Editorial de la Universidad
Tecnológica Nacional

FUNDAMENTOS
DE ÁLGEBRA PARA INGENIERÍA

Dr Adrian M. Canzian
Ing. Alfredo Rojas Lagarde

Colaboración:
Ing. Laura Gelsi

Departamento de Ciencias Básicas
Facultad Regional General Pacheco
Universidad Tecnológica Nacional - U.T.N.
Argentina

[I]

Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional - edUTecNe

http://www.edutecne.utn.edu.ar
edutecne@rec.utn.edu.ar

Dedicado a:

Elsa
Clara
Maria Florencia
Lala
Verónica
Victoria
María
Ana
Catalina
Piru
Clarita
MaríaVictoria

quienes por lo general no tienen mayor entusiasmo por las Matemáticas
y en especial a :

Camila

quien sí lo tiene.

Ito

Dedicado a toda mi Familia

A.M.C.

ÍNDICE GENERAL

Prólogo.	**PLG**
Acotaciones sobre algunas notaciones a ser usadas	**NOT**
“Racconto” sobre conjuntos.	**CNJ**
Números reales.	**NR**
Conjuntos de números reales.	**CN**
Sumatorias.	**SUM**
Principio de inducción completa.	**PIC**
Cálculo combinatorio.	**CMB**
Binomio de Newton y fórmula de Leibnitz.	**BIN**
Números complejos.	**NC**
Sistemas de ecuaciones lineales.	**SEL**
Determinantes numéricos.	**DET**
Matrices.	**MAT**
Complementos sobre polinomios.	**POL**
Interpolación Algebraica.	**INT**
Vectores libres.	**VT**
Geometría analítica de la recta y del plano.	**GA**
Infinitos.	**INF**
Uso del Software MATHEMATICA 6.0 en el Álgebra.	**SOFT**
Bibliografía.	**BIBL**

PRÓLOGO

1. El propósito de esta obra es presentar toda el Álgebra que hoy por hoy en realidad necesita un ingeniero “estándar” en su bagaje de conocimientos profesionales.

2. Se han hecho todos los esfuerzos posibles para que el material presentado resulte de fácil asimilación. Se considera que esto es una necesidad en una obra de este tipo ya que:

   1º. El alumno se verá abocado a su lectura en las primeras fases de su formación profesional, cuando todavía no tiene sus “reflejos matemáticos” lo suficientemente desarrollados como para seguir con comodidad una presentación “para adultos”.

   2º. Los conocimientos a absorber son tan básicos y esenciales para el resto de la carrera que el alumno debe no ya “aprender a recitarlos” con vistas a un examen sino incorporarlos definitivamente a su personalidad a nivel visceral. El Álgebra, al igual que otras disciplinas básicas para el ingeniero, no debe ser meramente aprendida sino “metabolizada” por el estudiante.

   Con este fin en vista, a veces las demostraciones han sido hechas en base a casos concretos y no en base al caso general, pensándose que el riesgo de perder la asimilación del concepto respectivo no vale unos cuantos puntos suspensivos. Sin embargo, se ha echado mano de este recurso solo cuando la extensión del concepto al caso genérico es obvia e inmediata.

3. Por otra parte, el enfoque de esta obra es enteramente riguroso. Esto se debe a dos motivos: En primer lugar las matemáticas sin rigor degeneran en telenovela, y en segundo lugar porque el rigor debe ser una regla de conducta invariable del ingeniero en su desempeño profesional, y por lo tanto, conviene condicionar adecuadamente al alumno desde el vamos.

4. Hoy por hoy el Álgebra es una de las ramas de las matemáticas que se está desarrollando con mayor rapidez, pero solo una pequeña parte de la jungla algebraica presenta el suficiente interés práctico como para merecer ser incluido en un plan de estudios para ingenieros “estándar”, para quienes el Álgebra no es más que una herramienta y no un fin en si mismo.
   Se ha pues resistido la tentación de incluir tópicos que, si bien son apasionantes intelectualmente (léase Álgebra Abstracta), no reditúan lo suficiente en relación a las disponibilidades de tiempo y esfuerzo del estudiante promedio; tiempo y esfuerzo que pueden ser gastados con más eficiencia en otras cosas.

Dedicamos la siguiente poesía, cuyo autor es el Dr Carlos Domingo, a todos nuestros amigos Abstracto-Moderno-Algebraicos.

Puede ser cantada con la música del tango "Rechiflado en mi tristeza……."

Algebrista te volviste
Refinado hasta la esencia
Oligarca de la ciencia
Matemático bacán

Hoy mirás a los que sudan
en las otras disciplinas
como dama a pobres minas
que laburan por el pan

¿Te acordás que en otros tiempos
sin mayores pretensiones
mendigabas soluciones
a una mísera ecuación?

Hoy la vas de riguroso
revisás los postulados
y junás por todos lados
la más vil definición

Pero no engrupís a nadie
y es inútil que te embales
con Anillos , Ideales ,
y con Álgebras de Boole

Todos saben que hace poco
resolviste hasta matrices
y rastreabas las raíces
con el método de Sturm

Pero puede ser que un día
por las vueltas de la vida
tanta cáscara aburrida
te llegue a cansar al fin

y añorés aquellos tiempos
en que sin Álgebras Abstractas
y con tres cifras exactas
te sentías tan feliz

El autor de esta poesía tiene además otros "capolavoros", como ser el Teorema de Borel –Lebesgue- Rossini, a ser cantado con la música de la ópera "El barbero de Sevilla "

<u>Acotaciones sobre algunas notaciones a ser usadas</u>

a. El símbolo $\forall$ se leerá “para todo”.
El símbolo $\exists$ se leerá “existe”.
El símbolo / se leerá “tal que”.
El símbolo $\Rightarrow$ se leerá “implica que”.
El símbolo $\Leftrightarrow$ se leerá “cuando y solo cuando”.

b. Sean dos proposiciones A y B, es decir dos oraciones gramaticales en las que se afirma o niega algo bien definido en forma categórica.
En lo que sigue se considerará que:

$$A \Rightarrow B$$

significa que:
Es cierto que si la proposición A es cierta entonces la proposición B también lo es.
Por ejemplo:

Juan es correntino $\Rightarrow$ Juan es argentino

(Se deja constancia de que la definición de implicación recién indicada difiere algo de la definición dada en la lógica rigurosa, donde $A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$).

c. También se considerará que:

$$A \Leftrightarrow B$$

significa que:
Es cierto que si la proposición A es cierta entonces la proposición B también lo es, y <u>viceversa</u>.

<u>“Racconto” sobre Conjuntos</u>

CNJ I

<u>Observaciones</u>

Probablemente lo indicado en este capítulo sea ya materia conocida.
Sin embargo conviene leerlo, aunque más no sea para familiarizarse con la notación a ser empleada en lo sucesivo.

CNJ II

<u>Definición</u>

CNJ II.1

a. El concepto de conjunto es el más primario de todas las matemáticas.
Algunos autores ni siquiera tratan de encarar su definición, decretando que la idea de conjunto es evidente e intuitiva. Todo lo más dan algunos ejemplos (el conjunto de todos los números naturales; el conjunto de todos los narigones, etc.), o echan mano de ideas afines tales como "agregación" o "colección".

b. Haciendo una tentativa de definición, puede decirse que:
<u>Un conjunto es toda pluralidad que puede ser considerada como una unidad, con la salvedad que dicha pluralidad puede constar de un único individuo y aún de ninguno</u>.
De esta definición surge que un conjunto está definido cuando y sólo cuando están especificados sus entes constitutivos.

c. A los entes susceptibles de formar conjuntos se los llama elementos.
Si un cierto elemento $\boldsymbol{x}$ forma parte de un cierto conjunto $\boldsymbol{A}$, se dirá que “$\boldsymbol{x}$ **pertenece a** $\boldsymbol{A}$”, lo que se simbolizará como:

$$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$$

Para indicar que un cierto elemento $\boldsymbol{z}$ <u>no</u> pertenece a $\boldsymbol{A}$ se escribe:

$$\boldsymbol{z} \notin \boldsymbol{A}$$

CNJ II.2

Según se dijo más arriba, para definir un conjunto es necesario indicar todos sus elementos, a los cuales en la notación corriente se los indica dentro de llaves **{ }** para significar que se los considera formando una unidad. Por ejemplo:

A **: {Todos los argentinos}**
B **: {Pedro, Juan, Luis, esta gota de agua}**
C **: {Todos los jugadores del plantel de Boca}**
D **: {Todos los números naturales}**
E **: {Todos los puntos de un segmento de recta}**
F **: {{a, b, c} , {Do, Re, Mi, Juan Pérez}}**

Notar que:

1º) ***A*, *B*** y ***C*** tienen una cantidad finita de elementos.
2º) ***D*** y ***E*** tienen una cantidad infinita de elementos.
3º) Los elementos del conjunto ***F*** son a su vez conjuntos.

CNJ II.3

a. En la definición de conjunto dada en **b.** de **CNJ II.1** se indicó que un conjunto puede eventualmente constar de un único elemento y aún no tener ningún elemento.
Si a primera vista esto resulta algo indigesto, considérese el siguiente conjunto:

K **: {Todos los ingenieros que saben tocar el arpa}** **[1]**

el cual "a priori" no da lugar a ninguna objeción.
Si a continuación se averigua que ningún ingeniero sabe tocar el arpa, resulta que ***K*** no tendría elementos, quedando dos caminos abiertos:

1º) Postular la no existencia del conjunto considerado.

2º) Postular la existencia de un conjunto sin elementos.

Se ha optado por el 2º de estos caminos por razones que serán obvias más adelante.
<u>Al conjunto sin elementos se lo llamará conjunto vacío</u> y se lo designará con el signo ∅. Es decir:

$$\textbf{Conjunto vacío: } \{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Ningún elemento}}}{\quad}\} = \varnothing$$

b. Por otra parte, si dado el conjunto ***K*** indicado en **[1]** se diera el caso que el único ingeniero que sabe tocar el arpa es Juan Pérez, se tendría entonces que:

K**: {Juan Pérez}**

teniendo entonces ***K*** un único elemento.
Notar que "**Juan Pérez**" y **{Juan Pérez}** son notaciones de cosas totalmente distintas. "**Juan Pérez**" es el <u>nombre</u> del único ingeniero que sabe tocar el arpa, mientras que **{Juan Pérez}** es un <u>conjunto</u> que tiene como único elemento al Ing. **Juan Pérez**, conjunto que por otra parte es el de todos los ingenieros que saben tocar el arpa.

CNJ II.4

Según arriba indicado, para definir un conjunto es necesario y suficiente especificar todos los elementos que lo forman.
Muy a menudo esta especificación puede efectuarse estableciendo que un conjunto está formado por todos los elementos que tienen un a cierta propiedad.
La notación del caso es la siguiente:

$$\boldsymbol{X}\textbf{: } \{\boldsymbol{x} \textbf{ / Propiedad } \alpha\}$$

lo que se lee "El conjunto X está formado por todos los elementos x tales que tengan la propiedad α".

Así por ejemplo, el conjunto de todos los números enteros múltiplos de 3 podría ser escrito como:

{*x* / *x* entero y múltiplo de 3}

Esta manera de definir conjuntos es sumamente "popular".

CNJ III

Igualdad de conjuntos

Se define que dos conjuntos *A* y *B* son iguales cuando están compuestos por exactamente **los mismos** elementos (resultando así que los símbolos *A* y *B* no son más que nombres distintos del mismo conjunto).
Al respecto, tener en cuenta que en el Álgebra de Conjuntos todos los elementos tienen su "personalidad propia". Entonces, si en un conjunto se sustituyen uno o más elementos por elementos idénticos, lo que se obtendrá será otro conjunto.
Así, dadas dos gotas de agua exactamente iguales y dos átomos de Hidrógeno exactamente iguales se tiene que:

{1$^{\underline{er}}$ gota de agua, 1$^{\underline{er}}$ átomo de Hidrógeno} ≠
≠ {2$^{\underline{da}}$ gota de agua, 2$^{\underline{do}}$ átomo de Hidrógeno}

CNJ IV

Subconjuntos

a. Se define que un conjunto *C* es un subconjunto de otro conjunto *D* cuando todo elemento de *C* pertenece también a *D* (pudiendo haber elementos de *D* que no pertenezcan a *C*).
El hecho de que *C* sea un subconjunto de *D* se indica como:

$$\boldsymbol{C \subset D}$$

Por ejemplo:

{Todos los correntinos} ⊂ {Todos los argentinos}

b. Evidentemente:

1º) Si $\boldsymbol{C \subset D}$ y $\boldsymbol{D \subset C}$ entonces es $\boldsymbol{C = D}$.

2º) Si $\boldsymbol{C = D}$ entonces es $\boldsymbol{C \subset D}$ y $\boldsymbol{D \subset C}$.

Resumiendo:

Si $\boldsymbol{C \subset D}$ y $\boldsymbol{D \subset C}$ entonces $\boldsymbol{C = D}$ y viceversa.

c. Evidentemente:

Si $\boldsymbol{C \subset D}$ y $\boldsymbol{D \subset F}$ entonces $\boldsymbol{C \subset F}$.

d. Evidentemente:

Un conjunto cualquiera es un subconjunto de sí mismo.

CNJ V

Diagrama de Venn

a. Un recurso muy útil para visualizar el Álgebra de Conjuntos son los así llamados diagramas de Venn.
En un diagrama de Venn, los elementos se representan como puntos de un plano y un conjunto se representa como una región cerrada, simple o múltiplemente conexa, que abarca a todos los elementos de dicho conjunto y sólo a ellos.
Por ejemplo, dados los conjuntos:

$$\boldsymbol{A} : \{\mathbf{a, b, c, d, e}\} \quad , \quad \boldsymbol{B} : \{\mathbf{a, b, x, y}\} \quad , \quad \boldsymbol{C} : \{\mathbf{a, x, z}\}$$

podría representárselos como indicado en la figura CNJ V. a.

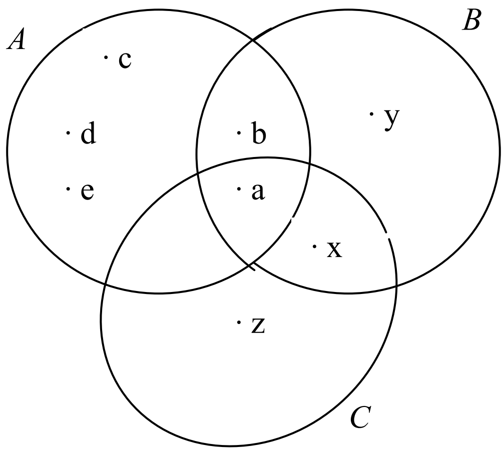


Fig. CNJ V. a

b. Dados dos conjuntos A y B tales que $\boldsymbol{A \subset B}$ y $\boldsymbol{A \neq B}$, se tendrá la situación representada en el Diagrama de Venn de la figura CNJ V. b.

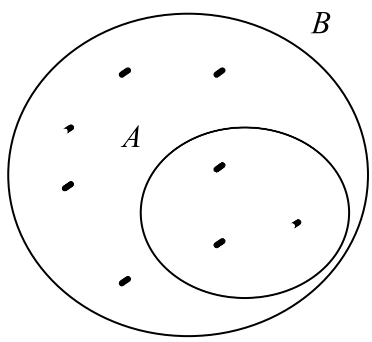
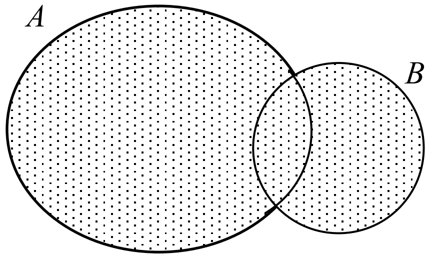


Fig. CNJ V.b

CNJ VI

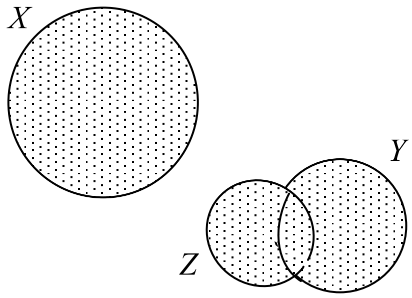
Unión de conjuntos

a. Dados varios conjuntos, se llama unión de los mismos al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen por lo menos a uno de los conjuntos dados.
En las figuras CNJ VI.a y CNJ VI.b se ilustra esta definición por medio de los diagramas de Venn.



La unión de A y B está formada por todos los elementos abarcados por la región grisada.

Fig. CNJ VI.a



La unión de X, Y, Z está formada por todos los elementos abarcados por la región grisada (múltiplemente conexa)

Fig. CNJ VI.b

b. El conjunto unión de los conjuntos $\boldsymbol{A_1 , A_2 , \dots , A_n}$ se simbolizará como:

$$\boldsymbol{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}$$

c. Evidentemente:

$$\boldsymbol{A_1 \cup \varnothing = A}$$

Conjunto vacío

d. Evidentemente:

1º) $\boldsymbol{A \cup B = B \cup A}$ (propiedad conmutativa)

2º) $\boldsymbol{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$ (propiedad asociativa)

CNJ VII

Intersección de conjuntos

CNJ VII.1

a. Dados varios conjuntos, se llama intersección de los mismos al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a la vez a todos los conjuntos dados.
En las figuras CNJ VII.a, CNJ VII.b y CNJ VII.c se ilustra esta definición mediante diagramas de Venn. En todos los casos, la intersección está formada por todos los elementos abarcados por la respectiva región grisada.

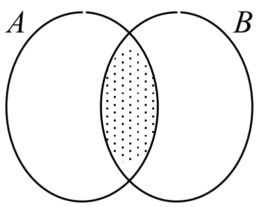


Fig. CNJ VII.a

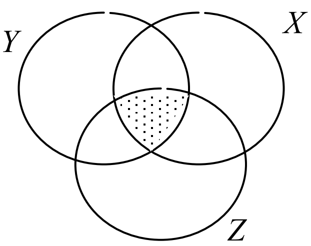


Fig. CNJ VII.b

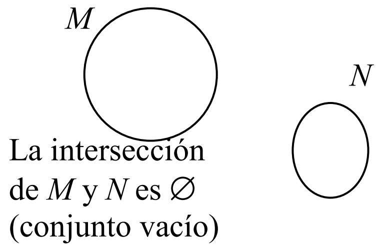


Fig. CNJ VII.c

b. El conjunto intersección de los conjuntos $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ se simbolizará como:

$$\boldsymbol{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n}$$

c. Evidentemente:

$$\boldsymbol{A_1 \cap \varnothing = \varnothing}$$

d. Evidentemente:

1º) $\mathbf{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A}$ (propiedad conmutativa)

2º) $\boldsymbol{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$ (propiedad asociativa)

CNJ VII.2

Los conjuntos $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ serán llamados <u>disjuntos o mutuamente excluyentes</u> cuando no exista elemento que a la vez pertenezca a dos de ellos.
Evidentemente para que $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ sean disjuntos es necesario y suficiente que:

$$\boldsymbol{A_1 \cap A_2 = \varnothing, \ldots, A_1 \cap A_n = \varnothing, \ldots}$$

En general, se deberá cumplir que: $\boldsymbol{A_i \cap A_j = \varnothing}$, para todo $i \neq j$

CNJ VII.3

Supóngase ahora que en vez de la definición de igualdad de conjuntos dada en CNJ III se hubiera adoptado la siguiente:
Dos conjuntos son iguales cuando entre los elementos de ambos puede establecerse una correspondencia uno a uno entre individuos idénticos.
Es decir que dados dos conjuntos:

A **= {Una cierta gota de agua, un cierto átomo de Hidrógeno}**
B **= {Otra cierta gota de agua, otro cierto átomo de Hidrógeno}**

se tendría que <u>según esta nueva definición</u> sería $\boldsymbol{A = B}$.
Considérese ahora la situación indicada en la figura CNJ VII.d.

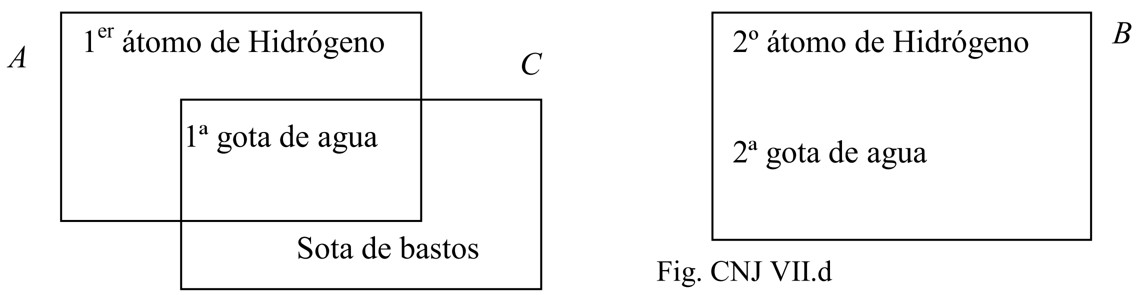


Fig. CNJ VII.d

Se tiene allí que:

1º) $A \cap C = \{1^a \text{ gota de agua}\}$ **[1]**
2º) $B \cap C = \varnothing$ **[2]**
3º) $A = B$ (según la nueva definición) **[3]**

Entonces si en **[1]** se reemplaza al conjunto A por su igual B se obtiene:

$B \cap C = \{1^a \text{ gota de agua}\}$ **[4]**

y por **[2]** y **[4]** resulta entonces que debería ser:

$$\{1^a \text{ gota de agua}\} = \varnothing$$

lo cual es evidentemente absurdo.
Es decir que de aceptarse esta nueva definición de igualdad de conjuntos resultaría que <u>no sería válido reemplazar en una expresión cualquiera a un conjunto por otro igual a él</u>.
Queda así ilustrado lo poco conveniente que hubiera sido adoptar esta nueva definición de igualdad de conjuntos en vez de la indicada en CNJ III.

CNJ VIII

<u>Distributividad de la intersección de conjuntos con respecto a la unión</u>

a. Se probará que:

$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup ...) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ...$ **[1]**

b. Todo elemento que pertenezca a $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup ...)$ pertenece a la vez a A y a $(B_1 \cup B_2 \cup ...)$, es decir que a la vez pertenece a A y a por lo menos uno de los conjuntos B_1, B_2, ... Esto implica que dicho elemento pertenezca a por lo menos uno de los conjuntos $(A \cap B_1)$, $(A \cap B_2)$, ..., lo que determina que pertenezca a $(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup$ ....
Resumiendo: Todo elemento que pertenezca a $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup ...)$ pertenece también a $(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup$ .... Es decir que:

$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup ...) \subset (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ...$ **[2]**

c. Todo elemento que pertenezca a $(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ...$ pertenece también a por lo menos uno de los conjuntos $(A \cap B_1)$, $(A \cap B_2)$, ... Esto determina que dicho elemento pertenezca a la vez a A y a por lo menos uno de los conjuntos B_1, B_2, ..., lo que determina que a la vez pertenezca a A y a $(B_1 \cup B_2 \cup ...)$, es decir que pertenezca a $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup ...)$.
Resumiendo: Todo elemento que pertenezca a $(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ...$ pertenece también a $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup ...)$. Entonces:

$(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ... \subset A \cap (B_1 \cup B_2 \cup ...)$ **[3]**

d. Entonces, por **[2], [3]** y por lo indicado en **b** de CNJ IV resulta lo enunciado en **[1].**

CNJ IX

Distributividad de la unión de conjuntos con respecto a la intersección

a. Se probará que:

$$A \cup (B_1 \cap B_2 \cap ...) = (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap ... \qquad \textbf{[1]}$$

b. Todo elemento que pertenezca a $A \cup (B_1 \cap B_2 \cap ...)$ pertenece a A y/o a $(B_1 \cap B_2 \cap ...)$, es decir que pertenece a A y/o a todos los conjuntos B_1, B_2, ... Esto implica que dicho elemento pertenezca a todos los conjuntos $(A \cup B_1)$, $(A \cup B_2)$, ..., lo que determina que pertenezca a $(A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap ...$.
Resumiendo: Todo elemento que pertenece a $A \cup (B_1 \cap B_2 \cap ...)$ pertenece también a $(A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap ...$. Es decir que:

$$A \cup (B_1 \cap B_2 \cap ...) \subset (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap ... \qquad \textbf{[2]}$$

c. Todo elemento que pertenece a $(A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap ...$ pertenece a todos los conjuntos $(A \cup B_1)$, $(A \cup B_2)$, ..., lo que implica que dicho elemento pertenezca a A y/o a todos los conjuntos B_1, B_2, ..., lo que determina que pertenezca a A y/o a $(B_1 \cap B_2 \cap ...)$, es decir a $A \cup (B_1 \cap B_2 \cap ...)$.
Resumiendo: Todo elemento que pertenezca a $(A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap ...$ pertenece también a $A \cup (B_1 \cap B_2 \cap ...)$. Entonces:

$$(A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap ... \subset A \cup (B_1 \cap B_2 \cap ...) \qquad \textbf{[3]}$$

d. Entonces, por **[2], [3]** y por lo indicado en **b** de CNJ IV resulta lo enunciado en **[1].**

CNJ X

Universo

Supóngase que entre todos los conjuntos que aparezcan o puedan aparecer en un cierto razonamiento o demostración exista uno tal que todos los demás sean subconjuntos de él.
A dicho conjunto se lo llamará universo, y se lo designará con la letra E.

