UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Geometria Euclidiana Espacial e Introdução à Geometria Descritiva

Material em preparação!!

Última atualização: 22.07.2008

Luciana F. Martins e Neuza K. Kakuta

SÃO JOSÉ DO RIO PRETO - 2008

Sumário

Capítulo 1

Retas e planos

No decorrer deste texto admitiremos conhecidos todos os resultados válidos para a Geometria Plana. Uma *figura* é um conjunto de pontos e é dita *plana* quando todos os seus pontos pertencem a um mesmo plano. Neste caso, os pontos são ditos *coplanares*. Caso não exista plano contendo uma figura, dizemos que a figura é *reversa*, e seus pontos são ditos *não coplanares*.

Denotaremos *pontos* do espaço com letras latinas maiúsculas $A, B, X, Y, \dots$, *retas* com letras latinas minúsculas $r, s, t, \dots$ e *planos* com letras gregas maiúsculas $\Pi, \Pi', \Gamma, \dots$.

1.1 Postulados e primeiros resultados

Postulados da reta

[R1] Qualquer que seja a reta, existem pontos que pertencem e não pertencem a reta.

[R2] Por dois pontos distintos do espaço passa uma única reta.

Notação: A reta que passa pelos pontos A e B é denotada por $\ell(A, B)$.

Postulados do plano

[P1] Por três pontos não colineares do espaço passa um único plano.

[P2] Qualquer que seja o plano, existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem ao plano.

[P3] Se dois planos tem um ponto em comum, então eles possuem mais de um ponto em comum.

[P4] Os casos de congruência de triângulos da Geometria Plana também são válidos para triângulos situados em planos distintos.

Notação: Dados A, B e C pontos não colineares, o único plano que passa por estes pontos é denotado por $\langle A, B, C\rangle$. Assim, se o plano Π contém A, B e C, então $\Pi = \langle A, B, C\rangle$.

Proposição 1.1. *Dados dois pontos distintos existe um plano que os contém.*

Demonstração. Sejam A e B pontos distintos. Pelo Postulado [R2] existe uma reta r que passa por A e B. Pelo Postulado [R1] existe um ponto C tal que $C \notin r$. Assim, A, B e C são não colineares e, portanto, segue do Postulado [P1] que existe um plano contendo A, B e C. □

Note que o plano dado na proposição anterior não é único. Prove isto! A reta r da demonstração acima está contida no plano que contém os pontos A, B e C? O teorema abaixo responde a essa pergunta.

Teorema 1.2. *Se uma reta possui dois de seus pontos em um plano, então ela está contida nesse plano.*

Demonstração. Sejam A e B pontos distintos pertencentes a um plano Π e seja $r = \ell(A, B)$. Vamos mostrar que $r \subset \Pi$. Da Geometria Plana, existe uma reta $s \subset \Pi$ contendo A e B. Assim, como r e s são retas contendo A e B, segue do Postulado [R2] que $r = s$. Logo, $r \subset \Pi$. □

Como conseqüência temos as seguintes possibilidades para a *posição relativa* entre uma reta r e um plano Π:

a) $r \cap \Pi = \emptyset$. Neste caso dizemos que r é *paralela* à Π;

b) $r \cap \Pi$ é um único ponto. Neste caso dizemos que r é *secante* à Π;

c) $r \subset \Pi$.

Notação: Se uma reta r é paralela a um plano Π, denotamos por $r \parallel \Pi$.

A existência de retas secantes ou contidas em um plano segue dos resultados anteriores. Porém, ainda não sabemos sobre a existência de retas paralelas a um plano dado.

Teorema 1.3. *Sejam Π e Π' dois planos distintos e A e B dois pontos distintos em $\Pi \cap \Pi'$. Então $\ell(A, B) = \Pi \cap \Pi'$.*

Demonstração. Como $A, B \in \Pi \cap \Pi'$ então, pelo Teorema 1.2, $\ell(A, B) \subset \Pi \cap \Pi'$. Suponha que existe $C \in \Pi \cap \Pi'$ tal que $C \notin \ell(A, B)$. Assim, A, B e C são três pontos não colineares. Logo, pelo Postulado [P1], $\langle A, B, C\rangle$ é o único plano contendo A, B e C e, portanto, $\Pi = \langle A, B, C\rangle = \Pi'$, o que é um absurdo pois Π e Π' dois planos distintos por hipótese. Logo, $\ell(A, B) = \Pi \cap \Pi'$. □

Corolário 1.4. *Se dois planos distintos têm um ponto em comum então a sua interseção é uma reta.*

Demonstração. Sejam Π e Π' dois planos distintos e seja $A \in \Pi \cap \Pi'$. Pelo Postulado [P3], existe um ponto $B \neq A$ tal que $B \in \Pi \cap \Pi'$. Pelo teorema acima, $\ell(A, B) = \Pi \cap \Pi'$. $\square$

Como conseqüência do teorema acima temos as seguintes possibilidades para a *posição relativa* entre dois planos Π e Π':

(a) $\Pi \cap \Pi' = \emptyset$. Neste caso dizemos que os planos são *paralelos*;

(b) $\Pi \cap \Pi'$ é uma reta. Neste caso dizemos que os planos são *secantes*;

(c) $\Pi = \Pi'$. Neste caso dizemos que os planos são *coincidentes*.

Notação: Dois planos paralelos Π e Π' são denotados por $\Pi \parallel \Pi'$.

Assim como ocorre para o caso entre reta e plano, também não sabemos ainda sobre a existência de planos paralelos. Veremos nas seções sobre paralelismo a existência de ambos.

Exemplos 1.5. ***Construção de pirâmides e cones:*** Seja Π um plano e $A_1, \ldots, A_n$ pontos em Π tal que $\mathcal{P} = A_1 \ldots A_n$ é um polígono (note que segue do Teorema 1.2 que os segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$ estão contidos em Π; assim, $\mathcal{P}$ é um *polígono plano*). Seja V um ponto exterior ao plano Π, o qual existe pelo Postulado [P2]. Cada dois vértices consecutivos de $\mathcal{P}$ determinam com V um triângulo. Essas regiões triangulares, juntamente com a região poligonal determinada por $\mathcal{P}$ delimitam uma figura geométrica denominada *pirâmide de base $A_1A_2 \ldots A_n$ e vértice V*. Quando a base da pirâmide é um triângulo, temos uma *pirâmide de base triangular*, quando a base é um quadrado, temos uma *pirâmide de base quadrangular*, e assim por diante. Os segmentos $\overline{A_iV}$, $i = 1, \ldots, n$, são chamados de *arestas laterais* e as regiões triangulares determinadas por $A_iA_{i+1}V$, $i = 1, \ldots, n$ $(A_{n+1} = A_1)$, são as *faces laterais* da pirâmide. Assim, a pirâmide obtida possui n arestas laterais. Um *tetraedro* é um caso particular de pirâmide em que a base é um triângulo.

Consideremos agora uma circunferência $\mathcal{C}$ contida em Π (recorde que, por definição, circunferência é uma figura plana). Com raciocínio análogo ao feito para a construção de uma pirâmide, podemos construir uma outra figura geométrica: o *cone*, o qual é reunião da região circular determinada por $\mathcal{C}$ com todos os segmentos $\overline{VA}$, com $A \in \mathcal{C}$.

1.2 Determinação de um plano

Sabemos que três pontos distintos não colineares determinam um único plano. Veremos agora outras maneiras de obtermos planos.

Teorema 1.6. *Por uma reta e um ponto não pertencente a ela, passa um único plano.*

Demonstração. (Existência) Sejam r uma reta e P um ponto tal que $P \notin r$. Tomemos A e B dois pontos distintos sobre r. Como A, B e P não são colineares, segue do Postulado [P1] que existe um único plano Π contendo estes pontos, ou seja, $\Pi = \langle A, B, P \rangle$. Logo, pelo Teorema 1.2, Π contém r.
(Unicidade) Seja Π' um plano contendo r e P. Como $A, B \in r$, então Π' contém A, B e P. Logo, $\Pi' = \langle A, B, P \rangle = \Pi$, pelo Postulado [P1]. □

Notação: Sejam r uma reta e $P \notin r$. Denotamos por $\langle r, P \rangle$ o (único) plano que contém r e P.

Note que se $\Pi = \langle r, P \rangle$ e $A, B \in r$, então $\Pi = \langle r, P \rangle = \langle A, B, P \rangle$.

Definição 1.7. *Sejam r e s duas retas no espaço.*
(a) r e s são ditas ***concorrentes*** *se existe um ponto P tal que $r \cap s = \{P\}$.*
(b) r e s são ditas ***paralelas*** *se r e s são coplanares e $r \cap s = \emptyset$.*
(d) r e s são ditas ***reversas*** *se são não coplanares.*

Notação: Quando r e s são paralelas, denotamos por $r \parallel s$.

Sabemos da Geometria Plana a existência de retas paralelas. Aqui temos uma pergunta: existem retas reversas? A resposta é afirmativa e sua demonstração está proposta na lista de exercícios.

Teorema 1.8. *Por duas retas paralelas passa um único plano.*

Demonstração. Sejam r e s duas retas paralelas. Sendo r e s coplanares (por definição), existe um plano Π que as contém. Suponha que Π' é também um plano que contém r e s. Seja $P \in r$. Como r e s são paralelas, temos que $P \notin s$ e, portanto, como Π e Π' contém s e P, segue do Teorema 1.6 que $\Pi = \Pi'$. Portanto, é único o plano que contém r e s. □

Veremos no próximo resultado que retas concorrentes também são retas coplanares.

Teorema 1.9. *Por duas retas concorrentes passa um único plano.*

Demonstração. (Existência) Sejam r e s duas retas concorrentes e $\{P\} = r \cap s$. Tomando dois pontos $A \in r$ e $B \in s$, distintos de P, obtemos três pontos P, A e B não colineares. Pelo Postulado [P1], estes pontos determinam um único plano $\Pi = \langle A, B, P \rangle$. Como $r = \ell(P, A)$ e $s = \ell(P, B)$, segue do Teorema 1.2 que $r, s \subset \Pi$.
(Unicidade) Suponhamos que Π' é um plano que também contém r e s. Então Π' contém P, A (pois $P, A \in r$) e P (pois $P \in s$). Logo, $\Pi' = \langle A, B, P \rangle = \Pi$, pelo Postulado [P1]. Portanto, é único o plano que contém r e s. □

Notação: Sejam r e s retas concorrentes ou paralelas. Denotamos por $\langle r, s \rangle$ o único plano que contém r e s.

Observação 1.10. Notemos que retas reversas não se interceptam pois, caso contrário, segue do Teorema 1.9 que existe um plano contendo essas retas, o que sabemos não existir pela definição de retas reversas.

Como conseqüência dos resultados acima temos as seguintes possibilidades para a *posição relativa* entre duas retas r e s:

(a) $r \cap s = \emptyset$. Neste caso, as retas são paralelas (se coplanares) ou reversas (se não coplanares);

(b) $r \cap s$ é um ponto. Neste caso, as retas são concorrentes;

(c) $r = s$. Neste caso, as retas são coincidentes.

1.3 Semi-espaços

Veremos a seguir a propriedade que um plano tem de separar o espaço.

Definição 1.11. *Seja Π um plano e P um ponto tal que $P \notin \Pi$. O* ***semi-espaço determinado por Π e contendo P*** *($S_{\Pi,P}$) é o conjunto constituído por Π e por todos os pontos Q do espaço que satisfazem $\overline{PQ} \cap \Pi = \emptyset$.*

Segue da definição que todo plano separa o espaço em dois subconjuntos, chamados semi-espaços, cuja interseção é o plano dado.

Teorema 1.12. *Sejam Π um plano e A e P pontos não pertencentes à Π tais que $A \in S_{\Pi,P}$. Então $S_{\Pi,P} = S_{\Pi,A}$.*

Demonstração. Mostremos que $S_{\Pi,P} \subset S_{\Pi,A}$. Seja $Q \in S_{\Pi,P}$. Devemos mostrar que $Q \in S_{\Pi,A}$. Se $Q \in \Pi$, o resultado é imediato. Suponhamos que $Q \notin \Pi$. Se $Q = P$ temos então:

$$A \in S_{\Pi,P} \text{ e } \mathrm{A} \notin \Pi \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathrm{AP}} \cap \Pi = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P} \in \mathrm{S}_{\Pi,\mathrm{A}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Q} \in \mathrm{S}_{\Pi,\mathrm{A}} \,.$$

Se $Q \neq P$, então $\overline{PQ} \cap \Pi = \emptyset$. Seja Π' um plano contendo A, P e Q (note que Π' é único se A, P e Q são não colineares). Uma das possibilidades ocorre: ou a) $\Pi' \cap \Pi = \emptyset$, ou b) $\Pi' \cap \Pi$ é uma reta r (note que $\Pi' \neq \Pi$ pois $Q \notin \Pi$). Suponhamos que a) ocorre. Neste caso, como $\overline{AQ} \subset \Pi'$ (pelo Teorema 1.2), temos que $\overline{AQ} \cap \Pi = \emptyset$. Logo $Q \in S_{\Pi,A}$, como queríamos. Suponhamos agora que b) ocorre. Supondo por absurdo que $Q \notin S_{\Pi,A}$, então $\overline{AQ} \cap \Pi \neq \emptyset$ e daí, como $\overline{AQ} \subset \Pi'$, segue que $\overline{AQ} \cap r \neq \emptyset$. Assim, considerando o plano Π', temos que A e Q não estão do mesmo lado da reta r. Como Q e P estão do mesmo lado de r (pois $\overline{PQ} \cap \Pi = \emptyset \;\Rightarrow\; \overline{PQ} \cap r = \emptyset$), concluímos que A e P não estão do mesmo lado de r, ou seja $\overline{AP} \cap r \neq \emptyset$, o que é um absurdo pois $A \in S_{\Pi,P}$ e $A \notin \Pi$, por hipótese. Portanto $Q \in S_{\Pi,A}$, como queríamos.

