Fungsi Dua Peubah dan Turunan Parsial

Irisan Kerucut, Permukaan

Definisi fungsi dua peubah

Turunan Parsial

Maksimum dan Minimum

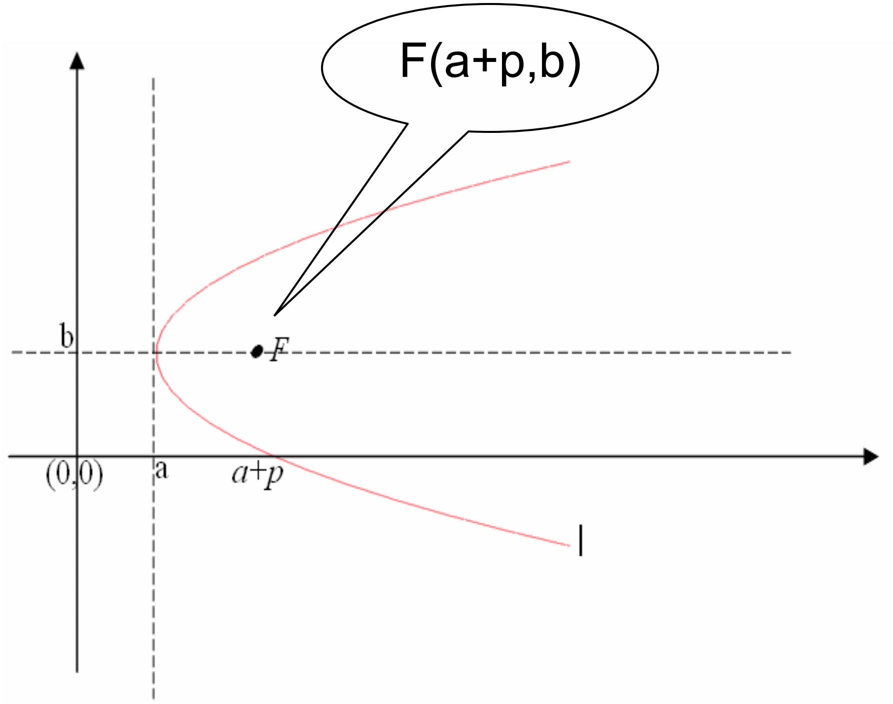
Irisan Kerucut

- **Parabola**

  Sebuah parabola dengan titik puncak *(a,b)* memiliki bentuk persamaan baku :

  $$(y-b)^2 = 4p(x-a)$$

  Dengan $F(a+p,b)$ menyatakan koordinat titik fokus parabola

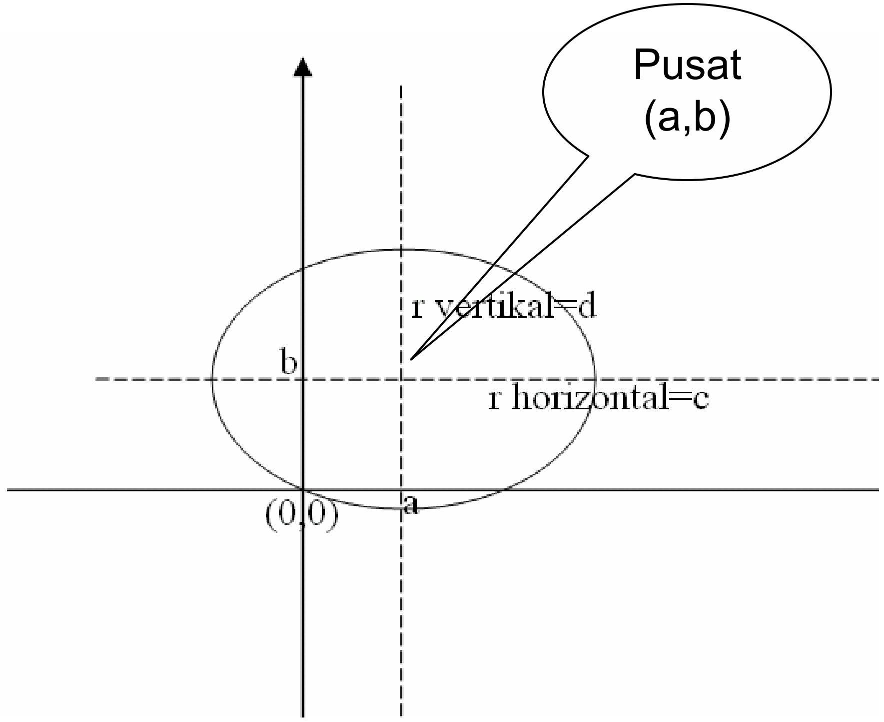


Irisan Kerucut

- **Ellips**

Sebuah ellips dengan pusat *(a,b)* dengan jari – jari tegak adalah d dan jari – jari horisontal adalah c memiliki persamaan baku

