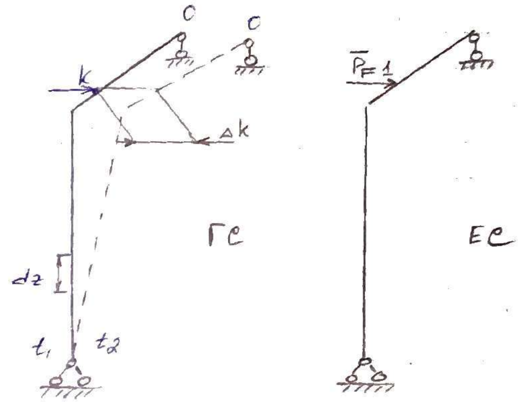
$t = t°$ — $t = 0$

(!) Интеграл положителен, если $\bar{N}_z$ и $t°$ одновременно укорачивают и удлиняют элемент стержня

$$\Delta_B = \sum \bar{N}_z \alpha \omega_t = 2\alpha t°\cdot 2a + 0 = 4\alpha t° a$$



§8 Неравномерный нагрев по высоте сечения стержня.

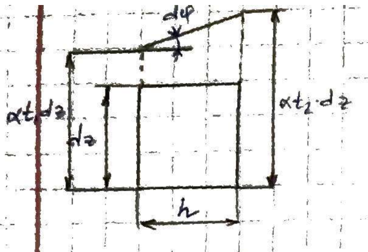


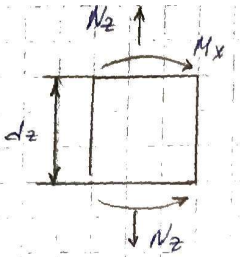
$t_0 = \dfrac{t_1+t_2}{2}$ - нагрев срединного слоя стержня

$A_{внеш} = 1\cdot\Delta k$

Элементарная работа внутренних сил

$$dA_{внут} = \underbrace{\bar{N}_z \alpha t_0 dz}_{нагрев} + \underbrace{\bar{M}_x d\varphi}_{изгиб} = \bar{N}_z \alpha t_0 + \frac{M_x}{h}\alpha \Delta t dz$$





Вертикальный стержень будет подвергаться продольной нагрузке из-за нагрева и изгибу из-за неравномерности нагрева по высоте стержня.

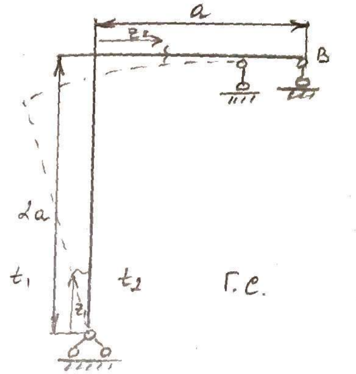
$$tg\,d\varphi = d\varphi = \frac{(\alpha t_2 - \alpha t_1)dz}{h} = \frac{\alpha}{h}(t_2 - t_1)dz = \frac{\alpha}{h}\Delta t\, dz -$$

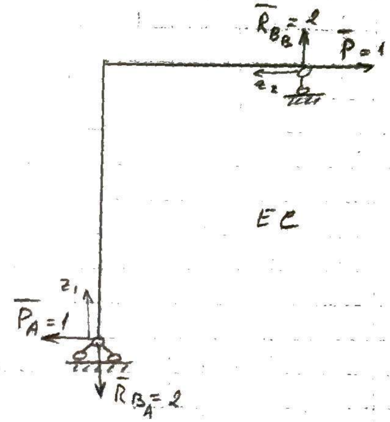
$A_{внеш} = A_{внут}$.

$$\Delta k = \sum_{i=1}^{n}\int_0^l \bar{N}_z \alpha t_0 dz + \sum_{i=1}^{n}\int_0^l \frac{\bar{M}_x}{h}\alpha\Delta t\, dz \quad (7)$$

Второе слагаемое в выражении (7) будет положительным, если $\bar{M}_x$ - единичный момент стремится сжать менее нагретые волокна и наоборот

Пример: найти горизонтальное перемещение т. В, если рама имеет перепад температур по высоте вертикального сечения стержня.