Devemos mostrar agora que $S_{\Pi,A} \subset S_{\Pi,P}$. O raciocínio é análogo e é deixado como exercício.

□

Corolário 1.13. *Seja* Π *um plano e* $A, B, P \notin \Pi$.

a) *Se* $A, B \in S_{\Pi,P}$, *então* $\overline{AB} \cap \Pi = \emptyset$.

b) *Se* $A \in S_{\Pi,P}$ *e* $B \notin S_{\Pi,P}$ *então* $\overline{AB} \cap \Pi \neq \emptyset$.

Demonstração. Exercício. □

Note que segue do corolário acima que todo semi-espaço é convexo.

1.4 Exercícios

1. Se duas retas são paralelas então todo plano que contém uma delas e um ponto da outra, contém a outra reta.

   Resolução: Sejam $r \parallel s$, $P \in s$ e $\Pi = \langle r, P \rangle$. Vamos mostrar que $s \subset \Pi$. Seja $\Pi' = \langle r, s \rangle$ (dado pelo Teorema 1.8). Como Π e Π' contém r e o ponto P, e como pelo Teorema 1.6 o plano que contém r e P é único, concluímos que $\Pi = \Pi'$ e, conseqüentemente, Π contém as retas r e s.

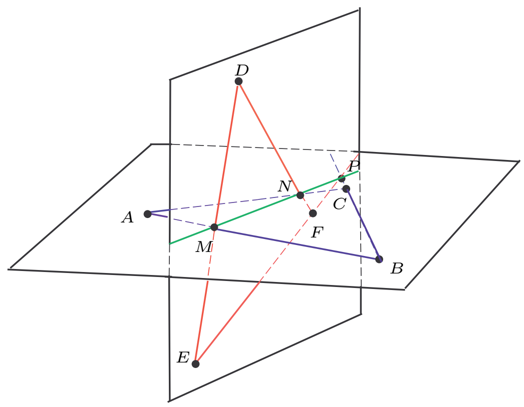
2. Sejam r, s e t retas distintas no espaço. Se quaisquer duas dessas retas são concorrentes então elas estão num mesmo plano ou as três retas passam por um mesmo ponto.

   Resolução : Sejam $r \cap s = \{P\}$, $r \cap t = \{Q\}$ e $s \cap t = \{X\}$. Suponhamos que r, s e t não são coplanares. Vamos mostrar que $P = Q = X$. Seja $\Pi = \langle r, s \rangle$. Então $t \not\subset \Pi$. Se $Q \neq X$

então, como $Q \in r \subset \Pi$ e $X \in s \subset \Pi$, segue do Teorema 1.2 que $\ell(Q, X) \subset \Pi$. Mas como $Q, X \in t$, então $t = \ell(Q, X) \subset \Pi$, o que é um absurdo. Logo $Q = X$. Se $P \neq Q$, como $s = \ell(P, X)$ e $r = \ell(P, X)$ (pois $P, Q \in r \Rightarrow P, X \in r$, uma vez que $Q = X$), então $r = s$, o que é também um absurdo. Portanto $P = Q$. Assim, $P = Q = X$, como queríamos.

3. Sejam ABC e DEF dois triângulos situados em dois planos distintos tais que as retas $\ell(A, B)$, $\ell(A, C)$ e $\ell(B, C)$ encontram as retas $\ell(D, E)$, $\ell(D, F)$ e $\ell(E, F)$ nos pontos M, N e P, respectivamente. Mostre que M, N e P são colineares.

   Resolução: Sejam $\Pi = \langle A, B, C\rangle$ e $\Pi' = \langle D, E, F\rangle$. Como $\ell(A, B) \cap \ell(D, E) = \{M\}$, $\ell(A, C) \cap \ell(D, F) = \{N\}$ e $\ell(B, C) \cap \ell(E, F) = \{P\}$ temos que $M, N, P \in \Pi \cap \Pi'$ (pois $\ell(A, B)$, $\ell(A, C)$, $\ell(B, C) \subset \Pi$ e $\ell(D, E)$, $\ell(D, F)$, $\ell(E, D) \subset \Pi'$). Logo, Π e Π' são planos secantes. Conseqüentemente $\Pi \cap \Pi'$ é uma reta e, portanto, esta reta contém os pontos M, N e P.



4. Duas retas r e s são concorrentes. Seja $P \notin \langle r, s\rangle$. Qual é a interseção do plano $\Pi = \langle r, P\rangle$ com o plano $\Pi' = \langle s, P\rangle$?

5. Prove a existência de retas reversas.

6. Sejam r e s duas retas reversas, $A \in r$ e $B \in s$. Qual é a interseção do plano $\langle r, B\rangle$ com o plano $\langle s, A\rangle$?

7. Sejam r e s duas retas reversas. Sejam A e B pontos distintos de r e C e D pontos distintos de s. Qual é a posição relativa das retas $\ell(A, C)$ e $\ell(B, D)$?

8. Seja P é um polígono de n lados, $n \geq 4$, tal que quaisquer quatro de seus pontos são coplanares. Mostre que P é plano, ou seja P está contido em um plano.

9. Seja $VABCD$ uma pirâmide quadrangular de vértice V. Determine $\alpha \cap \beta$, sendo $\alpha = \langle V, A, C\rangle$ e $\beta = \langle V, B, D\rangle$.

10. Considere uma pirâmide quadrangular $VABCD$ de vértice V. Sejam M, N e P pontos sobre a aresta $\overline{VA}, \overline{VB}$ e $\overline{VC}$, respectivamente. O plano determinado por M, N e P corta a aresta $\overline{VD}$ no ponto Q. Diga como obter Q a partir de M, N e P? (Dica : As diagonais de um quadrilátero plano se intersectam.)

11. Mostre que duas retas reversas e uma concorrente com as duas determinam dois planos distintos.

12. Qual é a interseção de duas circunferências de raios congruentes, centros comuns e situadas em planos distintos?

1.5 Paralelismo entre retas e entre reta e plano

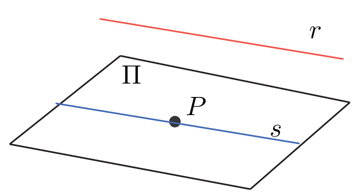
O teorema seguinte é uma extensão para o espaço do Postulado de Euclides sobre retas paralelas.

Teorema 1.14. *Por um ponto não pertencente a uma reta r pode-se traçar uma única reta paralela à r.*

Demonstração. Seja $P \notin r$. Pelo Teorema 1.6, existe um único plano Π que passa por P e que contém r. Pela Postulado das Paralelas da Geometria Plana (para o plano Π), existe uma única reta $s \subset \Pi$ passando por P tal que $s \parallel r$. Para mostrarmos que s é a única reta paralela à r passando por P, suponhamos que existe uma outra reta s' paralela à r por P. Seja $\Pi' = \langle r, s' \rangle$. Então Π e Π' contém r e P. Logo, pelo Teorema 1.6, $\Pi' = \Pi$ e, conseqüentemente, $s' = s$ devido à unicidade dada pelo Postulado das Paralelas de Euclides. □

O seguinte teorema exibe um critério para verificar se uma reta é paralela a um plano.

Teorema 1.15. *Sejam Π um plano e r uma reta não contida em Π. Então r e Π são paralelos se e somente se existe uma reta s contida em Π e paralela a r.*



Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $r \parallel \Pi$. Sejam P um ponto qualquer de Π e $\Pi' = \langle r, P \rangle$. Então $\Pi \neq \Pi'$, pois $r \subset \Pi'$ e $r \cap \Pi = \emptyset$. Comos Π e Π' são secantes (pois $P \in \Pi \cap \Pi'$), seja

$s = \Pi \cap \Pi'$. Afirmamos que $s \cap r = \emptyset$. De fato, segue do fato de que $r \cap \Pi = \emptyset$ e $s \subset \Pi$. Como r e s são coplanares (pois estão contidas em Π'), segue que são paralelas.
($\Leftarrow$) Suponhamos que existe uma reta s tal que $s \subset \Pi$ e $s \parallel r$. Se r não é paralela a Π então $r \cap \Pi = \{P\}$, pois r não está contida em Π, por hipótese. Seja Π' o plano que contém s e r (dado pelo Teorema 1.8). Então $\Pi \cap \Pi' = s$ uma vez que $s \subset \Pi \cap \Pi'$ e $\Pi \neq \Pi'$ (pois $r \subset \Pi'$ e $r \not\subset \Pi$). Logo, como $\{P\} = r \cap \Pi \subset \Pi' \cap \Pi = s$, então $P \in s$, o que é um absurdo pois $P \in r$ e $r \parallel s$. $\square$

O seguinte resultado fornece um critério de paralelismo entre retas no espaço.

Proposição 1.16. *Se r e s são duas retas coplanares tais que r é paralela a algum plano que contém s, então r e s são paralelas.*

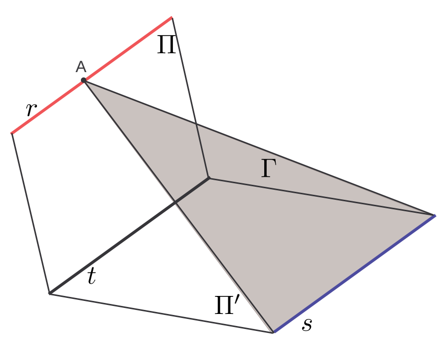
Demonstração. Seja Π um plano tal que $s \subset \Pi$ e $r \parallel \Pi$. Como $r \cap \Pi = \emptyset$ e $s \subset \Pi$, então $r \cap s = \emptyset$. Logo, como r e s são retas coplanares (por hipótese) que não se intersectam, temos que r e s são paralelas. $\square$

1.6 Exercícios

1. Mostre a propriedade de transitividade de retas paralelas no espaço, ou seja, que se duas retas distintas r e s são paralelas a uma mesma reta t, então r e s são paralelas entre si.

   Resolução: Se as retas forem coplanares, então segue de resultados da Geometria Plana. Suponhamos que r, s e t não são coplanares. Sejam $\Pi = \langle r, t\rangle$ e $\Pi' = \langle s, t\rangle$. Então Π e Π' são planos secantes tais que $\Pi \cap \Pi' = t$. Mostremos que $r \parallel s$.

   (i) Primeiramente mostraremos que r e s são coplanares. Sejam $A \in r$ e $\Gamma = \langle s, A\rangle$.

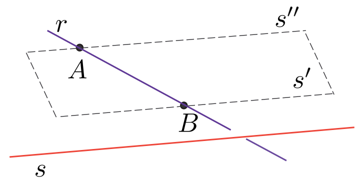


   Então $\Gamma \cap \Pi' = s$ (pois $\Gamma \neq \Pi'$ uma vez que $A \in \Gamma$ e $A \notin \Pi'$, além disso $s \subset \Gamma \cap \Pi'$). Como $A \in \Gamma \cap \Pi$, e estes são planos distintos (pois $s \subset \Gamma$ e $s \not\subset \Pi$) então $\Gamma \cap \Pi$ é uma reta contendo A. Seja r' tal reta. Como r' e t são coplanares (pois ambas estão contidas em Π) e não se interceptam (pois, se $B \in r' \cap t$, para algum ponto B, então como $r' \subset \Gamma$ e $t \subset \Pi'$, segue que $B \in \Gamma \cap \Pi' = s$, ou seja $B \in s$ e $B \in t$, o que é um absurdo pois $s \parallel t$) então $r' \parallel t$. Conseqüentemente, como r e r' são duas retas paralelas à t por A, segue do Teorema 1.14 que $r' = r$. Portanto $r, s \subset \Gamma$, ou seja, r e s são coplanares.

(ii) Mostremos agora que $r \cap s = \emptyset$. De fato, se existe ponto $P \in r \cap s$, então $P \in t$ (pois ($P \in r$ e $r \subset \Pi \Rightarrow P \in \Pi$) e ($P \in s$ e $s \subset \Pi' \Rightarrow P \in \Pi'$) implicam que $P \in \Pi \cap \Pi' = t$). Logo $P \in t \cap s$, o que é um absurdo pois $t \parallel s$.

