G.PHILIPPE

Portraits de phase

pour un pendule simple

Introduction

Thème: Maple permet d'obtenir directement un portrait de phase en utilisant la fonction *DEtools[phaseportrait]*
ou la fonction *DEtools[DEplot]* que l'on utilisera ici.
Ces fonctions utilisent des techniques de calcul numérique pour intégrer des équations de manière approchée:
elles ne font pas de calcul formel.

On étudie le cas d'une masse ponctuelle m oscillant sur un cerceau vertical immobile de rayon L.
En quelque sorte, on étudie le problème du pendule simple
mais la liaison est bilatérale (et non pas unilatérale)
ici le point ne peut quitter la liaison dans aucun sens car r = L (liaison bilatérale)
alors que dans le pendule simple si le fil n'est plus tendu, on aura r<L (liaison unilatérale)

ATTENTION:
omega désignera une vitesse angulaire (c'est à dire theta point)
Omega désignera une pulsation.

Programme

```
> restart;
> with (DEtools):
```

Notation

On envisage donc le cas d'une masse ponctuelle m pouvant osciller sur un cerceau vertical immobile de rayon L.Le pendule est repéré par theta(t) et la vitesse angulaire sera notée omega(t).

On introduit la pulsation propre $\Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$

Si à l'instant initial, la masse est à la position d'équilibre. Le calcul par la conservation de l'énergie montre que la vitesse angulaire ω à lui communiquer qui permet juste au pendule d'avoir un mouvement révolutif, en supposant l'absence de frottements, vaut $\omega(rev) = 2\,\Omega 0$.

> *omega(rev):=2*Omega0;*

$$\omega(rev) := 2\,\Omega 0$$

Cette vitesse pourra servir de vitesse de référence par la suite.

Les équations nécessaires aux tracés des portraits de phase

L'équation différentielle ici n'est pas linéaire car présence d'un sin(theta):
on sait retrouver facilement l'existence d'un sin(theta) dans l'équation au lieu de theta et l'équation différentielle du second ordre s'écrirait:

diff(theta(t),t,t)= - Omega0^2*sin(theta(t));

En présence de frottement fluide, il apparait un terme supplémentaire proportionnel à la vitesse (angulaire ici) que l'on décide de faire apparaitre en utilisant la notation coefficient de qualité Q (on rappelle que le coefficient est alors en Omega0/Q):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(t) = -\Omega 0^2 \sin(\theta(t)) - \frac{\Omega 0 \left(\frac{\partial}{\partial t}\theta(t)\right)}{Q}$$

Pour résoudre de manière numérique, Maple ne doit recevoir que des équations différentielles du premier ordre. On transforme donc cette équation du deuxième ordre en un système différentiel de deux équations du premier ordre...

La fonction inconnue theta(t) fait place à deux fonctions inconnues: theta(t) et omega(t) -vitesse angulaire-

On écrit le système d'équations du premier ordre nécessaire ici à Maple pour la résolution

> *deq1:=diff(theta(t),t)=omega(t) ;*
> *deq2:=diff(omega(t),t)=- Omega0^2*sin(theta(t)) - Omega0/Q*omega(t);*
> *deq:= deq1,deq2;*

$$deq1 := \frac{\partial}{\partial t}\theta(t) = \omega(t)$$

$$deq2 := \frac{\partial}{\partial t}\omega(t) = -\Omega 0^2 \sin(\theta(t)) - \frac{\Omega 0\, \omega(t)}{Q}$$

$$deq := \frac{\partial}{\partial t}\theta(t) = \omega(t), \frac{\partial}{\partial t}\omega(t) = -\Omega 0^2 \sin(\theta(t)) - \frac{\Omega 0\, \omega(t)}{Q}$$

Cas sans frottement

Conditions initiales:
le point au départ est à sa position d'équilibre (en bas)
et la vitesse angulaire initiale est omega(0).
On déclare pour cond_init une séquence de 21 conditions initiales.

```
> cond_init:=seq( [theta(0)=0, omega(0)=i*omega(rev)/6],i= -10..10);
```

$$cond\_init := \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = -\frac{10}{3}\Omega_0\right], [\theta(0) = 0, \omega(0) = -3\,\Omega_0],$$
$$\left[\theta(0) = 0, \omega(0) = -\frac{8}{3}\Omega_0\right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = -\frac{7}{3}\Omega_0\right], [\theta(0) = 0, \omega(0) = -2\,\Omega_0],$$
$$\left[\theta(0) = 0, \omega(0) = -\frac{5}{3}\Omega_0\right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = -\frac{4}{3}\Omega_0\right], [\theta(0) = 0, \omega(0) = -\Omega_0],$$
$$\left[\theta(0) = 0, \omega(0) = -\frac{2}{3}\Omega_0\right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = -\frac{1}{3}\Omega_0\right], [\theta(0) = 0, \omega(0) = 0],$$
$$\left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{1}{3}\Omega_0\right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{2}{3}\Omega_0\right], [\theta(0) = 0, \omega(0) = \Omega_0],$$
$$\left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{4}{3}\Omega_0\right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{5}{3}\Omega_0\right], [\theta(0) = 0, \omega(0) = 2\,\Omega_0],$$
$$\left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{7}{3}\Omega_0\right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{8}{3}\Omega_0\right], [\theta(0) = 0, \omega(0) = 3\,\Omega_0],$$
$$\left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{10}{3}\Omega_0\right]$$

On trace le portrait de phase dans le cas où les frottements sont nuls :
c'est à dire que l'on trace omega(t) - vitesse - en fonction de theta(t) -abscisse- (c'est le plan de phase)
pour ces 21 cas différents pour t compris entre -T0 et T0 (T0 période propre des petites oscillations.