ΔB - ?

$$\Delta B = \sum_{i=1}^{n}\int_0^l \bar{N}_z \alpha t_0 dz + \sum_{i=1}^{n}\int_0^l \frac{\bar{M}_x}{h}\alpha\Delta t\, dz \ominus$$

$0 \le z_1 \le 2a$ $\qquad$ $0 \le z_2 \le a$

$\bar{N}_{z_1} = 2$ $\qquad$ $t_0 = 0$

$\bar{M}_{x_1} = 1 \cdot z_1$ $\qquad$ $\Delta t = 0$

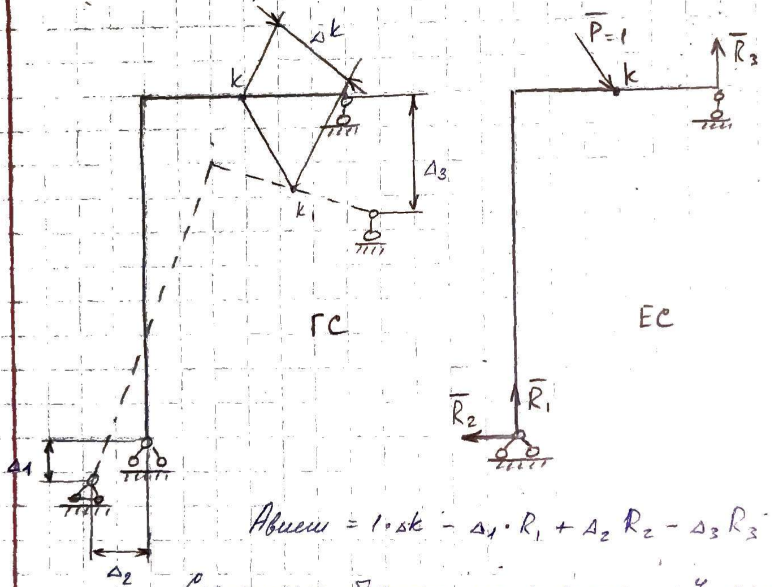
$\Delta t = t_2 - t_1$

$t_{ср} = \frac{t_1 + t_2}{2}$

$$\ominus \int_0^{2a} 2\alpha t\, dz_1 + \int_0^{2a}\frac{z_1}{h}\alpha t\, dz + 0 + 0 = 2\alpha t_0 z_1\Big|_0^{2a} +$$

$$\frac{z^2}{2h}\alpha\Delta t\Big|_0^{2a} = 4a\alpha t_0 + \frac{4a^2}{2h}\alpha\Delta t = \ldots = 4a\left[t_0 + \frac{1}{2ah}\Delta t\right]$$

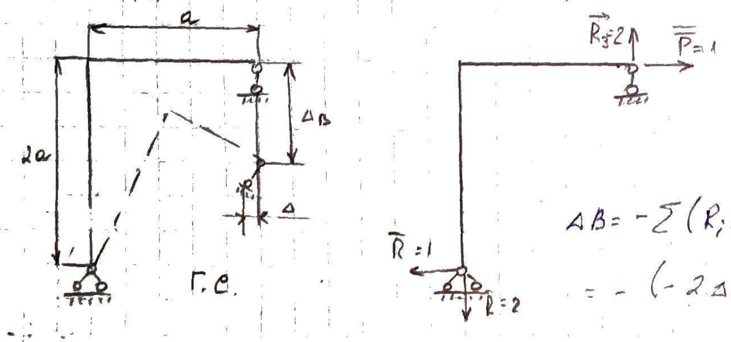
§9 Определение перемещений брусьев при осадке опор.



$A_{внеш} = 1\cdot\Delta k - \Delta_1\cdot R_1 + \Delta_2 R_2 - \Delta_3 R_3$

Слагаемые берутся со знаком „+", если направление единичной (конструкции) совпадает с направлением просадки опоры.

