UNIDAD IV

Funciones exponencial y logarítmica

OBJETIVO

El estudiante:

- Resolverá problemas con funciones exponenciales y logarítmicas, teóricos o prácticos, utilizando su relación como funciones inversas y sus propiedades algebraicas, en un ambiente escolar que favorezca la reflexión sobre la utilidad de estos conocimientos y el desarrollo de actitudes de responsabilidad, cooperación, iniciativa y colaboración hacia el entorno en el que se desenvuelve.

Competencia genérica a desarrollar:
Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos a través de la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

Competencias disciplinares a desarrollar:

- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

INTRODUCCIÓN

Supongamos que necesitas subir una escalera con 65 escalones para encontrarte con tu familia, pero las personas que la suben deben colaborar con los damnificados en las inundaciones, de tal manera que al subir el primer escalón deben aportar un grano de arroz. En el segundo escalón se duplica la cantidad, y así sucesivamente hasta llegar al escalón 65. ¿Crees que podrías reunir la cantidad de arroz necesaria para subir la escalera? Problemas como el anterior se presentan día a día en diversas ramas del quehacer humano. En esta unidad daremos solución a ejemplos de problemas como éste. Te darás cuenta cómo la función exponencial y logarítmica tiene tantas aplicaciones en la vida diaria.

NOMBRE DEL ALUMNO: ____________________

GRUPO: ________ NÚMERO DE LISTA: ________ ACIERTOS: ________

Evaluación diagnóstica

I. Contesta brevemente lo que se te pide.

1. ¿Qué es una función exponencial?

2. ¿Cuál es el dominio y rango de la función exponencial?

3. ¿Cuál el valor aproximado de *e*?

4. ¿Qué es una función exponencial natural?

5. ¿Qué es un logaritmo?

6. ¿Cuál es el dominio y rango de la función logarítmica?

II. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $\log_{10} x - \log_{10} 3 = 23^{2x-1} = 9$
b) $e^{x-1} = e^{2(x+1)}$

III. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:
a) $\log_{10} x = \log_{10} 5$
b) $\log_{10} x - \log_{10} 3 = 2$

Situación problema

Una persona muy devota envió una oración por correo electrónico, rogando a Dios por la paz en el mundo, a cinco de sus amistades, pidiéndoles que la enviaran a otras cinco personas, y así sucesivamente hasta formar una cadena de oraciones.

1. Cuando la cadena completó 10 envíos, ¿cuántas personas rezaban?
2. ¿Y cuando completó 15?
3. Si la cadena completa n envíos, ¿cuántas personas rezan?
4. Realiza una gráfica donde ilustres la función resultante.

John Napier o John Neper (1550-1617), matemático nacido en Merchiston, Escocia. Es conocido por introducir el primer sistema de logaritmos, descrito en *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614). Los logaritmos comunes y naturales usados actualmente no emplean la misma base que los logaritmos de Napier, aunque a estos últimos se les llama en ocasiones logaritmos neperianos. Los logaritmos de Napier simplifican la multiplicación, división y otras operaciones aritméticas.

4.1 FUNCIÓN EXPONENCIAL

Dentro de las funciones trascendentes se encuentran las funciones exponenciales y las logarítmicas, las cuales son inversas entre sí.

Las funciones exponenciales y logarítmicas son útiles en casi todos los campos del quehacer humano, en especial la química, la ingeniería y la física para describir la forma en que varían las cantidades.

4.1.1 Concepto de función exponencial

Notación

Recordarás que en cursos anteriores se han manejado expresiones algebraicas con términos del tipo x^n, donde x es una variable llamada base y n es una constante llamada exponente. Ahora intercambiaremos los papeles, es decir, la base es la constante y la variable el exponente, obteniendo una expresión de la forma a^x, a la cual se le llama función exponencial.

Definición

Una función exponencial de base a es de la forma $f(x) = a^x$, donde x es cualquier número real y

$a > 0$, $a \neq 1$.

Ejemplo

$$f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x,\ f(x)=\frac{1}{2^{\left(x^2\right)}},\ f(x)=4-2^{-x}$$

Las funciones exponenciales cumplen con las propiedades de los exponentes.

Propiedades de las funciones exponenciales

Sean números positivos y $x, y \in R$, entonces:

1. $a^0 = 1$
2. $a^x a^y = a^{x+y}$
3. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
4. $(a^x)^y = a^{xy}$
5. $(ab)^x = a^x a^x$
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}, \quad b \neq 0$

Sabías que...

Fue René Descartes quien ideó la yuxtaposición adhesiva para la notación de las potencias. Introdujo la notación x, x^2, x^3, x^4, etc., para expresar la primera, segunda, tercera potencias de x.

Ejemplo

Representar de una manera distinta las siguientes ecuaciones con ayuda de las propiedades de la función exponencial.

$$y = 2^{4x}2^{3x}$$

Solución: como $\quad 2^{4x} = 2^{2x}2^{2x}$

y $\quad 2^{3x} = 2^{x}2^{2x}$

Entonces

$$\begin{aligned} y &= \left(2^{2x}2^{2x}\right)\left(2^{x}2^{2x}\right) \\ &= 2^{x}6^{6x} \end{aligned}$$

Ejemplo

Despejar x de la siguiente ecuación: $9^{x-2} = 3^{3x}$

Solución. La igualdad anterior también se escribe como:

$$3^{2(x-2)} = 3^{3x}\text{. Así,}$$

$$2x - 4 = 3x$$

Despejando x quedaría:

$$\begin{aligned} 3x - 2x &= -4 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Sabías que...

Desde el siglo XIV, los matemáticos han usado un sistema con exponentes; sin embargo, el concepto moderno se alcanzó hasta que lo formuló de René Descartes en el siglo XVII.

Dominio y rango

De acuerdo con la definición de la función exponencial, la base a debe ser positiva y diferente de 1, por lo que al elevarla a cualquier exponente real, se obtiene un número positivo.

No se considera negativa a, porque existen funciones de la forma $f(x) = (-2)^{1/2}$ que no tienen sentido en los reales. El que sea diferente de 1 se debe a que al reemplazar la base por "1", la función constante se transforma en $f(x) = a^x = 1^x = 1$

El dominio de la función exponencial es el conjunto de los números reales y su rango es el conjunto de los reales positivos.