Concluímos de (i) e (ii) que $r \parallel s$.

2. Sejam r e s retas não paralelas. Mostre que todas as retas paralelas a s e concorrentes com r estão contidas em um mesmo plano.



Resolução: Sejam s' e s'' duas retas paralelas à s passando por dois pontos distintos $A, B \in r$, respectivamente. Por transitividade, temos que $s' \parallel s''$. Seja $\Pi = \langle s', s'' \rangle$. Afirmamos que se m é uma reta concorrente com r e paralela a s, então $m \subset \Pi$. De fato, como $A \in s' \cap r$ e $B \in s'' \cap r$, segue que $A, B \in r \cap \Pi$. Logo, pelo Teorema 1.2 , segue que $r \subset \Pi$ e, conseqüentemente, Π contém o ponto em que m intercepta r. Portanto, como m e s' são retas paralelas (devido ao exercício anterior) e como Π contém s' e um ponto de m, segue do Exercício 1 da Seção 1.4 que Π contém m, como queríamos.

3. Mostre a existência de retas paralelas a um plano dado.

4. Seja $ABCD$ um tetraedro. Sejam M, N, P e Q os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Mostre que o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo. (Figura 1.1) (Dica : No $\triangle(ABC)$, $\ell(M, N) \parallel \ell(B, C)$. Use o Teorema Fundamental da Proporcionalidade da Geometria Plana.)

5. Sejam M, N, Q, R, S e T pontos médios das arestas de um tetraedro $ABCD$, conforme Figura 1.2. Mostre que os três segmentos que unem os pontos médios das arestas opostas (isto é, os segmentos $\overline{QR}, \overline{MS}$ e $\overline{NT}$) se encontram num mesmo ponto, ou seja, $\overline{MS} \cap \overline{NT} \cap \overline{QR} = \{P\}$. (Figura 1.2)

6. Seja $VABCD$ uma pirâmide tal que a base $ABCD$ é um paralelogramo. Mostre que $\ell(A, B) \parallel \langle V, C, D \rangle$. (Figura 1.3)

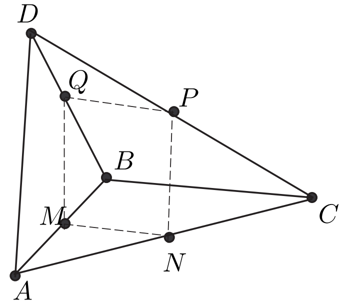


Figura 1.1: Figura do Exercício 4.

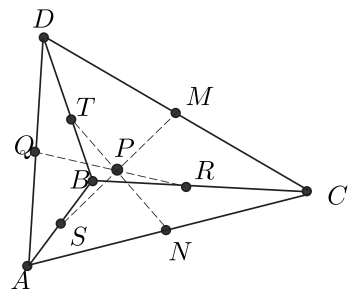


Figura 1.2: Figura do Exercício 5

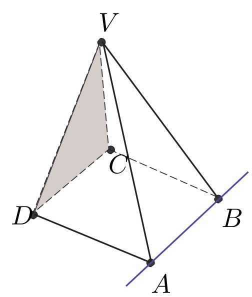


Figura 1.3: Figura do Exercício 6.

7. Mostre que se uma reta é paralela a dois planos secantes, então ela é paralela à reta de interseção dos dois planos.

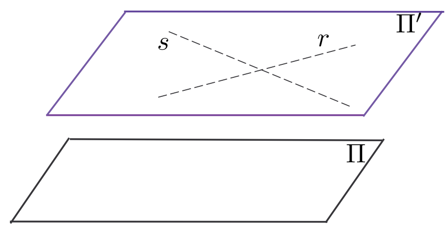
8. Sejam r e s retas reversas. Construa um plano contendo r e paralelo à s.

9. Construa por um ponto uma reta paralela a dois planos secantes.

1.7 Paralelismo entre planos

Dados dois planos Π e Π', pode ser mostrado que eles são paralelos se e somente se Π é paralelo a toda reta contida em Π' (*mostre isto!*). O teorema seguinte fornece um critério mais simples para verificar que dois planos são paralelos.

Teorema 1.17. *Uma condição necessária e suficiente para que dois planos sejam paralelos é que um deles contenha duas retas concorrentes, que são paralelas ao outro plano.*



Demonstração. Se Π e Π' são planos paralelos, claramente toda reta contida em um deles é paralela ao outro plano, e assim não há nada a demonstrar. Suponhamos então que Π e Π' são planos tais que $r, s \subset \Pi'$ são retas concorrentes, $r \parallel \Pi$ e $s \parallel \Pi$. Provemos que $\Pi \parallel \Pi'$.

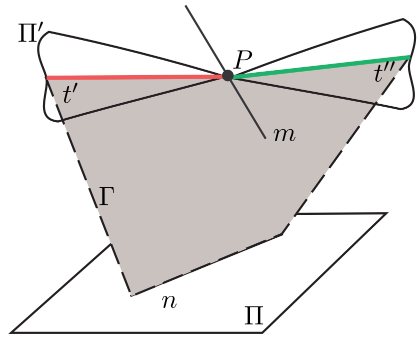
Suponhamos que $\Pi \cap \Pi' \neq \emptyset$. Seja $t = \Pi \cap \Pi'$ (note que $\Pi \neq \Pi'$). Então $t \neq r, s$ pois $r, s \cap \Pi = \emptyset$ e $t \subset \Pi$. Afirmamos que t intersecta pelo menos uma das retas r e s. De fato, caso contrário, como r, s e t são coplanares (pois estão em Π'), t seria paralela às retas r e s e, portanto, teríamos por transitividade que $r \parallel s$, o que é um absurdo. Logo, $t \cap r \neq \emptyset$ ou $t \cap s \neq \emptyset$, de onde segue que $\Pi \cap r \neq \emptyset$ ou $\Pi \cap s \neq \emptyset$ (pois $t \subset \Pi$), o que é impossível pois $r \parallel \Pi$ e $s \parallel \Pi$. Portanto $\Pi \cap \Pi' = \emptyset$, ou seja, são planos parelelos. □

O seguinte teorema garante a existência (e unicidade) de planos paralelos.

Teorema 1.18. *Por um ponto não pertencente a um plano Π, pode-se traçar um único plano paralelo à Π.*

Demonstração. Seja Π um plano e $P \notin \Pi$. Sejam $r, s \subset \Pi$ concorrentes. Pelo Teorema 1.14 existem retas r' e s' passando por P e tais que $r' \parallel r$ e $s' \parallel s$. Segue do Teorema 1.15 que $r' \parallel \Pi$ e $s' \parallel \Pi$. Seja $\Pi' = \langle r', s' \rangle$ (note que r' e s' são concorrentes já que possuem P em comum e não são coincidentes pois se fossem, então r e s seriam paralelas, por transitividade). Então, pelo Teorema 1.17, segue que $\Pi' \parallel \Pi$.

Mostremos agora que plano Π' é único. Suponha que exista um outro plano Π'' passando por P e paralelo à Π. Então $\Pi' \cap \Pi''$ é uma reta m, pois são planos distintos que contém P.

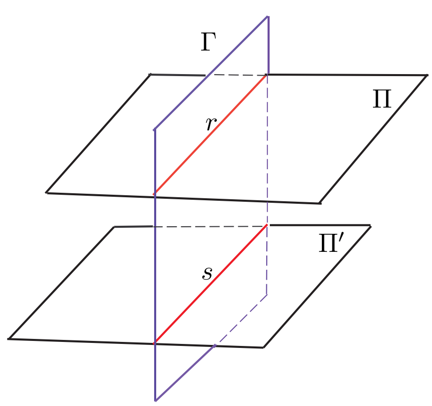


Logo $m \parallel \Pi$. Seja $n \subset \Pi$ uma reta não paralela à reta m e $\Gamma = \langle n, P\rangle$. Sejam $t' = \Gamma \cap \Pi'$ e $t'' = \Gamma \cap \Pi''$. Então, como t' e n são retas coplanares (estão contidas em Γ) e t' está contida em Π' que é paralelo à n, segue da Proposição 1.16 que $t' \parallel n$. Com mesmo argumento concluimos que e $t'' \parallel n$. Como $P \in t' \cap t''$, concluímos do Teorema 1.14 que $t' = t''$. Logo $t' \subset \Pi' \cap \Pi''$, o que é um absurdo pois $\Pi' \cap \Pi'' = m$ que é uma reta distinta de t' (pois $t' \parallel n$ e $m \not\parallel n$). Portanto Π' é único, como queríamos demonstrar. $\square$

Corolário 1.19. *Dois planos distintos e paralelos a um terceiro são paralelos entre si.*

Demonstração. Sejam Π e Π' planos distintos paralelos a um plano Γ. Se Π e Π' não são paralelos entre si, então eles são planos secantes. Logo existe uma reta r tal que $\Pi \cap \Pi' = r$. Seja $P \in r$ qualquer. Então por P temos dois planos distintos paralelos ao plano Γ, o que contradiz o teorema anterior. Portanto $\Pi \parallel \Pi''$. $\square$

Teorema 1.20. *Se um plano Γ intersecta um plano Π segundo uma reta r, então Γ intersecta todo plano paralelo ao plano Π segundo uma reta paralela à reta r.*

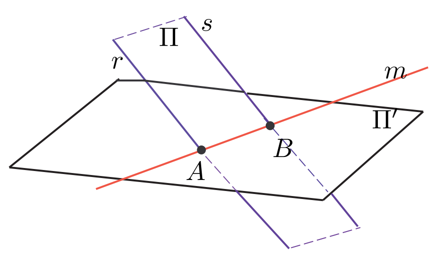


Demonstração. Sejam Π e Π' dois planos paralelos e Γ um plano secante ao plano Π. Seja $r = \Gamma \cap \Pi$. Então $\Pi' \cap \Gamma \neq \emptyset$ (pois se fossem paralelos, como $\Pi \,\|\, \Pi'$, temos pelo corolário anterior que $\Pi \,\|\, \Gamma$, o que sabemos ser falso). Logo, como Γ e Π' são planos distintos, eles são secantes. Seja $s = \Gamma \cap \Pi'$. Como $\Pi \cap \Pi' = \emptyset$ temos que $r \cap s = \emptyset$, pois $r \subset \Pi$ e $s \subset \Pi'$. Portanto $r \parallel s$ uma vez que são coplanares pois ambas estão contidas em Γ. □

Teorema 1.21. a) *Se uma reta intersecta um plano Π em um ponto, intersecta também em um ponto qualquer plano paralelo ao plano Π.*
b) *Se um plano intersecta uma reta r em um ponto, intersecta também em um ponto qualquer reta paralela à reta r.*

Demonstração. a) Sejam Π e Π' dois planos paralelos e r uma reta secante ao plano Π em A. Suponhamos que r não intersecta Π' em um ponto. Então r é paralela ao plano Π', já que não pode estar contida em Π' pois r contém A e $A \notin \Pi'$. Seja $s \subset \Pi$ uma reta que passa por A. Então r e s são retas concorrentes em A. Seja $\Gamma = \langle r, s \rangle$. Como r e s são paralelas ao plano Π' e são concorrentes entre si, segue do Teorema 1.17 que Γ é paralelo ao plano Π' e passa por A. Então Γ e Π são dois planos paralelos ao plano Π' por A, o que é um absurdo pois contradiz o Teorema 1.18.

b) Sejam r e s retas paralelas e Π' um plano que intersecta r em A. Mostremos que Π também intercepta s. Seja $\Pi = \langle r, s \rangle$. Os planos Π e Π' têm o ponto A em comum. Logo, Π e Π' se intersectam segundo uma reta m que contém A (note que $\Pi \neq \Pi'$ pois $r \subset \Pi$ e $r \not\subset \Pi'$).



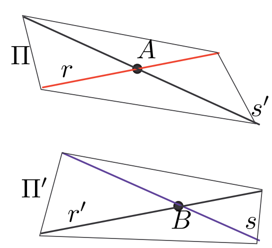
Assim, r, s e m são três retas no plano Π tais que $r \parallel s$ e m intersecta r (em A pois $A \in r$, $A \in m$ e r e m são retas distintas). Temos da Geometria Plana (para o plano Π, usando o resultado que diz "em um plano, se duas retas são paralelas, então toda reta que intersecta uma delas, intersecta a outra") que m intersecta a reta s em um ponto B. Portanto, como $m \subset \Pi'$, então Π' também intersecta s. □

Os teoremas acima possibilitam as seguintes construções:

Exemplo 1.22. ***Construção de prismas, paralelepípedos e cubos:*** Considere um polígono $A_1A_2 \ldots A_n$ contido em um plano Π e B_1 um ponto exterior ao plano Π. Seja Π' o plano paralelo ao plano Π passando por B_1. Pelos pontos $A_2, \ldots, A_n$ traçamos retas paralelas à $\ell(A_1, B_1)$, as quais interceptam Π' nos pontos $B_2, \ldots, B_n$, respectivamente. Tomando dois segmentos consecutivos assim determinados, por exemplo $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$, o polígono $A_1A_2B_2B_1$ é plano, já que os lados $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$ são paralelos. Isto implica que os outros dois lados também são paralelos, já que estão contidos em retas coplanares que não se interceptam por estarem contidas em planos paralelos. Portanto $A_1A_2B_2B_1$ é um paralelogramo. As regiões poligonais determinadas por tais paralelogramos, chamadas *faces laterais*, juntamente com as regiões poligonais determinadas pelos polígonos $A_1A_2 \ldots A_n$ e $B_1B_2 \ldots B_n$, chamadas *bases*, determinam uma figura geométrica, chamada *prisma*. As arestas $\overline{A_iB_i}$, $i = 1, \ldots, n$, são chamadas *arestas laterais*. Quando as bases de um prisma são paralelogramos, o prisma é chamado *paralelepípedo*. Um *cubo* (ou *hexaedro regular*) é um prisma em que as bases são quadrados e todas as faces laterais são quadrados congruentes à base.