$$\frac{(x-a)^2}{c^2}+\frac{(y-b)^2}{d^2}=1$$

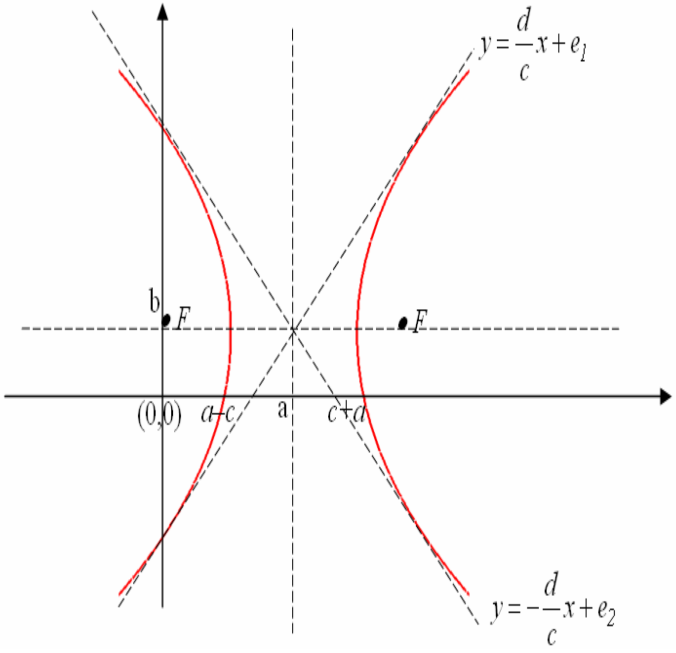


Irisan Kerucut

- **Hiperbola**

Sebuah hiperbola dengan pusat *(a,b)* dengan gradien garis asymtot d/c atau -d/c memiliki persamaan baku

$$\frac{(x-a)^2}{c^2} - \frac{(y-b)^2}{d^2} = 1$$



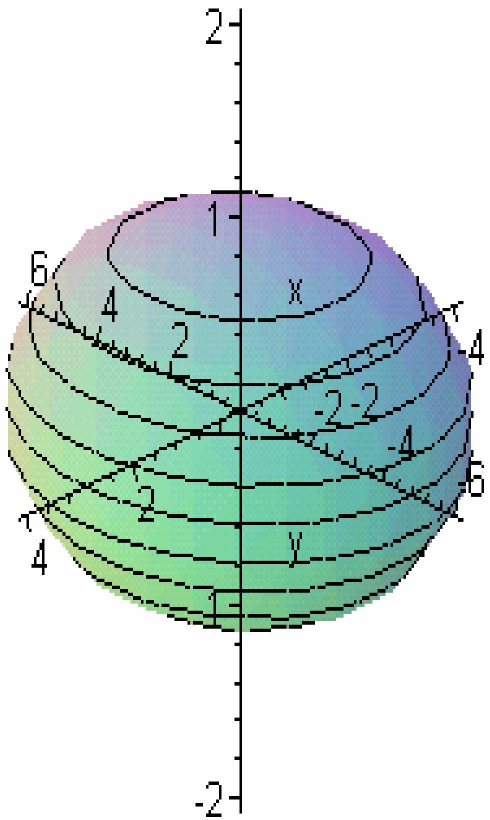
Jenis – jenis permukaan dimensi tiga

- Elipsoida

Persamaan baku Elipsoid dengan pusat *(0,0,0)* adalah

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Jejak pada bidang *xy*, *xz* dan *yz* berupa elips



Jenis – jenis permukaan dimensi tiga

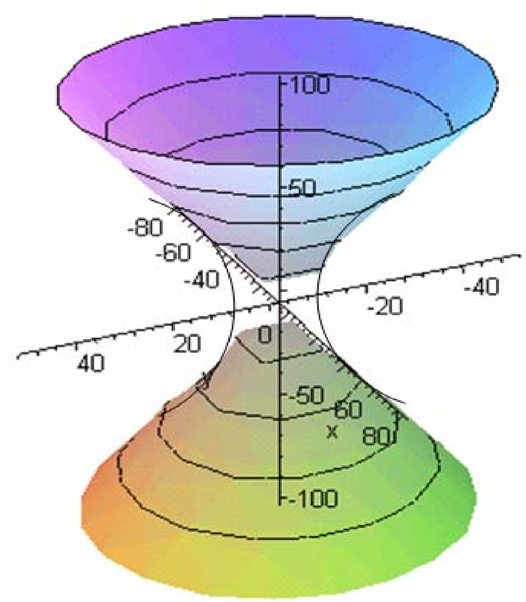
INSTITUT TEKNOLOGI TELKOM

- Hiperboloid Lembar Satu

  Persamaan baku Hiperboloid Lembar Satu dengan pusat *(0,0,0)* adalah

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

  Jejak pada bidang *xy* adalah elips, sedangkan jejak pada bidang *xz* dan *yz* adalah hiperbola