Crecimiento y decaimiento exponencial

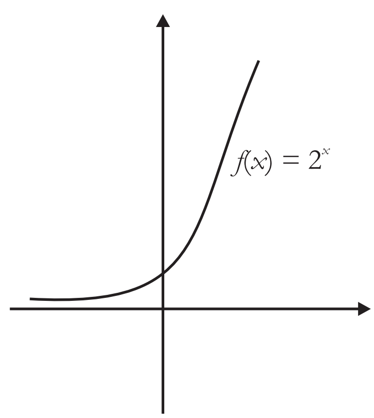
Las gráficas de las funciones exponenciales son una curva suave sin saltos, todas intersecan al eje Y en el punto (0, 1) y pasan por el punto (1, a); para valores de x negativos, la curva se aproxima al eje X.

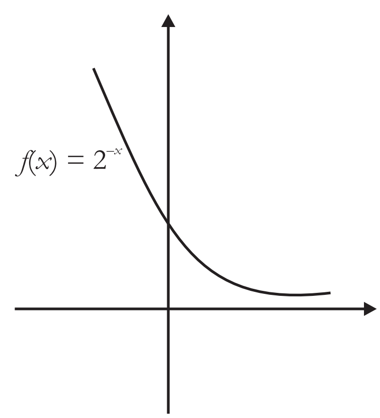
Ejemplo

Graficar las funciones $f(x) = 2^x$ y $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Solución: Nos auxiliaremos de la tabla para obtener los valores de las funciones.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
2^x	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16
2^{-x}	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8	1/16





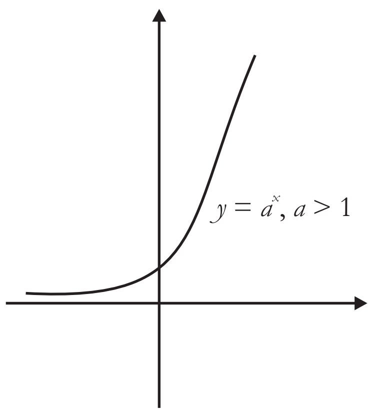
Observamos que la gráfica de $f(x) = 2^x$ es creciente y la gráfica de $f(x) = 2^{-x}$ decreciente. Ambas tienen como dominio los números reales y como rango los números reales positivos.

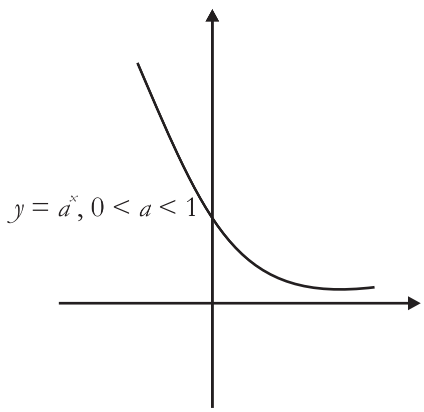
Podemos concluir que las gráficas de las funciones exponenciales son una curva continua suave sin brincos o saltos. Generalizando las propiedades de las funciones exponenciales tenemos:

1. Las funciones exponenciales existen para todo $a > 0$ y $a \neq 1$, con dominio en el conjunto de los números reales.
2. El rango son todos los números reales positivos, ya que la gráfica nunca toca o corta al eje X.

3. La gráfica de cualquier función exponencial pasa por el punto (0, 1).
4. Para toda función exponencial, el eje X es una asíntota de la función, es decir, la función toma valores cada vez más cercanos al eje X sin tocarlo.
5. La función es creciente para $a > 0$.
6. La función es decreciente para $0 < a < 1$.

Gráficamente se representa como:





Ejemplo

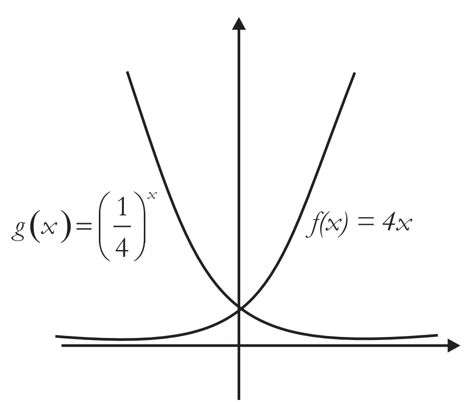
Trazar las gráficas de f y g en un mismo plano coordenado.

$$f(x) = 4^x, \quad g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

Solución: La siguiente tabla muestra las coordenadas de algunos puntos de las gráficas:

x	–2	–1	0	1	2	3
4^x	1/16 ≈ 0.06	1/4 ≈ 0.25	1	4	16	64
$\left(\frac{1}{4}\right)^x$	16	4	1	1/4 ≈ 0.25	1/16 ≈0.06	1/64 ≈ 0.02

Los dominios de ambas gráficas son los números reales y su rango los reales positivos; $f(x) = 4^x$ es una función creciente, mientras que $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ es una función decreciente. Para ambas funciones, el eje X es una asíntota horizontal; f y g son funciones simétricas respecto al eje Y.



Muchas entidades físicas se representan por medio de funciones exponenciales; entre éstas se cuentan el crecimiento bacteriano, el crecimiento de una población, el interés compuesto. Existen otras cantidades que decrecen exponencialmente; para estos casos, la base *a* de la función exponencial está entre 0 y 1.

Ejemplo

Un ejemplo es la desintegración de una sustancia radiactiva. El isótopo radiactivo ^{210}Bi tiene una semivida (o "vida media") de 5 días, es decir, el número de partículas radiactivas se reducirá a la mitad del número original en 5 días. Si existen 100 mg. de ^{210}Bi en un inicio, $t = 0$, entonces la cantidad es:

$f(t) = 100(2)^{-t/5}$

¿Qué cantidad resta después de 5 días?, ¿después de 10 días?, ¿después de 12.5 días?