CNJ XI

Complementación de un conjunto

a. Se define al complemento de un conjunto A cualquiera, como el conjunto formado por todos los elementos del universo E que no pertenezcan a A. A dicho complemento se lo designará como $\overline{A}$.
Simbólicamente:

$$\left[x \in \overline{A}\right] \Leftrightarrow \left[x \in E, x \notin A\right]$$

b. Evidentemente:

$\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$

$A \cup \overline{A} = E \qquad A \cap \overline{A} = \varnothing \qquad \overline{E} = \varnothing \qquad \overline{\varnothing} = E$

$A \cup E = E \qquad A \cap E = A \qquad A \cup \varnothing = A \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$

Si $A \cap B \cap ... = E$ es $A = B = ... = E$

Si $A \cup B \cup ... = \varnothing$ es $A = B = ... = \varnothing$

c. Sean dos conjuntos A y B tales que:

$$A \cap B = \varnothing \qquad \textbf{[1]}$$
$$A \cup B = E \qquad \textbf{[2]}$$

Por **[1]** todo elemento de E que pertenezca a A no pertenece a B. Por **[2]**, todo elemento de E que no pertenece a A pertenece a B. Resulta entonces que debe cumplirse que:

$$A = \overline{B} \quad , \quad \overline{A} = B \qquad \textbf{[3]}$$

ya que:

$$\left.\begin{array}{l} p \in \overline{B} \Rightarrow p \notin B \overset{[2]}{\Rightarrow} p \in A \Rightarrow \overline{B} \subset A \\ q \in A \overset{[1]}{\Rightarrow} q \notin B \Rightarrow q \in \overline{B} \Rightarrow A \subset \overline{B} \end{array}\right\} \Rightarrow A = \overline{B}$$

Por otra parte, si $A = \overline{B}$ se tiene que:

$$A \cap B = \overline{B} \cap B = \varnothing \quad , \quad A \cup B = \overline{B} \cup B = E$$

Resultando así que las condiciones **[1]** y **[2]** por una parte y la **[3]** por otra, son equivalentes. Simbólicamente:

$$\left[A \cap B = \varnothing, A \cup B = E\right] \Leftrightarrow \left[A = \overline{B}, \overline{A} = B\right]$$

d. Supóngase que sea:

$$A \subset B \qquad \textbf{[4]}$$

Todo elemento que pertenezca a $\overline{B}$ no pertenece a B. Como por **[4]** dicho elemento tampoco pertenecerá entonces a A, resulta que pertenecerá a $\overline{A}$. Es decir que si la **[4]** es cierta se tendrá que:

$$\overline{B} \subset \overline{A} \qquad \textbf{[5]}$$

$$p \in \overline{B} \Rightarrow p \notin B \overset{[4]}{\Rightarrow} p \notin A \Rightarrow p \in \overline{A} \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$

Haciendo el mismo razonamiento partiendo de **[5]**, resultará que la validez de **[5]** implica la de **[4]**. Entonces se tiene que **[4]** y **[5]** son expresiones equivalentes.
Simbólicamente:

$$\left[A \subset B\right] \Leftrightarrow \left[\overline{B} \subset \overline{A}\right]$$

CNJ XII

Dualización de la complementación

a. Se probará que:

$$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup ...)} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ...$$

Demostración:
Si se pone:

$$X = \overline{(A_1 \cup A_2 \cup ...)} \quad , \quad Y = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ...$$

se tiene que un elemento x pertenece a X cuando no pertenece a $A_1 \cup A_2 \cup$ .... Si x no pertenece a $A_1 \cup A_2 \cup$ ... tampoco pertenece a ninguno de los conjuntos A_1, A_2, ... Resulta entonces que x pertenece a todos y cada uno de los conjuntos $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ...$ y por lo tanto pertenece a Y. Es decir que:

$$\left[x \in X\right] \Rightarrow \left[x \in Y\right] \qquad \textbf{[1]}$$

Sea un elemento y que pertenezca a Y. Debe entonces pertenecer a $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ...$ y por lo tanto no debe pertenecer a A_1, A_2, ..., lo que implica que no pertenezca a $A_1 \cup A_2 \cup$ ..., y que entonces pertenezca a $\overline{(A_1 \cup A_2 \cup ...)}$. Es decir que:

$$\left[y \in Y\right] \Rightarrow \left[y \in X\right] \qquad \textbf{[2]}$$

Como **[1]** y **[2]** indican que X e Y están compuestos por los mismos elementos, queda demostrado lo propuesto.

b. De una manera similar puede probarse que:

$$\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup ... = \overline{(A_1 \cap A_2 \cap ...)}$$

CNJ XIII

Resta de conjuntos

Sea $A \subset B$. Se define al conjunto $(B - A)$ como el formado por todos los elementos de B que no pertenecen a A.
Evidentemente:

$$B - A = B \cap \overline{A}$$

CNJ XIV

Fórmulas misceláneas

a. Puede verificarse fácilmente que:

$$A \cap (A \cup B \cup ...) = A$$
$$A \cup (A \cap B \cap ...) = A$$

b.

$$A \cap (\overline{A} \cup B \cup C \cup ...) = (A \cap \overline{A}) \cup \left[A \cap (B \cup C \cup ...) \right] =$$
$$= \varnothing \cup \left[A \cap (B \cup C \cup ...) \right] = A \cap (B \cup C \cup ...)$$

c. De manera similar:

$$A \cup (\overline{A} \cap B \cap C \cap ...) = A \cup (B \cap C \cap ...)$$

Ejercicios y problemas sobre Conjuntos

CNJ 1 Dado $A = \{a, b, c, d\}$, indicar todos sus subconjuntos (son 16).

CNJ 2 Si $A = \{a, b\}$ y $B = \{a, c, A\}$, indicar cuales de los siguientes enunciados son ciertos y cuales son falsos.

a) $a \in A$ b) $a \subset A$ c) $A \in A$ d) $A \subset A$

e) $b \in B$ f) $A \in B$ g) $A \subset B$

CNJ 3 Sean:

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{2, 3, 4, 5\}$

$C = \{4, 5, 6, 7\}$ $D = \{6, 7, 8, 9\}$

Se pide hallar:

a) E = Universo b) $A \cup B$ c) $B \cup C$ d) $C \cap D$
e) $A \cup A$ f) $B \cap D$ g) $B \cap C$ h) $A \cup \varnothing$
i) $B \cap \varnothing$ j) $C \cup E$ k) $D \cap E$ l) $\overline{B}$
m) $\overline{B \cap D}$ n) $\overline{E \cup \varnothing}$ p) $A - B$

CNJ 4 Sean $A = \{x \,/\, 0 \le x \le 3\}$, $B = \{x \,/\, 1 < x < 4\}$, $C = \{x \,/\, 2 \le x < 5\}$.
Si $E = \{x \,/\, 0 \le x < 6\}$, se pide hallar:

a) $A \cap B$ b) $A \cup C$ c) $A \cap \overline{C}$ d) $\overline{A \cap B}$
e) $\overline{B \cup C}$ f) $B \cup \overline{(A \cap C)}$ g) $A \cap \overline{(B \cap \overline{C})}$

CNJ 5 Sean:

Múltiplo de 3

$A = \{\text{Enteros positivos}\}$, $B = \{x \,/\, x = \dot{3}\}$, $C = \{x \,/\, x = n^2, x \in A\}$

Verificar <u>directamente</u> que:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

CNJ 6 Demostrar que si $B \subset A$ y $C \subset A$ entonces:

a) $A - (B \cap C) = (A - \overline{B}) \cup (A - \overline{C})$
b) $A - (B \cup C) = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

CNJ 7 A continuación se da una lista de algunos silogismos de la lógica clásica. Dichos silogismos comprenden dos premisas y una conclusión que fluye de las mismas.
Se pide verificar la veracidad de dichos silogismos usando diagramas de Venn.
Los silogismos están identificados por el nombre con que son conocidos en la lógica clásica. Dichos nombres son en realidad mnemotecnias del silogismo respectivo.

P. ej.: Todo troglodita es mastodóntico

Ningún mastodóntico es kinesiólogo

Ningún troglodita es kinesiólogo

NOMBRE DEL SILOGISMO	1ª PREMISA	2ª PREMISA	CONCLUSION
BARBARA	Todo t es m	Todo m es k	Todo t es k
CELARENT	Todo t es m	Ningún m es k	Ningún t es k
DARII	Algún t es m	Todo m es k	Algún t es k
FERIO	Algún t es m	Ningún m es k	Algún t no es k
FESAPO	Todo m es t	Ningún k es m	Algún t no es k
BAROKO	Algún t no es m	Todo k es m	Algún t no es k
CAMESTRES	Ningún t es m	Todo k es m	Ningún t es k
DARAPTI	Todo m es t	Todo m es k	Algún t es k
FELAPTON	Todo m es t	Ningún m es k	Algún t no es k
FERISON	Algún t es m	Ningún m es k	Algún t no es k
BOKARDO	Todo m es t	Algún m no es k	Algún t no es k
BRAMANTIP	Todo m es t	Algún k es m	Algún t es k

Números Reales

NR I

Generalidades

a. El lector ya está familiarizado con los números racionales: 1; - $-\frac{3}{5}$; $\frac{2}{7}$; 0; - 3; 2,53; etc.
Sea una recta a la cual se llamará (por el momento arbitrariamente) "recta real".
Definiendo sobre dicha recta un sentido positivo y un punto arbitrario al que se llamará origen, puede establecerse que:
1º. Al número racional 0 le corresponde el origen de la recta real.
2º. A todo racional positivo le corresponde el punto de la recta que, en sentido positivo, esté a una distancia del origen igual a la magnitud del número.
3º. A todo racional negativo le corresponde el punto de la recta que, en sentido negativo, esté a una distancia del origen igual a la magnitud del valor absoluto del número.
En la figura NR I.a se han marcado los puntos correspondientes a algunos números racionales. Se han marcado también los puntos α y π, sobre los que se hablará más abajo.

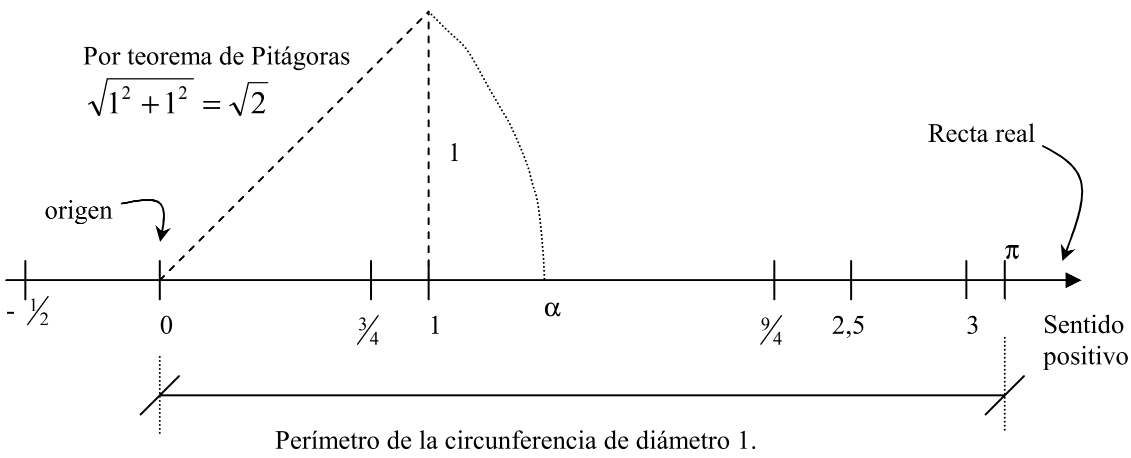


Fig. NR I.a

Se ha pues establecido que a todo número racional le corresponde un único punto sobre la recta real.

b. Surge ahora la pregunta de que si la recíproca es o no es cierta, es decir si es o no cierto que a cada punto de la recta real le corresponde un número racional.
La respuesta a esta pregunta es negativa, según surge de los siguientes ejemplos:

1º. Sea el punto α indicado en la figura NR I.a, el cual, por construcción, está a una distancia del origen igual a la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1, es decir a una distancia del origen tal que su cuadrado sea igual a 2.
Se demostrará a continuación que no existe ningún número racional tal que su cuadrado sea 2, lo que implica que al punto α marcado en la figura NR I.a no le corresponde ningún número racional.
Se efectuará dicha demostración por el absurdo.
Supóngase que exista un número racional (fracción) tal que su cuadrado sea 2.
Si $\frac{a}{b}$ es la simplificación máxima de dicha fracción se tendría que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2 \qquad \textbf{[1]}$$

y entonces:

- Se tendría que $b^2 \neq 1$ ya que de lo contrario sería $a^2 = 2$, y no existe ningún entero cuyo cuadrado sea 2.
- Se tendría que $a^2 = 2\, b^2$, resultando así que tanto a^2 como b^2 serían divisibles por b^2 ya que:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{2b^2}{b^2} = 2 \qquad \text{y} \qquad \frac{b^2}{b^2} = 1$$

de donde surge que:

Tanto a^2 como b^2 tendrían a b^2 como divisor común, siendo $b^2 \neq 1$. **[2]**

Por otra parte se supuso que la fracción $\frac{a}{b}$ no puede ser simplificada, y por lo tanto el único divisor común que admiten a y b es 1, lo que implica que también a^2 y b^2 admitan a 1 como **único** divisor común, lo que está en abierta contradicción con lo indicado en **[2]**.

Se tiene así que al suponer que existe un número racional $\frac{a}{b}$ cuyo cuadrado sea 2 se llega a un contrasentido, lo que determina que:
No existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2.

2º. Por procedimientos análogos al recién indicado puede probarse que no existe ninguna raíz cuadrada racional de un número que no sea el cuadrado de un número racional.
Así, al punto cuya distancia del origen sea igual a la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos midan respectivamente 1 y 2, tampoco le corresponderá ningún número racional.

3º. Tómese una circunferencia de diámetro 1, córtesela en un punto cualquiera y "rectifíquese" el arco resultante hasta obtener un segmento de recta. Colóquese dicho segmento sobre la recta real de la manera indicada en la figura NR I.a.
Puede demostrarse (con mucho trabajo) que el extremo derecho de este segmento caerá sobre un punto π de la recta real al cual no corresponde ningún número racional.

Se ha pues demostrado que sobre la recta real existen puntos a los cuales **no** corresponde ningún número racional.

c. Para futura referencia:

- Se llamarán puntos racionales a los puntos de la recta real a los cuales corresponden números racionales.
- Se llamarán puntos irracionales a los puntos de la recta real a los cuales **no** corresponde ningún número racional.

d. Queda por averiguar si los puntos irracionales son unos pocos puntos "patológicos" de la recta real, o si constituyen un conjunto "muy grande".
Se analizará esto en el próximo párrafo.

NR II

<u>Medida del conjunto de los números racionales de un segmento</u>

a. Considérese el cuadro indicado en la figura NR II.a, cuyo génesis es obvio.

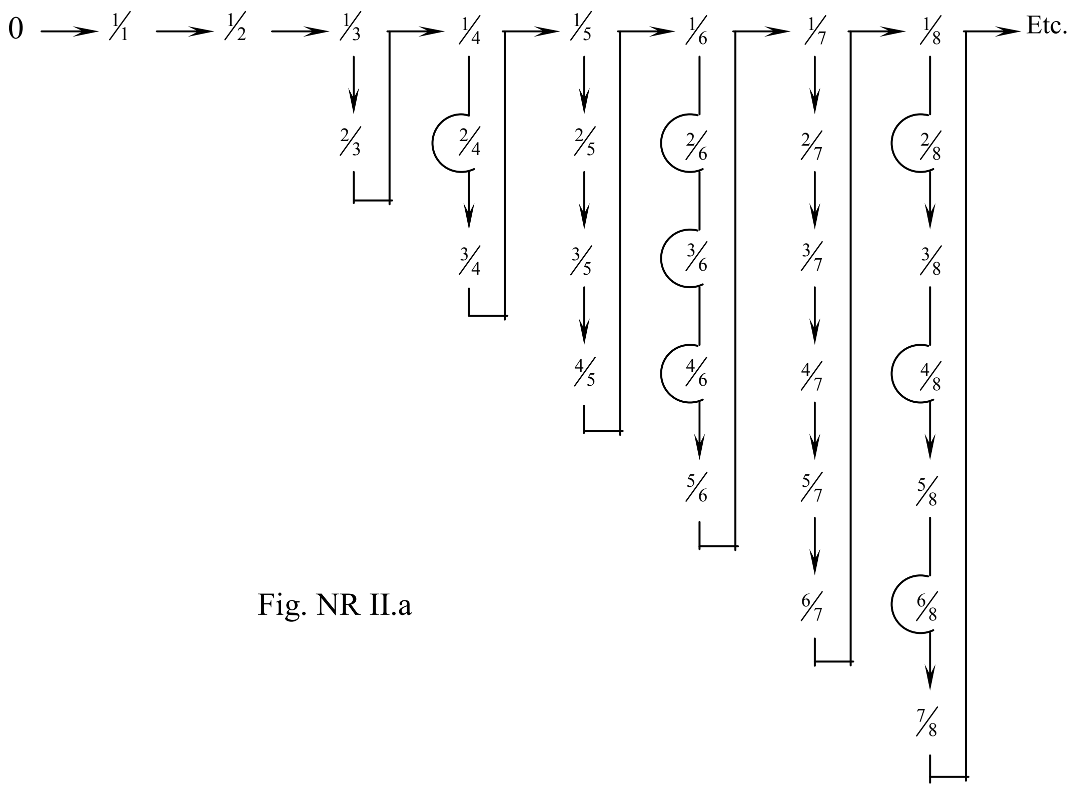


Fig. NR II.a

Trácese sobre este cuadro un camino tal como el indicado, que, partiendo de 0 saltee todos los racionales iguales a algún otro que ya apareció antes (por ejemplo, se saltea a $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ y $\frac{4}{8}$ por ser iguales a $\frac{1}{2}$, número que ya apareció previamente).

En este cuadro aparecen <u>todos</u> los racionales del intervalo [0 , 1] (extremos inclusive) ya que dado un racional cualquiera de dicho intervalo, tarde o temprano el camino pasará por él.

Evidentemente, este cuadro establece un orden entre los racionales del intervalo [0 , 1].

b. Sea S el segmento de la recta real determinado por sus puntos 0 y 1, inclusive. Evidentemente, la longitud de este segmento S será igual a 1.

Supóngase que sobre dicho segmento se marquen los puntos correspondientes a los puntos indicados en el cuadro NR II.a junto con su orden de aparición en el camino considerado (ver figura NR II.b).

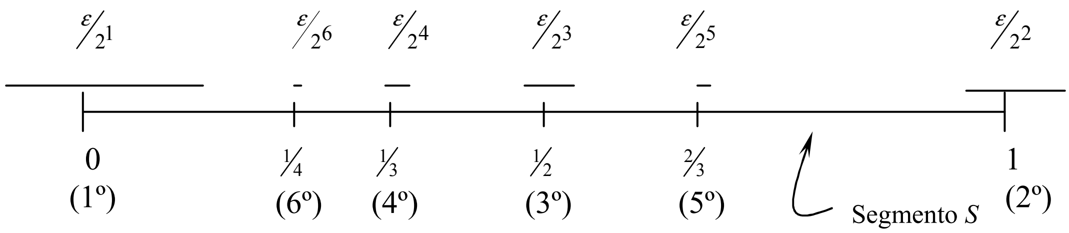


Fig. NR II.b

Sea un número arbitrario $\varepsilon > 0$, que puede suponerse bastante chico.
Sobre los puntos 1º, 2º, ..., nº, ... marcados sobre el segmento S dispónganse "coberturas" (segmentos) de longitudes $\frac{\varepsilon}{2^1}, \frac{\varepsilon}{2^2}, ..., \frac{\varepsilon}{2^n}, ...$ respectivamente.
La suma de las longitudes de las n primeras coberturas es:

$$l(n) = \frac{\varepsilon}{2^1} + \frac{\varepsilon}{2^2} + ... + \frac{\varepsilon}{2^n} \qquad \textbf{[1]}$$

y por lo tanto:

$$\frac{1}{2}\ l(n) = \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3} + ... + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \qquad \textbf{[2]}$$

Restando **[1]** de **[2]** se obtiene:

$$\frac{1}{2}\ l(n) - l(n) = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} - \frac{\varepsilon}{2^1} = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{2^n} - 1\right)$$

Es decir:

$$l(n) = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\left(\frac{1}{2^n} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Resumiendo:

Longitud de las n primeras coberturas = $l(n) = \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < \varepsilon \qquad \forall n$

Por lo tanto, se tiene que:

Longitud de **todas** las posibles coberturas < ε

Como el ε considerado pudo haberse tomado tan chico como se hubiera deseado se tiene que:

Pueden disponerse coberturas sobre **todos** los números racionales de S tales que la suma de las longitudes de dichas coberturas difiera de cero tan poco como se quiera.

(Se deja constancia de que en esta demostración se han tomado algunas libertades con el rigor).

c. Se ha pues demostrado que todos los puntos racionales del segmento S podrían agruparse dentro de un "segmentito" lineal cuya longitud difiera de cero tan poco como se quiera.
Es decir, que en el segmento S los puntos racionales estén en una minoría absoluta frente a los irracionales.

d. Evidentemente, lo propio ocurre para toda la recta real.

NR III

Números irracionales. Introducción

a. ¿Vale la pena o no asociar números a los puntos irracionales de la recta real?.
De no hacerlo, no existiría ningún número que mida la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1. Tampoco existiría un número que mida la longitud de una circunferencia cuyo diámetro es 1. Etc, etc.
Se asociará pues un número a cada punto irracional, y a dichos números se los llamará números irracionales.
Visto y considerando lo indicado en el **c** y **d** de NR II a la casi totalidad de las medidas exactas efectuadas en el mundo físico corresponden en realidad números irracionales.

b. Definir la magnitud de un número irracional es por lo general "molesto" y "pesado".
Por ejemplo, al irracional h que mide la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1m se lo podría definir como:

> "h es un número que es mayor que todos los racionales positivos cuyo cuadrado es menor que 2, y que es menor que todos los racionales positivos cuyo cuadrado es mayor que 2."