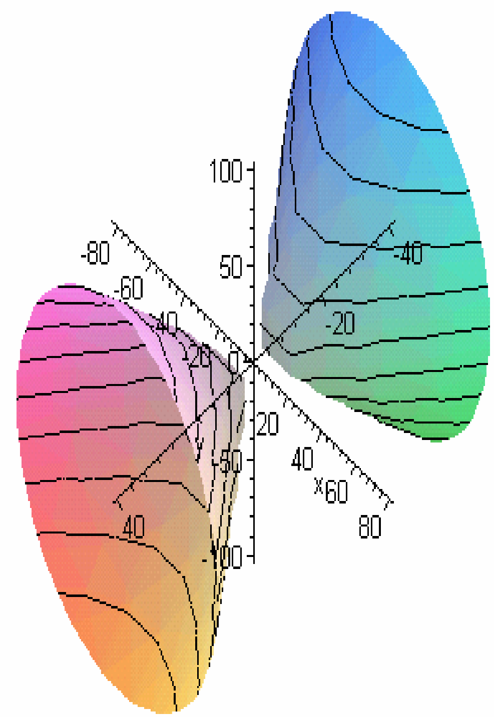
Jenis – jenis permukaan dimensi tiga

- **Hiperboloid Lembar Dua**

Persamaan baku Hiperboloid Lembar Dua dengan pusat *(0,0,0)* adalah

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Jejak pada bidang *xy* dan *xz* adalah hiperbol sedangkan jejak pada bidang *yz* tidak ada, tetapi perpotongan bidang yang sejajar bidang *yz* dengan permukaan akan membentuk elips.



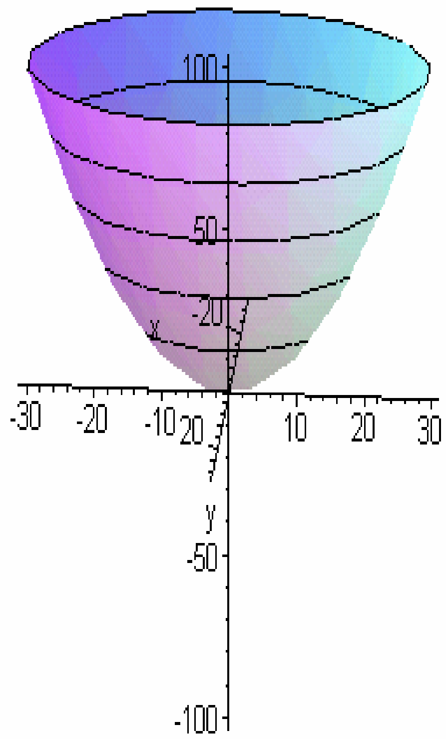
Jenis – jenis permukaan dimensi tiga

- Paraboloid Elips

  Persamaan baku paraboloid elips dengan pusat (0,0,0) adalah

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

  Jejak pada bidang *xy* adalah titik tetapi perpotongan bidang yang sejajar bidang *xy* dengan permukaan membentuk elips. Jejak pada bidang *xz* dan bidang *yz* adalah parabol.