Solución:

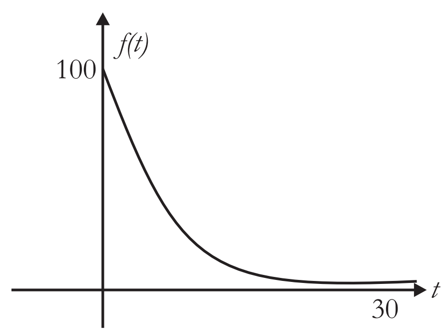
En $t = 0$ $\quad f(0) = 100(2)^{-0/5} = 100(1) = 100\ mg$

$t = 5$ $\quad f(5) = 100(2)^{-5/5} = 100(2)^{-1} \dfrac{100}{2} = 50\ mg$

$t = 10$ $\quad f(10) = 100(2)^{-10/5} = 100(2)^{-2} = \dfrac{100}{4} = 25\ mg$

$t = 12.5$ $\quad f(12.5) = 100(2)^{-12.5/5} = 100(2)^{-2.5} = \dfrac{100}{2^{2.5}} = 17.68\ mg$

Gráficamente:



Pudimos observar que la "vida media" del isótopo radiactivo ^{210}Bi es una función exponencial decreciente.

Ejercicio

Representar gráficamente las siguientes funciones e identificar cuál es el dominio y rango para cada una de ellas.

1. $f(x) = 10^x$
2. $f(x) = 3^{2x}$
3. $f(x) = 3^{-x}$
4. $f(x) = 2^{|x|}$
5. $f(x) = 4^{x-3}$
6. $f(x) = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{-x}$
7. $f(x) = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{x}$
8. $f(x) = 8^{x-3}$
9. $f(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}$
10. $f(x) = 5^{-3x}$

Encontrar el valor de x para las siguientes ecuaciones:

11. $2 \bullet 4^{x} = 8^{3x+1}$
12. $3 \bullet 9^{2x} = 3^{x+1}$
13. $6^{3x+4} = 6^{x+2}$
14. $3^{4x} = 9^{x+7}$
15. $a^{x-3} = a^{4x+4}$

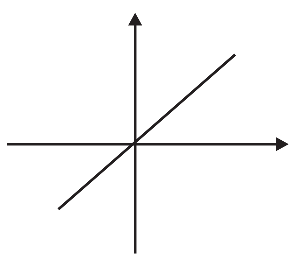
4.1.2 Variación exponencial

Valores de x y razones constantes de la función

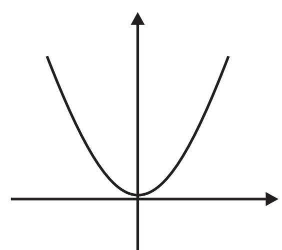
Tracemos las gráficas de las siguientes funciones $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = 2x^2$

x	**–4**	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$f(x) = x$	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x) = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$f(x) = 2^x$	0.03125	0.0625	0.125	0.50	1	2	4	8	16

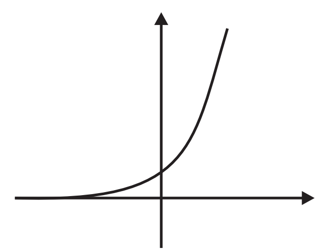
La variación exponencial es mayor que la variación lineal y la cuadrática, ya que su gráfica crece con mayor rapidez que las otras.



$f(x) = x$



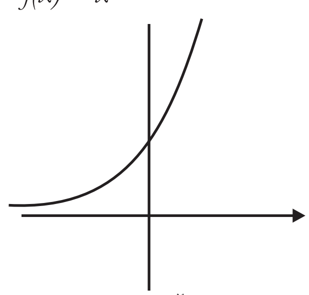
$f(x) = x^2$



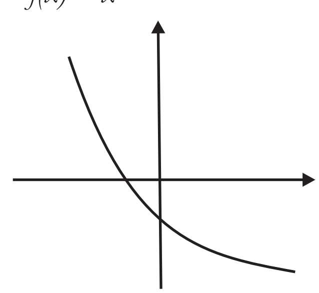
$f(x) = 2^x$

Consideremos las funciones $f(x) = 3^x + 1$ y $f(x) = 3^{-x} - 2$ y elaboremos sus gráficas.

Puede observarse que hubo un corrimiento de las gráficas de las funciones sobre el eje Y, es decir, un desplazamiento vertical, tal y como se expuso en la unidad I.



$f(x) = 3^x + 1$



$f(x) = 3^{-x} - 2$

Obtención de la expresión algebraica correspondiente

Como ya se ha mencionado, la función exponencial tiene numerosas aplicaciones de estudio: en la investigación de la naturaleza, el crecimiento de poblaciones, para describir fenómenos económicos, la desintegración radiactiva, etcétera.

Veamos un ejemplo en el cual se muestra la manera de obtener la expresión exponencial correspondiente.

Ejemplo

Un cultivo de bacterias se duplica cada hora. Si inicialmente se cuenta con 30 bacterias, ¿cuántas bacterias hay al tiempo x?

Solución: Sabemos que inicialmente se cuenta con 30 bacterias, es decir:

$$x_0 = 30$$

Así:

$$x(0) = x_0$$

Después de una hora habrá:

$$2x_0 = 2(30)$$

Después de otra hora:

$$4x_0 = 4(30)$$

Es decir:

$$f(0) = x_0 2^0 = 30(1) = 30$$
$$f(1) = x_0 2^1 = 30(2) = 60$$
$$f(2) = x_0 2^2 = 30(4) = 120$$
$$f(4) = x_0 2^4 = 30(16) = 480$$

Para un tiempo x cualquiera:

$$f(x) = 30(2^x)$$

Es decir, $f(x) = x_0 2^x$, la cual es una función exponencial con base 2.

En general, una función de la forma $f(x) = x_0 2^{kx}$ es una función exponencial con base a y exponente kx, donde k depende del fenómeno estudiado.

Sabías que...

La escala de Richter mide la energía de un temblor en su centro, o foco, y la intensidad crece de forma exponencial de un número al siguiente.

Tasa y factor de crecimiento

El factor de crecimiento es el factor constante por el que se multiplica cada valor en un patrón de crecimiento exponencial y con el cual se obtiene el siguiente valor; es la base en la ecuación de crecimiento exponencial. Para el caso anterior del cultivo de bacterias, el factor de crecimiento es 2.

La tasa de crecimiento es un exponente que por lo general se expresa como una porción de la población (un porcentaje en forma decimal).