Evidentemente, definir estos números y, sobre todo, operar con ellos es bastante complicado.
En la práctica, se sale de este atolladero de la manera siguiente:
Dado un irracional cualquiera y un cierto grado de tolerancia arbitrario, es siempre posible conseguir un número racional (en realidad, infinitos racionales) que aproximen al irracional del caso dentro de dicha tolerancia, y a continuación en vez del irracional se utilizará su aproximación racional. Por ejemplo, el racional 1,414213 es una aproximación del irracional correspondiente al punto α de la figura NR I.a, con una precisión mejor que 10^{-6}.
Evidentemente, esta sustitución de un irracional por una de sus aproximaciones racionales introduce un cierto margen de error, al cual hay que mantener bajo control so pena de que al cabo de varias manipulaciones con aproximaciones de irracionales se obtenga un resultado que presente una desviación inadmisible con respecto a lo que sería el resultado exacto.

c. Otra dificultad que se presenta es el de la notación de los números irracionales.
Salvo simbolizarlos con una marca convencional (caso de π) o de indicarlos como una operación a realizar (caso de $\sqrt[3]{5}$), no existe manera de representarlos con la notación aritmética corriente.
En caso de tratar de poner un irracional bajo una forma decimal, se iría obteniendo una sucesión infinita de cifras decimales no periódicas, y como evidentemente es imposible tanto escribir como almacenar en una memoria humana infinitos decimales, por este método nunca se conocerá con precisión absoluta la magnitud de un irracional.

NR IV

Números reales. Introducción

El agregado de todos los posibles números racionales y de todos los posibles números irracionales constituye el conjunto de los números reales.
Por lo tanto, un número real puede ser, según el caso, racional o irracional.

Notar que con la introducción de los irracionales, a cada punto de la recta considerada en NR I se le ha asociado un número real. De ahí su rótulo de "recta real".
Para referencia futura, tener bien en cuenta que tanto los números racionales como los irracionales son casos particulares de los números reales.

NR V

Cortaduras del conjunto de los números racionales

a. Se inicia acá el proceso que conducirá a dar una definición rigurosa de los números reales (racionales e irracionales).

b. Considérese la totalidad de los números racionales.
Con ellos fórmese dos conjuntos M y M' tales que:
1º. Todo racional figure en uno de esos dos conjuntos (no hay ningún racional que no figure en ninguno de ellos, y no hay ningún racional que figure en ambos).
2º. Ninguno de estos dos conjuntos es vacío, es decir que no ocurre que todos los racionales estén en uno solo de ellos.
3º. Todo racional perteneciente a M es menor que todo racional perteneciente a M'.

Estos dos conjuntos M y M' constituyen lo que se llama una cortadura del conjunto de los racionales.
Se la simboliza como:

$$M \mid M' \qquad \textbf{[1]}$$

c. Ejemplos de cortaduras son:

$$\left.\begin{aligned} A \mid A', \text{ donde: } & A = \{\text{Todos los racionales menores que } \tfrac{2}{3}\} \\ & A' = \{\text{Todos los racionales mayores o iguales que } \tfrac{2}{3}\} \end{aligned}\right\} \textbf{[2]}$$

$$\left.\begin{aligned} B \mid B', \text{ donde: } & B = \{\text{Todos los racionales no positivos}\} \\ & B' = \{\text{Todos los racionales positivos}\} \end{aligned}\right\} \textbf{[3]}$$

$$\left.\begin{aligned} C \mid C', \text{ donde: } & C = \{\text{Todos los racionales cuyo cuadrado es menor que } 6\} \\ & C' = \{\text{Todos los racionales cuyo cuadrado es mayor que } 6\} \end{aligned}\right\} \textbf{[4]}$$

Como contraejemplo, los conjuntos:

$D = \{$Todos los racionales negativos$\}$
$D' = \{$Todos los racionales positivos$\}$

no determinan una cortadura ya que el cero no forma parte de ninguno de ellos, lo cual es contra hipótesis ya que al establecer una cortadura deben considerarse a todos los números racionales.

d. Se dirá que una cortadura $M \mid M'$ es racional cuando:

1º. M tenga algún racional que sea mayor que todos restantes componentes de M.

o sinó, cuando:
2º. M' tenga algún racional que sea menor que todos los restantes componentes de M'.

Por ejemplo, son cortaduras racionales la $A|A'$ indicada en **[2]** ($\frac{2}{3}$ es el menor racional de A') y la $B|B'$ indicada en **[3]** (0 es el mayor racional de B).

e. Se dirá que una cortadura $M|M'$ es irracional cuando:

1º. M no tenga ningún racional que sea mayor que todos los restantes componentes de M.

y además,

2º. M' no tenga ningún racional que sea menor que todos los restantes componentes de M'.

Por ejemplo, una cortadura irracional es la $C|C'$ indicada en **[4]** ya que:

1º. Dado un número cualquiera γ perteneciente a C (por ejemplo $\gamma = 2{,}449$), puede siempre hallarse otro número γ^* también perteneciente a C y mayor que γ extrayendo una aproximación por defecto de $\sqrt{6}$ con los suficientes decimales como para que sea $(\gamma^*)^2 > \gamma^2$ (por ejemplo $\gamma^* = 2{,}44948$).

2º. Dado un número cualquiera γ' perteneciente a C'(por ejemplo $\gamma' = 2{,}45$), puede siempre hallarse otro número γ'^* también perteneciente a C' y menor que γ' extrayendo una aproximación por exceso de $\sqrt{6}$ con los suficientes decimales como para que sea $(\gamma'^*)^2 < (\gamma')^2$ (por ejemplo $\gamma'^* = 2{,}44949$).

NR VI

Definición rigurosa del número real

a. Se define que toda cortadura $M|M'$ de los números racionales constituye un número:

$$m = M|M'$$

Si la cortadora es racional, es decir si en la misma existe un número frontera (un número racional que sea el mayor de M o el menor de M'), se establece que:

$$M|M' = \text{Número frontera (racional)}$$

En cambio, si la cortadura es irracional, se intercalará entre los racionales un número η de un nuevo tipo (irracional) definido por la condición de ser mayor que todos los racionales de M y menor que todos los racionales de M'.
En este caso se establece que:

$$M|M' = \eta \text{ (número irracional)}$$

(Imposible de ser expresado con la notación aritmética corriente. Ver **c** de NR III)

Es decir que los irracionales se definen como intercalaciones entre los racionales.

b. Tal como ya indicado en NR IV, el agregado de todos los posibles números racionales y de todos los posibles números irracionales constituye el conjunto de los números reales.

c. Se hace notar lo siguiente:
Todo número racional está definido por dos cortaduras. Así:

$\frac{1}{2} = E \mid E'$, siendo: $E = \{$ todos los racionales menores que $\frac{1}{2}\}$

$E' = \{$ todos los racionales mayores o iguales que $\frac{1}{2}\}$

y también,

$\frac{1}{2} = F \mid F'$, siendo: $F = \{$ todos los racionales menores o iguales que $\frac{1}{2}\}$

$E' = \{$ todos los racionales mayores que $\frac{1}{2}\}$

Evidentemente $E \mid E'$ y $F \mid F'$ tienen un mismo punto frontera: $\frac{1}{2}$.
En cambio, todo número irracional está definido por una única cortadura.

d. Evidentemente, esta definición de los números reales está todavía "renga", faltando definir todavía como se opera con ellos.
Como los números racionales son un caso particular de los reales, esta operatoria a ser definida debe ser tal que cuando se la aplique a los racionales se obtenga la ya conocida operatoria de los números racionales.

NR VII

Teorema. Aproximaciones racionales de un número irracional

a. Se probará que dada una cortadura $M \mid M'$, se puede siempre elegir un racional de M' y un racional de M tales que su diferencia sea menor que un número positivo arbitrario.

b. Elíjase un número positivo ε arbitrario, racional o irracional. Elíjase un racional α tal que:

$$0 < \alpha < \varepsilon \qquad \textbf{[1]}$$

Sea p un racional cualquiera perteneciente a M. Se tiene que los términos de la sucesión:

$$p\,,\, p + \alpha,\, p + 2\alpha,\, \ldots\,,\, p + n\alpha,\, p + (n + 1)\alpha,\, \ldots \qquad \textbf{[2]}$$

1º. Son todos racionales ya que p y α lo son, y la suma de dos números racionales es racional.
2º. Crecen indefinidamente ya que, por ejemplo, para que uno de estos términos sea mayor que 10.000 bastaría hacer:
$p + n\,\alpha > 10.000$, es decir, $n > (10.000 - p) / \alpha$
Se tiene entonces que los términos de la sucesión **[2]** "arrancan" de un punto p perteneciente a M y en un cierto momento pasan a pertenecer a M', teniéndose entonces que entre el

primer término perteneciente a M' y el último término perteneciente a M, existe una diferencia igual a α.
Como (ver **[1]**) $\alpha < \varepsilon$, queda probado lo indicado en **a**.

c. Lo recién demostrado implica que no existe ningún intervalo no nulo entre los racionales de M y los de M'.
Si existiera tal intervalo tendría una longitud no nula h, y entonces entre todo racional de M' y todo racional de M existiría una diferencia de por lo menos h, lo cual es imposible ya que, según demostrado más arriba eligiendo un $\varepsilon < h$ (lo cual es enteramente legítimo ya que ε es arbitrario), puede elegirse un racional de M' y un racional de M cuya diferencia sea menor que ε, y por lo tanto menor que h.
Eso sí, <u>puede ser</u> que entre los racionales de M y los racionales de M' "haya lugar" para un único número irracional.

c. Sea un número irracional:

$$\beta = M \mid M'$$

Sea un ε cualquiera. Tómese un racional α tal que sea $0 < \alpha < \varepsilon$. Por lo más arriba demostrado, existe un racional de M, llámeselo v; y un racional de M', llámeselo v' tales que $v' - v = \alpha < \varepsilon$.
Evidentemente, todos los infinitos racionales de M mayores que v, y todos los infinitos racionales de M' menores que v' difieren del irracional β dentro de una tolerancia igual a ε.

NR VIII

<u>Igualdad de números reales</u>

<u>Se define que dos números reales son iguales cuando ambos **pueden** ser determinados por una misma cortadura</u>.
Notar que en el caso de un número racional hay dos cortaduras que lo definen (ver **c** de NR VI). Esto no invalida la definición recién dada. Si v y w son dos números racionales y $v = w$, una de las cortaduras que define a v es idéntica a una de las cortaduras que define a w.

NR IX

<u>Negativo o simétrico de un número real</u>

a. Sea un número real <u>positivo</u> (racional o irracional):

$$a = A \mid A'$$

Sean los conjuntos:

$A\_$ = {Todos los racionales de A' con su signo cambiado}
$A'\_$ = {Todos los racionales que no figuran en $A\_$}

Se define:

$$-a = A\_ \mid A'\_$$

b. Sea un número real <u>negativo</u> (racional o irracional):

$$b = B \mid B'$$

Sean los conjuntos:

$B\_ =$ {Todos los racionales que no figuran en $B'\_$}
$B'\_ =$ {Todos los racionales de B con su signo cambiado}

Se define:

$$-b = B\_ \mid B'\_$$

NR X

<u>Comparación de números reales</u>

a. Sean dos números reales v y w definidos por las cortaduras de racionales:

$$v = V \mid V' \qquad , \qquad w = W \mid W'$$

<u>Se dirá que $v < w$ cuando</u> **<u>más de un</u>** <u>racional pertenecientes a V' pertenezcan también a W</u> (ver fig. NR X.a).

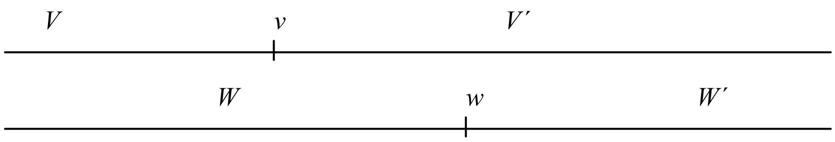


Fig. NR X.a

Notar que si en esta definición se hubiera dicho "un racional" en vez de "más de un racional", se tendría que por ejemplo sería $\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ ya que según visto en **c** de NR VI, el racional $\frac{1}{2}$ perteneciente a E' pertenece también a F.

b. Se define que un número racional es positivo si es mayor que cero, y que es negativo si es menor que cero.

NR XI

<u>Operación con números reales</u>

NR XI.1 <u>Suma y resta de números reales</u>

a. Sean dos números reales (racionales o irracionales) determinados por las cortaduras de racionales:

$$a = A \mid A' \qquad \text{y} \qquad b = B \mid B'$$

Sean los conjuntos:

C = {Cualquier racional de A + cualquier racional de B}
C' = {Todos los racionales que no figuran en C}

Puede demostrarse rigurosamente que C y C' constituyen una cortadura de los números racionales.
Se define:

$$a + b = C \mid C'$$

b. Se define:

$$a - b = a + (- b)$$

donde b fue definido en NR IX.

NR XI.2 Producto de números reales

a. Sean dos números reales positivos (racionales o irracionales) determinados por las cortaduras de racionales:

$$a = A \mid A' \qquad \text{y} \qquad b = B \mid B'$$

Sean los conjuntos:

C = {Todos los racionales que no figuran en C'}
C' = {Producto de cualquier racional de A' por cualquier racional de B'}

Puede demostrarse rigurosamente que C y C' constituyen una cortadura de los números reales.
Se define:

$$a \, . \, b = C \mid C'$$

b. Teniendo en cuenta la definición dada en NR IX del negativo de un número real y lo recién indicado en **a** se define que:

Para a positivo y b negativo:

$$a \, . \, b = - [a \, . \, (- b)] \qquad (- b \text{ es positivo})$$

Para a negativo y b positivo:

$$a \, . \, b = - [(- a) \, . \, b] \qquad (- a \text{ es positivo})$$

Para a y b negativos:

$$a \, . \, b = [(- a) \, . \, (- b)] \qquad (- a \text{ y } - b \text{ son ambos positivos})$$

NR XI.3 <u>Recíproco de un número real</u>

a. Sea un número real <u>positivo</u> (racional o irracional) determinado por la cortadura:

$$a = A \mid A'$$

Sean los conjuntos:

C = {Todos los racionales que no figuren en C'}
C' = {Recíprocos de todos los racionales <u>positivos</u> de A}

Puede demostrarse rigurosamente que C y C' constituyen una cortadura de los números reales.
Se define:

$$\frac{1}{a} = C \mid C' \qquad\qquad (a > 0)$$

b. Se define para a negativo:

$$\frac{1}{a} = -\frac{1}{\underbrace{(-a)}_{\text{positivo}}} \qquad\qquad (a < 0)$$

Si $a = 0$ no se define $\frac{1}{a}$.

NR XI.4 <u>Cociente de números reales</u>

Sean los números reales determinados por las cortaduras de racionales:

$$a = A \mid A' \qquad \text{y} \qquad b = B \mid B' \neq 0$$

Se define:

$$\frac{a}{b} = a.\left(\frac{1}{b}\right) \qquad\qquad (b \neq 0)$$

NR XI.5 <u>Nota</u>

Las demostraciones rigurosas aludidas en NR XI.1 **a**, NR XI.2 **a** y NR XI.3 **a** son por lo general largas (y aburridas), razón por la cual acá se las ha omitido. A título de ejemplo, en los apéndices del presente capítulo se han desarrollado las demostraciones correspondientes a NR XI.1 **a** y NR XI.2 **a**.

NR XI.6 <u>Observaciones</u>

a. Para agotar el tema de la definición de los números reales haría falta todavía definir muchas otras cosas tales como las funciones exponenciales, los logaritmos, etc., cuando las magnitudes involucradas son números reales.
No se intentará dar estas definiciones ulteriores ya que el proceso correspondiente sería muy largo y pesado.

Sirva como excusa el hecho de que dichas definiciones ulteriores siguen líneas generales análogas a las indicadas en los apéndices del presente capítulo.

b. Puede verificarse fácilmente que si la operatoria definida para los números reales se restringe al caso particular de los racionales, se obtendrá la ya conocida operatoria de los números racionales.
Sea por ejemplo el caso de la suma.
Sean los racionales $v = \frac{1}{2}$ y $w = \frac{3}{4}$.
Considerando a dichos racionales como reales:

$$\frac{1}{2} = A \,|\, A' \qquad \text{y} \qquad \frac{3}{4} = B \,|\, B'$$

siendo:

A = {Todos los racionales menores que $\frac{1}{2}$}

A'= {Todos los racionales mayores o iguales que $\frac{1}{2}$}

B = {Todos los racionales menores o iguales que $\frac{3}{4}$}

B'= {Todos los racionales mayores que $\frac{3}{4}$}

Entonces, considerando los conjuntos:

C = {Cualquier racional menor que $\frac{1}{2}$ + cualquier racional menor o igual que $\frac{3}{4}$} =

= {Todos los racionales menores que $\frac{5}{4}$}

C'= {Todos los racionales que no figuran en C} =

= {Todos los racionales mayores o iguales que $\frac{5}{4}$}

Se tiene que según definido en NR XI.1 **a** es:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = C \,|\, C' \qquad \textbf{[1]}$$

Pero por otra parte $C \,|\, C'$ es una cortadura racional ya que $\frac{5}{4}$ es el menor de todos los racionales de C', y entonces (ver **a** de NR VI) es:

$$\frac{5}{4} = C \,|\, C' \qquad \textbf{[2]}$$

y por **[1]** y **[2]** resulta que:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$$

y este es el mismo resultado que se obtendría sumando a $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ mediante la operatoria de los números racionales.

c. También puede verificarse fácilmente que las propiedades de la suma, producto, etc. deducidas para los números racionales son extensibles a los números reales.

NR XII

Cortaduras generalizadas

a. Considérese a la totalidad de los números reales (racionales e irracionales), y con ellos fórmense dos conjuntos K y K' tales que:

1º. Todo número real figure en uno sólo de esos conjuntos.
2º. Ninguno de esos dos conjuntos es vacío.
3º. Todo número real perteneciente a K sea menor que todo número real perteneciente a K'.

Estos dos conjuntos constituyen una cortadura de los números reales o cortadura generalizada, a la que se indicará como:

$$K\,|\,K'$$

b. Por una demostración análoga a la indicada en **b** y **c** de NR VII puede demostrarse que la distancia mínima entre elementos de K y elementos de K' es menor que todo $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por lo tanto dicha distancia es nula y por lo tanto entre los elementos de K y K' "habría lugar" para un único número β como máximo. Pero como por otra parte dicho β debe pertenecer sea a K o a K', resulta entonces que:
1º. Entre los elementos de K hay uno que es mayor que todos los demás
o sino
2º. Entre los elementos de K' hay uno que es menor que todos los demás.
Es decir que definir una cortadura generalizada implica elegir un número real β. Todos los reales menores que β formarán parte de K y todos los reales mayores que β formarán parte de K'. En cuanto al número β, puede adicionárselo tanto a K como a K'.
Se define:

$$\beta = K\,|\,K'$$

c. Se hace notar que si bien a toda cortadura generalizada corresponde a un número real único, en cambio a todo número real corresponden dos cortaduras generalizadas.
Así por ejemplo:

$$3 = \{\text{Reales} < 3\}\,|\,\{\text{Reales} \geq 3\} \qquad \text{y} \qquad 3 = \{\text{Reales} \leq 3\}\,|\,\{\text{Reales} > 3\}$$

d. Estas cortaduras **generalizadas** constituyen una herramienta sumamente útil en el desarrollo del Análisis Matemático.

En lo sucesivo, la palabra “cortadura” (a secas) se referirá siempre a una cortadura generalizada, salvo indicación expresa de que se trata de una cortadura de los números racionales.

NR XIII

Comentarios

a. Definir rigurosamente a los números irracionales, y por lo tanto a los reales, resultó ser “un hueso muy duro de pelar”.
Los S^{res} Newton, Leibnitz, Lagrange, Cauchy, Gauss, etc. tuvieron que arreglárselas con conceptos más o menos “borrosos” de los números irracionales.
Recién en 1872 el matemático alemán J. W. Dedekind imaginó la definición por cortaduras de los racionales que se ha venido desarrollando en el presente capítulo.

b. Otra definición de los números reales, generalmente conocida como definición “por encajes” fue desarrollada por el matemático ruso - alemán G. Cantor, en forma casi simultánea con la definición de Dedekind. Esta definición requiere una cierta familiaridad con las sucesiones de infinitos términos.
Además, de la definición de Dedekind pueden extraerse fácilmente consecuencias que son básicas en el desarrollo del Análisis Matemático.

c. Por último, en el campo del Álgebra Abstracta se ha dado una definición sumamente “eficiente” de los números reales, conocida bajo el título de “definición axiomática”.
A esta altura de la vida, la definición por cortaduras de Dedekind lleva una considerable ventaja sobre la definición axiomática por tener un trasfondo intuitivo que hace fácil absorber a “nivel visceral” el concepto de número real. En cambio, la definición axiomática es puramente abstracta y su metabolización “a nivel visceral” es mucho más difícil.

Apéndices del capítulo sobre números reales

A. NR I

Suma de dos números reales

a. Sean dos números reales (racionales o irracionales):

$$a = A \mid A' \qquad \text{y} \qquad b = B \mid B'$$

Sean los conjuntos:

C = {Cualquier racional de A + cualquier racional de B}
C'= {Todos los racionales que no figuren en C}

b. Se probará que los conjuntos C y C' determinan una cortadura.
En efecto:
1º. Todo racional figura en C ó en C'. En efecto, si un racional no figura en C entonces a la fuerza figura en C', y viceversa.
2º. Evidentemente C y C' no son conjuntos vacíos
3º. Supóngase que un racional γ' perteneciente a C' fuera menor o igual que un racional γ perteneciente a C.
Sea:

$$\gamma - \gamma' = \varepsilon, \text{ es decir que } \gamma' = \gamma - \varepsilon \qquad \textbf{[1]}$$

(notar que ε es racional y no negativo)
Supóngase que el racional γ perteneciente a C sea la suma de un racional α perteneciente a A y de un racional β perteneciente a B. Se tendría entonces por **[1]** que:

$$\gamma' = (\alpha + \beta) - \varepsilon = \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\beta - \frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad \textbf{[2]}$$

Ahora bien, según es evidente, si α pertenece a A entonces $\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ también pertenece a A, y si β pertenece a B entonces $\left(\beta - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ también pertenece a B, y entonces por **[2]** y por la definición del conjunto C resultaría que γ' pertenecería a C, lo cual es imposible ya que se supuso de entrada que γ' pertenece a C'.
Como se llegó a esta contradicción por suponer que un racional perteneciente a C' puede ser menor o igual que un racional perteneciente a C, se tiene que:
Todo racional perteneciente a C es menor que todo racional perteneciente a C'.
Se ha pues demostrado que los conjuntos C y C' reúnen las tres condiciones requeridas para constituir una cortadura de los números reales (ver **b** de NR V).

c. Se define:

$$a + b = C \mid C'$$

A.NR II

Producto de dos números reales

a. Sean dos números reales positivos (racionales o irracionales):

$$a = A \mid A' \qquad \text{y} \qquad b = B \mid B'$$

Sean los conjuntos:

C = {Todos los racionales que no figuren en C'}
C'= {Producto de cualquier racional de A' por cualquier racional de B'}

b. Se probará que los conjuntos C y C' determinan una cortadura.
En efecto:
1º. Todo racional figura en C ó en C'. En efecto, si un racional no figura en C' entonces a la fuerza figura en C, y viceversa.
2º. Evidentemente C y C' no son conjuntos vacíos
3º. Supóngase que un racional γ perteneciente a C fuera mayor o igual que un racional γ' perteneciente a C'.
Sea:

$$\gamma - \gamma' = \varepsilon, \text{ es decir que } \gamma = \gamma' + \varepsilon \qquad \textbf{[1]}$$

(notar que ε es racional y no negativo)
Sea γ' el producto de un racional α' perteneciente a A' y de un racional β' perteneciente a B'. Se tendría entonces por **[1]** que:

$$\alpha'\beta' + \varepsilon = \gamma$$

y por lo tanto:

$$\gamma = \alpha'\beta' + \frac{\alpha'\varepsilon}{\alpha'} = \underbrace{\alpha'}_{\text{Racional perteneciente a } A'}\underbrace{\left(\beta' + \frac{\varepsilon}{\alpha'}\right)}_{\text{Racional perteneciente a } B'}$$

y resulta así que γ sería el producto de un racional perteneciente a A' y de un racional perteneciente a B', y por lo tanto γ pertenecería a C', lo cual es imposible ya que de entrada se supuso que γ pertenece a C.
Como se llegó a esta contradicción por suponer que un racional perteneciente a C puede ser mayor o igual que un racional perteneciente a C' se tiene que:
Todo racional perteneciente a C es menor que todo racional perteneciente a C'.