De plus, on'impose l'axe des abscisses theta(t) entre -3Pi/2 et 3Pi/2.

Dans l'instuction qui suit, c'est scene qui indique ce que l'on trace: d'abord l'abscisse, puis l'ordonnée.
Pour scene=[t, theta(t)], on tracerait theta(t) en fonction de t.
Le linecolor change la couleur d'un ligne proportionnellement au paramètre t.

On introduit les valeurs numériques nécessaires:

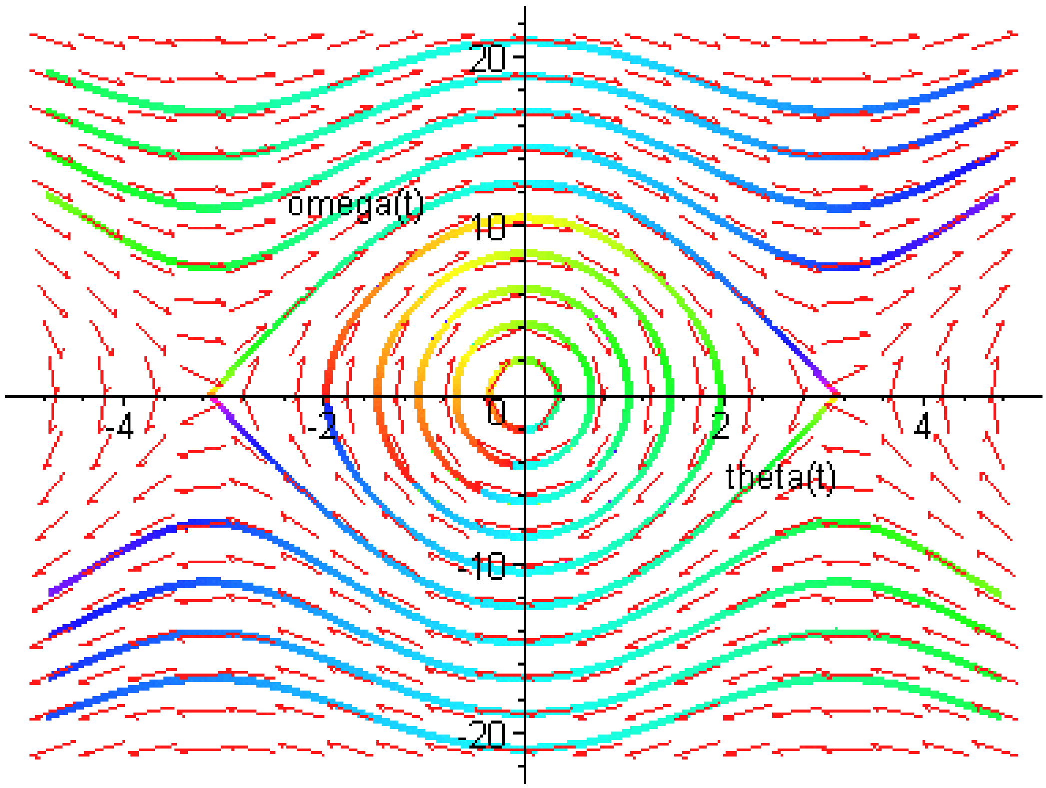
```
> T0:=1; Omega0:=2*Pi/T0; Q:=infinity;
```

$$T0 := 1$$

$$\Omega 0 := 2\,\pi$$

$$Q := \infty$$

> *DEplot([deq], [theta(t),omega(t)], t=-T0..T0, [cond_init], theta=-3*Pi/2..3*Pi/2, stepsize=T0/100, scene=[theta(t),omega(t)],linecolor=t);*