$\Delta k = -\sum_{i=1}^{n} R_i \Delta_{опора\,i}$ n - кол-во просевших опор

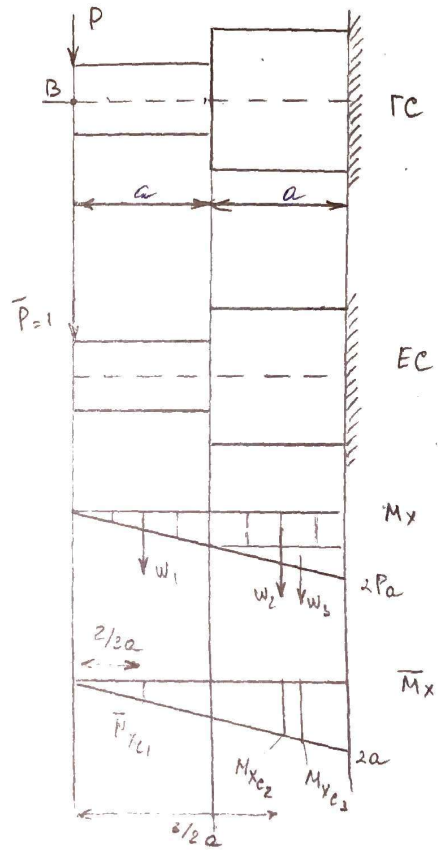


$\Delta B = -\sum(R_i \Delta_{опор\,i}) =$

$= -(-2\Delta_{оп}) = 2\Delta_{оп}$

§10 Определение перемещений в ступенчатых брусьях

метод Мора или Верещ.



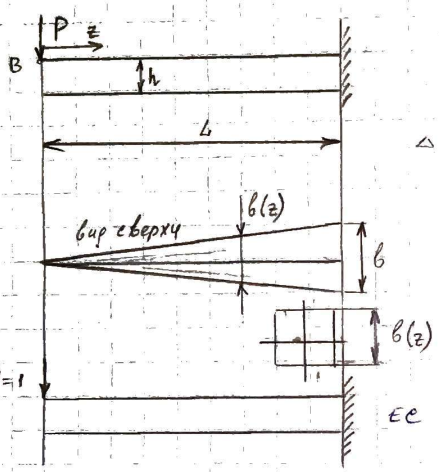
i	ω_i	M_{xci}
1	$-\frac{1}{2}Pa^2$	$-\frac{2}{3}a$
2	$-Pa^2$	$-\frac{3}{2}a$
3	$-\frac{1}{2}Pa^2$	$-\frac{5}{2}a$

$$\Delta B = \sum_{i=1} \frac{\omega_{Mxci}\, M_{xci}}{EI_x} = \frac{1}{EI_{x_1}}\left[\frac{1}{2}Pa^2\cdot\frac{2}{3}a\right] + \frac{1}{EI_{x_2}}\left[Pa^2\cdot\frac{3}{2}a +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}Pa\cdot\frac{5}{3a}\right] = \ldots$$

метод Мора

§ 11 Определение перемещений в брусьях с плавно меняющимся сечением.



$\Delta B - ?$

$$\Delta B = \int_0^L \frac{M_x \bar{M}_x}{E I_x(z)} dz \ominus$$

$$I_x(z) = \frac{b(z)\cdot h^3}{12} = \frac{bz h^3}{12L} =$$

$$\frac{b(z)}{b} = \frac{z}{L} \to b(z) = \frac{bz}{L}$$

$$0 \le z \le L$$

$$M_x = -P\cdot z$$

$$\bar{M}_x = -1\cdot z$$

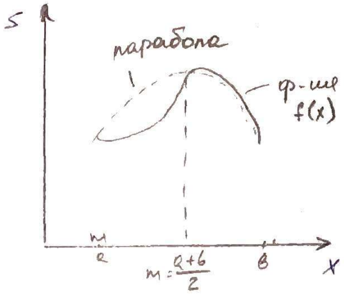
$$\ominus \frac{12}{E}\int_0^L \frac{-P\cdot z(-1)\cdot z\cdot L\cdot dz}{bz\cdot h^3} = \frac{12PL}{Ebh^3}\int_0^L z\,dz =$$

$$= \frac{6PL^3}{Ebh^3}$$

§ 12 Определение перемещений матричным (способом) методом.