Se ha pues demostrado que los conjuntos C y C' reúnen las tres condiciones requeridas para constituir una cortadura de los números reales (ver **b** de NR V).

c. Se define:

$$a \,.\, b = C \mid C'$$

Conjuntos de números reales. Intervalos. Puntos de acumulación. Teorema de Bolzano – Weierstrass. Extremos de conjuntos de números reales

CN I

Conjuntos de números reales. Cotas de conjuntos de números reales

a. En todo este capítulo se trabajará exclusivamente con números reales, y al hablar de un "conjunto numérico" significará un conjunto de números reales.

b. Sea un conjunto numérico A. Se dirá que un número α finito es una cota inferior de A cuando ningún número perteneciente a A sea **menor** que α.
Podría ser igual a un elemento de A.
Ver ejemplo en la figura CN I.a.

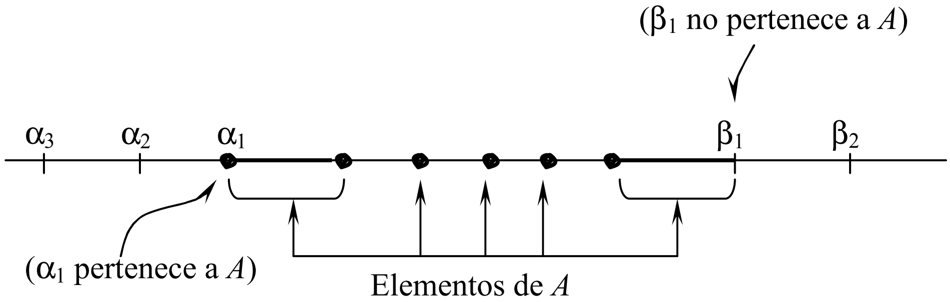


Fig. CN I.a

En el caso de esta figura, α_1, α_2 y α_3 son cotas inferiores de A. Notar que en este caso la cota inferior α_1 pertenece a A.
Evidentemente, si un conjunto tiene una cota inferior, entonces tiene infinitas cotas inferiores.
Puede ser que un conjunto numérico no tenga ninguna cota inferior, por ejemplo el conjunto de todos los números enteros (se anticipa que $-\infty$ no es un número. Ver capítulo sobre infinitos).
Según que un conjunto numérico tenga o no tenga cotas inferiores, será llamado acotado inferiormente o no acotado inferiormente.

c. Igualmente, se dirá que un número β, finito, es una cota superior de A cuando ningún número de A sea mayor que β.
En el caso de la figura CN I.a, β_1 y β_2 son cotas superiores de A.
Evidentemente, si un conjunto tiene una cota superior, entonces tiene infinitas cotas superiores.
Puede ser que un conjunto numérico no tenga ninguna cota superior.
Según que un conjunto numérico tenga o no tenga cotas superiores, será llamado acotado superiormente o no acotado superiormente.

d. Se dirá que un conjunto es acotado (a secas) cuando sea a la vez acotado superiormente y acotado inferiormente.

e. A menudo se dice "acotado por la izquierda" y "acotado por la derecha" en vez de "acotado inferiormente" y "acotado superiormente".

CN II

Conjuntos numéricos finitos e infinitos

Un conjunto numérico será llamado finito cuando la cantidad de números que lo forman es finita, y será llamado infinito cuando la cantidad de números que lo forman es infinita.
Notar que un conjunto finito es obligatoriamente acotado, mientras que un conjunto infinito tanto puede ser acotado (por ejemplo el conjunto $\{x \; / \; x = \frac{1}{n}, \; n \text{ natural}\}$), como no acotado (por ejemplo el conjunto de los números enteros).

CN III

Intervalos

a. Siendo $a < b$, se llama <u>intervalo cerrado</u> al conjunto formado por los números a, b y todos los números intermedios entre a y b.
A este intervalo se le designa como $[a \, , b]$. Ver figura CN III.a.

$[a \, , b] = \{x \; / \; a \leq x \leq b\}$

Fig. CN III.a

b. Siendo $a < b$, se llama <u>intervalo cerrado por la izquierda y abierto por la derecha</u> al conjunto formado por el número a y por todos los números intermedios entre a y b.
A este intervalo se lo designa como $[a \, , b[$. Ver figura NC III.b.

$[a \, , b[\; = \{x \; / \; a \leq x < b\}$

Fig. CN III.b

c. Siendo $a < b$, se llama <u>intervalo abierto por la izquierda y cerrado por la derecha</u> al conjunto formado por el número b y por todos los números intermedios entre a y b.
A este intervalo se lo designa como $]a \, , b]$. Ver figura CN III.c.

$]a \, , b] = \{x \; / \; a < x \leq b\}$

Fig. CN III.c

d. Siendo $a < b$, se llama <u>intervalo abierto</u> al conjunto formado por todos los números intermedios entre a y b.
A este intervalo se lo designa como $]a \, , b[$. Ver figura CN III.d.

$]a \, , b[\; = \{x \; / \; a < x < b\}$

Fig. CN III.d

e. Dado un número a, se llama <u>intervalo cerrado por la izquierda y no acotado por la derecha</u> al conjunto formado por el número a y por todos los números mayores que a.
A este intervalo se lo designa como $[a \, , \infty[$. Ver figura CN III.e.

$[a \, , \infty[\; = \{x \; / \; x \geq a\}$

Fig. CN III.e

f. Dado un número a, se llama <u>intervalo abierto por la izquierda y no acotado por la derecha</u> al conjunto formado por todos los números mayores que a.
A este intervalo se lo designa como $]a , \infty[$. Ver figura CN III.f.

$]a , \infty[= \{x / x > a\}$

Fig. CN III.f

g. Dado un número a, se llama <u>intervalo no acotado por la izquierda y cerrado por la derecha</u> al conjunto formado por el número a y por todos los números menores que a.
A este intervalo se lo designa como $]- \infty , a]$. Ver figura CN III.g.

$]- \infty , a] = \{x / x \leq a\}$

Fig. CN III.g

h. Dado un número a, se llama <u>intervalo no acotado por la izquierda y abierto por la derecha</u> al conjunto formado por todos los números menores que a.
A este intervalo se lo designa como $]- \infty , a[$. Ver figura CN III.h.

$]- \infty , a[= \{x / x < a\}$

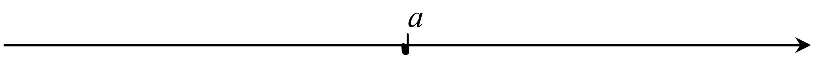
Fig. CN III.h

i. Se llama <u>intervalo no acotado, "a secas"</u> al conjunto formado por todos los numeros reales.
A este intervalo se lo designa como $]- \infty , \infty[$. Ver figura CN III.i.

$]- \infty , \infty[= \{x / x \text{ real}\}$

Fig. CN III.i

j. Se llama <u>intervalo degenerado</u> a todo conjunto formado por un único número real.
A este intervalo se lo designa como $[a]$. Ver figura CN III.j.



$[a] = \{x / x = a\}$

Fig. CN III.j

k. Se dice que <u>γ es un punto interior de un cierto intervalo cuando existen puntos del intervalo menores que γ y puntos del intervalo mayores que γ</u>.
Ver figura CN III.k.

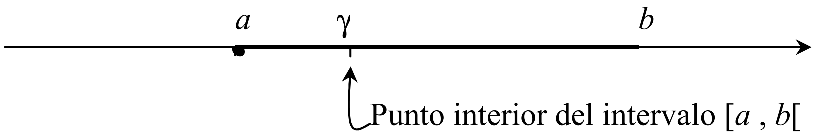


Fig. CN III.k

Evidentemente, un intervalo degenerado no puede tener puntos interiores.

l. Se define: Longitud del intervalo $[a , b]$ =
= Longitud del intervalo $[a , b[$ =
= Longitud del intervalo $]a , b]$ =

= Longitud del intervalo $]a\, ,\, b[\, = b - a$

CN IV

Puntos de acumulación

a. Existen varias maneras de definir lo que son los puntos de acumulación (PA en lo sucesivo) de un conjunto numérico.
En el presente texto se empleará la definición que parece ser la más fácil e intuitiva (R. Courant, "Differential and Integral Calculus, tomo I, pág. 58):
Dado un conjunto numérico infinito, se tiene que un número γ es un PA del mismo cuando todo intervalo (no degenerado) que tenga a γ como punto **interior** contiene a infinitos puntos del conjunto.
Se hace notar que, según los casos:
1º. Un conjunto numérico puede no tener ningún PA, o puede tener una cantidad finita, o puede tener una cantidad infinita.
2º. Un PA de un conjunto numérico puede o no pertenecer a dicho conjunto numérico.

b. Ejemplos.

1º) $A_1 = \{x \,/\, x = \dfrac{1}{n},\ n \text{ natural}\}$ (Ver figura CN IV.a)

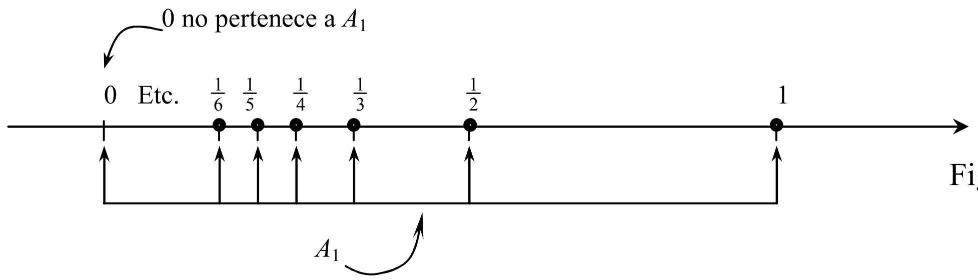


Fig. CN IV.a

0 es el único PA de A_1. Notar que 0 no pertenece a A_1.

2º) $A_2 = \{x \,/\, x = \dfrac{1}{2^n},\ n \text{ natural}\} \cup \{x = 1 - \dfrac{1}{2^n},\ n \text{ natural}\}$ (Ver figura CN IV.b)

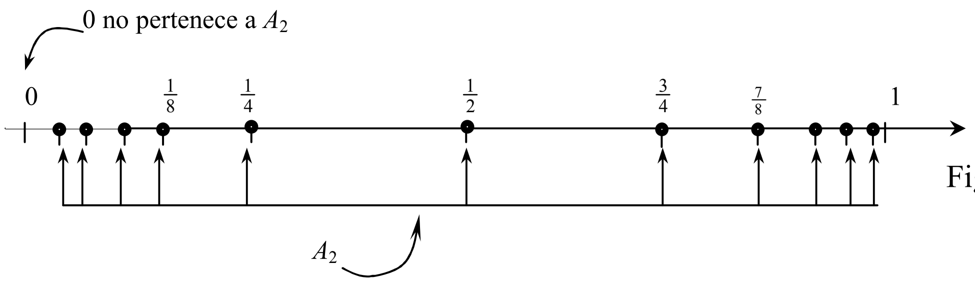


Fig. CN IV.b

0 y 1 son los PA de A_2. Ni 0 ni 1 pertenecen a A_2.

3º) $A_3 = \{x \,/\, 1 < x \leq 3,\ x \text{ real}\}$ (Ver figura NC IV.c)

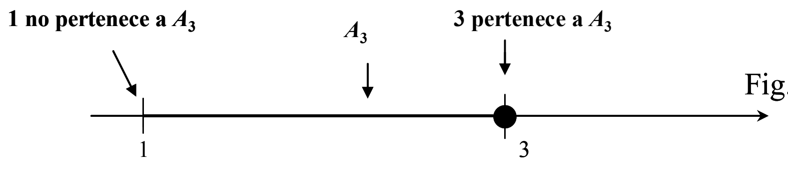


Fig. CN IV.c

Los PA de A_3 son todos los puntos del intervalo:

$$[1\ ,\ 3] = \{\ x\ /\ 1 \leq x \leq 3\}$$

Notar que 1 no pertenece a A_3 y 3 sí pertenece a A_3, y 1 es un PA de A_3.

CN V

Teorema de Bolzano – Weierstrass

a. Este teorema expresa que:

Todo conjunto numérico infinito y acotado tiene por lo menos un PA.

b. Sea A un conjunto infinito y acotado (ver figura CN V.a).

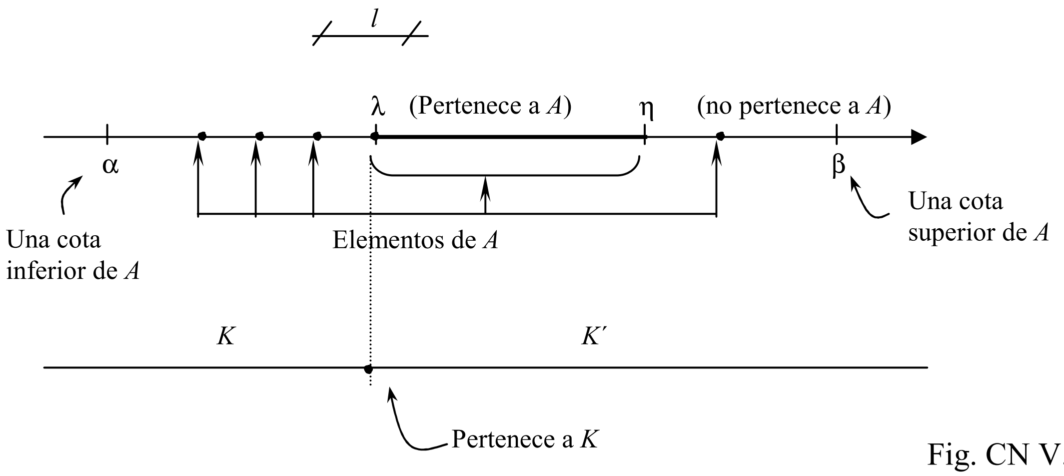


Fig. CN V.a

Clasifíquense a todos los números reales en dos conjuntos:
K = {Todos los números reales no mayores que infinitos elementos de A}
K' = {Todos los números reales mayores que infinitos elementos de A}
Se tiene que:

1º. Evidentemente, todos los números reales están ya sea en K, ya sea en K'.

2º. $K \neq \varnothing$ ya que todos los números menores que α pertenecen a K.
$K' \neq \varnothing$ ya que todos los números mayores que β pertenecen a K'.

3º. Sea un número a perteneciente a K y un número b perteneciente a K'. Si fuera $b \leq a$, entonces a sería mayor que una cantidad infinita de elementos de A (ya que por pertenecer b a K' se tiene que b es mayor que una cantidad infinita de elementos de A) y se tendría entonces que a no podría pertenecer a K, lo cual es contra hipótesis.

Por lo tanto, si a pertenece a K y b pertenece a K', entonces es $a < b$.
Generalizando:
Todo número perteneciente a K es menor que todo número perteneciente a K'.

Se cumplen así las tres condiciones indicadas en **a** de NR XII y, por lo tanto, estos conjuntos K y K' constituyen una cortadura generalizada $K \mid K'$.
Sea λ el número correspondiente a dicha cortadura.

c. Evidentemente (ver figura CN V.a) todo intervalo *l* que contenga a λ como punto interior, contendrá a elementos de *K* y elementos de *K´*, y como evidentemente entre todo elemento de *K* y todo elemento de *K´* hay infinitos elementos de *A*, resulta entonces que λ es un PA de *A*.

d. Notar que *A* podría tener otros PA además del λ determinado por el razonamiento seguido en **b** y **c**.
En el caso del conjunto *A* indicado en la figura CN V.a, son PA de dicho conjunto los puntos del intervalo $[\lambda , \eta] = \{x / \lambda \leq x \leq \eta\}$. Notar que η no pertenece a *A*, a pesar de ser un PA de *A*.

CN VI

Extremos de conjuntos numéricos

a. Sea un conjunto numérico *A* acotado inferiormente. Sean:
K = {Números reales no mayores que algún elemento de *A*}
K´ = {Números reales mayores que algún elemento de *A*}
Según puede verificarse fácilmente, estos conjuntos *K* y *K´* constituyen una cortadura $K \mid K'$.
Sea α el número determinado por esa cortadura.
A dicho número α se le llamará extremo inferior del conjunto *A*.
Resulta por lo tanto que:
El extremo inferior de un conjunto numérico acotado inferiormente es la mayor de sus cotas inferiores.
Según los casos, el extremo inferior de un conjunto numérico acotado inferiormente puede o no pertenecer al conjunto.

b. Análogamente:
Sea un conjunto numérico *B* acotado superiormente. Sean:
H = {Números reales no mayores que todos los elemento de *B*}
H´ = {Números reales mayores que todos los elemento de *B*}
Según puede verificarse fácilmente, estos conjuntos *H* y *H´* constituyen una cortadura $H \mid H'$.
Sea β el número determinado por dicha cortadura.
A dicho número β se lo llamará extremo superior del conjunto *B*.
Resulta, por lo tanto, que:
El extremo superior de un conjunto numérico acotado superiormente es la menor de sus cotas superiores.
Según los casos, el extremo superior de un conjunto numérico acotado superiormente puede o no pertenecer al conjunto.

c. Evidentemente:

1º.Todo conjunto numérico que es (no es) acotado inferiormente tiene (no tiene) un extremo inferior.

2º.Todo conjunto numérico que es (no es) acotado superiormente tiene (no tiene) un extremo superior.

3º.Hay conjuntos numéricos que tienen extremo inferior y no tienen extremo superior (conjuntos acotados inferiormente y no acotados superiormente).

4º.Hay conjuntos numéricos que no tienen extremo inferior y tienen extremo superior (conjuntos no acotados inferiormente y acotados superiormente).

5º.Hay conjuntos numéricos que no tienen ni extremo inferior y ni extremo superior (conjuntos no acotados ni inferiormente ni superiormente).

6º.Hay conjuntos numéricos que tienen extremo inferior y superior (conjuntos acotados).

Ejercicios y problemas sobre Conjuntos de Números Reales

CN 1. Sean los siguientes conjuntos:

a) $\{x \,/\, -4 < x < -2\}$ b) $\{x \,/\, x \text{ entero y } 0 \le x \le 100\}$

c) $\{x \,/\, 0 \le x < 1\}$ d) $\{x \,/\, x \ge 4\}$

e) $\{x \,/\, x = \text{primo}\}$ f) $\{x \,/\, -1 < x \le 2\} \cup \{x \,/\, 3 \le x < 4\}$

En cada caso:

1º. Indicar, si es posible, 2 cotas inferiores y 2 cotas superiores.

2º. Indicar, si existen, sus extremos inferior y superior.

3º. Indicar si constituyen o no un intervalo y en caso afirmativo, de qué tipo.

En este último caso, indicar un punto interior.

CN 2. Indicar todos los PA del conjunto:

$$\{x \,/\, 1 \le x^2 < 2\} \cup \{x \,/\, 2 < x^2 \le 4\}$$

CN 3. ¿Puede un conjunto finito de números tener algún PA? ¿Porqué?

CN 4. Indicar algún conjunto en que todos los elementos del mismo sean PA de dicho conjunto.

CN 5. ¿Es o no cierto que el conjunto de <u>todos</u> los PA de los números racionales es el conjunto de los números reales?

¿Es o no cierta la recíproca?

CN 6. Indicar, si existen, los extremos inferior y superior de los conjuntos:

a) $\{x \,/\, x = \dfrac{2^n}{n!}\,;\ n \text{ natural}\}$

b) $\{x \,/\, x = \dfrac{(-1)^n}{n},\ n \text{ natural}\} \cup \{x \,/\, x = 1 - \dfrac{1}{n},\ n \text{ natural}\}$

Sumatorias

SUM I

Sumatorias simples

SUM I.1

a. Sea una familia de números a_i tal que el valor de cada uno de ellos depende del índice i (el cual es siempre entero). Por ejemplo:

1º) $a_1 = \frac{1}{1}$; $a_2 = \frac{1}{2}$; $a_3 = \frac{1}{3}$; ...; $a_{50} = \frac{1}{50}$; ...; $a_i = \frac{1}{i}$; etc.
2º) $a_{-2} = Cos\ (-2\pi)$; $a_{-1} = Cos\ (-\pi)$; $a_0 = Cos\ 0$; ...; $a_i = Cos\ (-i\pi)$; etc.
3º) $a_1 = lg_{10}1$; $a_2 = lg_{10}2$; $a_3 = lg_{10}3$; ...; $a_i = lg_{10}i$; etc.

Dada una de estas familias, para significar la suma de algunos de sus componentes se usa la notación "sumatoria" indicada a continuación:

Símbolo sumatoria

$$\text{Suma de algunos } a_i \text{ determinados} = \sum a_i \qquad [1]$$

Especificación del índice i correspondiente a cada uno de los sumandos.