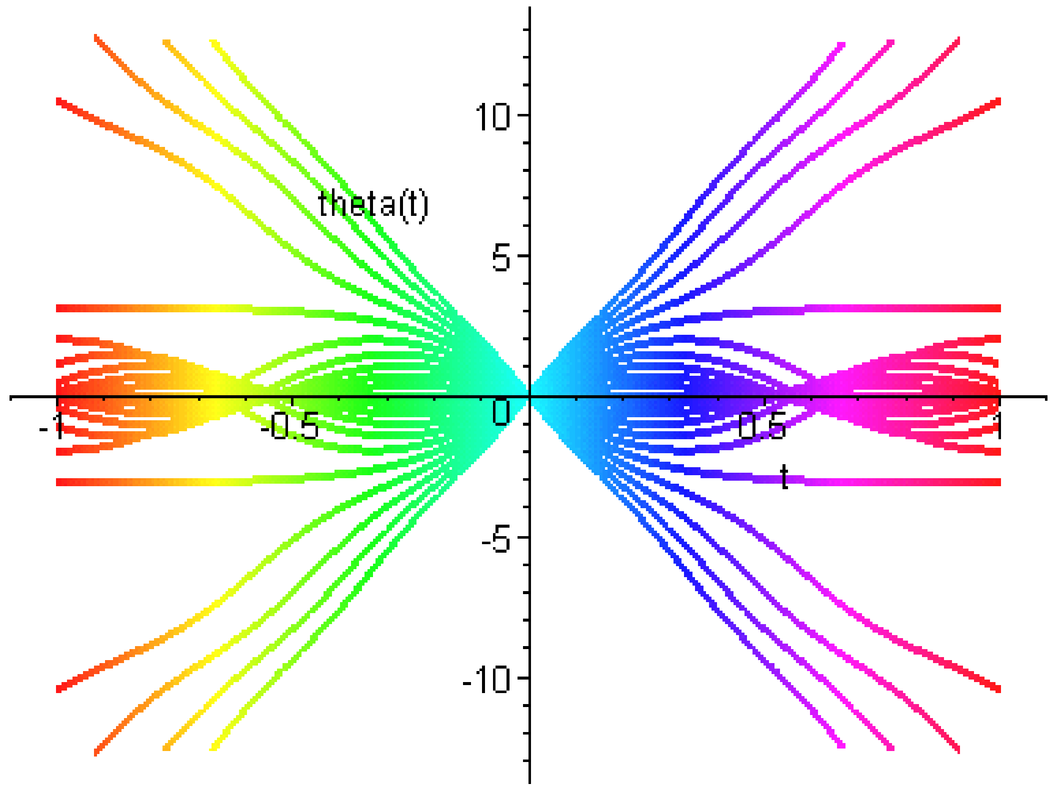
Il faut alors réfléchir sur ces résultats.

1) Si la vitesse de lancement est petite, le mouvement est oscillatoire donc omega(t) change de signe et theta(t) reste borné
2) Si la vitesse de lancement est positive et supérieure à: omega(rev), le mouvement est révolutif, omega(t) reste toujours positif et theta
augmente indéfiniment. Si la vitesse de lancement est négative et inférieure à: -omega(rev), le mouvement est révolutif, omega(t) reste toujours négatif et theta diminue indéfiniment

La séparatrice est la courbe qui sépare les deux types de mouvements. On la repére facilement.
Elle correspond aux vitesses omega(rev) et -omega(rev).

On peut aussi tracer theta en fonction de t.
Ici le domaine choisi pour theta est plus étendu que précédemment.
On repére la séparatrice et on constate la qualité numérique de Maple dans les positions d'équilibre instable.

> *DEplot([deq], [theta(t),omega(t)], t=-T0..T0, [cond_init], theta=-4*Pi..4*Pi, stepsize=T0/100, scene=[t,theta(t)],linecolor=t);*



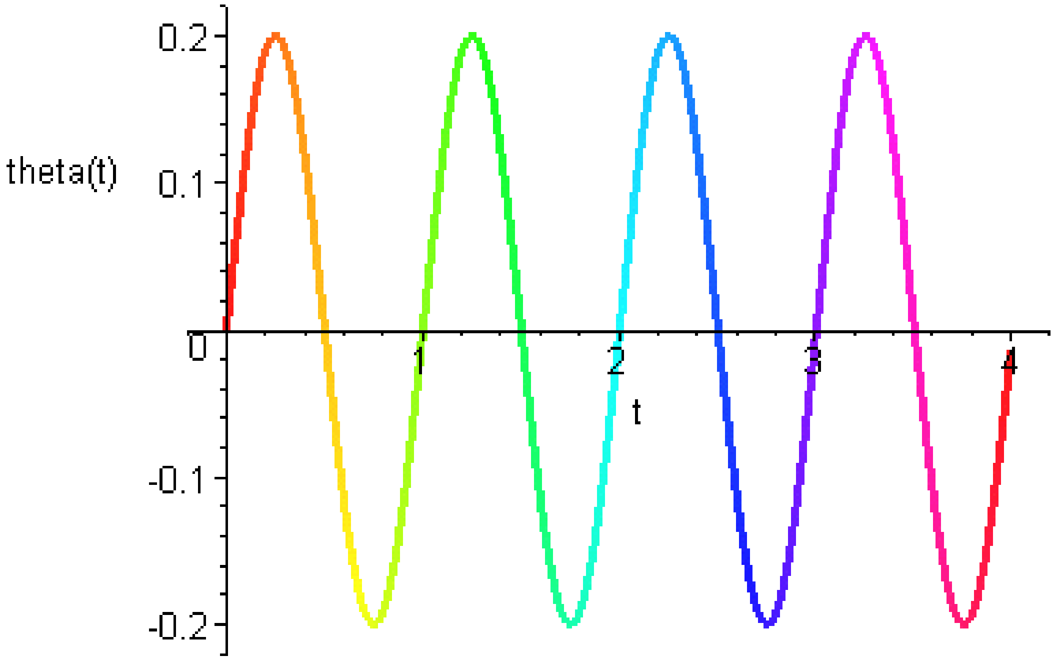
tracé de theta(t) en fonction de t dans deux cas d'oscillations