Ejemplo

En una preparatoria se compró equipo de cómputo para el laboratorio de Informática. Antes de la compra, se consideró que el equipo tendría una vida útil de 5 años; sin embargo, se sabe que cualquier equipo sufre una devaluación a partir de su compra. El equipo costó $55,000. ¿Cuál es su valor después de 5 años?

La devaluación tiene una relación de $c(t) = Be^{-0.25\,t}$ donde B es constante.

Solución: Cuando $t = 0$ se compró el equipo; así,

$$c(0) = Be^{-0.25(0)}$$
$$c(t) = Be^{0}$$

El precio fue de $55,000 y $e^0 = 1$

$$55,000 = B, \text{ entonces}$$
$$c(t) = 55,000e^{-0.25t}$$

A los 5 años, la devaluación del equipo será:

$$c(5) = 55,000e^{-0.25(5)}$$
$$c(5) = 55,000e^{-1.25}$$
$$c(5) = 15,757.76$$

Por lo tanto, a los 5 años de comprar el equipo en $55,000, valdrá tan sólo $15,757.76 debido a su devaluación.

Ejercicio

1. En 1980, la población estimada de cierto país era de 651 millones, y ha estado creciendo a una tasa de alrededor del 25% anual. La población $N(t)$, t años más tarde se aproxima con $N(t) = 651e^{0.02\,t}$ Calcular la población de este país en el año 2000, suponiendo que esta tasa alta de crecimiento continúa.

2. Ciertos laboratorios médicos determinan que el número de algunos cultivos de bacterias está dado por la expresión $N(t) = Be^{0.08\,t}$, t está dada en minutos.
   ¿Cuántas bacterias habrá en dos horas, si inicialmente existen 2,500?

3. Una lavandería compra un centro de lavado en $10,500, el cual sufre una depreciación de 25% anual. ¿Cuál será su valor en dos años?
   Suponer que la depreciación se representa con $D(t) = Be^{-0.25\,t}$

4.1.3 El número *e*

Caracterización e importancia

Hemos estudiado la función exponencial utilizando una base *a* cualquiera, ahora elegimos una base irracional, a la cual denotamos como *e*.

El descubrimiento de la constante se acredita a Jacob Bernoulli, quien intentó encontrar la aproximación de los decimales de este número con la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; así, tomando un número *n* (natural) suficientemente grande:

N	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2.000000
10	2.5937425
100	2.7048138
1,000	2.7169238
10,000	2.7181459
100,000	2.7182546
1,000,000	2.7182818

Conforme n aumenta $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ acerca cada vez más a un número irracional denotado por *e*. Asignamos a *e* la siguiente aproximación, e ≈ 2.71828.

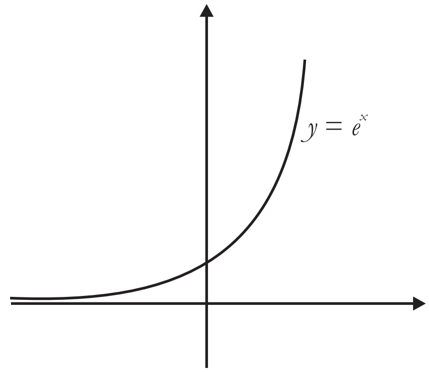
A la fecha, se conocen 100,000,000,000 de dígitos de *e* gracias al desempeño de las computadoras, así como también a los algoritmos utilizados.

El número *e* surge en la investigación de fenómenos físicos; es una de las funciones más importantes en las matemáticas avanzadas y en diferentes aplicaciones.

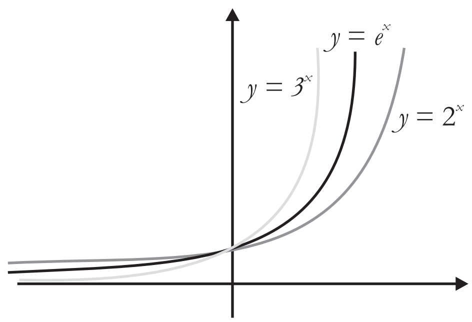
Función exponencial natural

Cuando el número *e* es utilizado como base, se le da el nombre de base natural. Así, la función *f* definida por $f(x) = e^x$ se denomina función exponencial natural. Esta función cumple también con las propiedades de los exponentes.

Tracemos la gráfica de la función exponencial natural:



Como $2 < e < 3$, la gráfica de $y = e^x$ está entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$



Sabías que...

En geometría, el número e es necesario para describir curvas como la catenaria –la supuesta forma de una cuerda o cadena suspendida por sus extremos–.

El dominio de la función $y = e^x$ son todos los números reales y el rango los reales positivos.

Ejemplo

Encontrar las raíces o ceros de f si $f(x) = 3xe^{-2x} - 3x^2e^{-2x}$

Solución: Factorizando, obtenemos:

$$f(x) = 3xe^{-2x}(1 - x)$$

Para encontrar los ceros de f hacemos $f(x) = 0$

Puesto que $e^{-2x} > 0$ para todo x, entonces $f(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ o $1 - x = 0$, $x = 1$, es decir, las raíces de f son 0 y 1.

Ejemplo

Encontrar el valor de x en la siguiente ecuación exponencial: $e^{6x-2} = e^{x+4}$

Solución: Dado que en ambos miembros se tiene la misma base, la anterior igualdad la podemos escribir de la siguiente manera:

$$6x - 2 = x + 4$$
$$5x = 6$$
$$x = 6/5$$

Ejercicio

Teniendo en cuenta que la función exponencial natural cumple también con las propiedades de los exponentes, encontrar el valor de x en las siguientes ecuaciones exponenciales.

1. $e^{x+1} = e^{x-1}$
2. $e \bullet e^{x} = e^{3x-1}$
3. $e^{2x} \bullet e^{2} = e \bullet e^{5x-2}$
4. $e^{x} = (e^{x+1})^{2}$
5. $e^{x-5} = e^{2x} \bullet e^{x-3}$

Actividad

Reúnete en equipos de cuatro personas y realiza las siguientes actividades.

I. Discute con tus compañeros sobre lo que sucede si a la función exponencial se le cambia el exponente “x” por los siguientes valores y representarlo gráficamente.
   a) “x+1”, “x-1”, “x+3”, “x–3”.
   b) “2x”, “4x”, etc.