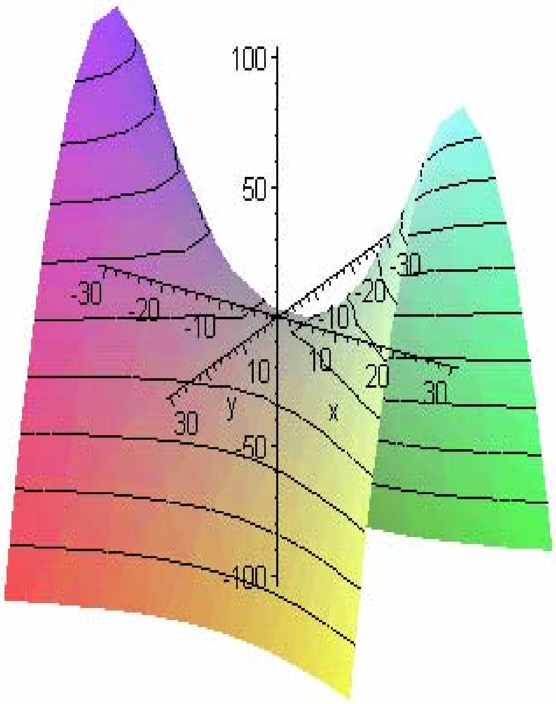
Jenis – jenis permukaan dimensi tiga

- Paraboloid Hiperbol

  Persamaan baku paraboloid hiperbol dengan pusat (0,0,0) adalah

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

  Jejak pada bidang *xy* berupa sepasang garis yang saling berpotongan tetapi jejak bidang yang sejajar dengan *xy* adalah hiperbol. Jejak pada bidang *xz* dan bidang *yz* adalah parabol .



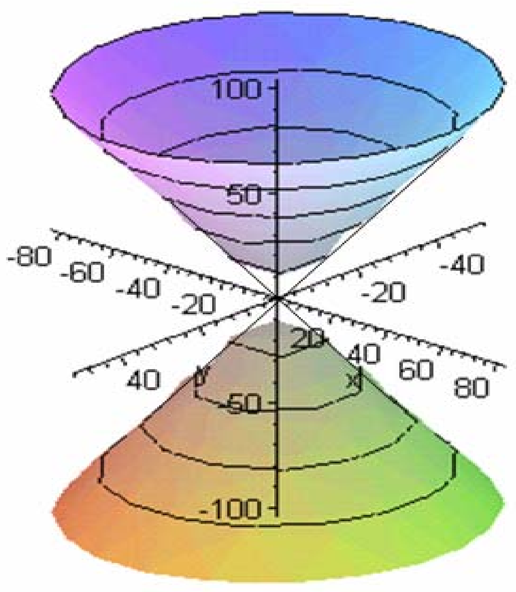
Jenis – jenis permukaan dimensi tiga

- Kerucut Ellips

Persamaan baku kerucut elips dengan pusat (0,0,0) adalah

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Jejak pada bidang *xy* berupa sebuah titik tetapi jejak bidang yang sejajar dengan *xy* adalah elips. Jejak pada bidang *xz* dan bidang *yz* adalah sepasang garis yang berpotongan . .



Definisi funsi Dua Peubah

Fungsi dua peubah adalah aturan yg mengaitkan setiap bilangan riil *f (x,y)* ke setiap titik *(x, y)* terhadap himpunan D dalam bidang xy.

Notation : z = *f(x,y)*.

Himpunan (x,y) disebut domain

$$D_f = \left\{ (x,y) \in R^2 \mid f(x,y) \in \Re \right\}$$

Himpunan nilai *f*(x,y) disebut range

$$R_f = \left\{ f(x,y) \middle| (x,y) \in D_f \right\}$$

Contoh

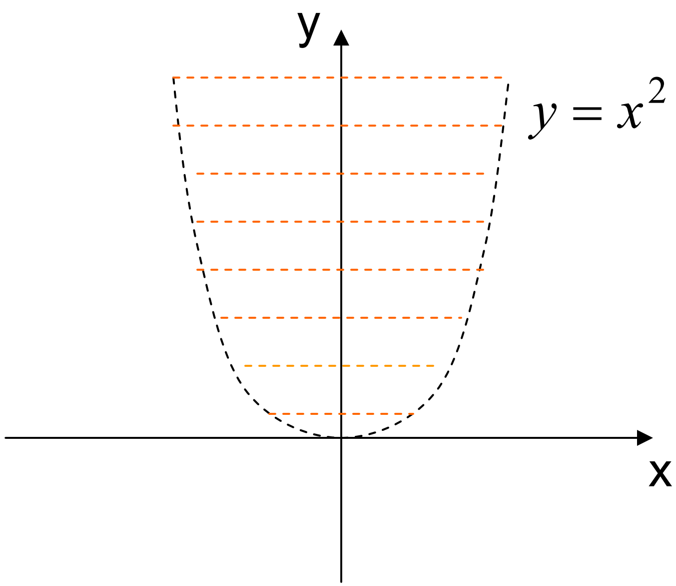
Tentukan domain $z = \ln\left(y - x^2\right)$

Jawab :

$$D_f = \left\{(x, y) \in R^2 \,\middle|\, z = \ln\left(y - x^2\right) \in \Re \right\}$$

$$D_f = \left\{(x, y) \in R^2 \,\middle|\, \left(y - x^2\right) > 0 \right\}$$

$$D_f = \left\{(x, y) \in R^2 \,\middle|\, y > x^2 \right\}$$



Latihan

Cari domain $z = f(x, y)$ dibawah ini :

1. $z = \dfrac{x\,y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$

2. $z = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$

3. $z = \dfrac{x^2 + y^2}{\ln(x + y)}$

4. $z = \dfrac{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}{x + y}$

Jenis – jenis permukaan dimensi tiga

Dengan menyederhanakan persamaan permukaan kuadrik

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Ke salah satu bentuk persamaan permukaan baku tersebut maka dapat ditentukan bentuk persamaan permukaan kuadrik tersebut.