Метод основан на формуле Симпсона для вычисления определенного интеграла.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$



Применительно к формуле Мора можно записать

$$\Delta = \int_a^b \frac{M_x \bar{M}_x dz}{EI_x} = \frac{b-a}{6EI_x}\left[\underset{\text{начало}}{(M_x\bar{M}_x)_н} + 4\underset{\text{середина}}{(M_x\bar{M}_x)_{ср}} + (M_x\bar{M}_x)_к\right]$$

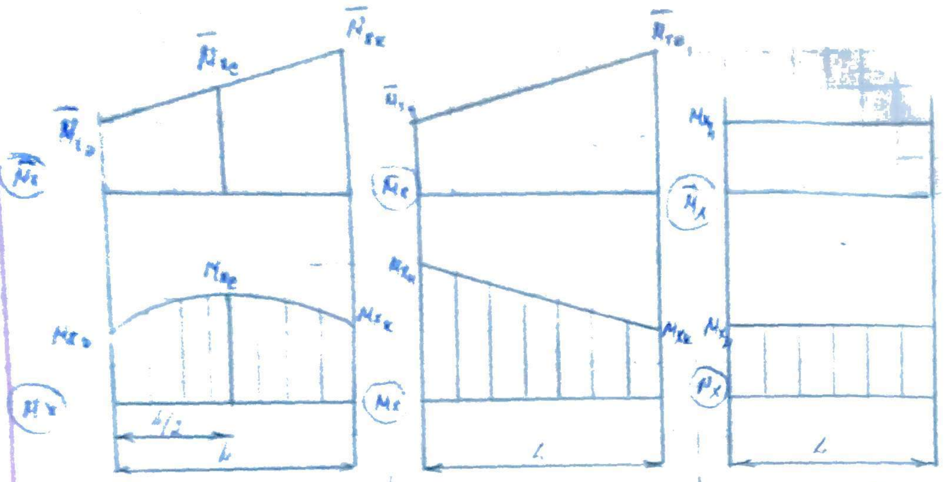
В матричной форме это выражение имеет вид

$$\Delta = [\bar{M}_x]^T[B][M_x]$$

$[\bar{M}_x]^T$ - транспонированная матрица ординат ед. эпюры (матрица - строка)

$[B]$ - матрица податливости (антижесткости)

$[M_x]$ - матрица-столбец ординат грузовой эпюры



$[\bar M_x]^T = [\bar M_{xн}\ \bar M_{xc}\ \bar M_{xк}]$

$M_x = \begin{bmatrix} M_{xн} \\ M_{xc} \\ M_{xк} \end{bmatrix}$;