1.8 Exercícios

1. Se duas retas são reversas então existem dois planos paralelos, cada um contendo uma das retas.



Resolução: Sejam r e s duas retas reversas. Tracemos por um ponto qualquer $A \in r$ uma reta s' paralela a s e tracemos por um ponto $B \in s$ uma reta r' paralela a r. As retas r e s' determinam um plano Π e as retas r' e s determinam um plano Π'.

Os planos Π e Π' são distintos pois, caso contrário, r e s pertenceriam a um mesmo plano, ou seja r e s seriam coplanares, o que contradiz a hipótese de que r e s são reversas. Como $r', s \subset \Pi'$ são paralelas às retas $r, s' \subset \Pi$, respectivamente, temos pelo Teorema 1.15 que as retas r' e s são paralelas ao plano Π. Conseqüentemente, como r' e s são retas concorrentes, segue do Teorema 1.17 que $\Pi \parallel \Pi'$.

2. É verdade que se uma reta corta uma de duas retas paralelas, então corta a outra? Justifique sua resposta.

3. Sejam Π, Π' e Π'' três planos que têm exatamente um ponto em comum. Mostre que não existe nenhuma reta simultaneamente paralela a Π, Π' e Π''.

4. Seja r uma reta secante a um plano Π e $P \notin \Pi$ com $P \notin r$. Mostre que existe uma única reta que passa por P, intercepta r e é paralela a Π.

1.9 Perpendicularismo entre reta e plano

Veremos agora a noção de ângulo entre duas retas r e s, o que será denotado por $\angle(r, s)$. Suponhamos que r e s são concorrentes no ponto V. Seja $\Pi = \langle r, s\rangle$. Então r e s determinam em Π quatro ângulos com vértices em V . O *ângulo entre r e s* é o menor dentre esses quatro ângulos. Com o objetivo de definirmos ângulo entre retas reversas, vejamos o seguinte teorema:

Teorema 1.23. *Sejam (r, s) e (r', s') dois pares de retas concorrentes, tais que r e r' são paralelas entre si, o mesmo ocorrendo com s e s'. Então o ângulo entre r e s é igual ao ângulo entre r' e s'.*

Demonstração. (Os detalhes da demonstração que segue devem ser preenchidos pelo leitor.) Sejam $V = r \cap s$ e $V' = r' \cap s'$. Há duas possibilidades: (i) $\langle r, s\rangle = \langle r', s'\rangle = \Pi$ e (ii) $\langle r, s\rangle = \Pi$ e $\langle r', s'\rangle = \Pi'$, com Π e Π' planos distintos. Se (i) ocorre, conclua o teorema usando o fato que retas paralelas determinam ângulos correspondentes congruentes. Se (ii) ocorre, tome pontos $A \in r$, $B \in s$, $A' \in r'$ e $B' \in s'$ tais que $VA = V'A'$, $VB = V'B'$, $\angle(r, s) = A\widehat{V}B$ e $\angle(r', s') = A'\widehat{V'}B'$. Os triângulos AVB e $A'V'B'$ são congruentes (pelo caso LLL, use a propriedade de transitividade entre retas paralelas no espaço para mostrar que $ABB'A'$ é um paralelogramo e, portanto, $AB = A'B'$). Assim, $\angle(r, s) = A\widehat{V}B = A'\widehat{V'}B' = \angle(r', s')$. □

Definição 1.24. *Sejam r e s retas reversas. O* ***ângulo*** *entre r e s é o ângulo formado por duas retas concorrentes r' e s', paralelas às retas r e s, respectivamente.*

Observação 1.25. (a) Segue do Teorema 1.23 que o ângulo entre duas retas reversas não depende da escolha das retas paralelas às retas dadas.

(b) Sejam r e s retas reversas. Tomemos $A \in s$ qualquer e $r' \| r$ por A. Então r e s são concorrentes e $\angle(r, s) = \angle(r', s)$ (mostre isto). Consequentemente, para determinarmos o ângulo entre duas retas reversas r e s, basta construirmos uma reta r' paralela a r por um ponto de s, e determinarmos o ângulo entre r' e s. Portanto, o ângulo entre r e s é igual ao ângulo entre s e qualquer reta paralela a r.

Definição 1.26. *Sejam r e s duas retas distintas e Π um plano.*

*(a) Dizemos que r e s são **ortogonais** se o ângulo entre elas é reto.*

*(b) Dizemos que r é **perpendicular** a Π se r é ortogonal a toda reta contida em Π.*

Notação: $r \perp s$ e $r \perp \Pi$ significam que r é perpendicular a reta s e ao plano Π, respectivamente.

Exemplo 1.27. Seja $ABCDEFGH$ o cubo da Figura 1.4. As retas $\ell(D,H)$, $\ell(F,G)$ e $\ell(E,H)$ são ortogonais.

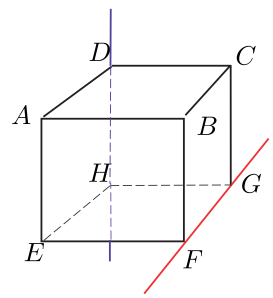


Figura 1.4:

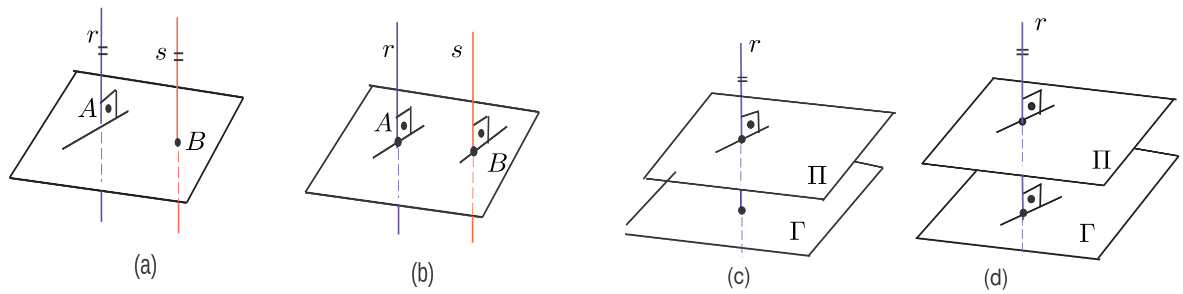
Observação 1.28. (a) Retas ortogonais podem ser concorrentes ou não. Logo, retas perpendiculares são tipos especiais de retas ortogonais. *(Veja o Exercício 2.)*

(b) Se r é perpendicular a um plano Π, então r e Π são secantes. *(Mostre isto.)*

(c) Seja r uma reta que intersecta um plano Π no ponto A. Então *r é perpendicular a Π se e somente se r é perpendicular a toda reta de Π que passa por A.* De fato, se r é perpendicular a Π, é imediato da Definição 1.26 que r é perpendicular a toda reta de Π que passa por A. Mostremos a recíproca, ou seja, suponhamos que r é perpendicular a toda reta de Π que passa por A e mostremos que r é perpendicular a Π. Seja $s \subset \Pi$ uma reta qualquer. Se $A \in s$, então r e s são perpendiculares (por hipótese) e, portanto, ortogonais. Se $A \notin s$, então existe $s' \subset \Pi$ paralela à s e passando por A. Como r e s' são perpendiculares e s' e s são paralelas, segue da Definição 1.26, que r é ortogonal à s. Portanto r e Π são perpendiculares, como queríamos.

Ainda não sabemos sobre a existência e unicidade de retas perpendiculares a um plano dado, passando por um ponto dado. Nosso objetivo é estabelecer resultados que nos permitam concluir sobre isto.

Teorema 1.29. *Sejam r e s retas distintas e Π e Γ dois planos distintos.*
(a) *Se $r \perp \Pi$ e $r \parallel s$ então $s \perp \Pi$.*
(b) *Se $r \perp \Pi$ e $s \perp \Pi$ então $r \parallel s$.*
(c) *Se $r \perp \Pi$ e $\Gamma \parallel \Pi$ então $r \perp \Gamma$.*
(d) *Se $r \perp \Pi$ e $r \perp \Gamma$ então $\Pi \parallel \Gamma$.*



Demonstração. (a) Seja $\{A\} = r \cap \Pi$. Segue do Teorema 1.21(b) que $s \cap \Pi = \{B\}$, com $B \neq A$ uma vez que $r \cap s = \emptyset$. Para mostrarmos que $s \perp \Pi$, devemos mostrar que $s \perp t$, para toda reta $t \subset \Pi$ e que passa por B. Seja t uma reta contida em Π e que passa por B. Se $A \in t$ então, como $r \perp \Pi$, temos $r \perp t$. Conseqüentemente, como $s \parallel r$, temos $s \perp t$. Se $A \notin t$, seja t' uma reta contida em Π, que passa por A e é paralela à reta t. Como $r \perp \Pi$ temos que $r \perp t'$. Conseqüentemente, como $t \parallel t'$ e $s \parallel r$, segue do Teorema 1.23 que $t \perp s$, como queríamos.

(b) Sejam A e B os pontos de interseção de r e s com Π, respectivamente. Note que $A \neq B$ *(justifique)*. Suponhamos que s e r não são paralelas. Seja $s' \parallel r$ por B e seja $\Pi' = \langle s, s' \rangle$ (note que s e s' são retas concorrentes em B). Então $\Pi' \cap \Pi$ é uma reta t. Por hipótese, temos que $s \perp t$ (em B). Como $s' \parallel r$ e $r \perp \Pi$, segue do item (a) que $s' \perp t$ (em B). Portanto temos em Π' duas retas distintas, s e s', perpendiculares à $t \subset \Pi'$ com $s \cap s' = B$, o que é um absurdo. Logo $s \parallel r$.

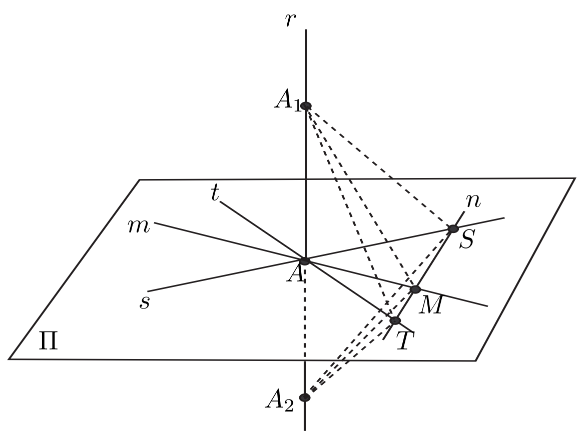
(c) e (d) Exercício. $\square$

O próximo resultado facilita a tarefa de determinar se uma reta é perpendicular a um plano, como também possibilita a construção de planos perpendiculares a uma reta, demonstrando assim a sua existência.

Teorema 1.30. *Uma reta é perpendicular a um plano se e somente se é ortogonal a um par de retas concorrentes do plano.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Imediato.

($\Leftarrow$) Sejam Π um plano e r, s e t retas tais que $s, t \subset \Pi$, $s \cap t = \{A\}$ e r é ortogonal às retas t e s. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $A \in r$ (caso contrário tome $r' \parallel r$, com $A \in r'$ e faça a demonstração que segue para r', concluindo o teorema através do Teorema 1.29(a)). Então s e t são perpendiculares a r em A. Para mostrarmos que $r \perp \Pi$, basta mostrar que r é perpendicular a m, onde m é qualquer reta contida em Π e passando por A. Se $m = s$ ou $m = t$, segue o resultado. Suponhamos que $m \neq s$ e $m \neq t$. Seja $n \subset \Pi$ tal que $n \cap s = \{S\}$, $n \cap m = \{M\}$ e $n \cap t = \{T\}$, com $S - M - T$ (M está entre S e T, figura abaixo. Os casos $M - S - T$ e $M - T - S$ são análogos).