Contoh 1

Berupa permukaan apakah persamaan permukaan

$$-9x^2 + 4y^2 - 36z + 36 = 0$$

Jenis – jenis permukaan dimensi tiga

INSTITUT TEKNOLOGI TELKOM

Jawaban

$$-9x^2+4y^2-36z+36=0$$

Dibagi dengan 36 diperoleh persamaan

$$-\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}-z+1=0$$

Atau bisa dituliskan sebagai

$$z-1=\frac{y^2}{3^2}-\frac{x^2}{2^2}$$

Jadi $-9x^2+4y^2-36z+36=0$ merupakan permukaan paraboloid hiperbol dengan pusat $(0,0,1)$

Jenis – jenis permukaan dimensi tiga

Contoh 2

Berupa permukaan apakah persamaan permukaan

$$9x^2 + 4y^2 - 6z^2 + 18x - 8y - 24z - 11 = 0$$

Jawaban

Dengan menuliskan bentuk $(x–a)^2$, $(y–b)^2$ dan $(z–c)^2$ diperoleh persamaan

$$9(x+1)^2 + 4(y-1)^2 - 6(z+2)^2 = 0$$

Dengan membagi persamaan dengan 36

$$\frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{3^2} - \frac{(z+2)^2}{6^2} = 0$$

Jadi permukaan tersebut merupakan permukaan kerucut elips dengan pusat $(–1,1,–2)$.

Soal Latihan

1. Nyatakan persamaan hiperboloid lembar dua dalam persamaan umum permukaan kuadrik
2. Berupa permukaan apakah persamaan permukaan

   $$4x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 16x - 6y - 18z - 26 = 0$$

3. Tentukan jejak dibidang *xy* dan *yz* permukaan kuadrik

   $$3x^2 + 4y^2 - 6z^2 + 18x + 16y - 12z + 25 = 0$$

   Kemudia tuliskan persamaan jejak *xy* dan *yz* tersebut dalam bentuk baku

Kurva ketinggian dan peta Kontur

Kurva ketinggian adalah proyeksi pada bidang *xy* dari kurva/permukaan yang dibentuk dari perpotongan bidang mendatar $z = c$ dengan permukaan $f(x,y)$.

Kumpulan dari kurva ketinggian disebut **peta kontur**.

Kurva ketinggian dari beberapa jenis permukaan yang telah dibahas sebelumnya akan berupa **irisan kerucut**.

Berikutnya akan digambarkan beberapa peta kontur untuk beberapa jenis permukaan.