On trace theta(t) en fonction de t pour omega(0)=omega(rev)/100

> *cond_init:=[theta(0)=0, omega(0)=omega(rev)/10];*

$$cond\_init := \left[\ \theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{1}{5}\,\Omega\ \ 0\right]$$

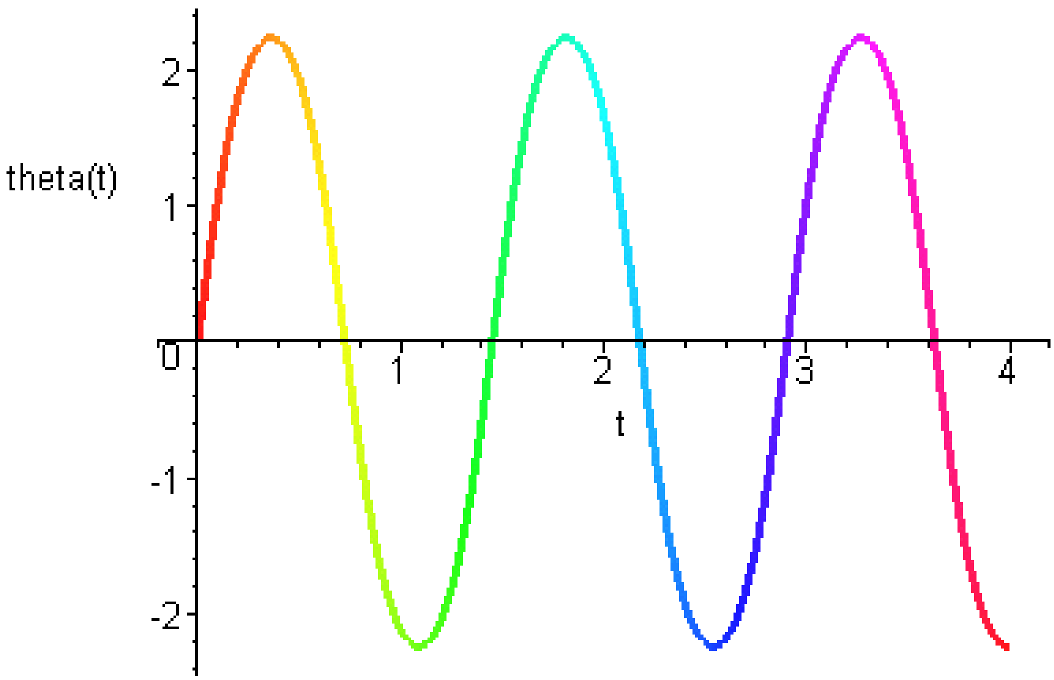
> *DEplot([deq], [theta(t),omega(t)], t=0..4*T0, [cond_init], stepsize=T0/100, scene=[t,theta(t)],linecolor=t);*



Idem pour omega(0)=9*omega(rev)/10

> *cond_init:=[theta(0)=0, omega(0)=9*omega(rev)/10];*
> *DEplot([deq], [theta(t),omega(t)], t=0..4*T0, [cond_init], stepsize=T0/100, scene=[t,theta(t)],linecolor=t);*

$$cond\_init := \left[\theta(0)=0, \omega(0)=\frac{9}{5}\Omega\ 0\right]$$



En regardant le tracé, on remarque que dans le cas des grandes oscillations la période est nettement supérieure à T0
Il est difficile, ici, à vue de déterminer si les oscillations sont sinusoïdales c'est-à-dire harmoniques (ou quasi-sinusoïdales)
ou de nature très différente.
Difficile de reconnaitre un sinus...

tracé du portrait de phase dans les deux cas d'oscillations

On trace le portrait de phase pour omega(0)=omega(rev)/100.