Sejam $A_1, A_2 \in r$ tais que $A_1 - A - A_2$ e $A_1A = A_2A$. Consideremos o plano $\Pi' = \langle r, M \rangle$. Vamos mostrar que $A_1AM = A_2AM$ pois, neste caso, temos $A_1\widehat{A}M = A_2\widehat{A}M$ e, como estes ângulos são suplementares, concluímos que são ângulos retos. Conseqüentemente, r e m são perpendiculares, como queremos.

Temos:

$$A_1AS = A_2AS \text{ (pelo caso LAL)} \;\Rightarrow\; A_1S = A_2S$$
$$A_1AT = A_2AT \text{ (pelo caso LAL)} \;\Rightarrow\; A_1T = A_2T$$

de onde segue que

$$A_1ST = A_2ST \tag{1.1}$$

usando o caso (LLL) de congruência de triângulos.

Segue de (1.1) que $A_1T = A_2T$ e $A_1\widehat{T}S = A_2\widehat{T}S$. Logo, por (LAL), temos $A_1TM = A_2TM$. Portanto,

$$A_1M = A_2M\ . \tag{1.2}$$

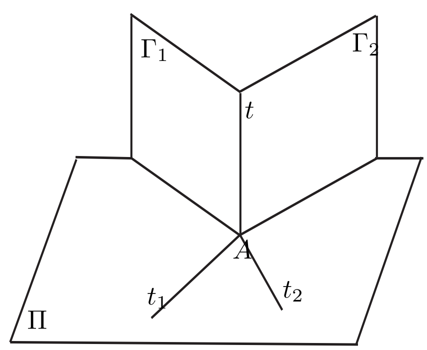
Como $AA_1 = AA_2$, segue de (1.2) e do caso (LLL) que $A_1AM = A_2AM$, como queríamos. $\square$

Agora estamos em condições de construir retas perpendiculares a planos e também planos perpendiculares a retas.

Teorema 1.31. (a) *Dada uma reta r e um ponto P, existe um único plano passando por P e perpendicular a r.*
(b) *Dado um plano Π e um ponto P, existe uma única reta passando por P e perpendicular a Π.*

Demonstração. (a) *Existência*: Sejam Π e Π' dois planos distintos contendo r. Sejam $t \subset \Pi$ e $s \subset \Pi'$ retas perpendiculares à r em um ponto $A \in r$. Seja $\Gamma = \langle t, s\rangle$. Concluímos do Teorema 1.30 que $r \perp \Gamma$. Se $P \in \Gamma$, então Γ é o plano procurado. Se $P \notin \Gamma$, seja $\Gamma' \parallel \Gamma$ passando por P. Pelo Teorema 1.29 (c), temos que $r \perp \Gamma'$.
Unicidade: Sejam Π e Π' planos distintos contendo P e perpendiculares à r. Segue do Teorema 1.29 (d) que $\Pi \parallel \Pi'$. Mas isto é um absurdo pois $P \in \Pi \cap \Pi'$. Portanto, existe um único plano passando por P e perpendicular à r.

(b) *Existência*: Sejam t_1 e t_2 retas contidas em Π e concorrentes em um ponto A. Pelo item (a), existem planos Γ_1 e Γ_2 contendo A e perpendiculares à t_1 e t_2, respectivamente. Note que estes planos são distintos pois, se fossem coincidentes, então pelo Teorema 1.29 (b) as retas t_1 e t_2 seriam paralelas.



Seja $t = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Afirmamos que $t \perp \Pi$ (em A). De fato, t é perpendicular à t_1 (em A) uma vez que $t \subset \Gamma_1$ e $\Gamma_1 \perp t_1$ em A. De modo análogo temos que t é perpendicular à t_2. Como t_1 e t_2 são retas de Π que são concorrentes em A, a afirmação segue do Teorema 1.30. Se $P \in t$, então t é a reta procurada. Se $P \notin t$, seja $r \parallel t$ com $P \in r$. Pelo Teorema 1.29 (a), segue que $r \perp \Pi$, como queríamos.
Unicidade: Suponhamos que existem duas retas distintas r_1 e r_2 perpendiculares à Π e contendo P. Segue do Teorema 1.29 (b) que $r_1 \parallel r_2$, o que é um absurdo pois $P \in r_1 \cap r_2$. $\square$

Veremos agora como construir, com a teoria desenvolvida até o momento, um *sistema de coordenadas cartesianas* para o espaço.

Sejam O, X e Y pontos não colineares. Tomemos $Z \notin \langle O, X, Y \rangle$. Obtemos assim três planos distintos e secantes:

$$\langle O, X, Y \rangle, \langle O, X, Z \rangle \text{ e } \langle O, Y, Z \rangle \ ,$$

cujas retas de interseção são $\ell(O, X)$, $\ell(O, Y)$ e $\ell(O, Z)$. Consideremos para cada uma dessas retas um sistema de coordenadas tal que O seja a origem. Obtemos assim um sistema de coordenadas cartesianas para o espaço em que as retas $\ell(O, X)$, $\ell(O, Y)$ e $\ell(O, Z)$ são os *eixos* e cada ponto P do espaço possui três coordenadas, uma com relação a cada um dos eixos, obtidas da seguinte maneira. A coordenada de P com relação ao eixo $\ell(O, X)$ é zero se $P \in \langle O, Y, Z \rangle$ ou, caso $P \notin \langle O, Y, Z \rangle$, é a coordenada do ponto da reta $\ell(O, X)$ obtido da interseção de $\ell(O, X)$ com o plano que passa por P e é paralelo ao plano $\langle O, Y, Z \rangle$. As coordenadas de P com relação aos eixos $\ell(O, Y)$ e $\ell(O, Z)$ são obtidas de maneira análoga.

Caso os três eixos são perpendiculares entre si no ponto O ou, equivalentemente,

$$\ell(O, X) \perp \ell(O, Y) \text{ e } \ell(O, Z) \perp \langle O, X, Y \rangle \ ,$$

obtemos um sistema *ortogonal* de coordenadas cartesianas. Para obter as coordenadas de um ponto P do espaço com relação ao eixo $\ell(O, X)$, por exemplo, basta tomarmos a coordenada do ponto da reta $\ell(O, X)$ obtido da interseção de $\ell(O, X)$ com o plano que passa por P e é perpendicular a reta $\ell(O, X)$.

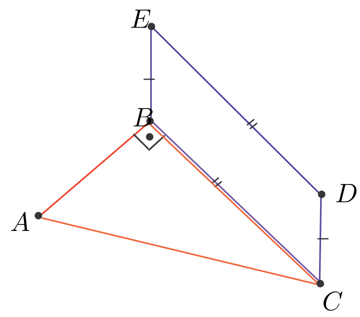
1.10 Exercícios

1. Sejam r e t retas distintas e ortogonais a uma reta s. É verdade que $r \parallel t$?

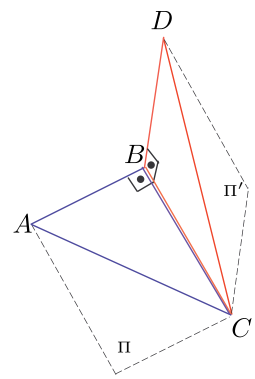
2. Construa duas retas ortogonais que não se intersectam. Conclua que estas retas são reversas e, portanto, que retas ortogonais são concorrentes ou reversas.

3. Seja ABC um triângulo retângulo em B e seja $BCDE$ um paralelogramo não contido no plano $\langle A, B, C \rangle$. Mostre que as retas $\ell(A, B)$ e $\ell(D, E)$ são ortogonais.

   Resolução: Como, $\ell(A, B) \perp \ell(B, C)$ então $\ell(A, B)$ é ortogonal a toda reta paralela a $\ell(B, C)$. Sendo $BCDE$ um paralelogramo, temos que $\ell(D, E) \parallel \ell(B, C)$ e, portanto, $\ell(A, B)$ é ortogonal a $\ell(D, E)$.



4. Sejam ABC e BCD triângulos retângulos em B não coplanares e tais que $\ell(A,B)$ é ortogonal a $\ell(C,D)$. Prove que $\ell(B,D)$ é ortogonal a $\ell(A,C)$.



Resolução: Sejam Π e Π' dois planos determinados pelos triângulos ABC e BCD respectivamente. Temos $\Pi \neq \Pi'$, pois $D \in \Pi$ e $D \notin \Pi'$. Mostremos que $\ell(B,D) \perp \Pi$, pois daí segue que $\ell(B,D)$ é ortogonal a $\ell(A,C)$, uma vez que $\ell(A,C) \subset \Pi$.

Para mostrarmos que $\ell(B,D) \perp \Pi$, basta mostrarmos que $\ell(B,D)$ é ortogonal às duas retas concorrentes $\ell(A,B)$ e $\ell(B,C)$, as quais estão contidas em Π.

Como BCD é retângulo em B temos que $\ell(B,D) \perp \ell(B,C)$. $(*)$

Da hipótese, $\ell(A,B)$ é ortogonal a $\ell(C,D)$ e é perpendicular a $\ell(B,C)$ e, portanto, $\ell(A,B)$ é ortogonal a duas retas concorrentes do plano Π'. Concluímos assim que $\ell(A,B) \perp \Pi'$ e, conseqüentemente, $\ell(A,B) \perp \ell(B,D)$, uma vez que $\ell(B,D) \subset \Pi'$. $(**)$

De $(*)$ e $(**)$ concluímos que $\ell(B,D)$ é ortogonal a $\ell(A,C)$, como queríamos.

5. Sejam $A_1A_2\dots A_n$ um polígono regular plano e V um ponto situado sobre a reta perpendicular ao plano do polígono passando pelo seu centro O, com $V \neq O$. Que propriedades possuem os triângulos $VOA_1, VOA_2, \dots, VOA_n$? A pirâmide $VA_1A_2\dots A_n$ assim obtida é dita *regular*. Que propriedades satisfazem as faces laterais de uma pirâmide regular?

6. Sejam r e s retas distintas e não paralelas. Mostre que, dado um ponto $P \notin \{r, s\}$, existe uma única reta ortogonal a r e a s, passando por P. (*Dica: não esqueça de analisar os dois casos possíveis para a posição das retas r e s. Analise cada caso separadamente.*)

7. Sejam A, B e C pontos não colineares. Se as retas $\ell(A, B)$ e $\ell(A, C)$ são ortogonais a uma reta r, mostre que $\ell(B, C)$ também é ortogonal a r.

8. Dada uma reta r secante a um plano Π e um ponto P exterior a r e a Π, diga como construir um segmento cujos extremos estão em r e em Π, e cujo ponto médio seja P. *(Dica: as diagonais de um paralelogramo se intersectam em seu ponto médio.)*

9. O triângulo ABC, retângulo em A, está contido em um plano Π. Sobre a reta perpendicular a Π, traçada por C, tomamos um ponto $D \neq C$. Mostre que $\ell(A, B)$ é perpendicular a reta $\ell(A, D)$.

1.11 Planos perpendiculares

Veremos agora a noção de ângulo entre planos.

Definição 1.32. Sejam Π e Π' planos secantes e $r = \Pi \cap \Pi'$. Sejam Γ um plano perpendicular a r em um ponto $A \in r$, $t = \Gamma \cap \Pi$ e $t' = \Gamma \cap \Pi'$.

(a) O **ângulo** entre os planos Π e Π' é o ângulo entre as retas t e t', isto é,

$$\angle(\Pi, \Pi') = \angle(t, t').$$

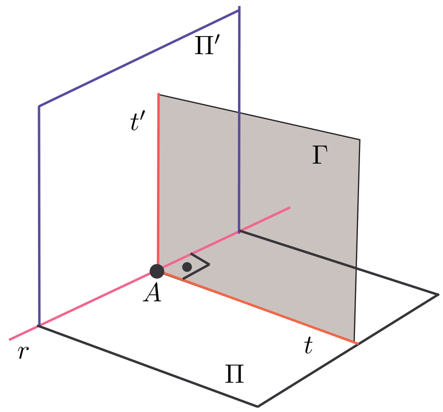
(b) Os planos Π e Π' são **perpendiculares** se as retas t e t' forem retas perpendiculares.

Notação: $\Pi \perp \Pi'$ significa que os planos Π e Π' são perpendiculares.

Observação 1.33. (1) Segue do Teorema 1.20 que o ângulo entre t e t' independe do ponto A tomado na definição anterior.

(2) Se $\Pi \perp \Pi'$ então, com as mesmas notações da definição anterior, temos $t \perp \Pi'$ e $t' \perp \Pi$. *(Mostre isto.)* Portanto, cada um dos planos perpendiculares contém uma reta perpendicular ao outro.

O seguinte resultado facilita a tarefa de decidir se dois planos são perpendiculares.