$B = \frac{L}{6EI_x}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

парабола - 3 точки

$[\bar M_x]^T = [\bar M_{xн}\ \bar M_{xк}]$

$[M_x] = \begin{bmatrix} M_{xн} \\ M_{xк} \end{bmatrix}$

$[B] = \frac{L}{6EI_x}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

прямая 2 точки

$[\bar M_x]^T = [\bar M_{xн}]$

$[M_x] = [M_{xн}]$

$[B] = \frac{L}{6EI_x}[1]$

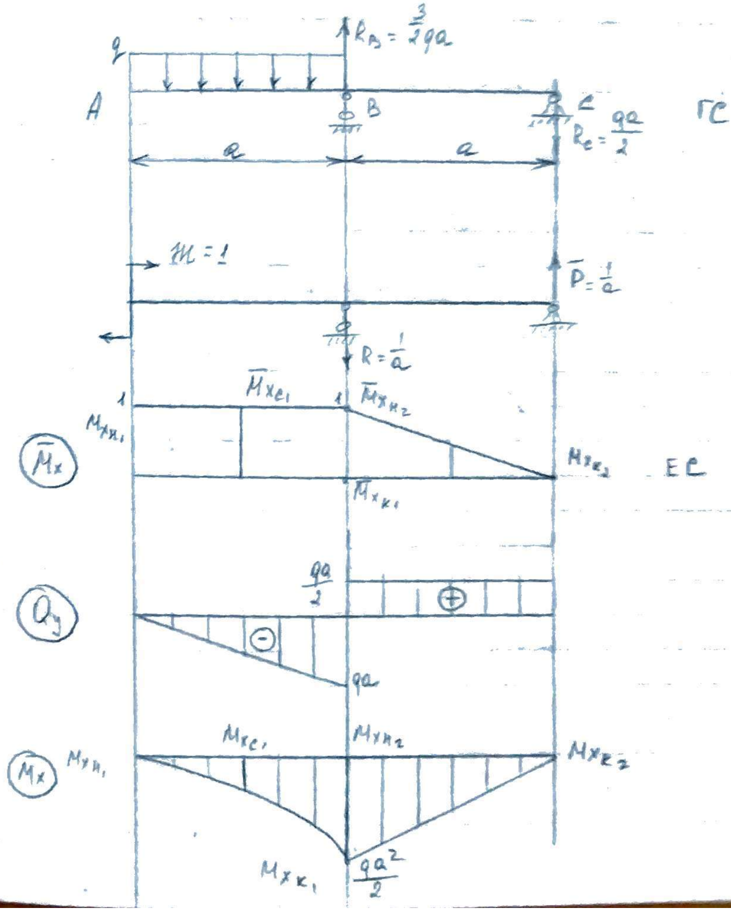
const - 1 точка

Если рама или балка содержат несколько силовых участков, тогда общая матрица конструкции складывается из матриц силовых участков

$[\bar M_x]^T = [\,[\bar M_x]_1^T \dots [\bar M_x]_i^T \dots [\bar M_x]_k^T\,]$

$[M_x] = \begin{bmatrix} [M_x]_1 \\ \vdots \\ [M_x]_i \\ \vdots \\ [M_x]_k \end{bmatrix}$ $\quad [B] = \begin{bmatrix} [B]_1 & 0 & 0 \\ 0 & [B]_i & 0 \\ 0 & 0 & [B]_k \end{bmatrix}$

Пример: определить угол поворота сечения А



$$\Theta_A = [\bar{M}_x]^T \cdot [B] \cdot [M_x] ⊜$$

$$[\bar{M}_x]^T = [\overbrace{1\ \ 1\ \ 1}^{1\text{уч-к}}\ \ \overbrace{1\ \ 0}^{2\text{уч-к}}]$$

$$[M_x] = -\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{qa^2}{8} \\ \frac{qa^2}{2} \\ \frac{qa^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{1ый уч-к} \\ \\ \text{2ой уч-к} \\ \\ \end{array} = -\frac{qa^2}{8}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{a}{6EI_x}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

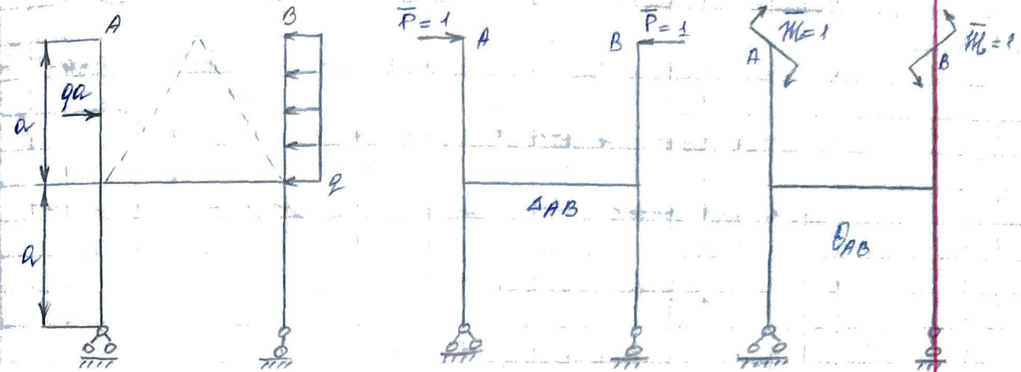
$$⊜\ [1\,1\,1\,1\,0]\ \frac{-qa^3}{48EI_x}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-qa^3}{48EI_x}[1\,4\,1\,2\,1]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{qa^3}{48EI_x}(0+4+4+2+0) = \frac{-qa^3}{3EI_x}$$

$$M_{x_{c_1}} = q \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{qa^2}{8}$$

§13. Определение взаимных перемещений

На практике часто требуется определить не перемещение точки конструкции относительно окружающей среды, а взаимное перемещение точек одной и той же нагруженной конструкции.



Для определения взаимных перемещений (линейных или угловых) необходимо задать единичное состояние в виде 2х единичных сил или моментов направленных противоположно:

$$\Delta_{AB} = \Delta_A + \Delta_B = \sum\int_0^L \frac{M_x \bar{M}_x}{EI_x}dz + \sum\int_0^L \frac{M_x \bar{M}_x}{EI_x} = \sum\int_0^L \frac{M_x \bar{M}_x}{EI_x}dz$$