Por ejemplo:

1º) $\displaystyle\sum_{i=1,4,7}\left(\frac{i}{i+2}\right) = \frac{1}{1+2} + \frac{4}{4+2} + \frac{7}{7+2}$

2º) $\displaystyle\sum_{-3<j\le 2} Cos(j\pi) = Cos\ (-2\pi) + Cos\ (-\pi) + Cos\ (0) + Cos\ (\pi) + Cos\ (2\pi)$

3º) $\displaystyle\sum_{k\,/\,k^2\le 4} 3^k = 3^{-2} + 3^{-1} + 3^0 + 3^1 + 3^2$

4º) $\displaystyle\sum_{\substack{l\ par\\ 2\le l\le 7}} 3^{2l} = 3^{2.2} + 3^{2.4} + 3^{2.6}$

5º) $\displaystyle\sum_{\substack{m\ primo\\ 0<m\le 8}} \frac{m}{m+2} = \frac{1}{1+2} + \frac{2}{2+2} + \frac{3}{3+2} + \frac{5}{5+2} + \frac{7}{7+2}$

6º) $\displaystyle\sum_{\substack{raíces\ de\ la\ ecuación\\ x^2+x-6=0}} Sen(x) = Sen\ (-3)\ +\ Sen\ (2)$

Evidentemente, y tal como fluye de estos ejemplos, el método usado para especificar los índices de los términos a sumar puede ser cualquiera.

b. Notar que dada una suma de números cuyo valor depende de un índice se tiene que:

$$\Sigma\, a_i \qquad = \qquad \Sigma\, a_j$$

Una cierta especificación del índice i correspondiente a cada uno de los sumandos

La misma especificación para índices j

Por ejemplo:

1º) $$\sum_{\substack{i \text{ natural} \\ i \text{ múltiplo de } 3 \\ i<20}} 2^i = \sum_{\substack{j \text{ natural} \\ j \text{ múltiplo de } 3 \\ j<20}} 2^j = 2^3 + 2^6 + 2^9 + 2^{12} + 2^{15} + 2^{18}$$

2º) $$\sum_{0 \le k \le 3} \lg_{10}(k+2) = \sum_{0 \le v \le 3} \lg_{10}(v+2) = \lg_{10} 2 + \lg_{10} 3 + \lg_{10} 4 + \lg_{10} 5$$

Es decir que:
No importa para nada el símbolo que se use en una sumatoria para designar al índice genérico.

c. En el caso de que los índices correspondientes a los términos a sumar sean enteros corridos, su especificación a menudo se hace poniendo respectivamente abajo y arriba del símbolo sumatoria los valores más bajo y más alto que asuman dichos índices. Por ejemplo:

1º) $$\sum_{i=0}^{3} lg_{10} 2^i = \sum_{0 \le i \le 3} lg_{10} 2^i = lg_{10} 2^0 + lg_{10} 2^1 + lg_{10} 2^2 + lg_{10} 2^3$$

2º) $$\sum_{k=-1}^{1} Cos\ kx = \sum_{-1 \le k \le 1} Cos\ kx = Cos\ (-x) + Cos\ (0) + Cos\ (x)$$

3º) $$\sum_{v=-3}^{0} tg\ vx = \sum_{-3 \le v \le 0} tg\ vx = tg\ (-3x) + tg\ (-2x) + tg\ (-x) + tg\ 0$$

Notación general

Notación en el caso de que los índices sean enteros corridos

SUM I.2

a. Se demostrará que:
Para α constante es:

$$\alpha \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} a_i = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \alpha a_i \qquad \textbf{[2]}$$

b. En efecto:

$$\alpha \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} a_i = \alpha(a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_n}) = \alpha a_{i_1} + \alpha a_{i_2} + \ldots + \alpha a_{i_n} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \alpha a_i$$

c. Por ejemplo:

$$3 \sum_{i=1,3,5} i^2 = \sum_{i=1,3,5} 3.i^2$$

SUM I.3

a. Se demostrará que:

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} a_i + \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} b_i + \ldots + \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} k_i = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} (a_i + b_i + \ldots + k_i) \qquad \textbf{[3]}$$

b. En efecto:

$$\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} a_i + \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} b_i + \ldots + \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} k_i =$$
$$= (a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_n}) + (b_{i_1} + b_{i_2} + \ldots + b_{i_n}) + \ldots + (k_{i_1} + k_{i_2} + \ldots + k_{i_n}) =$$
$$= (a_{i_1} + b_{i_1} + \ldots + k_{i_1}) + (a_{i_2} + b_{i_2} + \ldots + k_{i_2}) + \ldots + (a_{i_n} + b_{i_n} + \ldots + k_{i_n}) =$$
$$= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} (a_i + b_i + \ldots + k_i)$$

Con lo que queda probado lo indicado en **[3]**.

c. Por ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{3} n\; Cos\frac{n\pi}{2} + \sum_{n=1}^{3} n\; Sen\frac{n\pi}{2} + \sum_{n=1}^{3}\left(n\; Cos\frac{n\pi}{2} + n\; Sen\frac{n\pi}{2}\right)$$

SUM I.4

a. Se demostrará que:

$$\alpha \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} a_i + \beta \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} b_i + \ldots + \upsilon \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} k_i = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} (\alpha\, a_i + \beta\, b_i + \ldots + \upsilon\, k_i) \qquad \textbf{[4]}$$

donde α, β, ..., υ son constantes cualesquiera.

b. En efecto:

Por **[2]**

Por **[3]**

$$\alpha \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} a_i + \beta \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} b_i + \ldots + \upsilon \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} k_i =$$
$$= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \alpha\, a_i + \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \beta\, b_i + \ldots + \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \upsilon\, k_i = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} (\alpha\, a_i + \beta\, b_i + \ldots + \upsilon\, k_i)$$

Con lo que queda demostrado lo indicado en **[4]**.

c. Por ejemplo:

$$4 \sum_{\substack{2\le n\le 6 \\ n\ primo}} 2^n + 3 \sum_{\substack{2\le n\le 6 \\ n\ primo}} \lg_{10} n = \sum_{\substack{2\le n\le 6 \\ n\ primo}} (4.2^n + 3\lg_{10} n) =$$
$$= (4.2^2 + 3\lg_{10} 2) + (4.2^3 + 3\lg_{10} 3) + (4.2^5 + 3\lg_{10} 5)$$

SUM II

Sumatorias múltiples

SUM II.1

a. Sea una familia de números $a_{i,\, j,\, ...,\, n}$, tal que el valor de cada uno de ellos dependerá de sus índices *i, j, ..., n*. Por ejemplo:

1º) $a_{1,1} = \frac{1}{1}\ Cos\ 1\pi$, $a_{1,2} = \frac{1}{1}\ Cos\ 2\pi$, $a_{2,1} = \frac{1}{2}\ Cos\ 1\pi$, $a_{2,2} = \frac{1}{2}\ Cos\ 2\pi$, ..., $a_{i,j} = \frac{1}{i}\ Cos\ j\pi$, etc.

2º) $a_{i,j,k} = (i^j)^k$

3º) $a_{u,v,w} = u.2^v \log_{10} w$

Etc.

Dada una de estas familias de números, para indicar la suma de algunos de sus componentes se usa la notación "sumatoria múltiple" indicada a continuación:

$$\text{Suma de ciertos } a_{i,j,...,n} \text{ determinados} = \sum_{\substack{\text{Especificación de todos}\\ \text{los índices } i,\, j,\, ...,\, n\\ \text{correspondientes a cada}\\ \text{uno de los sumandos}}} a_{i,j,...n} \qquad \textbf{[1]}$$

Por ejemplo:

1º) $$\sum_{\substack{(i=1\ \ j=2) \leftarrow (1^{er}\ \ sumando)\\ (i=3\ \ j=5) \leftarrow (2^{do}\ \ sumando)}} 2^{\frac{i}{2}} Sen(j\alpha) = 2^{\frac{1}{2}} Cos(2\alpha) + 2^{\frac{3}{2}} Cos(5\alpha)$$

2º) $$\sum_{\substack{(i=0\ \ j=2)\\ (i=2\ \ j=3)\\ (i=1\ \ j=2)}} \left(Cos\ i\pi + Sen\ j\frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= \left(Cos 0\pi + Sen 2\frac{\pi}{2} \right) + \left(Cos 2\pi + Sen 3\frac{\pi}{2} \right) + \left(Cos\pi + Sen 2\frac{\pi}{2} \right)$$

3º) $$\sum_{\substack{i,j,k\ naturales\\ i+j+k=4}} \left(\frac{i+j}{k} \right) = \underbrace{\frac{1+1}{2}}_{\substack{i=1\\ j=1\\ k=2}} + \underbrace{\frac{1+2}{1}}_{\substack{i=1\\ j=2\\ k=1}} + \underbrace{\frac{2+1}{1}}_{\substack{i=2\\ j=1\\ k=1}}$$

b. Igual que en el caso de las sumatorias simples (ver **b** de SUM I.1), en el caso de las sumatorias múltiples <u>tampoco importa para nada los símbolos usados para designar a los índices genéricos</u>.

c. En el caso de que los números $a_{i,j,...n}$ sean tales que tanto sus índices *i*, como sus índices *j*, ..., como sus índices *n*, <u>sean enteros corridos</u>, la especificación de los índices de los sumandos se hace a menudo usando la notación ejemplificada a continuación:

$$\sum_{\substack{i=0\\ j=1\\ k=-1}}^{\substack{k=1\\ j=2\\ i=2}} (i+j)^k = \underbrace{(0+1)^{-1}}_{\substack{i=0,j=1\\ k=-1}} + \underbrace{(0+1)^{0}}_{\substack{i=0,j=1\\ k=0}} + \underbrace{(0+1)^{1}}_{\substack{i=0,j=1\\ k=1}} + \underbrace{(0+2)^{-1}}_{\substack{i=0,j=2\\ k=-1}} + \underbrace{(0+2)^{0}}_{\substack{i=0,j=2\\ k=0}} + \underbrace{(0+2)^{1}}_{\substack{i=0,j=2\\ k=1}} +$$

$$+\underbrace{(1+1)^{-1}}_{\substack{i=1,j=1\\k=-1}}+\underbrace{(1+1)^{0}}_{\substack{i=1,j=1\\k=0}}+\underbrace{(1+1)^{1}}_{\substack{i=1,j=1\\k=1}}+\underbrace{(1+2)^{-1}}_{\substack{i=1,j=2\\k=-1}}+\underbrace{(1+2)^{0}}_{\substack{i=1,j=2\\k=0}}+\underbrace{(1+2)^{1}}_{\substack{i=1,j=2\\k=1}}+$$

$$+\underbrace{(2+1)^{-1}}_{\substack{i=2,j=1\\k=-1}}+\underbrace{(2+1)^{0}}_{\substack{i=2,j=1\\k=0}}+\underbrace{(2+1)^{1}}_{\substack{i=2,j=1\\k=1}}+\underbrace{(2+2)^{-1}}_{\substack{i=2,j=2\\k=-1}}+\underbrace{(2+2)^{0}}_{\substack{i=2,j=2\\k=0}}+\underbrace{(2+2)^{1}}_{\substack{i=2,j=2\\k=1}}$$

SUM II.2

Por los mismos procedimientos empleados en SUM I.2, SUM I.3 y SUM I.4 puede demostrarse que:

1º) Para α constante es:

$$\alpha \sum_{(i,j)=(i_1,j_1)\dots(i_n,j_n)} a_{ij} = \sum_{(i,j)=(i_1,j_1)\dots(i_n,j_n)} \alpha a_{ij} \qquad \textbf{[2]}$$

2º)
$$\sum_{(i,j)=(i_1,j_1)\dots(i_n,j_n)} a_{ij} + \dots + \sum_{(i,j)=(i_1,j_1)\dots(i_n,j_n)} k_{ij} = \sum_{(i,j)=(i_1,j_1)\dots(i_n,j_n)} (a_{ij} + \dots + k_{ij}) \qquad \textbf{[3]}$$

3º)
$$\alpha \sum_{(i,j)=(i_1,j_1)\dots(i_n,j_n)} a_{ij} + \dots + \upsilon \sum_{(i,j)=(i_1,j_1)\dots(i_n,j_n)} k_{ij} = \sum_{(i,j)=(i_1,j_1)\dots(i_n,j_n)} (\alpha a_{ij} + \dots + \upsilon k_{ij}) \qquad \textbf{[4]}$$

donde α, ...y υ son constantes cualesquiera.

La generalización de estas fórmulas para el caso de más de dos índices es obvia.

SUM II.3

a. Se demostrará que:

$$\sum_{\substack{(i,j)=(i_1,j_1),\dots,(i_1,j_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ (i_k,j_k),\dots,(i_k,j_n)}} a_{ij} = \sum_{i=i_1,\dots,i_k} \left(\sum_{j=j_1,\dots,j_n} a_{ij} \right) = \sum_{j=j_1,\dots,j_n} \left(\sum_{i=i_1,\dots,i_k} a_{ij} \right) \qquad \textbf{[5]}$$

<u>Todos los índices *i* van apareados con todos los índices *j*</u>

b. En efecto:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(i,j)=(i_1,j_1),\dots,(i_1,j_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ (i_k,j_k),\dots,(i_k,j_n)}} a_{ij} &= a_{i_1 j_1} + \dots + a_{i_1 j_n} + \dots + a_{i_k j_1} + \dots + a_{i_k j_n} = \\ &= (a_{i_1 j_1} + \dots + a_{i_1 j_n}) + \dots + (a_{i_k j_1} + \dots + a_{i_k j_n}) = \\ &= \sum_{j=j_1,\dots,j_n} a_{i_1 j} + \dots + \sum_{j=j_1,\dots,j_n} a_{i_k j} = \sum_{i=i_1,\dots,i_k} \left(\sum_{j=j_1,\dots,j_n} a_{ij} \right) \end{aligned} \qquad \textbf{[6]}$$

c. Por otra parte:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{\substack{(i,j)=(i_1,j_1),\ldots,(i_1,j_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (i_k,j_k),\ldots,(i_k,j_n)}} a_{ij} &= a_{i_1 j_1} + \ldots + a_{i_1 j_n} + \ldots + a_{i_k j_1} + \ldots + a_{i_k j_n} = \\
&= (a_{i_1 j_1} + \ldots + a_{i_k j_1}) + \ldots + (a_{i_1 j_n} + \ldots + a_{i_k j_n}) = \\
&= \sum_{i=i_1,\ldots,i_k} a_{i\,j_1} + \ldots + \sum_{i=i_1,\ldots,i_k} a_{ij_n} = \sum_{j=j_1,\ldots,j_n}\left(\sum_{i=i_1,\ldots,i_k} a_{ij}\right)
\end{aligned}\right\} \quad \textbf{[7]}$$

y entonces por **[6]** y por **[7]** queda demostrado lo indicado en **[5]**.

d. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{\substack{i=0\\ j=1}}^{\substack{j=2\\ i=3}} 2^{i+j} &= 2^{0+1} + 2^{0+2} + 2^{1+1} + 2^{1+2} + 2^{2+1} + 2^{2+2} + 2^{3+1} + 2^{3+2} = \\
&= (2^{0+1} + 2^{0+2}) + (2^{1+1} + 2^{1+2}) + (2^{2+1} + 2^{2+2}) + (2^{3+1} + 2^{3+2}) = \\
&= \sum_{j=1}^{j=2} 2^{0+j} + \sum_{j=1}^{j=2} 2^{1+j} + \sum_{j=1}^{j=2} 2^{2+j} + \sum_{j=1}^{j=2} 2^{3+j} = \sum_{i=0}^{i=3}\left(\sum_{j=1}^{j=2} 2^{i+j}\right)
\end{aligned}\right\} \quad \textbf{[8]}$$

y, por otra parte:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{\substack{i=0\\ j=1}}^{\substack{j=2\\ i=3}} 2^{i+j} &= 2^{0+1} + 2^{0+2} + 2^{1+1} + 2^{1+2} + 2^{2+1} + 2^{2+2} + 2^{3+1} + 2^{3+2} = \\
&= (2^{0+1} + 2^{1+1} + 2^{2+1} + 2^{3+1}) + (2^{0+2} + 2^{1+2} + 2^{2+2} + 2^{3+2}) = \\
&= \sum_{i=0}^{i=3} 2^{i+1} + \sum_{i=0}^{i=3} 2^{i+2} = \sum_{j=1}^{j=2}\left(\sum_{i=0}^{i=3} 2^{i+j}\right)
\end{aligned}\right\} \quad \textbf{[9]}$$

y entonces por **[8]** y por **[9]** resulta que:

$$\sum_{\substack{i=0\\ j=1}}^{\substack{j=2\\ i=3}} 2^{i+j} = \sum_{i=0}^{i=3}\left(\sum_{j=1}^{j=2} 2^{i+j}\right) = \sum_{j=1}^{j=2}\left(\sum_{i=0}^{i=3} 2^{i+j}\right)$$

e. Se hace hincapié en el "Todos los índices *i* van apareados con todos los índices *j*" de la fórmula **[5]**. De no cumplirse esta condición, dicha fórmula **[5]** no sería válida, como surge del siguiente ejemplo.
Sea:

$$\sum_{(1,4)(1,5)(1,6)(2,4)(2,6)} a_{ij} = a_{1,4} + a_{1,5} + a_{1,6} + a_{2,4} + a_{2,6} \quad \textbf{[10]}$$

(No figura (2,5))

y por otra parte sea:

$$\sum_{i=1}^{i=2}\left(\sum_{j=4}^{j=6} a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{i=2}(a_{i,4} + a_{i,5} + a_{i,6}) = a_{1,4} + a_{1,5} + a_{1,6} + a_{2,4} + a_{2,5} + a_{2,6} \qquad \textbf{[11]}$$

resultando entonces por **[10]** y por **[11]** que en este caso se tiene que:

$$\sum a_{ij} \neq \sum_{i=1}^{i=2}\left(\sum_{j=4}^{j=6} a_{ij}\right)$$

f. La generalización de la fórmula **[5]** para el caso de más de dos índices es obvia.

SUM II.4

a. Se demostrará que:

$$\sum_{\substack{(i,j)=(i_1,j_1),\ldots,(i_1,j_n)\\ \cdots\cdots\\ (i_k,j_1),\ldots,(i_k,j_n)}} c_i d_j = \left(\sum_{i=i_1,\ldots,i_k} c_i\right)\left(\sum_{j=j_1,\ldots,j_n} d_j\right) \qquad \textbf{[12]}$$

(Todos los índices i van apareados con todos los índices j)

lo que en el caso de que i_1, ..., i_k y j_1, ..., j_n sean enteros corridos toma la forma:

$$\sum_{\substack{i=i_1\\ j=j_1}}^{\substack{j=j_n\\ i=i_k}} c_i d_j \underset{\text{Por [5]}}{=} \sum_{i=i_1}^{i=i_k}\left(\sum_{j=j_1}^{j=j_n} c_i d_j\right) \underset{\text{Por [5]}}{=} \sum_{j=j_1}^{j=j_n}\left(\sum_{i=i_1}^{i=i_k} c_i d_j\right) = \left(\sum_{i=i_1}^{i=i_k} c_i\right)\left(\sum_{j=j_1}^{j=j_n} d_j\right) \qquad \textbf{[13]}$$

b. En efecto, poniendo:

$$a_{ij} = c_i d_j$$

por **[5]** resulta que:

Por **[2]** de SUM I.2 (acá c_i hace las veces de α)

Por **[2]** de SUM I.2 (acá $\sum_{j=j_1,\ldots,j_n} d_j$ hace las veces de α)

$$\sum_{\substack{(i,j)=(i_1,j_1),\ldots,(i_1,j_n)\\ \cdots\cdots\\ (i_k,j_1),\ldots,(i_k,j_n)}} c_i d_j = \sum_{i=i_1,\ldots,i_k}\left(\sum_{j=j_1,\ldots,j_n} c_i d_j\right) = \sum_{i=i_1,\ldots,i_k}\left(c_i \sum_{j=j_1,\ldots,j_n} d_j\right) = \left(\sum_{j=j_1,\ldots,j_n} d_j\right)\left(\sum_{i=i_1,\ldots,i_k} c_i\right) \qquad \textbf{[14]}$$

Para mayor claridad se repetirá la demostración en base a un caso concreto, pero será evidente que lo que se verá es válido para el caso genérico.
Se tiene que:

$$\sum_{\substack{(2,3)(2,4)(2,7)\\(6,3)(6,4)(6,7)}} c_i d_j = \sum_{i=2,6}\left(\sum_{j=3,4,7} c_i d_j\right) = \underbrace{\sum_{j=3,4,7} c_2 d_j}_{i=2} + \underbrace{\sum_{j=3,4,7} c_6 d_j}_{i=6} =$$

$$= c_2 \sum_{j=3,4,7} d_j + c_6 \sum_{j=3,4,7} d_j = \left(\sum_{j=3,4,7} d_j\right)(c_2 + c_6) =$$

$$= \left(\sum_{j=3,4,7} d_j\right)\left(\sum_{i=2,6} c_i\right)$$

Resumiendo:

$$\sum_{\substack{(2,3)(2,4)(2,7)\\(6,3)(6,4)(6,7)}} c_i d_j = \left(\sum_{i=2,6} c_i\right)\left(\sum_{j=3,4,7} d_j\right)$$

y esto no es más que la fórmula **[12]** para el caso particular de que es $i = 2 , 6$ y $j = 3 , 4 , 7$.

c. Ejemplo:

$$\sum_{\substack{i=0\\j=1}}^{\substack{j=2\\i=3}} 2^i Cos(jt) = \left(\sum_{i=0}^{i=3} 2^i\right)\left(\sum_{j=1}^{j=2} Cos(jt)\right)$$

Ejercicios y problemas sobre Sumatorias

SUM 1 Hallar el valor de las siguientes sumatorias:

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{4} \frac{2i+1}{i+1}$ b) $\displaystyle\sum_{j=-2}^{2} i \ \lg_2 4^j$ c) $\displaystyle\sum_{\substack{j \text{ entero} \\ j \text{ múltiplo de } 3 \\ j \text{ primo} \\ 2 \le j \le 70}} \lg_8 2^j$

d) $\displaystyle\sum_{\substack{1 \le k \le 12 \\ k:\ \textit{triple de } \text{algún} \\ \textit{número primo}}} \frac{k+1}{k+2}$ e) $\displaystyle\sum_{\substack{-7 \le l \le -\pi \\ l \text{ par}}} Cos\left(l \frac{\pi}{2} \right)$

SUM 2 Poner bajo la forma de sumatorias a las siguientes expresiones:

a) $\frac{1}{2} a_0 + a_1\, Cos\, x + b_1\, Sen\, x + a_2\, Cos\, 2x + b_2\, Sen\, 2x + \ldots + a_n\, Cos\, nx + b_n\, Sen\, nx$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2 + 19^2$

c) $1 + 8 + 27 + 64 + 125$

d) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$

SUM 3 Hallar el valor de las siguientes sumatorias:

a) $\displaystyle\sum_{\substack{i,j \text{ primos} \\ 0 < i \le 3 \\ 2 < j \le 4}} 3^i 2^j$ b) $\displaystyle\sum_{\substack{i+j+k=3 \\ i,j,k \text{ enteros} \\ -1 < i < 1 \\ 0 < j < 7 \\ -3 < k < 0}} k\ Cos\left(\frac{i}{j}\right)$ c) $\displaystyle\sum_{\substack{i+j+k=3 \\ i,j,k \text{ naturales} \\ 0 < i+j < 3 \\ 0 < k < 2}} \frac{2^{i^j}}{k}$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a$

<u>PRINCIPIO DE INDUCCION COMPLETA (PIC)</u>

PIC I

<u>Analogía preliminar y Principio de Inducción Completa</u>

PIC I.1

a. Sea un país con un régimen de gobierno monárquico.
Sea R_1 el primer rey de la dinastía reinante. Este rey fue sucedido por su hijo mayor R_2, quien a su vez fue sucedido por su hijo mayor R_3 y así sucesivamente. (Según será evidente, desde el punto de vista de la demostración que sigue, dará lo mismo que esta dinastía se perpetúe indefinidamente o que termine después del reinado de un cierto rey R_f).

b. Sea una característica o inclinación humana cualquiera (por ejemplo una afición exagerada al vino tinto) a la que se llamará C.
Supóngase que se haya demostrado fehacientemente que:

α : El rey R_1 fundador de la dinastía, tenía la característica C.

β : Si ocurre que un rey tiene la característica C entonces inexorablemente su sucesor también la tendrá.
En cambio, si un rey no tiene la característica C, su sucesor puede tenerla o no tenerla.

c. Se pide averiguar si es o no posible que en dicha dinastía haya reyes que <u>no</u> presenten la característica C.

Supóngase que en efecto en dicha dinastía haya reyes que <u>no</u> tengan dicha característica. **[1]**

Cronológicamente, sea R_k el primero de estos reyes.
Se tiene entonces que:
1º. <u>R_k no tuvo la característica C</u>. **[2]**
2º. $R_k \neq R_1$ ya que quedó establecido en α que el rey R_1 fundador de la dinastía, sí tenía dicha característica.
3º. Por ser R_k el <u>primer</u> rey que <u>no</u> tuvo la característica C, entonces su antecesor inmediato, R_{k-1}, <u>sí</u> la tuvo.
4º. Ya que R_{k-1} tenía la característica C, por lo establecido en β se tiene que su sucesor inmediato, R_k, también deberá haber tenido la característica C. Por lo tanto:
<u>R_k sí tuvo la característica C</u>. **[3]**

Entonces, dadas las condiciones α y β, de ser cierta la suposición hecha en **[1]**, se tendría que <u>el rey R_k a la vez debería haber tenido y no tenido la característica C</u> (ver **[2]** y **[3]**), lo cual es un absurdo.
Como este absurdo proviene de la suposición hecha en **[1]**, es imposible que exista un primer rey que no tenga la característica C.
Es decir que:

<u>Todo rey de esta dinastía tuvo, o tiene, o tendrá, la característica C</u>.

PIC I.2

a. Pasando ahora a las matemáticas. Sea un enunciado matemático cualquiera en el cual figure un parámetro que pueda asumir cualquier valor natural (1, 2, 3, etc.).
Ejemplos de este tipo de enunciado son:

· S_n = Suma de los n primeros números impares = n^2 **[4]**

· $n = n + 1$ **[5]**

· $(n^n)^n = n^{(n^n)}$ **[6]**

(En todos estos ejemplos el parámetro está simbolizado como n).
En general, dado uno de estos enunciados pueden ocurrir tres alternativas:

1º. Es cierto para cualquier valor que asuma el parámetro (caso del enunciado **[4]**, según se verá más adelante).
2º. Es falso para cualquier valor que asuma el parámetro (caso del enunciado **[5]**).
3º. Es cierto o falso según el valor que asuma el parámetro (caso del enunciado **[6]**, que es cierto para $n \leq 2$; y es falso para $n > 2$).

b. Dado uno de estos enunciados, al ir dando al parámetro los valores 1, 2, etc. se va obteniendo una sucesión (dinastía) de expresiones matemáticas.
Por ejemplo, para el enunciado indicado en **[4]** se tiene que:

Expresión 1, ($n = 1$): $S_1 = 1 = 1^2$ ("fundador de la dinastía")

Expresión 2, ($n = 2$): $S_2 = 1 + 3 = 2^2$

Expresión 3, ($n = 3$): $S_3 = 1 + 3 + 5 = 3^2$

Expresión 4, ($n = 4$): $S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

etc.