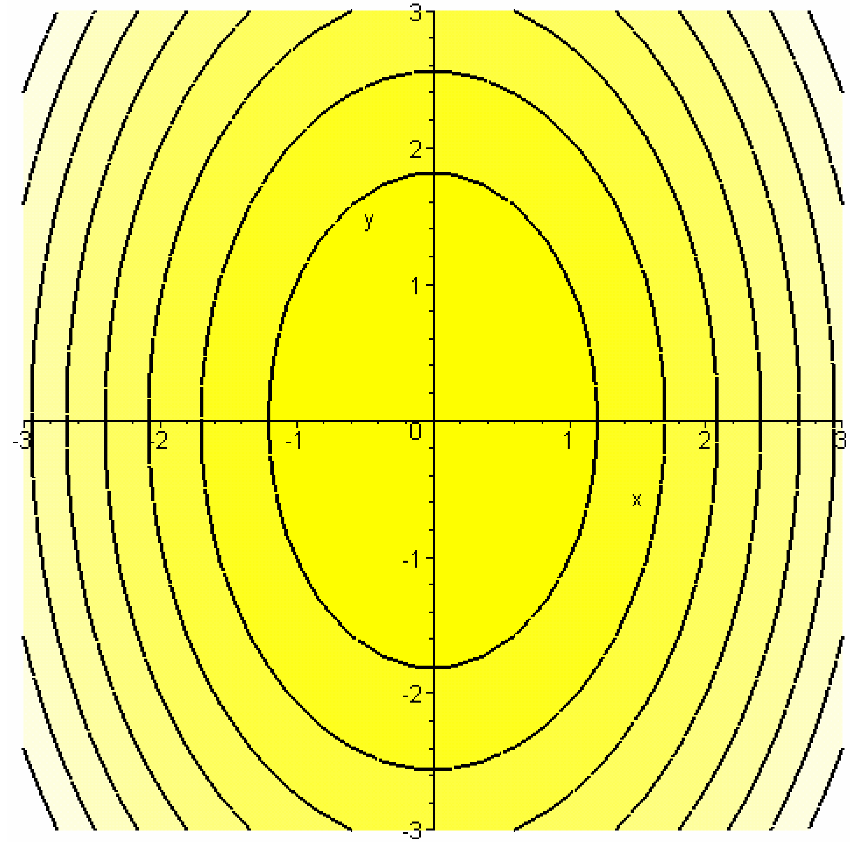
Kurva ketinggian dan peta Kontur

- **Kerucut Elips**

  Kurva ketinggian pada kerucut elips ini berbentuk elips karena untuk $z = k$ persamaan yang konik yang didapat adalah

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k$$

  Ini merupakan persamaan baku elips.



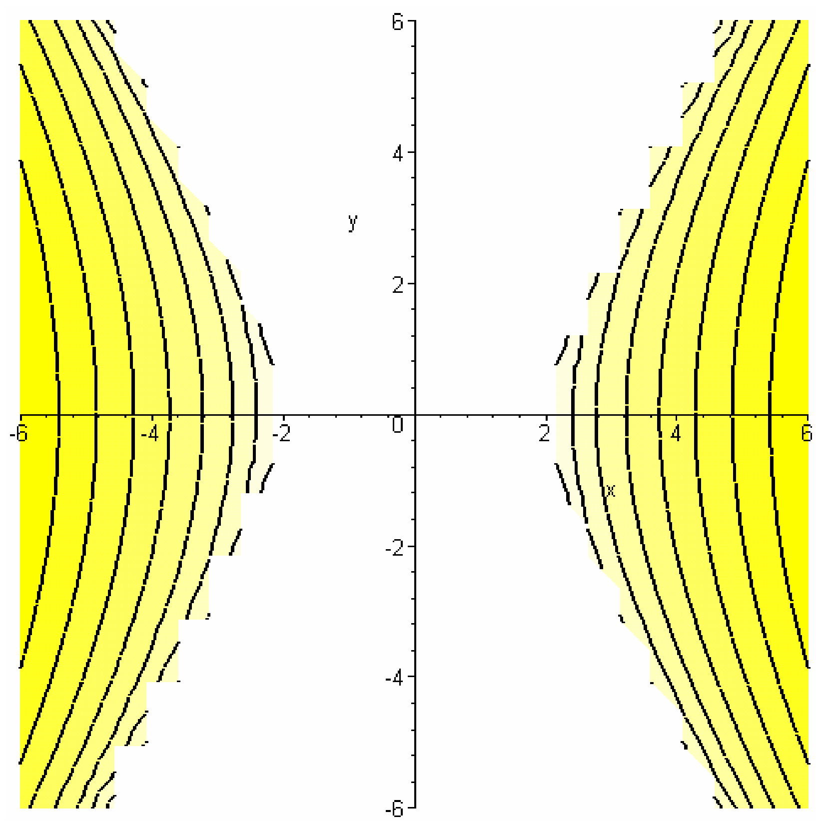
Kurva ketinggian dan peta Kontur

- **Hiperboloid lembar dua**

  Kurva ketinggian pada hiperboloid lembar dua ini berbentuk hiperbola karena untuk *z* = *c* persamaan yang konik yang didapat adalah

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = k$$

  Ini merupakan persamaan baku hiperbol.



Kurva ketinggian dan peta Kontur

- **Paraboloid hiperbol**

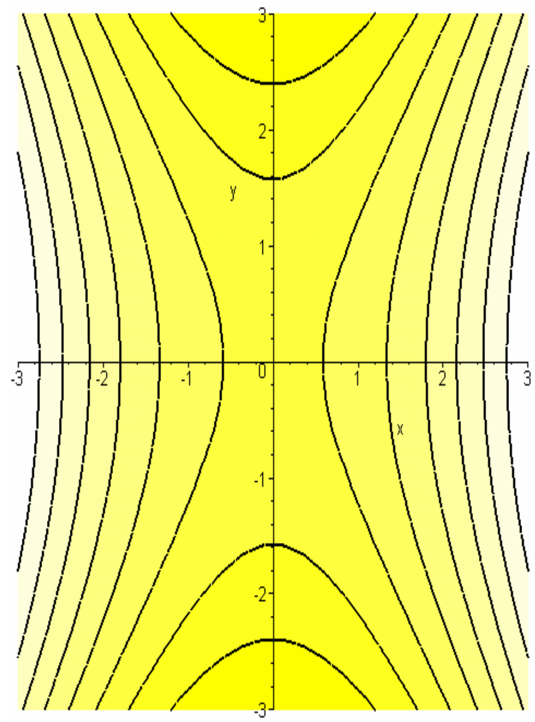
Kurva ketinggian pada **Paraboloid hiperbol** ini berbentuk hiperbola pada dua sumbu x dan y karena untuk *z* = *k* persamaan yang konik yang didapat adalah