II. Resuelve la siguiente sopa de letras con los términos empleados en la sección de función exponencial.
   1. Conjunto de imágenes de la función exponencial.
   2. Es la función exponencial que utiliza el número e como base.
   3. De acuerdo con la función exponencial, ésta debe ser positiva y diferente de 1.
   4. Para una función exponencial, ésta siempre pasa por el punto (0, 1).
   5. ¿Cómo es la gráfica de la función exponencial cuando?
   6. ¿Cómo es la gráfica de la función exponencial cuando?
   7. Números que no son considerados para que la base tome sus valores.
   8. Eje que es asíntota de la función exponencial.
   9. Es el conjunto de argumentos de la función exponencial.

D	O	M	I	N	G	O	Y	X	C	H	P	D	A
A	U	T	J	R	A	C	T	V	R	I	O	O	L
D	P	E	A	G	R	N	G	U	E	R	O	M	G
O	R	I	G	E	B	Ñ	K	H	C	E	U	I	O
Z	A	R	A	G	O	B	G	L	I	E	X	N	D
Q	N	A	T	U	R	A	L	U	E	Q	U	I	E
P	I	N	T	E	E	S	J	U	N	U	S	O	A
Y	G	G	O	O	N	E	G	A	T	I	V	O	S
Q	U	O	E	T	O	G	R	T	E	S	A	E	R
U	F	I	N	T	O	O	A	Y	E	F	N	U	E
E	S	E	H	M	B	R	F	I	I	N	G	I	G
E	D	E	C	R	E	C	I	E	N	T	E	Y	H
U	Y	C	Q	U	T	Y	C	Y	U	E	S	A	K
E	C	E	S	A	T	I	A	O	O	P	D	N	O

4.2 FUNCIÓN LOGARÍTMICA

El método de los logaritmos fue propuesto en 1614 por John Napier. Gracias a este método, potente instrumento del cálculo, Newton y Kepler establecieron sus leyes, lo que contribuyó al avance de la ciencia, en especial de la astronomía.

4.2.1 Concepto de función logarítmica

Si $f(x) = a^x$ y $a > 1$, entonces f es creciente en los números reales, si $0 < a < 1$, f es decreciente.

Es decir, si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces f es biunívoca y por lo tanto tiene función inversa f^{-1}. La inversa de la función exponencial se le llama función logarítmica.

El concepto de logaritmo se abordará como el logaritmo de un número y como la inversa de la función exponencial.

Logaritmo de un número

Definición

El logaritmo de un número x en base a, es el exponente al cual se debe elevar la base a para ser igual a x. Es decir:

$\log_a x = y$ (se lee "logaritmo en base a de x).

Ejemplo

Calcular los siguientes logaritmos.

1. $\log_2 8$

Solución: es lo mismo que preguntarnos a qué exponente se debe elevar el 2 para obtener 8, entonces:

$\log_2 8 = 3$, ya que $2^3 = 8$

2. $\log_{10} 1000$

Solución: ¿a qué potencia debemos elevar el 10 para obtener 1000?

$\log_{10} 1000 = 3$, ya que $10^3 = 1000$

Ejercicio

1. $\log_5 1 =$
2. $\log_3 81 =$
3. $\log_7 49 =$
4. $10^{\log_{10} 2} =$
5. $\log_8 \dfrac{1}{64} =$
6. $\log_{10} 0.001 =$

7. $\log_7 343 =$

8. Si $2^x = 16$, entonces $x = \log_2 16 = 4$

9. Si $3^x = 243$, entonces $x =$

10. Si $10^x = 0.1$, entonces $x =$

La función logarítmica como inversa de la función exponencial

Consideremos el problema de encontrar x en la relación

$$14 = 2x$$

En este caso, x está entre 3 y 4 ya que $2^3 = 8$ y $2^4 = 16$. El valor de x debe obtenerse por una aproximación. Para resolver problemas de este tipo se considera la función inversa de la exponencial $y = a^x$

Ya vimos que un logaritmo es un exponente, es decir, es el exponente al cual se debe elevar la base para obtener un número. De esta manera, obtenemos la siguiente definición:

Definición

Para $a > 0$ y $a \neq 1$, tenemos que: $x = \log_a y$ es equivalente a $y = a^x$

Es decir:

$$\text{si } y = a^x, \text{ entonces } x = \log a\, y$$

$$\text{Si } y = \log_a x, \text{ entonces } x = a^y$$

Se concluye que la función logarítmica $f(x) = \log_a x$ es la inversa de la exponencial $g(x) = a^x$, porque $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$

Ejemplo

Sean $f(x) = 10x$ y $g(x) = \log_{10} x$, verificar si éstas son funciones inversas.

Solución: Tomemos la primera función $f(x) = 10x$ y démosle valores a x.

x	–1	0	1
$f(x)$	$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$	$10^0 = 1$	$10^1 = 10$

Tomemos ahora las imágenes de f como argumentos de g y evaluemos.

x	0.1	1	10
$g(x)$	$\log_{10} 0.1 = -1$	$\log_{10} 1 = 0$	$\log_{10} 10 = 1$

Observemos que al tomar un valor de x en f, su imagen asociada es $f(x)$ y al evaluar esta imagen en el logaritmo se llega al mismo número inicial. Esto indica que $f(x) = 10x$ y $g(x) = \log_{10} x$ son funciones inversas.

Ejemplo

Expresar x en términos de y.

1. $y = 5^x$
   Solución: $\log_5 y = \log_5 5^x = x$
   Por lo tanto: $x = \log_5 y$

2. $y = \log_3(x - 4)$
   Solución: $3^y = 3^{\log_3 (x-4)} = x - 4$
   Por lo tanto: $x = 3^y + 4$

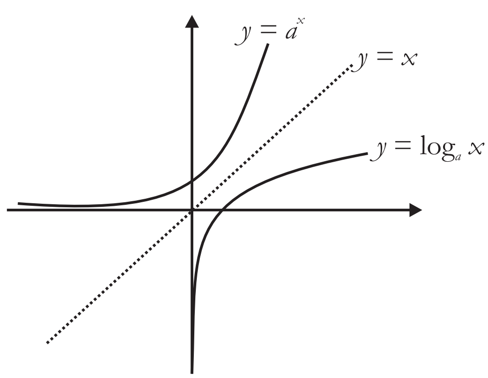
Ejercicio

Expresar x en términos de y.