Se dirá que una de estas expresiones tiene la característica C cuando sea cierta.

c. Supóngase que, dado uno de estos enunciados, se demuestre fehacientemente que:

α^*: El enunciado es cierto cuando el parámetro asume el valor 1 (es decir que la expresión "fundadora de la dinastía" tiene la característica C).

β^*: Si ocurre que el enunciado es cierto para un valor del parámetro, entonces también será cierto para el valor subsiguiente (es decir, que si una expresión cualquiera de la "dinastía" tiene la característica C, su sucesora también la tendrá).

El principio de inducción completa establece que todo enunciado que cumpla con estas condiciones α^* y β^* será cierto para todo valor que asuma el parámetro.

d. La demostración de este principio de inducción completa es un paralelo exacto de lo ya visto en **c** de **PIC I.1**.

Sea un enunciado para el cual se cumplen las condiciones α^* y β^*.

Supóngase que exista uno o más valores del parámetro que hagan falso a dicho enunciado. **[7]**

Entre estos valores del parámetro que hacen falso el enunciado habrá uno de ellos que es menor que todos los demás. Llámesele n_k.
Se tiene entonces que:

1º. El enunciado es falso cuando el parámetro asume el valor n_k (la expresión correspondiente a n_k no tiene la característica C). **[8]**

2º. $n_k \neq 1$ ya que quedó establecido por α^* que el enunciado es cierto cuando el parámetro asume el valor 1 (es decir, que la expresión "fundadora de la dinastía" tiene la característica C).

3º. Por ser n_k el menor valor del parámetro para el cual el enunciado es falso, el enunciado será cierto cuando el parámetro asuma el valor $n_k - 1$ (si la n_k-ésima expresión es la primera expresión de la dinastía que no tiene la característica C, su antecesora inmediata sí la tendrá).

4º. Como el enunciado es entonces cierto cuando el parámetro asuma el valor $n_k - 1$, por lo establecido en β^* se tendrá que también será cierto cuando el parámetro asuma el valor $(n_k - 1) + 1 = n_k$ (si la expresión $n_k - 1$ -ésima de la "dinastía" tiene la característica C, su sucesora, es decir la expresión n_k -ésima, también la tendrá):
Por lo tanto:

El enunciado es cierto cuando el parámetro asume el valor n_k. **[9]**

Entonces, dadas las condiciones α^* y β^*, de ser cierto lo supuesto en **[7]**, se tendrá que el enunciado considerado deberá a la vez ser cierto y falso cuando el parámetro asuma el valor n_k (ver **[8]** y **[9]**), lo cual es un absurdo.

Como este absurdo proviene de la suposición hecha en **[7]**, es imposible que existan valores del parámetro para el cual el enunciado es falso.
Por lo tanto:

El enunciado considerado será cierto para cualquier valor que asuma el parámetro.

PIC I.3 Ejemplo.

a. Se demostrará ahora usando el principio de inducción completa, que la fórmula **[4]** es válida para cualquier valor que asuma n.

b. Se tiene que:

S_n = Suma de los n primeros números impares $= 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$ **[10]**

y se verificará que en efecto es:

$$S_n = n^2, \text{ para todo } n \text{ natural} \qquad \textbf{[11]}$$

c. Para $n = 1$, la fórmula **[10]** indica que:

$$S_1 = 1$$

lo cual es evidentemente cierto.
Por lo tanto la fórmula **[11]** es válida para $n = 1$, quedando así satisfecha la condición α^* enunciada en **c** de **PIC I.2**.

d. Sea un número natural cualquiera mayor que 1. Llámeselo k.
Por **[10]** se tiene que:

$$S_k = 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) \qquad \textbf{[12]}$$

$$S_{k+1} = 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = S_k + 2k + 1 \qquad \textbf{[13]}$$

Si la fórmula **[11]** es válida para $n = k$ se tendrá que:

$$S_k = k^2$$

y entonces por **[13]** será:

$$S_{k+1} = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

resultando entonces que si la fórmula **[11]** es válida cuando n asume un cierto valor k, entonces también será válida cuando n asume el valor natural subsiguiente, con lo que también queda satisfecha la condición β^* enunciada en **c** de **PIC I.2**.

Por lo tanto queda demostrada la validez de la fórmula **[11]** para todo n natural.

PIC I.4 Otro ejemplo.

a. Se verificará por el principio de inducción completa que:

Para todo $a > -1$ es $(1 + a)^n \geq 1 + n\,a$, para todo n natural. **[14]**

b. Se tiene que:

$$(1 + a)^1 \geq 1 + 1.a$$

y por lo tanto la fórmula **[14]** es válida para $n = 1$, quedando así satisfecha la condición α^* enunciada en **c** de **PIC I.2**.

c. Sea un número natural cualquiera mayor que 1. Llámeselo k.
Se tiene que si la fórmula **[14]** es válida para $n = k$ se tendrá que:

$$(1 + a)^k \geq 1 + k.a$$

y como $(1 + a) > 0$ por ser $a > -1$, se tendrá entonces que:

$$(1 + a)^{k+1} \geq (1 + a)(1 + k\,a) = 1 + k\,a + a + k\,a^2 \geq 1 + (k + 1)\,a$$

Por ser $k\,a^2 \geq 0$

Resumiendo:

Si es $(1 + a)^k \geq 1 + k\,a$ entonces es $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)\,a$

Es decir que si la fórmula **[14]** es cierta cuando n asume un cierto valor k, entonces también será cierta cuando n asume el valor natural subsiguiente, con lo que también queda satisfecha la condición β^* enunciada en **c** de **PIC I.2**.

Por lo tanto, queda demostrada la validez de la fórmula **[14]** para todo n natural.

PIC II

<u>Variantes del mismo tema</u>

PIC II.1

Supóngase ahora un enunciado matemático cualquiera en el que figure un parámetro n que pueda asumir un valor natural cualquiera (1, 2, 3, ..., etc.).
Supóngase además que:

· El enunciado es cierto cuando el parámetro asume un cierto valor natural i (por ejemplo $i = 7$).
· El hecho de que el enunciado sea cierto para un valor del parámetro superior a i determina que también sea cierto para el valor subsiguiente.

Entonces, mediante una argumentación análoga a la indicada en **PIC I.2** se demuestra que el enunciado del caso es cierto cuando n asume cualquier valor mayor o igual que i (mayor o igual que 7).

PIC II.2

Supóngase ahora un enunciado matemático cualquiera en que figure un parámetro n que pueda asumir un valor natural cualquiera.
Supóngase además que:

· El enunciado es cierto cuando el parámetro asume el valor 1.
· Si r es un cierto número natural determinado (por ejemplo $r = 3$), entonces el hecho de que el enunciado sea cierto para un cierto valor del parámetro determina que también sea cierto para un valor del parámetro r unidades mayor.

Entonces, mediante una argumentación análoga a la indicada en **PIC I.2** se demuestra que el enunciado del caso es también cierto cuando el parámetro n asume un valor cualquiera que sea igual a 1 más un múltiplo cualquiera de r. (Si $r = 3$, el enunciado será válido cuando sea $n = 1, 4, 7, \ldots$).

PIC II.3

Supóngase un enunciado matemático cualquiera en el que figure un parámetro n que pueda asumir un valor natural cualquiera.
Supóngase además que:

· El enunciado sea cierto cuando el parámetro asume los valores 1, 2, ..., w.

· El hecho de que el enunciado sea cierto cuando el parámetro asume w valores consecutivos cualesquiera determina que también sea cierto para el valor subsiguiente.

Entonces, mediante una argumentación similar a la indicada en **PIC I.2** se demuestra que el enunciado es cierto para cualquier valor que asuma el parámetro.

PIC II.4

Es evidente que sería posible imaginar muchas otras variantes del principio de inducción completa.

Ejercicios y problemas sobre el Principio de Inducción Completa

PIC.1

Mediante el principio de inducción completa verificar que para todo n natural se tiene que:

a. $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (Progresión aritmética)

b. $1 + a + a^2 + ... + a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ (Progresión geométrica)

c. $n^3 + 2n$ es divisible por 3

d. $1 + 3 + 6 + ... + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

e. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$

f. $2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 2$

g. $1 \,.\, 2 + 2 \,.\, 3 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

h. $1 + 4 + 7 + ... + (3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

i. $1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

j. $6^n \geq 1 + 5^n$

PIC.2

Por medio del PIC demostrar la validez de la fórmula del interés compuesto:

$$C_n = C_0\,(1 + I)^n$$

en la cual:
C_n = Capital final, C_0 = Capital inicial, I = Interés anual, n = Cantidad de años

PIC.3

Por medio del PIC demostrar que:

Derivadas pares de $Sen\,(x) = (-1)^{n/2}\,Sen\,(x)$, $n = 2, 4, 6, ...$

PIC.4

Por medio del PIC demostrar que:

a. $$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

b. $$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-ax}) = (-1)^n a^n e^{-ax}$$

Cálculo Combinatorio

CMB I

Generalidades

A menudo se presenta el problema de calcular la cantidad de maneras como se pueden disponer los elementos de un cierto conjunto dadas ciertas condiciones predeterminadas. Por ejemplo:
1º) Indicar cuantas palabras pueden escribirse con 3 de las 5 letras **L, A, P, I, Z** (tengan o no sentido).
2º) Indicar cuantos "full" distintos pueden extraerse de un mazo de 52 barajas.
3º) Indicar cuantos números distintos pueden escribirse con 3 de los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 y 5.
4º) Indicar de cuantas maneras distintas pueden sentarse 8 personas en otros tantos asientos.
Etc.
El cálculo combinatorio que se desarrollará a continuación constituye una herramienta que ayuda a resolver algunos problemas de este tipo.

CMB II

Variaciones simples

CMB II. 1

a. Se llaman variaciones simples de *n* elementos todos distintos entre sí (por ejemplo los 4 elementos *a, b, c y d*) tomados *de* a *k* (por ejemplo de a 3) a las agrupaciones que se pueden formar colocando de todas las maneras posibles a *k* de esos *n* elementos (a 3 de los 4 elementos *a, b, c y d*) en otras tantas (en 3) ubicaciones, de manera tal que dos agrupaciones sean consideradas distintas entre sí cuando en **por lo menos una** misma ubicación relativa de ambas agrupaciones figuren elementos distintos.
Por ejemplo *abc* y *acd* son variaciones simples distintas entre sí porque en la 2ª ubicación de ambas figuran respectivamente *b* y *c*, y porque en la 3ª ubicación de ambas figuran respectivamente *c* y *d*.
Tal como recién ejemplificado, una cierta variación simple se indica escribiendo de izquierda a derecha los símbolos de los elementos involucrados en la variación, en el orden correspondiente a sus ubicaciones.

b. Según la definición recién dada, considerando los 4 elementos *a, b, c* y *d*:

1º) Sus variaciones simples tomados *de* a 1 son:
a *b* *c* *d*

2º) Sus variaciones simples tomados *de* a 2 son:
ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc

3º) Sus variaciones simples tomados *de* a 3 son:
abc, abd, acb, acd, adb, adc, bac, bad, bca, bcd, bda, bdc, cab, cad, cba, cdb, cda, cdb, dab, dac, dba, dbc, dca, dcb

4º) Sus variaciones simples tomados *de* a 4 son:

abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb, bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca, cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba, dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba

La ley de formación de estas tablas es obvia.

CMB II. 2

a. Sea $V_{n,i}$ la cantidad de variaciones simples que pueden formarse con *n* elementos tomándolos *de* a *i* (Sea $V_{4,2}$ la cantidad de variaciones simples que pueden formarse con los 4 elementos *a, b, c y d* tomándolos *de* a 2).
Considérese una cualquiera de dichas variaciones simples (por ejemplo la *bd*). Si a dicha variación simple (la *bd*) se le agregan alternativamente cada uno de los *n-i* (de los 4-2 = 2) elementos que no figuran en ella (los elementos *a* y *c*), se generarán *n-i* (se generarán 2) variaciones simples (*bda* y *bdc*) de los *n* elementos considerados tomados *de* a $i+1$ (de los elementos *a, b, c y d* tomados de a 3).
Si se somete al mismo tratamiento a cada una de las $V_{n,i}$ (de las $V_{4,2}$) variaciones simples de los *n* (los 4) elementos tomados *de a i* (tomados *de* a 2), se obtendrá una lista completa y sin redundancias de las $V_{n,i+1}$ (de las $V_{4,3}$) variaciones simples de los *n* elementos (los 4 elementos *a, b, c* y *d*) tomado*s de* a $i+1$ (tomados de a 3). En efecto:

1º) Si en dicha lista faltara alguna de las variaciones *de* a $i+1$, por ejemplo la *abd*, eso sería debido sea a que no se agregó *d* a *ab* o si no a que *ab* no figuraba en la lista de las variaciones *de* a 2, todo lo cual es contra hipótesis.

2º) Si en dicha lista apareciera 2 (o más) veces una misma variación *de* a $i+1$, por ejemplo si la *bdc* apareciera dos veces, eso sería debido sea a que se agregó *c* a *bd* dos veces o si no a que *bd* figura dos veces en la lista de las variaciones *de* a 2, todo lo cual es contra hipótesis.

b. Resumiendo:
Cada una de las $V_{n,i}$ variaciones de los n elementos tomados *de* a *i* genera $n - i$ variaciones de los *n* elementos tomados *de* a $i+1$**,** constituyendo las variaciones así generadas la lista completa y sin redundancias de las $V_{n,i+1}$ variaciones simples de los n elementos tomados *de* a $i+1$. Por lo tanto:

$$V_{n,i+1} = (n-i)\, V_{n,i} \qquad \textbf{[1]}$$

c. Se verificará a continuación por medio del principio de inducción completa que la cantidad de variaciones simples que se pueden formar con *n* elementos tomándolos *de* a *k* está dada por la fórmula:

$$\boxed{V_{n,k} = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}} \qquad \textbf{[2]}$$

Para empezar: Como dados *n* elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se tiene que las variaciones simples de los mismos tomados *de* a 1 son:

$$a_1, \ldots, a_n$$

resulta que su cantidad es *n*, teniéndose entonces que:

$$V_{n,1} = n$$

con lo que resulta que la fórmula **[2]** se cumple cuando $k = 1$, quedando así satisfecha la 1ª condición del principio de inducción completa (α^* de **c** de P.I.C. I 2).
Por otra parte, sea un número natural cualquiera *i* tal que $1 < i < k$. Si la fórmula **[2]** es válida para $k = i$ se tiene que:

$$V_{n,i} = n(n-1)...(n-i+1)$$

y entonces por **[1]** resulta que:

$$V_{n,i+1} = n(n-1)...(n-i+1)(n-i) =$$

$$= n(n-1)...[n-(i+1)+2]\ [n-(i+1)+1] = \frac{n\ !}{[n-(i+1)]\ !}$$

obteniéndose así que si la fórmula **[2]** es válida cuando k asume un cierto valor i, entonces también será válida cuando k asuma el valor natural subsiguiente, quedando así también satisfecha la 2ª condición del principio de inducción completa (β^* de **c** de P.I.C. I 2).
Resulta así que la fórmula **[2]** es válida para cualquier k tal que $0 < k \leq n$.

(Tener bien en cuenta en lo sucesivo que por definición 0! = 1).

CMB II. 3

Aplicación: En un club la comisión directiva está compuesta por 10 personas. Se pide indicar de cuantas maneras puede elegirse una de dichas personas para presidente, otra para secretario y una tercera para tesorero.
Designando a las personas como A, B, C, D, E, F, G, H, I y J, las diversas posibles alternativas pueden ser simbolizadas como:

(A, B, C) , (B, A, C) , (A, F, J) , etc.

donde en cada paréntesis la 1ª letra corresponde al presidente, la 2ª al secretario y la 3ª al tesorero.
Dos alternativas son distintas entre sí cuando en una misma ubicación relativa tienen distintas letras y así resulta que las alternativas consideradas no son más que las variaciones simples de las 10 letras A, ..., J tomadas *de* a 3.
Es decir que:

Cantidad de alternativas = $V_{10,3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$

CMB III

<u>Permutaciones simples</u>

CBM III. 1

<u>Las permutaciones simples de *n* elementos no son más que las variaciones simples de los mismos cuando se los toma *de* a *n*</u>.
Entonces, la cantidad de permutaciones que se pueden formar con n elementos es:

Ver **[2]** de CMB II

$$\boxed{P_n = V_{n,n} = n\,(n-1)\,(n-2)\,....\,2\,.\,1 = n!}$$

Tener en cuenta que 0! = 1.

CMB III. 2

Aplicación: 10 personas llegan simultáneamente a una boletería y forman una cola al azar. Se pide indicar de cuantas maneras puede formarse dicha cola.
Esta cola puede formarse de las siguientes maneras:

Lugar→	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Persona→ manera 1ª	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Persona→ manera 2ª	B	A	D	E	C	F	I	H	G	J
	etc.									

Evidentemente, las distintas maneras de formar la cola no son más que las permutaciones simples de las 10 letras A, ..., J, ya que una manera se diferencia de otra solo por la ubicación relativa de las mismas 10 letras.
Entonces:

Maneras de formar la cola = P_{10} = 10! = 3.628.800

CBM IV

Combinaciones simples

CBM IV. 1

a. Se llaman combinaciones simples de n elementos todos distintos entre sí (por ejemplo los 4 elementos *a, b, c y d*) tomados *de* a k (por ejemplo de a 3) a las agrupaciones que pueden formarse tomando de todas las maneras posibles k de esos n elementos (3 de los 4 elementos *a, b, c y d*), considerándose que una de esas agrupaciones es distinta de otra cuando no están compuestas por exactamente los mismos elementos (cuyo orden no interesa).
Una combinación simple es especificada indicando (en cualquier orden) los símbolos de los elementos que la integran.

b. Así, por ejemplo, con los elementos *a, b, c y d* pueden formarse las siguientes combinaciones simples:

1º) Tomando los elementos *de* a 1:
a , b , c , d

2º) Tomando los elementos *de* a 2:
ab, ac, ad, bc, bd, cd

3º) Tomando los elementos *de* a 3:
abc, abd, acd, bcd

4º) Tomando los elementos *de* a 4:
abcd

La ley de formación de estas tablas es obvia.

c. Notar que dados los elementos *a, b, c y d*, las agrupaciones <u>*abc*</u> y <u>*bac* constituyen una misma combinación simple, pero son variaciones simples distintas</u>.

CMB IV. 2

a. Supóngase que, dados *n* elementos, se tenga la lista completa de las combinaciones simples que pueden formarse con dichos elementos tomándolos *de* a *k* (por ejemplo, dados los elementos *a, b, c y d*, la lista completa de sus combinaciones simples tomadas *de* a 3 es: *abc, abd, acd y bcd*).

b. Tómese una cualquiera de estas combinaciones (por ejemplo la *abc*) y hállese las $k!$ permutaciones que se pueden formar con sus *k* elementos (las 3! permutaciones que se pueden formar con sus 3 elementos *a, b y c: abc, acb, bac, bca, cab, cba*).
Hágase el mismo trabajo para cada una de las combinaciones de la lista mencionada en **a.** Lo que obtendrá es la lista completa de las variaciones simples de los antedichos *n* elementos tomados *de* a *k* ya que:

1º) Si una variación no aparece es debido a que no se consideró la combinación correspondiente, o si no a que no se hallaron todas las permutaciones de la misma, todo lo cual es contra hipótesis.

2º) Una misma variación no puede aparecer dos veces ya que, de lo contrario, o bien se consideró dos veces una misma permutación de los elementos de una misma combinación o bien hay dos combinaciones con los mismos elementos, todo lo cual es contra hipótesis.

c. Llámese $C_{n,k}$ a la cantidad de combinaciones simples que se pueden formar con *n* elementos tomados *de* a *k*. Según visto en **b**, cada una de dichas combinaciones simples genera $k!$ variaciones simples cuando se permutan sus elementos de todas las maneras posibles, y todas las variaciones así generadas constituyen la lista completa de las $V_{n,k}$ variaciones simples que se pueden formar con los antedichos *n* elementos tomados *de* a *k*. Por lo tanto resulta:

$$\boldsymbol{V_{n,k} = k!\, C_{n,k}}$$

teniéndose así que:

Ver **[2]** de CMB II

$$\boxed{C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}} \qquad \textbf{[1]}$$

Esta es la fórmula que indica la cantidad de combinaciones simples que se pueden formar con *n* elementos tomados *de* a *k*.

CMB IV. 3

a. Aplicación: Indicar de cuantas maneras se puede sacar una flor jugando al truco.
Considérese las 10 espadas de la baraja. Tres cualesquiera de estos naipes implican una flor de espadas, diferenciándose una flor de espadas de otra cuando las espadas que la constituyen no son exactamente las mismas. Es decir que cada una de estas flores de espadas es una combinación simple de las 10 espadas tomadas *de* a 3. Entonces:

Maneras de sacar flor de espadas = $C_{10,3}$

Como hay 4 palos en la baraja resulta entonces que:

$$\text{Maneras de sacar flor} = 4\ C_{10,3} = 4\frac{10!}{3!(10-3)!}$$

$$= 4\frac{10!}{3!7!} = 4\frac{8\times 9\times 10}{1\times 2\times 3} = 480$$

b. Aplicación: Jugando póker se obtiene un par doble "servido" si al recibir las 5 cartas reglamentarias resulta que dos de ellas son de un mismo valor, otras dos son de <u>otro</u> mismo valor y la carta restante es de un tercer valor (por ejemplo: 2 ases, 2 reyes y un 10).
Se pide indicar cuantos pares dobles servidos distintos pueden recibirse jugando con 52 cartas (4 palos y 13 valores distintos).
Para empezar considérense los pares dobles de ases con reyes (2 ases, 2 reyes y una carta adicional que no sea ni as ni rey). Entonces, como:

1º) Ya que hay 4 ases, dos ases pueden ser elegidos de $C_{4,2}$ maneras distintas.

2º) Ya que hay 4 reyes, dos reyes pueden ser elegidos de $C_{4,2}$ maneras distintas.

3º) Una carta adicional que no sea ni as ni rey puede ser elegida de 44 maneras distintas (cualquiera de las 44 cartas del mazo que no son ni as ni rey).

4º) Para formar un par doble de ases con reyes puede asociarse cualquier elección de ases con cualquier elección de reyes y con cualquier elección de carta restante.

resulta que:

$$\text{Cantidad de pares dobles de ases con reyes} = C_{4,2}\ .\ C_{4,2}\ .\ 44$$

Los dos valores que determinan un par doble (ases y reyes, o damas y ases, o seises y dieces, etc) pueden ser los elementos de cualquiera de las combinaciones de 2 de los 13 valores de la baraja considerada. Entonces, como:

1º) Hay $C_{13,2}$ de estas combinaciones.

2º) Para cada una de estas combinaciones hay una cantidad de pares dobles igual a la calculada para el caso de ases y reyes.

se tiene que:

$$\text{Cantidad de pares dobles} = C_{13,2}\ .\ (C_{4,2})^2\ .\ 44 =$$

$$= \frac{13!}{2!(13-2)!}.\left[\frac{4!}{2!(4-2)!}\right]^2.44 = 123.552$$

CMB V

__**Números combinatorios**__

CMB V. 1

Estos números están definidos de la siguiente manera:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \binom{n}{0} = 1 & (n \geq 0) \\ \binom{n}{k} = C_{n,k} & (n \geq k \geq 0) \end{array}} \qquad \textbf{[1]}$$

No se definen números combinatorios para $n < 0$ y para $n < k$.
En la práctica, cuando deba expresarse la cantidad de combinaciones simples de n elementos tomados *de* a k, la notación usual es:

$$\binom{n}{k}$$

en vez de $C_{n,k}$ (es decir que se usa la notación correspondiente a los números combinatorios en vez de la notación específica correspondiente a las cantidades de combinaciones simples).