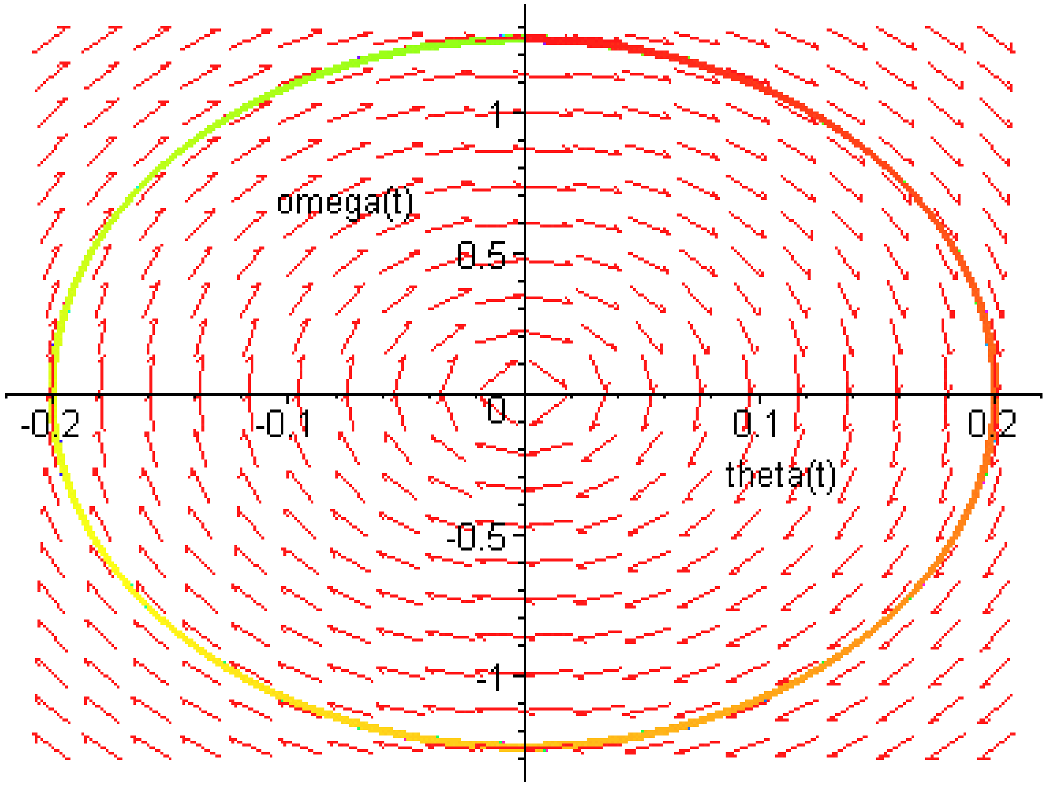
Remarquer que pour des petites oscillations, on aura donc au niveau théorique:
$\theta(t)$ **en:** $\theta(max)$ **cos(** Ω_0 * t - ϕ **)**
$\frac{\omega(t)}{\Omega_0}$ **en: -** $\theta(max)$ **sin(** Ω_0 * t - ϕ **)**
soit ($\theta(t)^2 + \left(\frac{\omega(t)}{\Omega_0}\right)^2 = \theta(max)^2$
c'est à dire une ellipse ramenée à ses axes
(ou un cercle si l'on choisit bien les unités
ou si l'on trace en orthonormé $\frac{\omega(t)}{\Omega_0}$ **en fonction de** $\theta(t)$ **)**

```
> cond_init:=[theta(0)=0, omega(0)=omega(rev)/10];
```

$$cond\_init := \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{1}{5}\Omega_0\right]$$

GP

> *DEplot([deq], [theta(t),omega(t)], t=0..4*T0, [cond_init], stepsize=T0/100, scene=[theta(t),omega(t)],linecolor=t);*