1. $y = 2^{x+1}$
2. $y = 3^{x2}$
3. $y = 10^{4x-3}$
4. $y = \log_7 (3x + 5)$
5. $y = e^{2(x-5)}$
6. $y = \log_2 (8x - 1)$
7. $y = 2^{4x+1}$
8. $y = 2^{3x}2^{4x}$
9. $y = \log_3 (6x + 1)$
10. $y = \log_5 x^2$

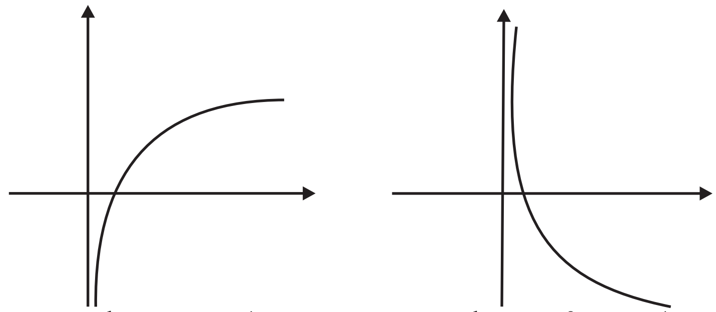
Gráfica de la función logarítmica

Puesto que la función logarítmica $\log_a$ es la inversa de la función exponencial de base a, su gráfica se puede obtener reflejando la gráfica de $y = a^x$ con respecto a la recta $y = x$



Toda función logarítmica es una curva suave sin brincos o saltos para todos los valores positivos de x.

De la gráfica se obtiene: si $a > 0$, la función f es creciente en todo su dominio. Si f $0 < a < 1$, la función f es decreciente.



$y = \log_a x, \quad a > 1$ $\qquad$ $y = \log_a x, \quad 0 < a < 1$

Dominio y rango

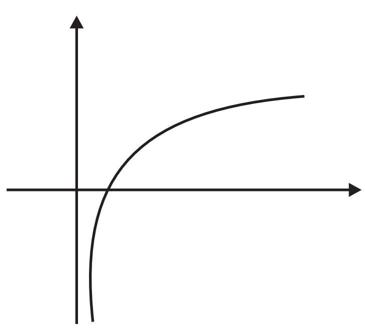
Teniendo en cuenta la gráfica de la función logarítmica, tanto para $a > 1$ y $0 < a < 1$ se deduce lo siguiente:

- El dominio de la función es el conjunto de los números reales positivos, es decir, sólo tienen logaritmo real los números positivos. Para los números negativos, éste no está definido.
- La gráfica de la función logarítmica intersecta al eje X en el punto (1, 0), es decir, $\log_a 1 = 0$.
- El logaritmo de cero no está definido.
- El eje Y es una asíntota vertical para la función.
- El rango son los números reales.

Ejemplo

Graficar la función logarítmica $f(x) = \log x$

Solución:



x	f(x)
0.01	–2
0.1	–1
1	0
5	0.6989
10	1
100	2

El dominio de la función son todos los reales positivos; el rango son todos los números reales. El eje Y es una asíntota vertical. A medida que x crece, su imagen también crece, es decir, se trata de una función creciente y se interseca con el eje X en el punto (1, 0).

Ejercicio

Construir la gráfica de las siguientes funciones logarítmicas.

1. $f(x) = \log_2 x$
2. $f(x) = \log_2 (x + 3)$
3. $f(x) = 3\log_3 x$
4. $f(x) = \log_2 \left(\frac{1}{x}\right)$
5. $f(x) = \log_5 (x - 1)$
6. $f(x) = \log_2 x^2$

4.2.2 Logaritmos comunes y naturales

Antes de que se inventaran las calculadoras, se empleaban logaritmos de base 10 para realizar operaciones complejas con números reales. Esta base era la más adecuada para la utilización de números decimales.

Definición y propiedades

Los logaritmos de base 10 son llamados logaritmos *comunes*.

Definición

Sea $\log_{10} x$ el logaritmo en base 10 de x, de tal manera que

$$\log x = \log_{10} x \text{ para toda } x > 0$$

Anteriormente se definió la función exponencial natural como $f(x) = e^x$. A la inversa de esta función se le llama función logaritmo *natural* o neperiano, es decir, $\log_e x$

Definición

$Inx = \log_e x$, para todo $x > 0$

Así, $Ine^x = x = e^{Inx}$ $\qquad Ine = 1$ $\qquad In1 = 0$

Deducimos entonces que el logaritmo se calcula sólo para números positivos.

Las propiedades básicas de los logaritmos –tanto comunes como naturales– son de gran utilidad para resolver ecuaciones logarítmicas.

Propiedades de los logaritmos

1. $y = \log_a x$ si y sólo si $x = a^y$
2. $a^{\log_a x} = x$ para todo $x > 0$

3. $\log_a a^x = x$
4. $\log_a 1 = 0$
5. $\log_a a = 1$
6. $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$
7. $\log_a\left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$
8. $\log_a A^n = n\log_a A$
9. $In(AB) = InA + InB$
10. $In\left(\dfrac{A}{B}\right) = InA - InB$
11. $InA^n = nInA$

Operaciones con logaritmos

Ejemplo

Calcular las siguientes expresiones considerando que $\log^4 = 0.6021$ y $\log^5 = 0.6990$

a) $\log\dfrac{4}{5}$ b) $\log\sqrt{5}$ c) $\dfrac{\log 4}{\log 5}$

Solución:

a) $\log\dfrac{4}{5} = \log^4 - \log^5 = 0.6021 - 0.6990 = -0.0969$

b) $\log\sqrt{5} = \log 5^{1/2} = \dfrac{1}{2}\log^5 = \dfrac{1}{2}(0.6990) = 0.3495$

c) No existe ninguna propiedad para simplificar $\dfrac{\log 4}{\log 5}$, entonces dividimos; esto es:

$$\frac{\log 4}{\log 5} = \frac{0.6021}{0.6990} = 0.8614$$

Notar la diferencia entre el inciso a) y el c).