Teorema 1.34. *Dois planos secantes são perpendiculares se e somente se um deles contém uma reta perpendicular ao outro.*

Demonstração. Sejam Π e Π' planos secantes.
($\Rightarrow$) Segue da observação anterior.
($\Leftarrow$) Suponhamos que Π e Π' são secantes e que Π contém uma reta t tal que $t \perp \Pi'$. Seja $r = \Pi \cap \Pi'$. Notemos que $t \cap \Pi' \subset \Pi \cap \Pi' = r$. Logo, t e r são concorrentes em um ponto A (em particular, t e r são perpendiculares, uma vez que $t \perp \Pi'$ e $r \subset \Pi'$). Tomemos uma reta $t' \subset \Pi'$ tal que t' é perpendicular a r em A, a qual existe pela Geometria Plana para o plano Π'. Como t e t' são concorrentes (em A), seja $\Gamma = \langle t, t' \rangle$. Então $r \perp \Gamma$ uma vez que r é ortogonal a um par de retas concorrentes de Γ, a saber, t e t'. Assim, para concluirmos sobre o ângulo entre Π e Π', basta determinarmos o ângulo entre as retas t e t'. Mas estas retas são perpendiculares, uma vez que $t \perp \Pi'$ e $t' \subset \Pi'$. Portanto Π e Π' são planos perpendiculares. □

Corolário 1.35. *Se uma reta é perpendicular a um plano* Π*, então todo plano que contém essa reta é perpendicular a* Π*.*

Observação 1.36. Segue do Teorema 1.34 e da Observação 1.33 que se um plano Π contém uma reta perpendicular a um plano Π', então Π' também contém uma reta perpendicular ao plano Π.

Exemplo 1.37. Um *prisma reto* é um prisma em que as arestas laterais são perpendiculares ao plano da base. Suas faces laterais são retângulos perpendiculares ao plano da base. Quando a base é um retângulo, temos um *paralelepípedo retângulo*, no qual cada face é um retângulo. Ainda mais especial é o caso do *cubo*, ou *hexaedro regular*, que é um prisma reto no qual cada face é um quadrado.

Consideremos agora uma pirâmide de base $A_1A_2\ldots A_n$ e vértice V. Um caso particular consiste de quando a base é um polígono regular e V está situado sobre a reta perpendicular ao plano da base, conduzida pelo seu centro. Neste caso, dizemos que a pirâmide é *regular* e suas faces laterais são triângulos isósceles congruentes entre si. *(Mostre isto.)*

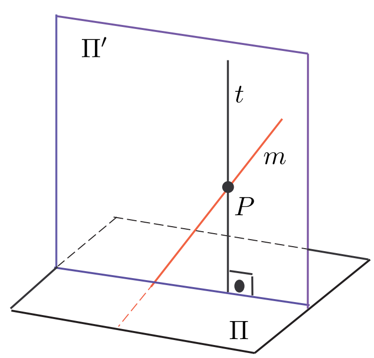
Planos perpendiculares podem ajudar a mostrar que uma reta é perpendicular a um plano, conforme o resultado a seguir:

Proposição 1.38. *Se dois planos são perpendiculares então toda reta em um desses planos, que é perpendicular a reta de interseção dos dois planos, é perpendicular ao outro plano.*

Demonstração. Exercício. □

Vimos que para que dois planos sejam perpendiculares é suficiente que um deles contenha uma reta perpendicular ao outro. Utilizando este resultado podemos construir uma infinidade de planos perpendiculares a um plano dado, passando por um ponto dado, ou contendo uma reta perpendicular ao plano dado. Porém, dada uma reta que é secante, mas não perpendicular a um plano (tais retas são chamadas de *oblíquas* ao plano), podemos construir um *único* plano contendo tal reta e perpendicular ao plano dado, conforme mostra o resultado a seguir.

Teorema 1.39. *Se m é uma reta secante mas não perpendicular a um plano Π, então existe um único plano contendo m e perpendicular a Π.*



Demonstração. *(Existência)* Seja Π um plano e m uma reta oblíqua a Π. Por um ponto qualquer $P \in m$ tracemos uma reta t perpendicular a Π. As retas t e m determinam um plano Π'. Temos $\Pi' \perp \Pi$ pois Π' contém a reta t, que é perpendicular a Π.
(Unicidade) O plano Π' é o único plano que passa por m e é perpendicular a Π pois, se Γ é um plano nessas condições, então Γ contém a reta t. De fato, uma vez que $P \in m \subset \Gamma$, temos da

Geometria Plana em Γ, que existe uma reta t' em Γ que é perpendicular a reta de interseção de Γ com Π passando por P e, portanto, perpendicular a Π (pela proposição anterior). Como existe uma única reta perpendicular a Π por P, concluímos que $t' = t$. Portanto os dois planos Γ e Π' contém as retas t e m, que são retas concorrentes, de onde concluímos que $\Gamma = \Pi'$, pois duas retas concorrentes determinam um único plano. $\square$

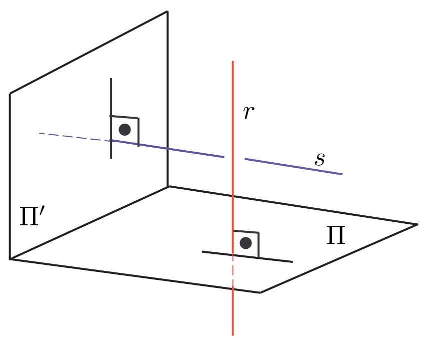
1.12 Exercícios

1. Sejam r uma reta e Π e Π' dois planos distintos. Mostre que
   (a) Se $\Pi \perp \Pi'$ e $r \perp \Pi'$ em P, com $P \in \Pi \cap \Pi'$ então $r \subset \Pi$.
   (b) Se $\Pi \perp \Pi'$ e $r \perp \Pi'$ então $r \parallel \Pi$ ou $r \subset \Pi$.

2. Seja Π um plano e $A \notin \Pi$. Construa um plano contendo A e perpendicular a Π. Quantos planos existem satisfazendo esta condição?

3. Mostre que se um plano Π contém uma reta perpendicular a um plano Π', então o plano Π' contém uma reta perpendicular ao plano Π.

4. Dois planos Π e Π' são perpendiculares se e somente se existem retas $r \perp \Pi$ e $s \perp \Pi'$ que são ortogonais.



5. Em um cubo $ABCDEFG$ mostre que os planos diagonais $ABHG$ e $EFDC$ são perpendiculares.

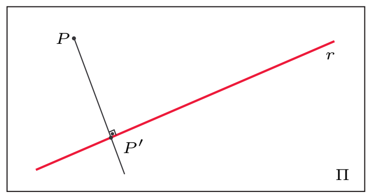
6. Seja m uma reta paralela a um plano Π. Construa um plano contendo m e perpendicular a Π. Este plano é único?

7. Sejam Π e Π' dois planos secantes. Estes planos são perpendiculares a um terceiro plano se e somente se a reta de interseção desses planos é perpendicular ao terceiro plano.

8. Prove que existe uma única reta que é perpendicular a duas retas reversas dadas.

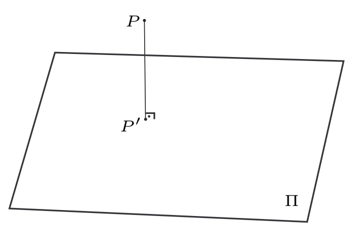
1.13 Projeção ortogonal

Dados uma reta $r \subset \Pi$ e um ponto $P \in \Pi$, sabemos da Geometria Plana (para Π) que a *projeção ortogonal de P sobre r*, $proj_r(P)$, é o ponto P' obtido da interseção de r com a reta perpendicular a r por P. Dizemos que P' é o *pé da perpendicular baixada de P até r*. Note que se $P \in r$, então $proj_r(P) = P$.



Com raciocínio análogo podemos definir a projeção ortogonal de um ponto sobre um plano.

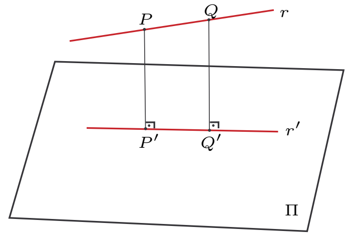
Definição 1.40. Sejam P um ponto e Π um plano. A *projeção ortogonal de P sobre* Π, $proj_\Pi(P)$, é o ponto P' obtido da interseção de Π com a reta perpendicular a Π por P. Dizemos também que P' é o *pé da perpendicular baixada de P até* Π. A projeção ortogonal de uma figura F sobre Π, $proj_\Pi(F)$, é o conjunto das projeções ortogonais dos pontos dessa figura sobre o plano.



Note que se $P \in \Pi$, então $proj_\Pi(P) = P$.

Exemplo 1.41. Se uma reta r é perpendicular a um plano Π, a projeção ortogonal de r sobre Π é o ponto de interseção de r com Π. Porém, se r não é perpendicular a Π, então $proj_\Pi(r)$ é uma reta. De fato, sejam P e Q dois pontos distintos de r. Afirmamos que $proj_\Pi(r) = \ell(P', Q')$, onde $P' = proj_\Pi(P)$ e $Q' = proj_\Pi(Q)$. (Note que $P' \neq Q'$ pois, se $P' = Q'$ então $P, Q \in t$, onde $t \perp \Pi$ por P'. Logo, $t = r$, o que é um absurdo pois r não é perpendicular a Π.)

Para provarmos isto, observemos primeiramente que, como $\ell(P, P') \parallel \ell(Q, Q')$ (pois ambas são perpendiculares a Π), tomando o plano $\Pi' = \langle \ell(P, P'), \ell(Q, Q') \rangle$, então $\Pi' \perp \Pi$ (pois Π'



contém uma reta perpendicular a Π). Como $P', Q' \in \Pi \cap \Pi'$ e $P' \neq Q'$, então $\Pi \cap \Pi' = \ell(P', Q')$. Sejam $r' = \ell(P', Q')$ e $M \in r$. Vamos mostrar que $proj_{\Pi}(M) \in r'$. Com efeito, tomando $M' = proj_{r'}(M)$, como M' é obtido da interseção da reta m perpendicular a r' passando por M, segue da Proposição 1.38 que m também é perpendicular ao plano Π (pois $\Pi' \perp \Pi$, $\Pi' \cap \Pi = r'$ e $m \subset \Pi'$). Portanto, $proj_{\Pi}(M) = proj_{r'}(M) = M' \in r'$. Resta mostrar que, se $X \in r'$, então existe um ponto $Y \in r$ tal que $proj_{\Pi}(Y) = X$. De fato, a reta perpendicular a Π por X está contida em Π' (Exercício 1(a) da seção anterior) e, como $r, r' \subset \Pi'$ então, como toda reta perpendicular a r' (em Π') é paralela a $\ell(P, P')$, a qual intersecta r, concluímos da geometria plana para Π' que tal reta também intersecta r, ou seja, existe $Y \in r$ tal que $proj_{\Pi}(Y) = X$.

Concluímos que a projeção ortogonal de um segmento de reta sobre um plano ou é um ponto, ou é um segmento de reta.

Observação 1.42. Vimos no exemplo anterior que $\Pi' \perp \Pi$ e que $r, r' \subset \Pi'$. O plano Π' é chamado de *plano projetante* da reta r sobre o plano Π.

Podemos agora fazer a seguinte definição:

Definição 1.43. O ***ângulo entre uma reta e um plano*** é zero quando a reta está contida no plano ou é paralela a ele; é igual a 90^o quando a reta é perpendicular ao plano; ou é igual ao ângulo entre a reta e sua projeção ortogonal sobre o plano, quando a reta é oblíqua ao plano.

1.14 Exercícios

1. Prove que se uma reta é paralela a um plano Π, então a sua projeção ortogonal sobre Π é uma reta paralela a reta dada.

2. Mostre que se um segmento de reta é paralelo a um plano, então a sua projeção ortogonal sobre o plano é congruente a ele.

3. Mostre que a medida da projeção ortogonal de um segmento sobre um plano é menor ou igual a medida do segmento dado. Quando vale a igualdade?

4. Se duas retas são concorrentes, quais as posições relativas das projeções ortogonais destas retas sobre um plano dado?

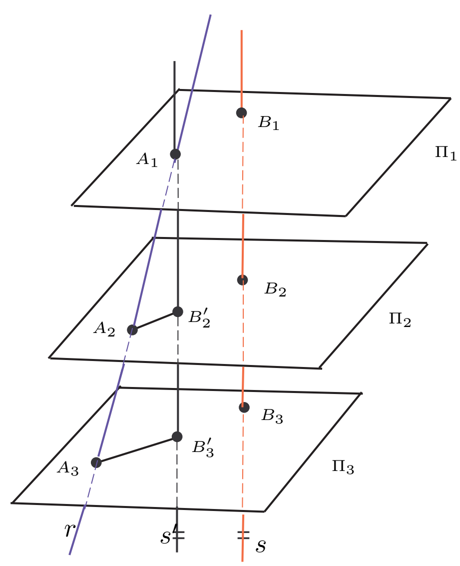
5. Se duas retas são reversas, quais as posições relativas das projeções ortogonais destas retas sobre um plano dado?

6. Seja $\overline{AB}$ um segmento oblíquo a um plano Π, isto é, $\overline{AB}$ está contido em uma reta oblíqua a Π, e seja M o seu ponto médio. Mostre que $M' = proj_{\Pi}(M)$ é o ponto médio de $\overline{A'B'} = proj_{\Pi}(\overline{AB})$.