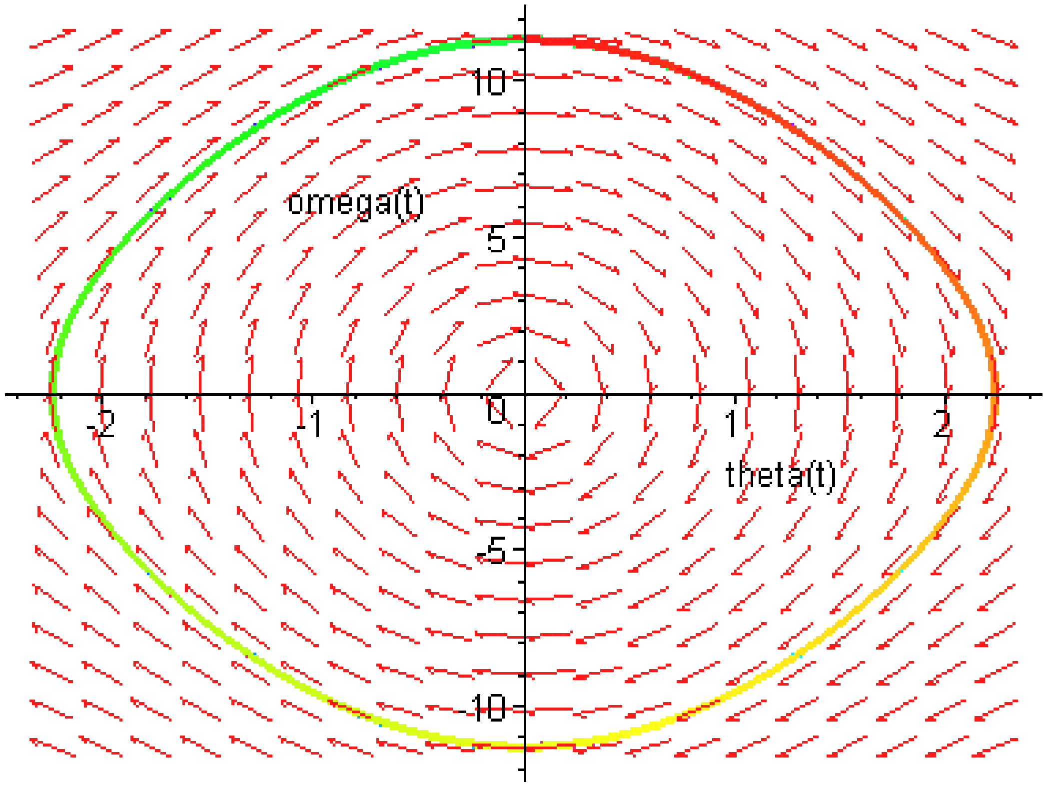


Idem pour omega(0)=9*omega(rev)/10

> *cond_init:=[theta(0)=0, omega(0)=9*omega(rev)/10];*

$$cond\_init := \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{9}{5}\Omega \quad 0\right]$$

> *DEplot([deq], [theta(t),omega(t)], t=0..4*T0, [cond_init], stepsize=T0/100, scene=[theta(t),omega(t)],linecolor=t);*



Un intêret de la visualisation par portrait de phase:
on visualise clairement ici que le portrait de phase n'a plus du tout l'aspect d'une ellipse.
Les grandes oscillations ne sont donc pas harmoniques.

Cas avec frottement

Tracé des portraits de phase

On rencontre des points singuliers: ici un attracteur ponctuel.

noeud propre: chaque chemin se dirige vers le noeud par une trajectoire bien définie
noeud impropre: chaque chemin a la même direction-limite au voisinage du point
centre : les trajectoires sont des courbes fermées autour du point
foyer ou point spiral :les trajectoires sont des spirales tendant vers le point-critique
point col: deux trajectoires se dirigent vers le point et deux en sortent

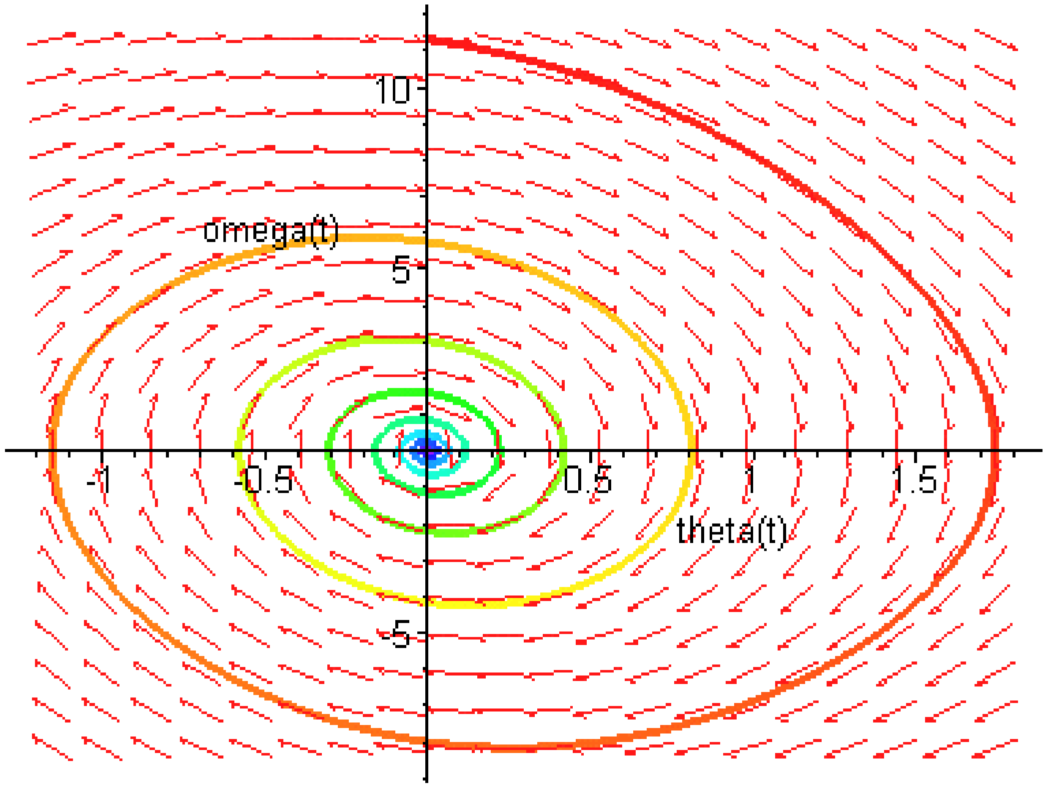
On lance ici à la vitesse omega(rev), au départ le pendule est à la position d'équilibre et Q vaut 5.
On trace le portrait de phase pour t entre 0 et 10 T0.