Ejemplo

Hacer uso de la calculadora para aproximar los siguientes logaritmos:

a) $\log 59$
b) $In59$
c) $\log x = 1.4046$
d) $Inx = 4.5$

Solución:

a) $\log 59 \approx 1.7709$
b) $In59 \approx 4.0775$
c) Oprimir: INV log
   Ingresar: 1.4046
   Oprimir: 4.0739
d) Oprimir: INV In
   Ingresar: 4.5
   Oprimir: = 90.0171

Ejemplo

La Ley de Newton para el enfriamiento establece que la rapidez con la que un objeto se enfría es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y su medio circundante. Esta ley se utiliza para demostrar que en ciertas condiciones la temperatura T de un objeto en un tiempo t está dada por $T = 75e^{-2t}$. Expresa t como función de T.

Solución. Despejando e^{-2t} de la ecuación se obtiene:

$$T = 75e^{-2t}$$
$$e^{-2t} = \frac{T}{75}$$

Usando logaritmos naturales se obtiene:

$$\log_e e^{-2t} = \log_e \frac{T}{75}$$
$$-2t = In\frac{T}{75}$$

Así, $t = -\frac{1}{2} In\frac{T}{75}$ o $t = -\frac{1}{2}\left[InT - In75\right]$

Ejemplo

En el este de Estados Unidos es válida la siguiente fórmula, la cual relaciona la magnitud R del sismo con el área que lo rodea A (en millas cuadradas, que es afectada por el temblor):

$$R = 2.3\log(A + 34000) - 7.5$$

Resolverla para A en términos de R.

$$R = 2.3\log(A + 34000) - 7.5$$

Despejando el logaritmo:

$$R + 7.5 = 2.3\log\left(A + 34000\right)$$
$$\frac{R + 7.5}{2.5} = \log\left(A + 34000\right)$$

Por la definición de logaritmo de base 10:

$$10^{\frac{R+75}{2.3}} = 10^{\log(A+34000)}$$

$$10^{\frac{R+75}{2.3}} = A + 34000$$

Despejando A:

$$A = 10^{\frac{R+7.5}{2.3}} - 34000$$

Ejemplo

Usar las propiedades de los logaritmos para reescribir la siguiente expresión como el logaritmo de una sola cantidad.

$$\log_5 (x+2) - \frac{1}{2}\log_5 x + \log_5 \left(x^2 - 4\right)$$

Solución. Lo anterior también lo podemos escribir como:

$$\log_5 (x+2) - \log_5 x^{1/2} + \log_5 \left(x^2 - 4\right) =$$

$$\log_5 (x+2) - \log_5 x^{1/2}\left(x^2 - 4\right) =$$

$$\log_5 \frac{x+2}{x^{1/2}\left(x^2-4\right)} =$$

$$\log_5 \frac{x+2}{x^{1/2}(x+2)(x-2)} =$$

$$\log_5 \frac{1}{x^{1/2}(x-2)}$$

Nótese que no hay propiedad para expresar $\log_a(A + B)$ o $\log_a(A - B)$ en términos de logaritmos más simples. Por lo tanto:

$$\log_a (A+B) \neq \log_a A + \log_a B \quad \text{y}$$

$$\log_a (A-B) \neq \log_a A - \log_a B$$

Ejercicio

Hacer uso de la calculadora para aproximar:

1. $\log x = 100$
2. $Inx = 1.68$
3. $\log 99 = x$
4. $In55 = x$

Simplificar las siguientes expresiones:

5. $\log_3 3^{x^2}$
6. $Ine^{\sqrt{3}}$
7. $10^{\log_{10} 4}$

Despejar x en la siguiente ecuación:

8. $\log_2 x - \log_2(x-4) = 6$

Expresar en términos de un logaritmo las siguientes expresiones:

9. $\frac{1}{2}\log_3\left(x^2+2x+1\right)-\log_3 x+2\log_3 x$

10. $2\log_2 x+\frac{1}{4}\log_2\left(x-2\right)-5\log_2\left(x^2-4\right)$

11. $\log\frac{x^2}{y^3}+4\log y-6\log\sqrt{xy}$

Cambio de base

En ocasiones es necesario cambiar la base de un logaritmo expresado $\log_b x$ en términos de $\log_a x$ para resolver un problema. Para hacer este cambio, se utilizan las fórmulas:

i) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

ii) $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

Donde:

- a es la base a la que se quiere llegar.
- b es la base que se tiene.
- x es el número del cual se obtendrá el logaritmo.

Ejemplo

Teniendo $\log_2 16 = 4$, calcular $\log_4 16$.

Solución: $a = 4$ (base a la que se quiere llegar)
$b = 2$ (base original)
$x = 16$

Aplicando la fórmula: $\log_4 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 4} = \frac{4}{2} = 2$

Ejemplo

Dado $\log_3 81 = 4$, calcular $\log_9 81$

Solución: $a = 9$
$b = 3$
$x = 81$

Sustituyendo en la fórmula: $\log_9 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 9} = \frac{4}{2} = 2$

4.3 ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Cuando las variables se encuentran como exponentes o logaritmos en una ecuación, a estas ecuaciones se les llama exponenciales o logarítmicas.

Métodos básicos de resolución algebraica

Dado que la función exponencial y la logarítmica son inversas, para eliminar el logaritmo se utiliza la expresión:

$b^{\log_3 y} = y$ o $e^{lny} = y$

Los siguientes ejemplos muestran algunas de las técnicas para resolver las ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Ejemplo

Resolver la ecuación $3^{2x-1} = 9$

Solución: Esta ecuación la podemos expresar de la siguiente manera:

$$3^{2x-1} = 3^2$$

Aplicando $\log_3$,

$$\log_3 3^{2x-1} = \log_3 3^2$$
$$2x - 1 = 2$$
$$2x = 2 + 1$$
$$x = \frac{3}{2}$$

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación exponencial: $\sqrt[2x-1]{4^{x-3}} = \sqrt{8}$

$$4^{\frac{x-3}{2x-4}} = 8^{\frac{1}{2}}$$
$$2^{2\left(\frac{x-3}{2x-1}\right)} = 2^{3\left(\frac{1}{2}\right)}$$
$$2^{\frac{2x-6}{2x-1}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

Usando $\log_2$,

$$\log_2 2^{\frac{2x-6}{2x-1}} = \log_2 2^{\frac{3}{2}}$$
$$\frac{2x-6}{2x-1} = \frac{3}{2}$$
$$2(2x-6) = 3(2x-1)$$
$$4x - 12 = 6x - 3$$
$$4x - 6x = 3 + 12$$
$$-2x = 9$$
$$x = \frac{-9}{2}$$

Dentro de las ecuaciones exponenciales se incluyen aquellas que se reducen a ecuaciones de segundo grado mediante un cambio de variable.