1.15 Proporcionalidade

Teorema 1.44. *Um feixe de planos paralelos determina segmentos proporcionais sobre duas retas secantes quaisquer.*

Demonstração. Sejam Π_1, Π_2 e Π_3 planos paralelos, r uma reta que intersecta Π_1 em A_1, Π_2 em A_2 e Π_3 em A_3, e s uma reta que intersecta Π_1 em B_1, Π_2 em B_2 e Π_3 em B_3 (figura seguinte).



Tracemos por A_1 uma reta $s' \parallel s$ (caso $r \parallel s$, o resultado segue de maneira análoga) e sejam B_2' e B_3' os pontos de intersecção de s' com Π_2 e Π_3, respectivamente. Seja $\Gamma = \langle r, s' \rangle$. Como as retas $\ell(A_2, B_2')$ e $\ell(A_3, B_3')$ são paralelas, segue do Teorema de Tales (para o plano Γ) que:

$$\frac{A_1A_2}{A_1B_2'} = \frac{A_2A_3}{B_2'B_3'}.$$

Como os quadriláteros $A_1B_2'B_2B_1$ e $B_2'B_3'B_3B_2$ são paralelogramos *(mostre isto)*, então $A_1B_2' = B_1B_2$ e $B_2'B_3' = B_2B_3$, de onde concluímos que

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3},$$

como queríamos. $\square$

O exemplo a seguir é muito útil no estudo sobre volumes de pirâmides.

Exemplo 1.45. ***Construção de pirâmides semelhantes.*** Seja $A_1A_2 \ldots A_n$ base de uma pirâmide de vértice V. Tracemos um plano paralelo a base, que corta as arestas laterais segundo o polígono $B_1B_2 \ldots B_n$ e que divide a pirâmide em dois subconjuntos: um deles é a pirâmide de base $B_1B_2 \ldots B_n$ e o outro é chamado de *tronco de pirâmide* de bases $A_1A_2 \ldots A_n$ e $B_1B_2 \ldots B_n$. As duas pirâmides são *semelhantes na razão* k (para algum inteiro k), ou seja, é possível estabelecer uma correspondência entre seus pontos de modo que a razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes nas duas figuras seja constante. De fato, na face lateral VA_1A_2, o segmento $\overline{B_1B_2}$ é paralelo à base *(por quê?)* e, conseqüentemente, o triângulo VB_1B_2 é semelhante ao triângulo VA_1A_2. Logo, temos:

$$\frac{VB_1}{VA_1} = \frac{VB_2}{VA_2} = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} = k\,,\ \text{para algum inteiro } k\ .$$

Aplicando o mesmo raciocínio para as demais faces laterais, concluímos que a razão entre duas arestas correspondentes das duas pirâmides é sempre igual a k. A correspondência é então estabelecida da seguinte forma: dado um ponto P da pirâmide $VA_1A_2 \ldots A_n$ seu correspondente na pirâmide $VB_1B_2 \ldots B_n$ é o ponto P' sobre $\overline{VP}$ tal que $\frac{VP'}{VP} = k$. O ponto P' certamente pertence à segunda pirâmide. Além disso, tomando um segundo par de pontos correspondentes Q e Q', os triângulos $VP'Q'$ e VPQ são semelhantes na razão k *(por quê?)*, o que implica que $\frac{P'Q'}{PQ} = k$. Logo, a razão entre segmentos correspondentes nas duas pirâmides é sempre igual a k, o que demonstra a sua semelhança.

1.16 Distâncias

Definição 1.46. (a) A ***distância entre dois pontos*** é o comprimento do segmento que une esses dois pontos.

(b) A ***distância entre um ponto*** P ***e uma reta*** r é a distância entre P e P', onde P' é o pé da perpendicular baixada de P até r.

(c) ***A distância entre um ponto*** P ***e um plano*** Π é a distância entre P e P', onde P' é o pé da perpendicular baixada de P até Π.

(d) A ***distância entre duas retas concorrentes ou coincidentes*** é nula.

(e) A ***distância entre duas retas paralelas r e s*** é a distância entre um ponto qualquer $P \in r$ e a reta s.

(f) A ***distância entre duas retas reversas r e s*** é a distância entre os pontos $R \in r$ e $S \in s$, pertencentes a reta perpendicular comum a r e s.

(g) A ***distância entre uma reta*** r ***e um plano*** Π ***paralelo a*** r é a distância entre um ponto qualquer da reta r até o plano Π.

(h) A ***distância entre dois planos paralelos*** é a distância entre um ponto qualquer de um deles e o outro plano.

Notação: Denotamos a distância entre duas figuras por $d(.,.)$. Por exemplo, $d(P,Q)$, $d(r,s)$, $d(r,\Pi)$, e assim em diante. No caso particular da distância entre dois pontos, temos $d(P,Q) = PQ$, onde PQ é a medida do segmento $\overline{PQ}$.

Dado um plano Π e dois pontos A e B em Π, sabemos da geometria plana que o lugar geométrico dos pontos de Π que são equidistantes de A e B é a *mediatriz* do segmento $\overline{AB}$, ou seja, é a reta perpendicular a $\overline{AB}$ passando por seu ponto médio. Vamos analisar o mesmo problema, agora para a geometria espacial. Primeiramente recordemos o seguinte:

Definição 1.47. ***Lugar geométrico*** é um conjunto de pontos caracterizado por uma propriedade, ou seja, uma figura F é um lugar geométrico se:

a) todos os seus pontos têm a propriedade (todo elemento do conjunto satisfaz a propriedade);

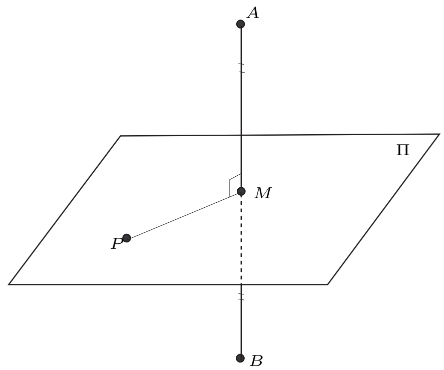
b) só os seus pontos têm a propriedade (todo elemento que tem a propriedade pertence ao conjunto).

Proposição 1.48. *O lugar geométrico dos pontos do espaço que são equidistantes de dois pontos A e B é o plano perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, passando pelo seu ponto médio.*

Demonstração. Seja Π o plano perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, passando pelo seu ponto médio M. Devemos mostrar que $P \in \Pi \Leftrightarrow d(P,A) = d(P,B)$. De fato,

($\Rightarrow$) Suponhamos que $P \in \Pi$, com $P \neq M$ (se $P = M$ o resultado é imediato).

Como $\Pi \perp \overline{AB}$ em M e $\overline{PM} \subset \Pi$, então $\overline{PM} \perp \overline{AB}$. Logo, os triângulos AMP e BMP são retângulos em M e, conseqüentemente, são congruentes pelo caso LAL ($AM = BM$, pois M é o ponto médio de $\overline{AM}$, e $\overline{MP}$ é comum). Portanto $AP = BP$, como queríamos.



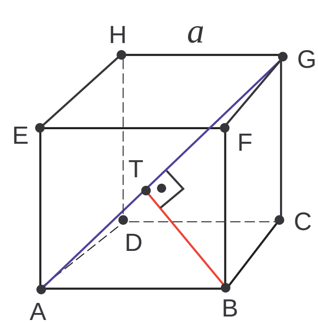
($\Leftarrow$) Suponhamos que $d(P,A) = d(P,B)$, com $P \neq M$ (se $P = M$, o resultado é imediato). Então os triângulos AMP e BMP são congruentes pelo caso LLL. Portanto $A\widehat{M}P = B\widehat{M}P$ e, como são ângulos suplementares (pois $A - M - B$), segue que são ângulos retos. Portanto $\ell(P,M) \perp \overline{AB}$ em M. Afirmamos que $P \in \Pi$. De fato, sejam $\Pi' = \langle \ell(A,B), \ell(P,M) \rangle$ e $t = \Pi \cap \Pi'$. Se $P \notin \Pi$, então t e $\ell(P,M)$ são duas retas distintas de Π' e perpendiculares a $\ell(A,B)$ em M (a qual também é uma reta de Π'), o que é um absurdo (t é perpendicular a $\ell(A,B)$ em M pois $t \subset \Pi$ e $\Pi \perp \ell(A,B)$ em M). $\square$

O plano dado na Proposição 1.48 é chamado de ***plano mediador*** do segmento $\overline{AB}$.

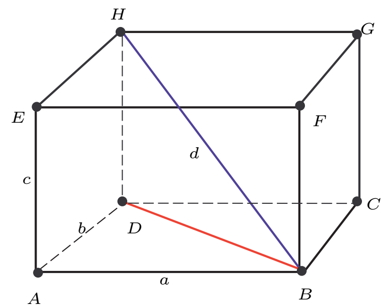
1.17 Exercícios

1. Mostre que está bem definida a distância entre uma reta e um plano paralelo a ela, e entre dois planos paralelos. Ou seja, a) se uma reta r é paralela a um plano Π, mostre que os pontos de r estão a igual distância de Π; b) se Γ é um plano paralelo a Π, mostre que todos os seus pontos estão a mesma distância de Π.

2. Seja $ABCDEFGH$ um cubo de aresta a, como indica a figura abaixo. Mostre que a distância do vértice B à diagonal $\overline{AG}$ é igual a $a\sqrt{6}/3$.



3. Seja $ABCDEFGH$ um paralelepípedo retângulo com medidas $AB = a$, $AD = b$, $AE = c$ e $BH = d$. Mostre que $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



4. Dado um plano Π e um ponto $P \notin \Pi$, mostre que o segmento $\overline{PP'}$, onde $P' = proj_\pi(P)$, é menor do que qualquer outro segmento com extremidades em P e em um ponto de Π.

5. Mostre que todo plano que passa pelo ponto médio de um segmento é equidistante das extremidades do segmento.

6. Dados pontos A, B, C e D distintos e tais que $AB = AD$ e $CB = CD$, mostre que as retas $\ell(A, C)$ e $\ell(B, D)$ são ortogonais.

Capítulo 2

Noções de Geometria Descritiva

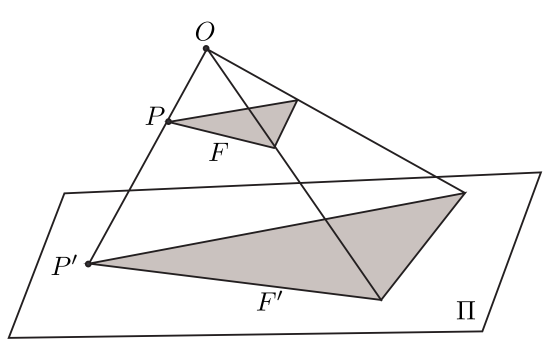
2.1 Sistemas de projeção

O objetivo da Geometria Descritiva é representar no plano, através de projeções, as figuras do espaço. Há duas formas principais de projetar uma figura F em um plano Π:

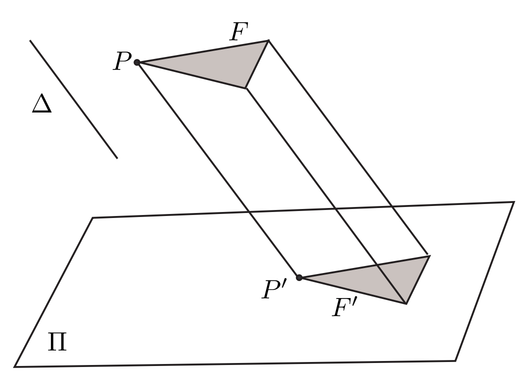
(a) utilizando um sistema de projeção central (ou cônica);

(b) utilizando um sistema de projeção cilíndrica.

No caso da uma projeção central, a projeção de cada ponto $P \in F$ é o ponto obtido da interseção de Π com a reta $\ell(OP)$, onde O é um ponto fixo, chamado *centro de projeção* (Figura 2.1 (a)). No caso de uma projeção cilíndrica, a projeção de cada ponto $P \in F$ é o ponto obtido da interseção com Π com a reta que passa por P e é paralela a uma direção fixada Δ, chamada *direção de projeção* (Figura 2.1 (b)).