> *Q:=5;*

$$Q := 5$$

> *DEplot([deq], [theta(t),omega(t)], t=0..10*T0, [cond_init], stepsize=T0/100, scene=[theta(t),omega(t)],*

linecolor=t);



Le mouvement du pendule devient de plus en plus réduit à cause des frottements.
On tend vers theta=0 (et omega=0) par des oscillations de plus en plus réduites.

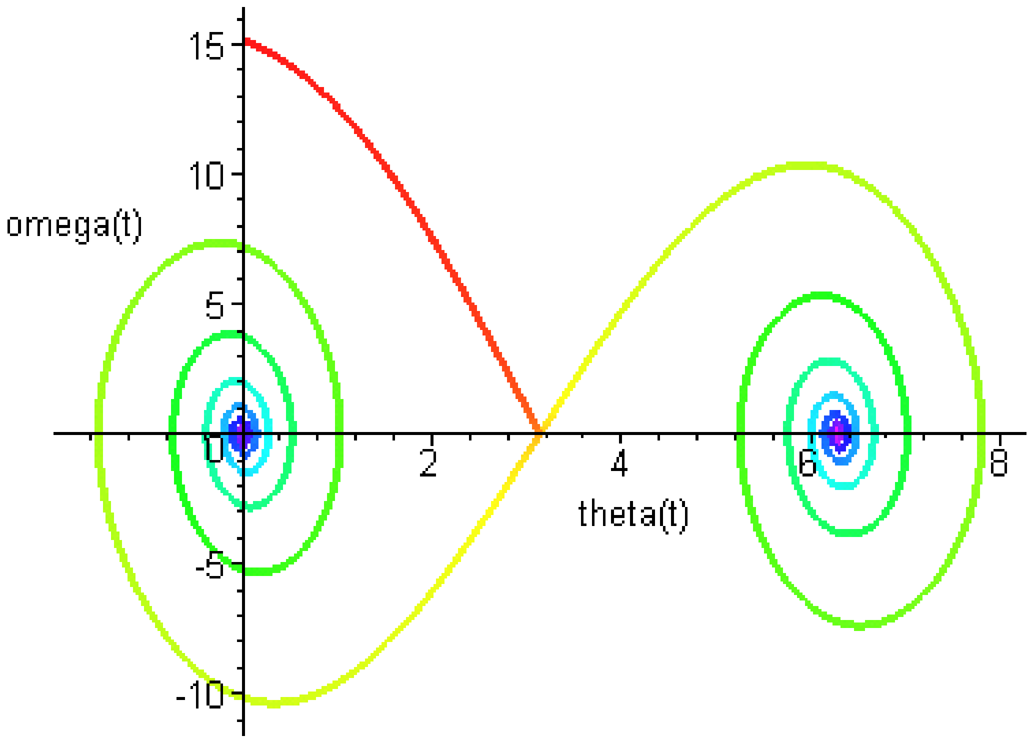
Sensibilité aux conditions initiales

On trace ensemble les deux portraits de phase avec omega0=x *omega(rev)
(omega0=1.2074 *omega(rev) et omega0=1.2075*omega(rev) - on aurait pu donner des valeurs encore plus proches...-)
Ajouter arrows=none pour supprimer les flèches.

```
> cond_init:=seq([theta(0)=0,omega(0)=x*omega(rev)],x={1.2074,1.2075});
```

$cond\_init := [\theta(0) = 0, \omega(0) = 2.4148\,\Omega\ 0], [\theta(0) = 0, \omega(0) = 2.4150\,\Omega\ 0]$

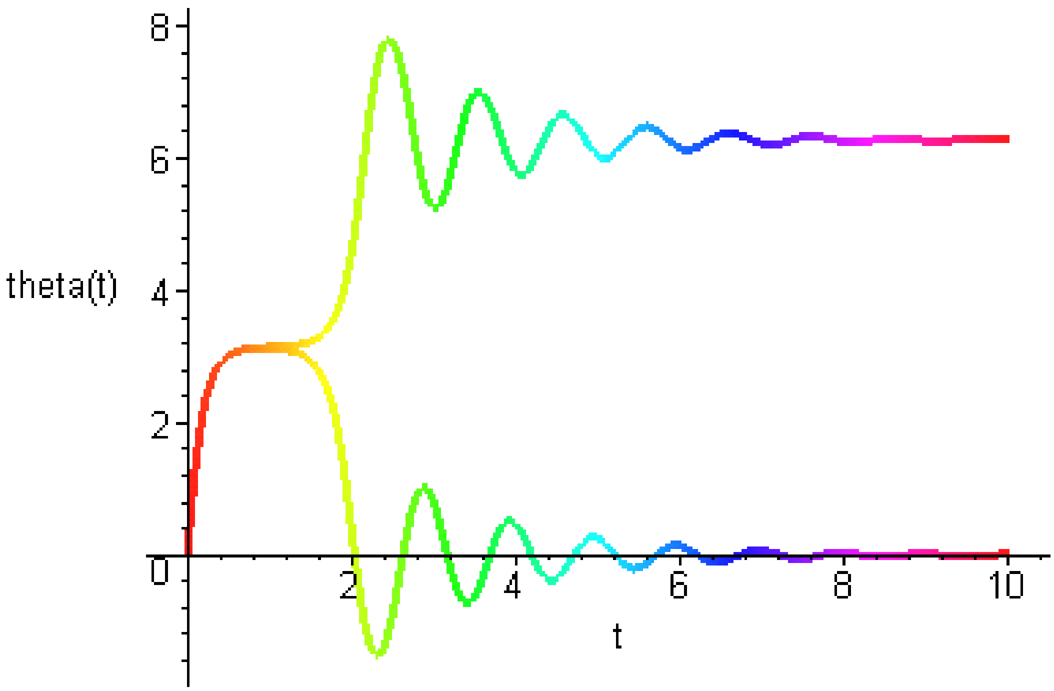
```
> DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=0..10*T0, [cond_init], stepsize=T0/100, scene=[theta(t),omega(t)], linecolor=t, arrows=none);
```