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = k \quad \text{untuk } k > 0$$

Atau

$$\frac{y^2}{d^2} - \frac{x^2}{c^2} = k \quad \text{untuk } k < 0$$

Ini merupakan hiperbola pada sumbu x dan y



Kurva ketinggian dan peta Kontur

INSTITUT TEKNOLOGI TELKOM

Contoh 1

Berupa apakah kurva ketinggian dari

$$9x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$$

untuk $z = 1$

Jawaban

Dengan substitusi nilai $z = 1$ kedalam persamaan $9x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$

diperoleh persamaan $9x^2 + 4y^2 = 27$

Atau bisa dituliskan dalam bentuk baku $\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{27}\right)^2} = 1$

Ellips dengan jari – jari mendatar = $\sqrt{3}$ dan jari – jari tegak = $\frac{1}{2}\sqrt{27} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

Kurva ketinggian dan peta Kontur

Contoh 2

Berupa apakah kurva ketinggian dari $\frac{(y+2)^2}{2^2} - \frac{(x-1)^2}{3^2} - z + 2 = 0$ untuk $z = 3$

Jawaban

Dengan substitusi nilai $z = 3$ diperoleh persamaan

$$\frac{(y+2)^2}{2^2} - \frac{(x-1)^2}{3^2} = 1$$

Ini merupakan persamaan hiperbola dengan pusat $(1,-2)$ yang memiliki koordinat puncak $(1,0)$ dan $(1,-4)$ serta memiliki gradien garis asymtot $\frac{2}{3}$. dan $-\frac{2}{3}$.

Soal Latihan

Untuk soal 1–3, gambarlah kurva ketinggian untuk nilai k yang diberikan

1. $x^2 + y^2 - 2z$ $\quad$ *k = 2,4,6,8*
2. $z = x^2 + y$ $\quad$ *k = –4,–1,0,1,4*
3. $z = \dfrac{x^2 + y}{x + y^2}$ $\quad$ *k = 0,1,2,4*

Untuk soal 4–5, gambarlah peta kontur dari persamaan permukaan yang diberikan

4. $100x^2 + 16y^2 + 25z^2 = 1$
5. $-4x^2 + 25y^2 + 8x + 100y - 100z - 204 = 0$

Turunan Parsial

Definisi

Secara sederhana turunan parsial terhadap x bisa diartikan sebagai turunan pada *f(x,y)* dengan menganggap y sebagai konstan. Sebaliknya turunan parsial terhadap y bisa diartikan sebagai turunan pada y dengan menganggap x sebagai konstan.

Pada persamaan permukaan $z = f(x, y)$ maka secara geometris $f_x(x_0, y_0)$ menyatakan gradien suatu garis singgung kurva dititik (x_0, y_0, z_0) dimana kurva tersebut merupakan perpotongan permukaan $z = f(x, y)$ dan bidang $y = y_0$

Turunan Parsial

INSTITUT TEKNOLOGI TELKOM

Contoh 1

Tentukan $f_x(2,3)$ dan $f_y(2,3)$ dari $f(x,y) = x^3y^2 + x^2y + 3x^2 + 2y$

Jawaban

$\boxed{f_x(x,y) = 3x^2y^2 + 2xy + 6x}$ $\rightarrow$ $\boxed{f_x(2,3) = 32^2 3^2 + 2.2.3 + 6.2 = 132}$

$\boxed{f_y(x,y) = 2x^3y + x^2 + 2}$ $\rightarrow$ $\boxed{f_y(2,3) = 22^3 3 + 2^2 + 2 = 54}$

Turunan Parsial

Contoh 2

Tentukan gradien garis singgung $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}+\frac{z^2}{4^2}=1$

Dititik A $\left(1,0,\sqrt{3}\right)$ yang terletak didalam bidang y = 0

Jawaban

Dengan mengubah ke fungsi (x,y) diperoleh persamaan

$$z=\pm 4\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}\right)}$$

Karena titik A terletak di sumbu z positif, maka yang diambil adalah persamaan

$$z=4\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}\right)}$$

Turunan Parsial

Jawaban (lanjutan)