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación exponencial: $2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$

Solución: Expresar la ecuación de la forma: $2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$

Hacer el cambio: $2^x = y$ entonces, $2^{2x} = y^2$

Se obtiene: $2y^2 - 3y + 1 = 0$

Cuyas soluciones son: $\begin{cases} y = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Como $2x = y$, entonces $\begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ 2^x = 2^{-1} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ \log_2 2^x = \log_2 2^{-1} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación logarítmica: $\log_2 x + \log_2 8x = 3$

Solución: Esta suma de logaritmos la podemos representar como un producto, esto es:

$$\log_2 x(8x) = 3$$

Aplicando la exponencial:

$$2^{\log_2 8x^2} = 2^3$$
$$8x^2 = 8$$
$$x^2 = \frac{8}{8} = 1$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm\sqrt{1}$$

entonces las soluciones son: $x = -1$, $x = 1$

Ejemplo

Despejar x de la ecuación logarítmica $\log x = 1 - \log(x - 3)$

Solución: Es lo mismo que: $\log x + \log(x - 3) = 1$

Representando esta suma como producto:

$$\log x\left(x-3\right) = 1$$
$$\log\left(x^2 - 3x\right) = 1$$

Aplicando exponencial en base 10:

$$10^{\log(x^2-3x)}=10^1$$
$$x^2-3x=10$$
$$x^2-3x-10=0$$

Cuyas soluciones son: $x = 5$ y $x = -2$

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación logarítmica: $In x = 1 + In(x + 1)$

Solución:

$$In x - In(x+1)=1$$
$$In\frac{x}{x+1}=1$$
$$e^{In\frac{x}{x+1}}=e^1$$
$$\frac{x}{x+1}=e$$
$$x=e(x+1)$$
$$x=ex+e$$
$$x-ex=e$$
$$x(1-e)=e$$
$$x=\frac{e}{(1-e)}$$

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación logarítmica $log\sqrt[4]{x+1}=\frac{1}{2}$

Solución:

$$\log(x+1)^{1/4}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4}\log(x+1)=\frac{1}{2}$$
$$\log(x+1)=\frac{4}{2}$$
$$\log(x+1)=2$$
$$10^{\log(x+1)}=10^2$$
$$x+1=100$$
$$x=100-1$$

entonces $x = 99$

Ejercicio

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $4^{\frac{x-3}{4}} = 16$
2. $e^{x-1} = e^{2(x+2)}$
3. $9^{x-2} = 3^{3x+1}$
4. $7^{x^2-3x+2} = 1$
5. $\log(\log x) = 2$
6. $\log x^2 = \log^{10} x$
7. $\log_3(x-2) = \log_3 6 - \log_3 1$
8. $3\log_7 x = \log_7 27$
9. $\log_2(x+1) = \log_2 11 + \log_2 5$
10. $\log_4(x+4) - \log_4 8 = \log_4(x+1) - \log_4 2$

Auto evaluación

NOMBRE DEL ALUMNO: ______________________ ACIERTOS: ______

Resolver la siguiente sopa de letras con los términos usados en la sección de función logarítmica.

1. Es el exponente al cual se debe elevar la base para obtener un número dado.
2. Es la inversa de la función logarítmica.
3. Es la solución de
4. Números reales para los cuales no está definido el logaritmo.
5. El logaritmo no está definido para este número.
6. Este eje es una asíntota vertical de la gráfica de la función logarítmica.
7. Son los logaritmos de base 10.
8. Únicamente para estos números se puede calcular el logaritmo.
9. Es la solución de

P	O	S	I	T	I	V	O	S	S	A
F	A	N	U	B	T	U	R	O	P	Ñ
A	D	E	Ñ	Y	C	U	E	J	A	I
E	X	P	O	N	E	N	C	I	A	L
E	F	R	Y	E	S	O	O	P	R	K
S	E	L	O	G	A	R	I	T	M	O
A	S	E	R	A	R	T	U	M	A	G
E	E	G	U	T	O	Y	P	S	T	B
F	W	E	T	I	U	E	H	E	S	R
I	F	U	A	V	R	A	N	G	O	E
S	E	T	C	O	M	U	N	E	S	U
D	A	M	A	S	C	E	F	I	L	I

BIBLIOGRAFÍA

Baldor, A. (1984). *Álgebra*, México, Publicaciones Cultural.

Cantoral, R. y R.M. Farfán (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*, México, Thomson Learning.

Cantoral, R. et al. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*, México, Trillas-ITESM.

Cantoral, R. y G. Montiel (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático,* México, Prentice–Hall, Pearson Educación.

Cordero, F., y J. Solís.(2001). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo*, 3ª edición, México, Iberoamérica, Edición especial CASIO.

Ibáñez P. y García G. (2006). *Matemáticas IV Precálculo*, México, Thomson Learning.

Larson, R., R. Hostetler, y B. Edwards (2005). *Cálculo diferencial e integral*, séptima edición, México, Mc. Graw-Hill.

Méndez A. (2007). *Matemáticas 4*, Bachillerato, México, Santillana.

Ortiz, F. (2006). *Cálculo Diferencial*, México, Publicaciones cultural.

Salazar P. et al. (2005). *Matemáticas 4*, Colección Innovación Educativa, México, Editorial Nueva Imagen.

Salinas, Patricia et al. (2002). *Elementos del Cálculo*, 2ª. edición, México, Trillas-ITESM.

Stewart, J. (2001). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*, cuarta edición, México, Thomson Learning.

__________ (2001). *Cálculo conceptos y contextos*, México, Thomson Learning.

Zamarrón, L. (2006). *Matemáticas IV*, Enfoque constructivista, México, Global Educational Solutions.

Zill, Dennis G. (1987). *Cálculo con geometría analítica*, México, Iberoamerica.