Commentaire (deux attracteurs):
Au bout d'une demi tour, le pendule est arrivé au pont le plus haut (theta=3.14 radians)
Dans l'un des cas, sa vitesse est juste trop petite pour que theta augmente encore et le pendule tend vers sa position d'équilibre (theta=0) par des oscillations de plus en plus réduites.
Dans l'autre cas, il peut juste passer de l'autre côté et finit aussi par tendre vers la "même" position quoique ici cette position corresponde à (theta=2Pi = 6.28) .

On trace theta(t) pour ces cas

```
> DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=0..10*T0, [cond_init], stepsize=T0/100, scene=[t, theta(t)], linecolor=t);
```



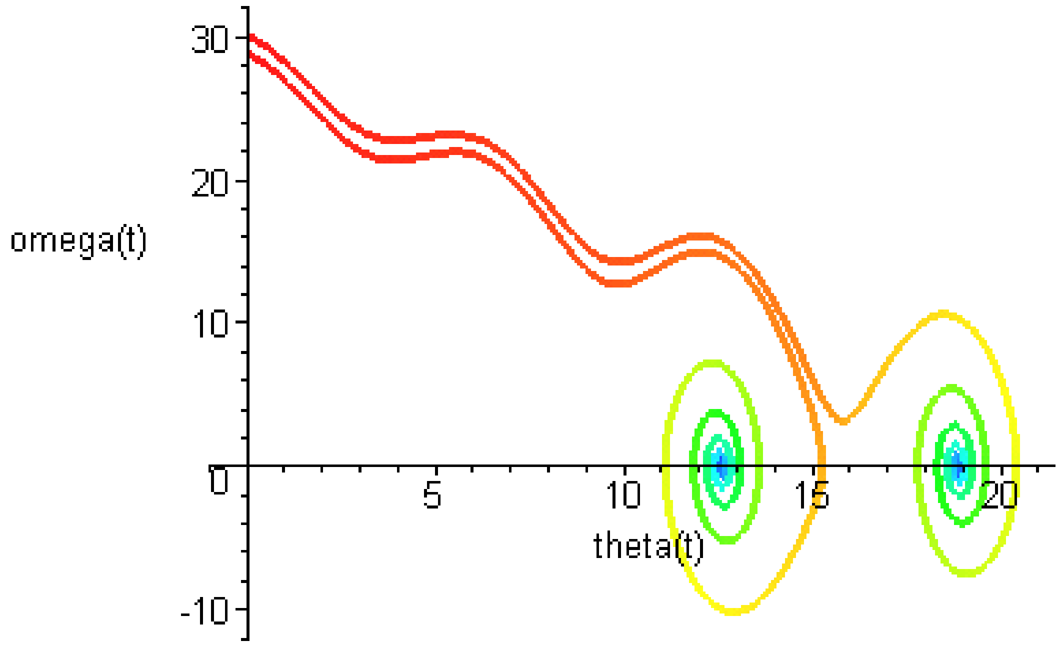
Mise en évidence d'attracteurs

On cherche par simulation des valeurs de x proches permettant de mettre en évidence les deux attracteurs suivants dans le plan de phase.
On tracer les portraits de phase
et aussi theta en fonction de t.

> *cond_init:=seq([theta(0)=0,omega(0)=x*omega(rev)],x={2.3,2.4});*

cond_init := [θ(0) = 0, ω(0) = 4.8 Ω0], [θ(0) = 0, ω(0) = 4.6 Ω0]

> *DEplot([deq], [theta(t),omega(t)], t=0..10*T0, [cond_init], stepsize=T0/50, scene=[theta(t),omega(t)], linecolor=t,arrows=none);*



> *DEplot([deq], [theta(t),omega(t)], t=0..10*T0, [cond_init], stepsize=T0/50, scene=[t,theta(t)], linecolor=t,arrows=none);*