CBM V. 2

Propiedades de los números combinatorios:

a. Según **[1]** es:

$$\binom{0}{0} = 1 \qquad \textbf{[2]}$$

b. $$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \binom{n}{n-k}$$

Resumiendo:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \textbf{[3]}$$

c.

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Resumiendo:

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k} \qquad \textbf{[4]}$$

CBM V. 3

<u>Triángulo de Pascal</u>

Supóngase que se desean hallar los números combinatorios indicados en la siguiente tabla triangular:

$$\begin{array}{lllllll}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
------------- \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & ---- \; \binom{n}{k} & ---- & \binom{n}{n}
\end{array}$$

Para empezar, como según indicado en **[1]** se tiene que:

$$\binom{n}{0}=1 \qquad\qquad \text{para todo } n \geq 0$$

resulta que todos los números de la primera columna de esta tabla serán iguales a uno.
Para terminar, los restantes números de la tabla son deducibles por la fórmula **[4]** más arriba indicada, resultando así:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 \\
1 & & 1 \\
& + & \downarrow \\
1 & & 2 & & 1 \\
& + & \downarrow & + & \downarrow \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
& + & \downarrow & + & \downarrow & + & \downarrow \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
& + & \downarrow & + & \downarrow & + & \downarrow & + & \downarrow \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
\qquad \longleftarrow \qquad \binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$$

CMB VI

<u>Variaciones con repetición</u>

CMB VI. 1

a. Las variaciones con repetición de elementos de n clases distintas tomados *de* a k son las distintas agrupaciones que pueden formarse con k elementos de manera tal que una agrupación se distinga de otra cuando <u>en por lo menos una misma ubicación tengan elementos de clases distintas, estando permitido (pero no siendo obligatorio) repetir en una misma agrupación elementos de una misma clase</u>

Según la definición recién dada, considerando los 3 elementos *a, b* y *c*:

1º) Sus variaciones con repetición *de* a 1 son:
a , b , c

2º) Sus variaciones con repetición tomados *de* a 2 son:
aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc

3º) Sus variaciones con repetición tomados *de* a 3 son:
aaa, aab, aac, aba, abb, abc, aca, acb, acc, baa, bab, bac, bba, bbb, bbc, bca, bcb, bcc, caa, cab, ccc, cba, cbb, cbc, cca, ccb, ccc.

4º) Sus variaciones con repetición tomados *de* a 4 son:
aaaa, aaab, aaac, aaba, aabb, aabc, etc.

La ley de formación de estas tablas es obvia.
Evidentemente, al revés de lo que ocurría con las variaciones simples, en el caso de las variaciones con repetición <u>puede</u> darse el caso de que sea $k > n$. Cuando es $k > n$, es obvio que es inevitable la repetición de uno o más elementos en todas las variaciones con repetición correspondientes.

CMB VI. 2

a. Sea $V'_{n,i}$ la cantidad de variaciones con repetición que se pueden formar con *n* elementos tomados *de* a *i* (por ejemplo, sea $V'_{3,2}$ la cantidad de variaciones con repetición que se pueden formar con los 3 elementos *a, b* y *c* tomados *de* a 2).
Considérese una cualquiera de dichas variaciones con repetición (por ejemplo la *ab*). Si a dicha variación con repetición se le agregan alternativamente cada uno de los *n* elementos considerados (cada uno de los 3 elementos *a, b* y *c*) se generarán *n* variaciones con repetición *de* a *i+1* (3 variaciones con repetición *de* a 3*: aba, abb y abc*).
Si se somete al mismo procedimiento a cada una de las $V'_{n,i}$ variaciones con repetición de los *n* elementos tomados *de* a *i* (las $V'_{n,2}$ variaciones con repetición de los elementos *a, b* y *c* tomados de a 2) se obtendrá la lista completa de las variaciones con repetición de los *n* elementos tomados *de* a *i+1* (la lista completa de las variaciones con repetición de los elementos *a, b* y *c* tomados *de* a 3). En efecto:

1º) Si en dicha lista faltara alguna de las variaciones *de* a *i+1*, por ejemplo la *aab*, eso sería debido sea a que no se agregó *b* a *aa*, o sino a que *aa* no figuraba en la lista de las variaciones *de* a 2, todo lo cual es contra hipótesis.

2º) Si en dicha lista apareciera 2 (o más) veces una misma variación *de* a $i+1$, por ejemplo si la *abc* apareciera dos veces, eso sería debido a que se agregó *c* a *ab* dos veces o si no a que *ab* figuraba dos veces en la lista de variaciones *de* a 2, todo lo cual es contra hipótesis.

b. Resumiendo:
Cada una de las $V'_{n,i}$ variaciones con repetición de los n elementos tomados *de* a i genera n variaciones con repetición de dichos elementos tomados *de* a $i+1$, constituyendo las variaciones con repetición así generadas la lista completa y sin redundancias de las $V'_{n,i+1}$ variaciones con repetición de los n elementos tomados *de* a $i+1$.
Por lo tanto:

$$V'_{n,i+1} = n\, V'_{n,i} \qquad \textbf{[1]}$$

c. Se verificará a continuación por medio del principio de inducción completa que la cantidad de variaciones con repetición que se pueden formar con n elementos tomándolos *de* a k está dada por la fórmula:

$$\boxed{V'_{n,k} = n^k} \qquad \textbf{[2]}$$

Para empezar: Como dados n elementos $a_1, ..., a_n$ se tiene que las variaciones con repetición de los mismos tomándolos *de* a 1 son:

$$a_1, \dots, a_n$$

resulta que su cantidad es n**,** teniéndose entonces que::

$$V'_{n,1} = n$$

con lo que resulta que la fórmula **[2]** se cumple cuando $k = 1$, quedando así satisfecha la 1ª condición del principio de inducción completa.
Por otra parte, sea un número natural cualquiera $i > 1$.
Si la fórmula **[2]** es válida para $k = i$ se tiene que:

$$V'_{n,i} = n^i$$

y entonces por **[1]** resulta que:

$$V'_{n,i+1} = n^{i+1}$$

obteniéndose así que si la fórmula **[2]** es válida cuando k asume un cierto valor i, entonces también será válida cuando k asuma el valor natural subsiguiente, quedando así satisfecha la 2ª condición del principio de inducción completa.
Resulta así que la fórmula **[2]** es válida para todo k natural.

CBM VI. 3

Aplicación: Indicar cuantas chapas patente de auto del tipo **MOLOS 27** o **KORAS 75** (consonante-vocal-consonante-vocal-consonante-2 dígitos) pueden formarse.
Sean las 3 ubicaciones 1, 3 y 5. Hay 22 consonantes y cualquiera de ellas puede ir en cualquiera de dichas ubicaciones. Dos "palabras de 3 consonantes" son distintas cuando en por lo menos en una misma ubicación relativa tienen letras distintas. Por lo tanto:

Cantidad de "palabras de 3 consonantes" = $\boldsymbol{V'_{22,3} = 22^3}$

Sean las ubicaciones 2 y 4. Hay 5 vocales y cualquiera de ellas puede ir en cualquiera de dichas ubicaciones. Por un razonamiento idéntico al seguido en el caso de las consonantes resulta que:

Cantidad de "palabras de dos vocales" = $\boldsymbol{V'_{5,2} = 5^2}$

Por último, hay 100 números de dos dígitos.
Como para formar una chapa patente puede asociarse cualquier "palabra de 3 consonantes" con cualquier "palabra de 2 vocales" y con cualquier número de dos dígitos resulta que:

$$\text{Cantidad de chapas patente} = V'_{22,3} \,.\, V'_{5,2} \,.\, 100 = 22^3 \,.\, 5^2 \,.\, 100$$

CMB VII

<u>Permutaciones con repetición</u>

CMB VII. 1

a. Sean los elementos *a, b, ... , g,* todos distintos entre sí (por ejemplo, los elementos *a, b* y *c*). Se llamarán permutaciones con repetición de λ_a veces *a,* λ_b veces *b*, ... , λ_g veces *g*, (por ejemplo 3 veces *a*, 2 veces *b* y 1 vez *c*) a todas las agrupaciones que se pueden formar colocando en $\lambda_a + \lambda_b + ... + \lambda_g$ ubicaciones (en 3+2+1 ubicaciones) λ_a veces elementos *a*, λ_b veces elementos *b*, ..., λ_g veces elementos *g* (3 veces elementos *a*, 2 veces elementos *b* y 1 vez elementos *c*), teniéndose que <u>dos agrupaciones serán consideradas distintas entre sí cuando en **por lo menos** una misma ubicación tengan elementos distintos.</u>

b. Por ejemplo, las permutaciones con repetición de 3 veces *a*, 2 veces *b* y 1 vez *c* son:

aaabbc, aaabcb, aaacbb, aacabb, acaabb, caaabb, aababc, aabacb, aabcab, aacbab, acabab, caabab, abaabc, abaacb, abacab, abcaab, acbaab, cabaab, baaabc, baaacb, baacab, bacaab, bcaaab, cbaaab, aabbac, aabbca, aabcba, aacbba, acabba, caabba, ababac, ababca, abacba, abcaba, acbaba, cababa, baabac, baabca, baacba, bacaba, bcaaba, cbaaba, abbaac, abbaca, abbcaa, abcbaa, acbbaa, cabbaa, babaac, babaca, babcaa, bacbaa, bcabaa, cbabaa, bbaaac, bbaaca, bbacaa, bbcaaa, bcbaaa, cbbaaa.

CBM VII. 2

a. Se calculará a continuación la cantidad de permutaciones con repetición que pueden formarse tomando λ_a veces *a*, λ_b veces *b*, ... ,λ_g veces *g*.
Se efectuará dicha demostración para el caso particular de λ_a veces *a*, λ_b veces *b* y λ_c veces *c*, (por ejemplo 3 veces *a*, 2 veces *b* y 2 veces *c*), pero resultará evidente que dicha demostración puede ser ampliada para cubrir el caso general.

b. Sean $\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c = n$ casillas (3 + 2 + 2 = 7 casillas). Evidentemente, la cantidad de permutaciones con repetición que pueden formarse tomando λ_a veces *a*, λ_b veces *b* y λ_c veces *c*, (3 veces *a*, 2 veces *b* y 2 veces *c*) es igual a la cantidad de maneras como pueden ubicarse en las *n* casillas (7 casillas) antedichas λ_a letras *a*, λ_b letras *b* y λ_c letras *c*, (3 letras *a*, 2 letras *b* y 2 letras *c*).

c. Se empezará por ubicar las letras *a*. Para hacer esto se eligen λ_a de las *n* casillas (3 de las 7 casillas) y en ellas se coloca la letra ***a***.
La antedicha elección puede ser hecha de $C_{n,\lambda_a} = \binom{n}{\lambda_a}$ maneras (de $C_{7,3} = \binom{7}{3} = 35$ maneras) ya que:

1º) En cada elección se toman λ_a de las *n* casillas.

2º) Una elección es distinta de otra cuando y sólo cuando ambas elecciones difieren en una o más casillas.

Resulta así (ver **CMB IV. 1**) que cada elección es una combinación simple de las *n* casillas tomadas *de* a λ_a (de las 7 casillas tomadas *de* a 3).

d. Después de ubicadas las λ_a letras *a* (las 3 letras a), quedan n-λ_a casillas libres (quedan 7-3 casillas libres). Por un razonamiento idéntico al indicado en **c** resulta que las λ_b letras *b* (las 2 letras *b*) pueden ser ubicadas en dichas n-λ_a casillas libres (en dichas 7-3 = 4 casillas libres) de:

$C_{n-\lambda_a,\lambda_b} = \binom{n-\lambda_a}{\lambda_b}$ maneras distintas (de $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$ maneras distintas).

e. Después de ubicadas las λ_a letras *a* y las λ_b letras *b* (las tres letras *a* y las dos letras *b*) quedan n-λ_a-λ_b = (λ_a + λ_b + λ_c)-λ_a-λ_b = λ_c casillas vacantes (2 casillas vacantes), teniéndose así que las λ_c letras *c*, (las 2 letras *c*) pueden ser ubicadas en dichas λ_c casillas vacantes (en dichas 2 casillas vacantes) de una única manera.

f. Se tiene entonces que:

Ver b

$$P'_{\lambda_a a,\lambda_b b,\lambda_c c} =$$

$$= \left[\begin{matrix} \textit{Cantidad de permutaciones con repetición que pueden} \\ \textit{formarse con } \lambda_a \textit{ elementos } a, \lambda_b \textit{ elementos } b \textit{ y} \lambda_c \textit{ elementos } c \end{matrix}\right] =$$

$$= \left[\begin{matrix} \textit{Maneras de ubicar } \lambda_a \textit{letras } a, \lambda_b \textit{letras } b \textit{ y} \lambda_c \textit{letras } c \\ \textit{en } n = \lambda_a + \lambda_b + \lambda_c \textit{casillas} \end{matrix}\right] =$$

Ver **c, d** y **e**

$$= \left[\begin{matrix} \textit{Maneras de ubicar} \\ \lambda_a \textit{letras } a \textit{ en} \\ n \textit{ casillas} \end{matrix}\right] \bullet \left[\begin{matrix} \textit{Maneras de ubicar} \\ \lambda_b \textit{letras } b \textit{ en} \\ n-\lambda_a \textit{ casillas} \end{matrix}\right] \bullet \left[\begin{matrix} \textit{Maneras de ubicar} \\ \lambda_c \textit{letras } c \textit{ en} \\ n-\lambda_a-\lambda_b = \lambda_c \textit{ casillas} \end{matrix}\right] =$$

$$= \binom{n}{\lambda_a} . \binom{n-\lambda_a}{\lambda_b} . 1 = \binom{n}{\lambda_a} . \binom{n-\lambda_a}{\lambda_b} =$$

$$= \frac{n!}{\lambda_a!(n-\lambda_a)!} . \frac{(n-\lambda_a)!}{\lambda_b!(n-\lambda_a-\lambda_b)!} =$$

$$= \frac{n!}{\lambda_a!(n-\lambda_a)!} . \frac{(n-\lambda_a)!}{\lambda_b!(n-\lambda_a-\lambda_b)!} . \frac{\overset{\lambda_c!}{(n-\lambda_a-\lambda_b)!}}{\underset{\lambda_c!}{(n-\lambda_a-\lambda_b)!}} = \frac{n!}{\lambda_a!\lambda_b!\lambda_c!}$$

Resumiendo:

$$P'_{\lambda_a a,\lambda_b b,\lambda_c c} = \frac{n!}{\lambda_a!\lambda_b!\lambda_c!} \quad , \quad n = \lambda_a + \lambda_b + \lambda_c$$

g. En el caso general hubiera resultado:

$$\boxed{P'_{\lambda_a a,\lambda_b b,\ldots\lambda_g g} = \frac{n!}{\lambda_a!\lambda_b!\ldots\lambda_g!} \quad , \quad n = \lambda_a + \lambda_b + \ldots + \lambda_g} \qquad \textbf{[1]}$$

Esta es la fórmula que indica la cantidad de permutaciones con repetición que se pueden formar tomando λ_a veces el elemento *a,* λ_b veces el elemento *b,* ..., y λ_g veces el elemento *g*.

h. Aplicación: Indicar cuantas palabras distintas (tengan o no sentido) pueden escribirse con las letras de la palabra MINIMO.
Evidentemente, dichas palabras no son más que las permutaciones con **repetición** que se pueden formar tomando 2 veces la letra M, 2 veces la letra I, 1 vez la letra N y 1 vez la letra O. Entonces:

$$\text{Cantidad de palabras} = P'_{2M,2I,1N,1O} = \frac{(2+2+1+1)!}{2!\ 2!\ 1!\ 1!} = \frac{6!}{2!\ 2!\ 1!\ 1!} = 180$$

CMB VIII

<u>Combinaciones con repetición</u>

CMB VIII. 1

a Las combinaciones con repetición de elementos de n clases distintas tomados de a k son las distintas agrupaciones *de* k elementos que pueden formarse de manera tal que una agrupación sea distinta de otra cuando <u>no estén formadas por iguales cantidades de los mismos elementos</u>. En una misma agrupación pueden haber (pero no es obligatorio) varios elementos de una misma clase. No importa el orden de los elementos en una misma agrupación.

b Según la definición recién dada, considerando elementos de clases *a, b* y *c*:

1º) Sus combinaciones con repetición tomados *de* a 1 son:
a , b , c

2º) Sus combinaciones con repetición tomados *de* a 2 son:
aa, ab, ac, ba, bb, bc, cc

3º) Sus combinaciones con repetición tomados *de* a 3 son:
aaa, aab, aac, abb, abc, acc, bbb, bbc, ccc

4º) Sus combinaciones con repetición tomados *de* a 4 son:
aaaa, aaab, aaac, aabb, aabc, aacc, abbb, abbc, abcc, accc, bbbb, bbbc, bbcc, bccc, cccc.

La ley de formación de estas tablas es obvia.
Al revés de lo que ocurría en el caso de las combinaciones simples, en el caso de combinaciones con repetición <u>puede</u> darse el caso de que sea $k > n$. Cuando es $k > n$, es obvio que es inevitable la repetición de uno o más elementos de una misma clase en todas las combinaciones con repetición correspondientes.

c. Notar que las agrupaciones *aaab* y *aaba* son variaciones con repetición distintas, pero por otra parte constituyen una misma combinación con repetición.

CBM VIII. 2

a. Se calculará a continuación la cantidad de combinaciones con repetición que pueden formarse con n elementos tomados *de* a k.

b. Supóngase tener una lista completa de todas las combinaciones que pueden formarse con los n elementos tomados *de* a j.
Llámese $L^n{}_j$ a dicha lista (por ejemplo, la $L^2{}_4$ de los dos elementos a y b es**:** *aaaa, aaab, aabb, abbb, bbbb*).
Llámese $C'_{n,j}$ a la cantidad de componentes de dicha lista ($C'_{2,4}$ a la cantidad de componentes de $L^2{}_4$). Como:

1º) Por razones de simetría todos los elementos figuran igual cantidad de veces en la lista $L^n{}_j$ (en la lista $L^2{}_4$ hay igual cantidad de letras a y de letras b).

2º) Hay $C'_{n,j}$ combinaciones en la lista $L^n{}_j$ (hay $C'_{2,4}$ combinaciones en la lista $L^2{}_4$)

3º) Cada combinación de $L^n{}_j$ tiene j elementos (cada combinación de $L^2{}_4$ tiene 4 elementos).

Resulta que:

Cantidad de elementos a en la lista $L^n{}_j = \dfrac{j.C'_{n,j}}{n}$ **[1]**

(Cantidad de elementos a en la lista $L^2{}_4 = \dfrac{4.C'_{2,4}}{2}$)

c. En la lista $L^n{}_j$ táchense todas las combinaciones con repetición en las cuales no figure el elemento a (táchese a *bbbb* en la lista $L^2{}_4$).
Notar que al hacer esto no se tacha ningún elemento a.
A continuación, en todas las combinaciones con repetición que queden, en todas las cuales figura a una o más veces, táchese un <u>único</u> elemento a. Se obtendrá así una lista $L^n{}_{j-1}$ que, según se verá, constituye la lista completa de las combinaciones con repetición de los n elementos considerados tomados *de* a $j-1$. La lista $L^2{}_3$ de los dos elementos a y b tomados de a 3 sería como sigue:

aaa, aab, abb, bbb

En efecto:

1º) Si en $L^2{}_3$ faltara por ejemplo *aab*, eso sería debido a que en $L^2{}_4$ no figuraba *aaab*, lo cual es contra hipótesis.

2º) Si en $L^2{}_3$ figurara dos veces *abb*, eso sería debido a que en $L^2{}_4$ figuraba dos veces *aabb*, lo cual también es contra hipótesis.

d. Ya que $L^n{}_{j-1}$ (ya que $L^2{}_3$) es la lista completa de las combinaciones con repetición de los n elementos considerados tomados *de* a $j-1$ (de los dos elementos a y b tomados *de* a 3), se tiene que llamando $C'_{n,j-1}$ (llamando $C'_{2,3}$) a la cantidad de combinaciones con repetición que hay en ella (en $L^2{}_3$) resulta por un razonamiento análogo al hecho en b que:

Cantidad de elementos a en la lista $L^n{}_{j-1} = \dfrac{(j-1).C'_{n,j-1}}{n}$ **[2]**

(Cantidad de elementos a en la lista $L^2{}_3 = \dfrac{3.C'_{2,3}}{2}$)

e. Se contarán ahora de una manera distinta a la indicada en **b** la cantidad de elementos *a* que figuran en la lista $L^n{}_j$. Se tiene que según visto en **c** es:

$$\begin{bmatrix} \textit{Cantidad de} \\ \textit{elementos a} \\ \textit{en } L_j^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{Cantidad de elementos} \\ \textit{a tachados para pasar} \\ \textit{de } L_j^n \textit{ a } L_{j-1}^n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \textit{Cantidad de} \\ \textit{elementos a} \\ \textit{en } L_{j-1}^n \end{bmatrix}}_{=\frac{(j-1).C'_{n,j-1}}{n}}$$

Ver **[2]**

Teniendo en cuenta (ver **c**) que la cantidad de elementos *a* tachados para pasar de $L^n{}_j$ a $L^n{}_{j-1}$ es $C'_{n,j-1}$ (un *a* tachado por cada componente de $L^n{}_{j-1}$, es decir por cada combinación con repetición *j-1* a *j-1*), resulta entonces que:

Cantidad de elementos a en la lista $L^n{}_j = C'_{n,j-1} + \dfrac{(j-1).C'_{n,j-1}}{n}$ **[3]**

f. Comparando **[1]** y **[3]** se tiene entonces que:

$$\frac{j\ C'_{n,j}}{n} = C'_{n,j-1} + \frac{(j-1)C'_{n,j-1}}{n}$$

de donde resulta que:

$$C'_{n,j} = \frac{n+j-1}{j} C'_{n,j-1}$$

y poniendo que $i = j-1$ esta fórmula toma el aspecto:

$$C'_{n,i+1} = \frac{n+i}{i+1} C'_{n,i} \qquad \textbf{[4]}$$

g. Se verificará a continuación por medio del principio de inducción completa que la cantidad de combinaciones con repetición que se pueden formar con *n* elementos tomados *de* a *k* está dada por la fórmula:

$$\boxed{C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}} \qquad \textbf{[5]}$$

Para empezar, como dados los *n* elementos $a_1, ..., a_n$ se tiene que las combinaciones con repetición de los mismos, tomándolos *de* a 1 son:

$$a_1, \ldots, a_n$$

resulta que su cantidad es *n*, teniéndose entonces que:

$$C'_{n,1} = n = \binom{n+1-1}{1}$$

con lo que resulta que la fórmula **[5]** se cumple cuando $k = 1$, quedando así satisfecha la 1ª condición del principio de inducción completa.
Por otra parte, sea un número natural cualquiera $i > 1$.
Si la fórmula **[5]** es válida para $k = i$ se tendrá que:

$$C'_{n,i} = \binom{n+i-1}{i} = \frac{(n+i-1)!}{i!(n-1)!}$$

y entonces por **[4]** resulta que:

$$C'_{n,i+1} = \frac{(n+i)}{(i+1)} \frac{(n+i-1)!}{i!(n-1)!} = \frac{(n+i)!}{(i+1)!(n-1)!} = \frac{[n+(i+1)-1]\ !}{(i+1)![n+(i+1)-1-(i+1)]\ !} =$$
$$= \binom{n+(i+1)-1}{(i+1)}$$

obteniéndose así que si la fórmula **[5]** es válida cuando *k* asume un cierto valor i, entonces será también válida cuando *k* asume el valor natural subsiguiente, quedando así también satisfecha la 2ª condición del principio de inducción completa.
Resulta así que la fórmula **[5]** es válida para todo *k* natural.

h. Aplicación: Un dominó común tiene 7 símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) y 28 fichas. Indicar cuantas fichas tendría un dominó hipotético de 10 símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).
En cada ficha de este nuevo dominó habría dos símbolos, teniéndose que:

1º) En una ficha puede estar repetido un mismo símbolo.
2º) Dos de estas fichas son distintas cuando no están compuestas por exactamente los mismos símbolos.