Turunan parsial terhadap x

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}\right)}}$$

Gradien garis singgung adalah

$$\boxed{m = z'_x\left(1,0,\sqrt{3}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

Soal Latihan

1. Tentukan $f_x(0,-1)$ dan $f_y(0,-1)$ dari $f(x,y) = xy^2 + x\,y Sin(x)$
2. Tentukan $f_x(0,2)$ dan $f_y(0,2)$ dari $f(x,y) = y^2 Cos(xy^2) + x\,Sin(xy)$
3. Tentukan gradien garis singgung dari permukaan $z = \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2}$ dititik (2,3,2) yang terletak didalam bidang x = 2
4. Tentukan gradien garis singgung dari kerucut elips $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} - \frac{z^2}{2^2} = 0$ dititik *(4,0,4)* yang terletak pada bidang *xz*

Maksimum dan Minimum

Definisi

1. Suatu fungsi 2 peubah memiliki nilai **maksimum relatif** pd titik (xo, yo) jika terdapat lingkaran berpusat di (xo, yo) s.d.h $f(x_o, y_o) \geq f(x, y)$ utk setiap (x, y) di dlm lingkaran dan *f* memiliki nilai **maksimum mutlak** di (xo, yo) bila $f(x_o, y_o) \geq f(x, y)$ utk semua titik (x, y) di domain *f*

1. Suatu fungsi 2 peubah memiliki nilai **minimum relatif** pd titik (xo, yo) jika terdapat lingkaran berpusat di (xo, yo) s.d.h $f(x_o, y_o) \leq f(x, y)$ utk setiap (x, y) di dlm lingkaran dan *f* memiliki nilai **miniimum mutlak** di (xo, yo) bila $f(x_o, y_o) \leq f(x, y)$ utk semua titik (x, y) di domain *f*

Maksimum dan Minimum

Teorema :

Jika f memiliki nilai ekstrim relatif pada titik (xo, yo) dan bila turunan parsialnya ada pada titik tsb maka

$$f_x(x_o, y_o) = 0 \qquad \text{dan} \qquad f_y(x_o, y_o) = 0$$

Maksimum dan Minimum

INSTITUT TEKNOLOGI TELKOM

Teorema :

Misal f fungsi 2 peubah dg turunan parsial orde 2 kontinu dalam beberapa lingkaran pada titik kritis (xo, yo) dan misalkan

$$\boxed{D = f_{xx}(x_o, y_o)\, f_{yy}(x_o, y_o) - f_{xy}{}^2(x_o, y_o)}$$

a. Jika D > 0 dan $f_{xx}(x_o, y_o) > 0$, maka f punya minimum relative

b. Jika D > 0 dan $f_{xx}(x_o, y_o) < 0$,maka f punya maksimum relatif

c. If D < 0 , maka f memiliki titik pelana (a saddle point)

d. If D = 0 , maka tdk ada kesimpulan yg dpt digambarkan

Maksimum dan Minimum

INSTITUT TEKNOLOGI TELKOM

Contoh:

Tentukan semua nilai ekstrim relatif dan titik pelana dari $f(x,y)=4xy-x^4-y^4$

Jawaban :

Titik Kritis :

$f_x(x,y)=4y-4x^3=0 \rightarrow y=x^3 \quad (1)$ dan $f_y(x,y)=4x-4y^3=0 \rightarrow x=y^3 \quad (2)$

$x^9-x=0 \rightarrow x\left(x^8-1\right)$

$x=0,\ x=1,\ x=-1$ dan $y=0,\ y=1,\ y=-1$

Tiik Kritis : $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$

Turunan partial orde 2:

$f_{xx}(x,y)=-12x^2 \qquad f_{xy}(x,y)=4 \qquad f_{yy}(x,y)=-12y^2$

Maksimum dan Minimum

Titik Kritis	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	D
(0, 0)	0	0	4	-16
(1, 1)	-12	-12	4	128
(-1, -1)	-12	-12	4	128

Dari tabel, diperoleh kesimpulan :

1. Pd titik (1, 1) dan (-1, -1), D > 0 dan $f_{xx}(x_o, y_o) < 0$ maka maksimum relatif terjadi

2. Pada titik (0, 0) : titik pelana karena D < 0.

Latihan

Tentukan semua nilai maksimun/ minimum relatif, dan titik pelana

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$

2. $f(x,y) = x^3 - 3xy - y^3$

3. $f(x,y) = -yx^2 + 4xy + 2y^2x$

4. $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{2}{xy}$