Por lo tanto, las fichas antedichas corresponden a las combinaciones con repetición de los 10 símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 tomados *de* a 2.
Es decir que:
Cantidad de fichas en un dominó de 10 símbolos = $C'_{10,2}$ =

$$= \binom{10+2-1}{2} = \binom{11}{2} = \frac{11!}{2!(11-2)!} = 55$$

CMB IX

<u>Aplicaciones varias</u>

CMB IX. 1

a. Indicar cuantos triángulos determinan 20 puntos distribuidos de manera tal que:
1º) Haya 5 de ellos sobre una misma recta.
2º) Salvo los recién indicados, no haya 3 o más puntos sobre una misma recta.

b. Supóngase para empezar que los 20 puntos sean tales que no haya 3 o más de ellos sobre una misma recta.
En estas condiciones, todas las agrupaciones de 3 de esos 20 puntos determinan triángulos (los 3 puntos hacen de vértices), siendo dos triángulos distintos cuando las respectivas agrupaciones de puntos tienen por lo menos un punto distinto.
Es decir que a cada triángulo corresponde una combinación simple de 3 de los 20 puntos y viceversa. La cantidad de estos triángulos es entonces igual a:

$$C_{20,3} = \binom{20}{3} = \frac{20!}{3!(20-3)!} = 1140$$

c. Supóngase ahora que 5 de los 20 puntos considerados se desplacen sobre el plano hasta estar sobre una misma recta. Al ocurrir esto, evidentemente desaparecen todos los triángulos formados por 3 de estos 5 puntos, es decir que desaparecerá una cantidad de triángulos igual a:

$$C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

d. Entonces, en las condiciones especificadas por el problema:

Cantidad de triángulos = 1140 - 10 = 1130

CBM IX. 2

Sea un candado a código con 5 tambores de 27 letras. Uno solo de estos códigos abre el candado. Suponiendo que se puedan probar 20 códigos por minuto, indicar cuanto sería el tiempo máximo necesario para abrir el candado.
Los 5 tambores antedichos suministran códigos tales como **AAAAA, ABCDE, ZKBWW, EDCBA**, etc.. Evidentemente, dos códigos serán distintos entre sí cuando en por en por lo menos una misma ubicación presenten letras distintas y por lo tanto se tiene que los distintos códigos no son más que las variaciones con repetición de las 27 letras del alfabeto tomadas *de* a 5. Entonces:

Cantidad de códigos = $V'_{27,5} = 27^5 = 14.348.907$

Probando a razón de 20 códigos por minuto y suponiendo que el código que abre el candado sea el último en ser probado se necesitarían:

$$\frac{14.348.907}{20 \times 60} = 11.957 \text{ horas}$$

CBM IX. 3

El alfabeto Morse tiene dos elementos: punto y raya. Indicar cuantos códigos se pueden formar con <u>hasta</u> 4 de dichos elementos.
Tomando por ejemplo 3 elementos, se pueden formar códigos tales como:

$- \cdot -\ ,\ \cdot - \cdot\ ,\ \cdot \cdot \cdot\ ,\ - - \cdot$, etc.

Evidentemente, dos códigos serán distintos entre sí cuando en por lo menos en una misma ubicación presenten elementos distintos y, por lo tanto, se tiene que dichos códigos no son más que las variaciones con repetición de los 2 elementos punto y raya tomados *de* a 3, siendo su cantidad igual a $V'_{2,3}$.
Visto y considerando lo ejemplificado recién, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} \textit{Cantidad de códigos} \\ \textit{que se pueden formar} \\ \textit{con } \underline{\textit{hasta}} \textit{ 4 elementos} \\ \textit{punto y raya} \end{pmatrix} = V'_{2,1} + V'_{2,2} + V'_{2,3} + V'_{2,4} = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 28$$

CMB IX. 4

Se pide indicar el coeficiente que afectará a a^2b^2c al desarrollar $(a+b+c)^5$.
Se tiene que:

$$(a+b+c)^5=(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$$

El desarrollo del producto indicado en el 2º miembro de esta expresión se obtiene tomando de todas las maneras posibles un sumando en cada paréntesis, multiplicándolos entre sí y sumando luego los resultados así obtenidos.
Evidentemente se obtendrá un a^2b^2c cada vez que se elija a a en 2 de los 5 paréntesis, a b en 2 de los 3 paréntesis restantes y a c en el único paréntesis remanente.
Codificando como *abacb* al hecho de haber elegido a a en los paréntesis 1º y 3º, a b en los paréntesis 2º y 5º y a c en el 4º, se tiene entonces que:

Coeficiente que afecta a a^2b^2c

$$(K_{a^2b^2c})a^2b^2c = \overbrace{aabbc + aabcb + aacbb + acabb + ...}^{K_{a^2b^2c}\ \text{sumandos}}$$

Los sumandos de esta expresión tienen dos letras a, 2 letras b y una letra c, teniéndose que dos de estos sumandos son distintos entre sí cuando son distintas las ubicaciones relativas de las letras antedichas.
Por lo tanto, dichos sumandos no son mas que las permutaciones con repetición de 2 veces a, 2 veces b y 1 vez c, siendo entonces su cantidad igual a $P'_{2a,2b,1c}$.
Por lo tanto:

$$K_{a^2b^2c} = \text{Coeficiente que afecta a } a^2b^2c \text{ en el desarrollo de } (a+b+c)^5 =$$

$$= P'_{2a,2b,1c} = \frac{(2+2+1)!}{2!\ 2!\ 1!} = \frac{5!}{2!\ 2!\ 1!} = 30$$

CMB IX. 5

Se pide indicar cuantos sumandos tendrá el desarrollo de $(a+b+c)^5$.
Por lo visto en **CMB IX. 4** se tiene que:

$$(a+b+c)^5 = (a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c) =$$
$$= (K_{a^5})a^5 + (K_{a^2b^3})a^2b^3 + (K_{a^3b^2})a^3b^2 + (K_{a^2b^2c})a^2b^2c + etc.$$

Se tiene que a^5, a^2b^3, a^3b^2, a^2b^2c, etc. tienen todos 5 factores elegidos entre a, b y c, siendo dos de estas expresiones distintas entre sí cuando <u>no</u> tienen exactamente la misma cantidad de los mismos factores. Por lo tanto, a^5, a^2b^3, a^3b^2, a^2b^2c, etc. no son más que las combinaciones con repetición de a, b y c, tomadas de a 5. Por lo tanto:

Cantidad de sumandos del desarrollo $(a+b+c)^5 =$

$$= C'_{3,5} = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = 21$$

<u>Ejercicios y problemas sobre Cálculo Combinatorio</u>

CMB 1

Llamando palabra a toda sucesión de letras, indicar cuantas palabras pueden formarse con las letras de la palabra **UNIVERSAL** sin repetir letras en una misma palabra y tales que:

a) tengan 9 letras
b) tengan 7 letras
c) tengan 7 letras y que empiecen con U
d) tengan 7 letras, que empiecen con U y terminen con L
e) tengan 7 letras, que empiecen con U y no contengan a L
f) tengan 7 letras y que empiecen con vocal
g) tengan 7 letras, que empiecen con vocal y terminen en consonante
h) tengan 7 letras y que las dos primeras letras sean vocales
i) tengan 7 letras y que las tres primeras letras sean consonantes.

CMB 2

Indicar de cuantas maneras pueden ordenarse en un estante 10 libros distintos si 3 de ellos deben estar siempre juntos.

CMB 3

Indicar de cuantas maneras pueden cubrirse 4 cargos con 7 candidatos si los cargos son idénticos.

CMB 4

Un club tiene 100 socios varones y 20 socios mujeres. Indicar cuantas comisiones directivas de 3 socios y <u>por lo menos</u> un varón se pueden formar.

CMB 5

Indicar la cantidad de diagonales de un polígono convexo de 20 lados.

CMB 6

Sea un plantel de jugadores de básquet compuesto por 12 jugadores. Indicar cuantos equipos distintos de 5 jugadores pueden formarse en cada una de las siguientes circunstancias:

a) Si el jugador A está siempre incluido
b) Si los jugadores A y B están ambos incluidos
c) Si están incluidos A o B, pero no ambos
d) Si están incluidos <u>por lo menos</u> 2 jugadores elegidos entre A, B, C y D.

CMB 7

Sea una bolsa con 3 fichas azules (a_1, a_2, a_3) y 4 blancas (b_1, b_2, b_3, b_4).
Indicar de cuantas maneras pueden extraerse 2 fichas azules y 3 blancas de dicha bolsa.

CMB 8

¿Cuántas rectas distintas determinan 12 puntos entre los cuales hay 4 alineados?.

CMB 9

Indicar cuantos triángulos distintos determinan los 12 puntos del problema anterior.

CMB 10

Indicar de cuantas maneras se pueden ordenar en un estante 10 libros si 3 de ellos son idénticos.

CMB 11

Indicar de cuantas maneras distintas se pueden distribuir 12 personas en 3 grupos que consten respectivamente de 5, 4 y 3 personas.

CMB 12

Indicar cuantas palabras distintas se pueden formar con 3 letras de la palabra IDEA (pudiendo repetirse letras).

CMB 13

Indicar cuantos números capicúas de 5 dígitos hay.

CMB 14

Jugando a la generala con 5 dados de distintos colores, indicar de cuantas maneras se pueden sacar:

a) Generala servida
b) Póker servido
c) Full servido
d) Escalera servida

CMB 15

Suponiendo que en una tarjeta de PRODE se perfore un solo resultado por partido, indicar:

a) ¿Cuántas apuestas distintas se pueden hacer?
b) ¿Cuántas de esas apuestas tienen un acierto?
c) ¿Cuántas de esas apuestas tienen dos aciertos?
d) ¿Cuántas de esas apuestas tienen ***k*** aciertos?

CMB 16

Sean 5 botellas de vino tinto, 4 de vino blanco y 3 de vino rosado, todas de la misma marca. Indicar de cuantas maneras distinguibles a simple vista pueden alinearse dichas botellas.

CMB 17

Sean las mismas 12 botellas del problema anterior. Eligiendo al azar 3 de esas 12 botellas para una comida, indicar cuantas elecciones distintas podrían hacerse <u>desde el punto de vista de los comensales</u>.

CMB 18

Calcular el valor de $\boldsymbol{x}$ tal que:

a) $\binom{9}{x} = \binom{9}{x+1}$ b) $3\binom{x}{2} = 2\binom{x+1}{4}$ c) $5\binom{x}{3} = 8\binom{x-1}{4}$

CMB 19

Probar que:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \ldots + \binom{k-1}{k-1}$$ ver **[4]** de CMB V

CMB 20

Probar que el producto de los $\boldsymbol{n}$ primeros números naturales es divisible por $\alpha!\ \beta!\ \ldots\ \eta!$ cuando es $\alpha + \beta + \ldots + \eta = \boldsymbol{n}$.

Binomio de Newton

BIN I

Deducción de la fórmula del binomio de Newton

a. Por la regla de multiplicación de polinomios y por el desarrollo del triángulo de Pascal (ver CMB V. 3) se tiene que:

$$(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4$$

Etc.
Existe pues una fuerte presunción que para el caso general se tenga:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{i}a^{n-i}b^i + \ldots + \binom{n}{n}a^0b^n \qquad \textbf{[1]}$$

b. Se verificará esta presunción por el principio de inducción completa.
Para empezar, para $n = 1$ la fórmula **[1]** indica que:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1 = a+b \text{, resultado cierto.}$$

Por lo tanto la fórmula **[1]** cumple con la 1ª condición del principio de inducción completa.

c. <u>En el caso</u> de que la fórmula **[1]** <u>fuera</u> cierta para un $n = j$, la fórmula **[1]** indicaría que sería:

$$(a+b)^j = \binom{j}{0}a^jb^0 + \binom{j}{1}a^{j-1}b^1 + \binom{j}{2}a^{j-2}b^2 + \ldots + \binom{j}{j-2}a^2b^{j-2} + \binom{j}{j-1}ab^{j-1} + \binom{j}{j}a^0b^j \quad \textbf{[2]}$$

y, siempre en el caso de que la fórmula **[1]** fuera cierta para $n = j$, multiplicando miembro a miembro esta expresión **[2]** por $a + b$ se obtendría la siguiente expresión que también sería cierta:

$$
\left.
\begin{aligned}
&(a+b)^{j+1} = (a+b)^j (a+b) = \\
&= \overbrace{\left[\binom{j}{0}a^{j+1}b^0 + \binom{j}{1}a^j b^1 + \binom{j}{2}a^{j-1}b^2 + \ldots + \binom{j}{j-2}a^3 b^{j-2} + \binom{j}{j-1}a^2 b^{j-1} + \binom{j}{j}a^1 b^j\right]}^{(a+b)^j \text{ multiplicado por } a} + \\
&\quad + \underbrace{\left[\binom{j}{0}a^j b^1 + \binom{j}{1}a^{j-1}b^2 + \ldots + \binom{j}{j-2}a^2 b^{j-1} + \binom{j}{j-1}a^1 b^j + \binom{j}{j}a^0 b^{j+1}\right]}_{(a+b)^j \text{ multiplicado por } b} = \\
&= \binom{j}{0}a^{j+1}b^0 + \left[\binom{j}{1}+\binom{j}{0}\right]a^j b^1 + \left[\binom{j}{2}+\binom{j}{1}\right]a^{j-1}b^2 + \ldots \\
&\quad \ldots + \left[\binom{j}{j-1}+\binom{j}{j-2}\right]a^2 b^{j-1} + \left[\binom{j}{j}+\binom{j}{j-1}\right]a^1 b^j + \binom{j}{j}a^0 b^{j+1}
\end{aligned}
\right\} \quad \textbf{[3]}
$$

Ahora bien:

1º. $\binom{j}{0} = \binom{j+1}{0} = 1 \qquad \binom{j}{j} = \binom{j+1}{j+1} = 1$ **[4]**

2º. Según visto en **[4]** de CMB V. 2 es:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} \qquad \forall\ k \le n-1$$

y haciendo $j = n\text{-}1$ resulta:

$$\binom{j}{k} + \binom{j}{k-1} = \binom{j+1}{k} \qquad \forall\ k \le j \qquad \textbf{[5]}$$

es decir que:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\binom{j}{1}+\binom{j}{0} = \binom{j+1}{1} && \text{(haciendo } k = 1 \text{ en } \textbf{[5]}\text{)}\\
&\binom{j}{2}+\binom{j}{1} = \binom{j+1}{2} && \text{(haciendo } k = 2 \text{ en } \textbf{[5]}\text{)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \\
&\binom{j}{j-1}+\binom{j}{j-2} = \binom{j+1}{j-1} && \text{(haciendo } k = j\text{-}1 \text{ en } \textbf{[5]}\text{)}\\
&\binom{j}{j}+\binom{j}{j-1} = \binom{j+1}{j} && \text{(haciendo } k = j \text{ en } \textbf{[5]}\text{)}
\end{aligned}
\right\} \quad \textbf{[6]}
$$

y entonces, por **[3], [4]** y **[6]** resulta que en el caso en que la fórmula **[1]** fuera cierta para un cierto $n = j$ se tendría que:

$$(a+b)^{j+1}=\binom{j+1}{0}a^{j+1}b^0+\binom{j+1}{1}a^jb^1+\binom{j+1}{2}a^{j-1}b^2+\ldots$$

$$\ldots+\binom{j+1}{j-1}a^2b^{j-1}+\binom{j+1}{j}a^1b^j+\binom{j+1}{j+1}a^0b^{j+1}=$$

$$=\binom{j+1}{0}a^{j+1}b^0+\binom{j+1}{1}a^{(j+1)-1}b^1+\binom{j+1}{2}a^{(j+1)-2}b^2+\ldots$$

$$\ldots+\binom{j+1}{j-1}a^2b^{(j+1)-2}+\binom{j+1}{j}a^1b^{(j+1)-1}+\binom{j+1}{j+1}a^0b^{j+1}$$

y esta última expresión no es más que la fórmula **[1]** cuando en ella se toma $n=j+1$.
Resumiendo:
De ser cierta la fórmula **[1]** para un cierto $n=j$, también lo será para $n=j+1$.
Queda así probada la 2ª condición del principio de inducción completa.
Entonces, esto y lo deducido en **b.** indican que la fórmula **[1]** es válida para todo n.

d. Notar (ver **[1]**) que el desarrollo de $(a+b)^n$ consta de <u>$n+1$ sumandos</u> y que el índice i corresponde al sumando $i+1$'ésimo.

BIN II

Problemas

a. Desarrollar a $(a+2b)^6$ por la fórmula del binomio de Newton.

$$(a+2b)^6=\binom{6}{0}a^6+\binom{6}{1}a^5(2b)+\binom{6}{2}a^4(2b)^2+\binom{6}{3}a^3(2b)^3+$$

$$+\binom{6}{4}a^2(2b)^4+\binom{6}{5}a(2b)^5+\binom{6}{6}(2b)^6=$$

$$=a^6+6.2a^5b+15.2^2a^4b^2+20.2^3a^3b^3+15.2^4a^2b^4+6.2^5ab^5+2^6b^6=$$

$$=a^6+12\,a^5b+60\,a^4b^2+160\,a^3b^3+240\,a^2b^4+192\,ab^5+64\,b^6$$

b. Hallar los primeros 4 términos del desarrollo en binomio de Newton de $(x^3-3y^2)^{12}$

$$(x^3-3y^2)^{12}=(x^3)^{12}+\binom{12}{1}(x^3)^{11}(-3y^2)+\binom{12}{2}(x^3)^{10}(-3y^2)^2+\binom{12}{3}(x^3)^9(-3y^2)^3+\ldots=$$

$$=x^{36}+12(-3)x^{33}y^2+66(-3)^2x^{30}y^4+220(-3)^3x^{27}y^6+\ldots=$$

$$=x^{36}-36\,x^{33}y^2+594\,x^{30}y^4-5940\,x^{27}y^6+\ldots$$

c. Hallar el 6º término del desarrollo de $[1/(2a)-3]^{16}$ en binomio de Newton.
Dicho 6º término ($i=5$ en **[2]** de BIN I) es:

$$\binom{16}{5}\left(\frac{1}{2a}\right)^{16-5}(-3)^5=4368.(-3)^5\,\frac{1}{2^{11}a^{11}}=-\frac{66339}{128\,a^{11}}$$

BIN III

Fórmula de Leibnitz

BIN III. 1

a. Se demostrará que:

$$(a+b+c+...+l)^n = \sum_{\substack{p_a,\, p_b,\, p_c,\, ...,\, p_l \text{ enteros no negativos} \\ p_a+p_b+p_c+\,...\,+p_l\; =\, n}} \frac{n!}{p_a!\,p_b!\,p_c!...p_l!} a^{p_a} b^{p_b} c^{p_c} ... l^{p_l} \qquad \textbf{[1]}$$

b. Se tiene que para hallar a:

$$(a+b+c+...+l)^n = \overbrace{(a+b+c+...+l)(a+b+c+...+l)...(a+b+c+...+l)}^{n \text{ paréntesis}} \qquad \textbf{[2]}$$

se debe proceder como sigue.

1º) Hallar todos los productos parciales obtenibles tomando de todas las maneras posibles (y distintas entre sí) un solo factor en cada paréntesis del 2º miembro de **[2]**.
2º) Sumar todos los productos parciales así obtenidos.

c. Sea ahora un producto parcial cualquiera:

$$a^{p_a} b^{p_b} c^{p_c} ... l^{p_l}$$

en el cual deben ser evidentemente:

$p_a, p_b, p_c, ..., p_l$ enteros no negativos y $p_a + p_b + p_c + ... + p_l = n$ **[3]**

Interesa conocer la cantidad de productos parciales iguales a **[3]** que genera el desarrollo del 2º miembro de **[2]**.
Por una generalización del razonamiento hecho en CMB IX. 4 se llega a la conclusión de que dicha cantidad es igual a:

$$P'_{p_a a, p_b b, p_c c, ..., p_l l} = \frac{n!}{p_a! p_b! p_c! ... p_l!} \qquad \textbf{[4]}$$

d. Procediendo de igual manera con todos los productos parciales distintos entre sí que puedan presentarse en el desarrollo del 2º miembro de **[2]**, se llega a lo indicado en **[1]**.

e. Se hace notar que uno o más de los valores $p_a, p_b, p_c, ..., p_l$ pueden ser nulos, pero que su suma debe ser siempre igual a *n*.

f. Generalizando lo visto en CMB IX. 5 se tiene que la cantidad de sumandos de la sumatoria indicada en **[1]** es igual a:

$$\binom{(Cantidad\ \ de\ \ elementos\ \ a,b,c,...,l) + n - 1}{n} \qquad \textbf{[5]}$$

BIN III. 2

Ejemplo: Se desarrollará a $(a + b + c)^4$ por la fórmula de Leibnitz.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^4 &= \frac{4!}{4!\ 0!\ 0!}a^4 + \frac{4!}{0!\ 4!\ 0!}b^4 + \frac{4!}{0!\ 0!\ 4!}c^4 + \frac{4!}{3!\ 1!\ 0!}a^3b + \frac{4!}{3!\ 0!\ 1!}a^3c + \\ &+ \frac{4!}{1!\ 3!\ 0!}ab^3 + \frac{4!}{0!\ 3!\ 1!}b^3c + \frac{4!}{1!\ 0!\ 3!}ac^3 + \frac{4!}{0!\ 1!\ 3!}bc^3 + \frac{4!}{0!\ 2!\ 2!}b^2c^2 + \\ &+ \frac{4!}{2!\ 0!\ 2!}a^2c^2 + \frac{4!}{2!\ 2!\ 0!}a^2b^2 + \frac{4!}{2!\ 1!\ 1!}a^2bc + \frac{4!}{1!\ 2!\ 1!}ab^2c + \frac{4!}{1!\ 1!\ 2!}abc^2 = \\ &= (a^4+b^4+c^4) + 4\ (a^3b + a^3c + ab^2 + b^3c + ac^3 + bc^3) + \\ &\quad + 6\ (b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2) + 12\ (a^2bc + ab^2c + abc^2)\end{aligned}$$

Notar que la cantidad de sumandos es 15, tal como predicho por la fórmula **[5]**:

$$\text{Cantidad de sumandos} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$$

Ejercicios y problemas sobre el binomio de Newton y la fórmula de Leibnitz

BIN 1

Desarrollar en binomio de Newton y simplificar todo lo posible:

a) $(2x + y)^7$ b) $(x^{1/3} + y^{1/3})^6$ c) $(x^{2/5} - 3\,y^{-2})^6$

d) $(xy - 2)^4$ e) $(x^{-1} + 2y^{-2})^6$ f) $(x^2 + x^3)^4$

BIN 2

Hallar en sus desarrollos del binomio de Newton:

a) El 7º término de $(2x - y)^{12}$

b) El 9º término de $(2 + \frac{x}{4})^{15}$

c) El término central de $(2 + \frac{3}{x})^{10}$

d) El término en x^7 de $(2x - 3)^{10}$

e) El término en $\frac{x^2}{y^2}$ de $(\frac{x}{y} - \frac{y^2}{2\,x^2})^8$

BIN 3

Probar que:

a) $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$

b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

BIN 4

Encontrar los términos del desarrollo de $(a + b + c + \ldots + l)^n$ por la fórmula de Leibnitz a los cuales corresponden los coeficientes mas grandes.

BIN 5

Hallar el coeficiente de x^5 en el desarrollo según la fórmula de Leibnitz de $(1+x+x^2 +\ldots+x^7)^3$.