(a)

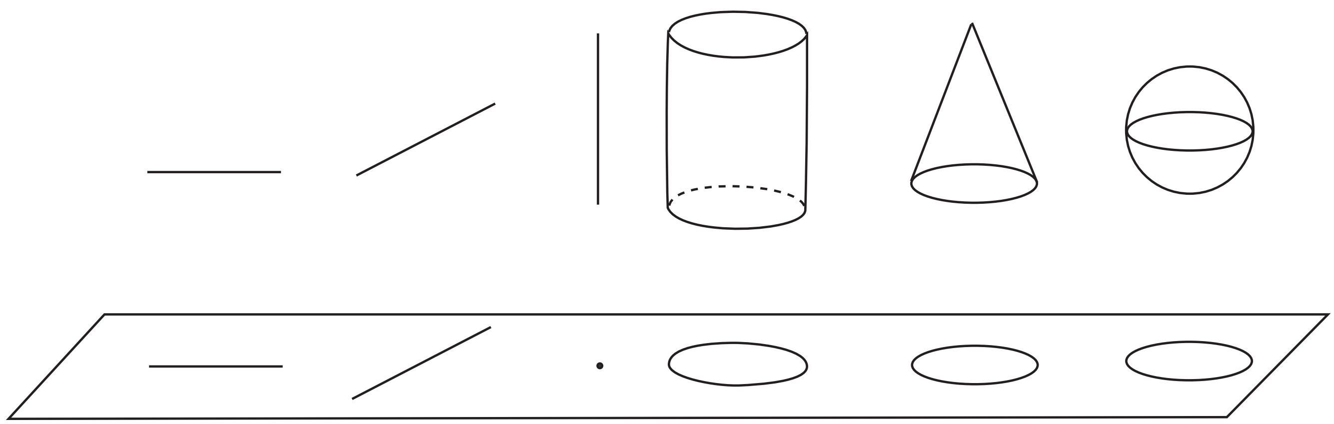


(b)

O sistema de projeção utilizado na Geometria Descritiva é a projeção cilíndrica ortogonal, que é um caso particular de projeção cilíndrica que ocorre quando a direção de projeção é perpendicular ao plano de projeção. Neste caso dizemos que F é projetada ortogonalmente sobre o plano de projeção. De agora em diante estaremos somente considerando projeções ortogonais.

Observação 2.1. Na projeção ortogonal, a projeção de um segmento paralelo ao plano de projeção é um segmento de mesma medida que o segmento dado, ou seja, está em *verdadeira grandeza* (VG). Por outro lado, a projeção de um segmento perpendicular ao plano de projeção é um ponto, e de um segmento oblíquo ao plano (isto é, contido em uma reta oblíqua ao plano) é um segmento de medida menor do que a medida do segmento dado. (Veja os exercícios da Seção 1.14.)

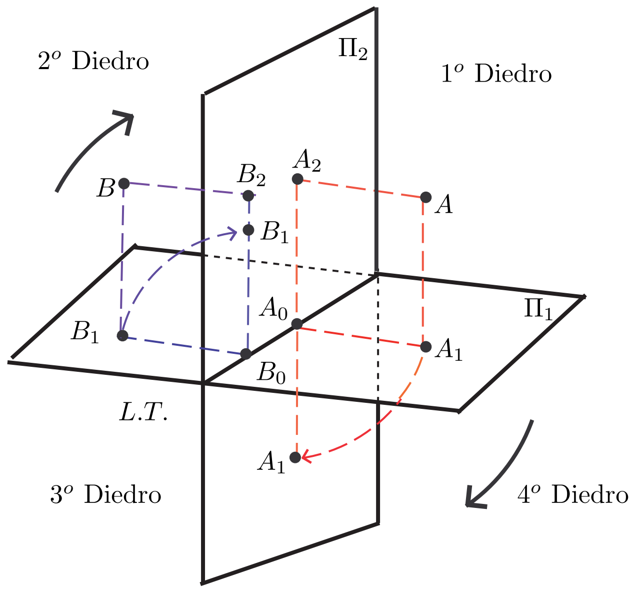
Note que na maioria das vezes, há perda de informações sobre uma figura, conforme mostra as figuras abaixo:

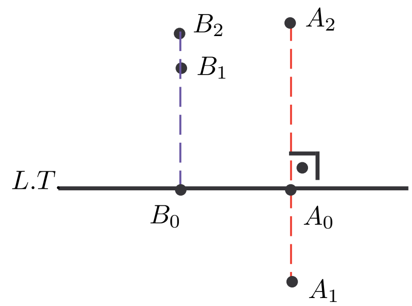


Assim, para obter informações mais precisas sobre uma figura, é necessário utilizar mais de um plano de projeção.

Gaspar Monge (1746-1818) idealizou um sistema de projeções no qual um ponto A é representado por duas projeções, A_1 e A_2, em dois planos de referência Π_1 e Π_2, perpendiculares entre si. A reta obtida da interseção de Π_1 com Π_2 é chamada de *Linha de Terra* e será denotada por LT. O plano Π_1 é chamado *plano de projeção horizontal* (PH) e Π_2 de *plano de projeção vertical* (PV). Os pontos A_1 e A_2 projetam-se sobre a LT em um mesmo ponto, denotado por A_0 (mostre isto!). Além disso, $AA_1A_0A_2$ é um paralelogramo e, conseqüentemente, $d(A, A_1) = d(A_2, A_0)$ e $d(A, A_2) = d(A_1, A_0)$. (Veja figura seguinte.)

A linha de terra divide cada plano de projeção em dois semi-planos, e o espaço é dividido por esses semi-planos em quatro diedros. Uma vez efetuada as projeções de A sobre Π_1 e Π_2 fazemos um rebatimento do PH sobre o PV, até que ambos coincidam (rotação de 90 graus em torno da LT, abrindo o 1^o diedro). Desta forma, ambas as projeções do ponto A ficam no mesmo plano. O desenho assim obtido é chamado de *épura*. Na épura, as projeções de um ponto qualquer estão sobre uma reta perpendicular à linha de terra, chamada de *linha de chamada*.





Na figura anterior temos a épura de um ponto A situado no 1^o diedro e de um ponto B no 2^o diedro.

A *cota* de um ponto A do espaço é a distância entre A e o PH. Logo, a cota de A é igual medida A_2A_0 do segmento $\overline{A_2A_0}$, uma vez que $d(A, \Pi_1) = d(A, A_1) = d(A_2, A_0)$.

O *afastamento* de um ponto A do espaço é a distância entre A e o PV. Logo, o afastamento de A é igual medida A_1A_0 do segmento $\overline{A_1A_0}$, uma vez que $d(A, \Pi_2) = d(A, A_2) = d(A_1, A_0)$.

2.2 Exercícios

1. Faça as épuras de pontos situados no 3^o e no 4^o diedros.

2. Faça a épura e obtenha a cota e o afastamento de um ponto A tal que:

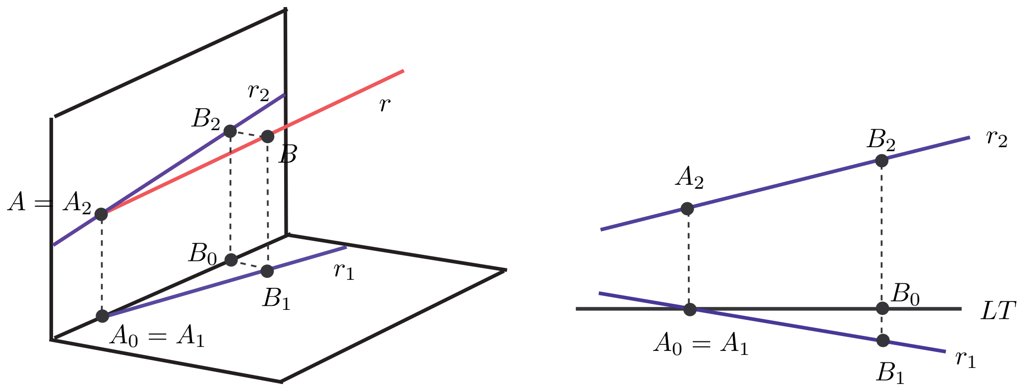
   a) $A \in PH$ b) $A \in PV$ c) $A \in LT$

2.3 Estudo da reta

Uma reta r é representada na épura por suas projeções r_1 e r_2 nos planos horizontal PH e vertical PV, respectivamente, o que será denotado por $r = (r_1, r_2)$. É claro que um ponto pertencente a uma reta possui suas projeções pertencentes às projeções de igual nome da reta (isto é, se $A \in r$ então $A_1 \in r_1$ e $A_2 \in r_2$). Além disso, sabemos que a projeção de uma reta sobre um plano não perpendicular à mesma é uma reta. Assim, para obtermos as projeções da reta sobre um plano, basta projetarmos dois pontos da reta. Nas figuras que seguem, analisamos um segmento de uma reta supondo-o contido no 1^o diedro. Os demais casos ficam como exercício.

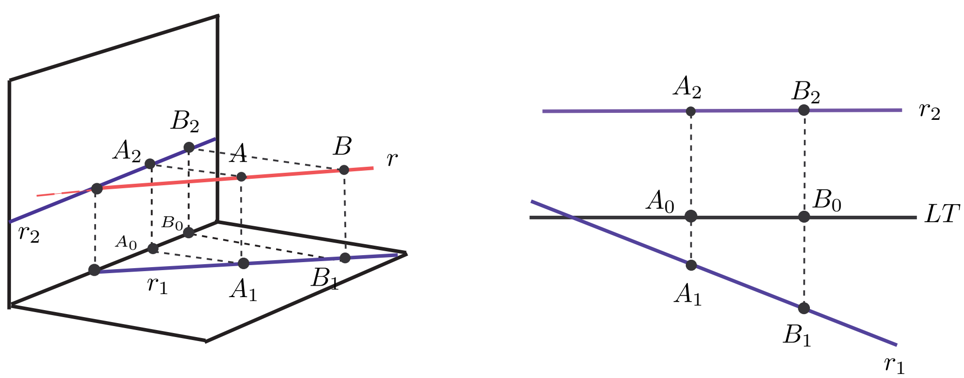
2.3.1 Épura de uma reta qualquer

A projeção da reta $\ell(A, B)$ fica determinada pelas projeções de dois de seus pontos sobre o mesmo plano, conforme figura abaixo.



2.3.2 Épura de uma reta horizontal

Reta horizontal é qualquer reta paralela ou contida no plano horizontal PH.

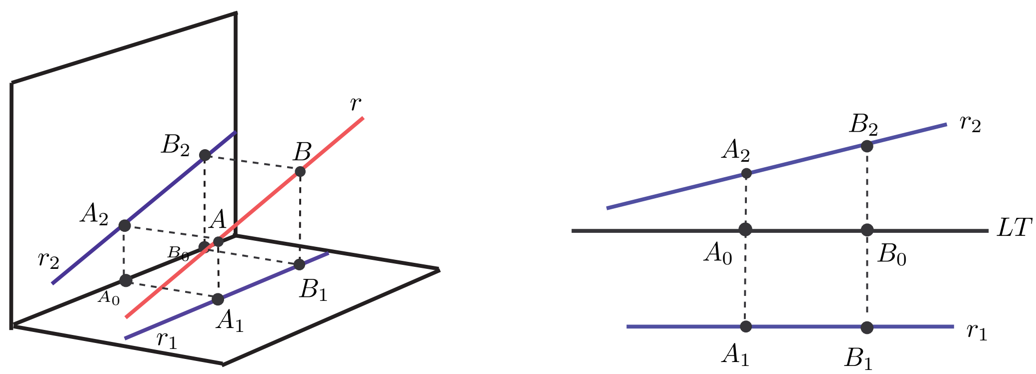


Propriedades:

- Todos os pontos de uma reta horizontal têm a mesma cota. Portanto, sua projeção vertical é paralela à LT.
- A projeção horizontal $\overline{A_1B_1}$ do segmento horizontal $\overline{AB}$ está em V.G.
- O ângulo que uma reta horizontal faz com o PV projeta-se em V.G. no plano horizontal.

2.3.3 Épura de uma reta frontal

Reta frotal é qualquer reta paralela ou contida no plano vertical PV.



Propriedades:

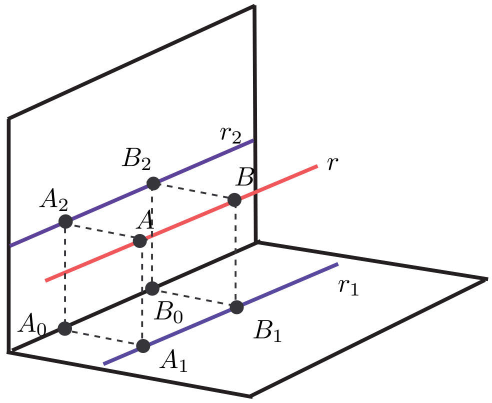
- Todos os pontos de uma reta frontal têm o mesmo afastamento. Portanto, sua projeção horizontal é paralela à LT.
- A projeção vertical $\overline{A_2B_2}$ do segmento de reta frontal $\overline{AB}$ está em V.G.
- O ângulo que uma reta frontal faz com o PH projeta-se em V.G. no PV.

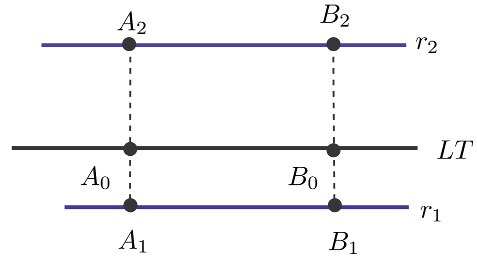
2.3.4 Épura de uma reta fronto-horizontal

Reta froto-horizontal é uma reta paralela à LT.

Propriedades:

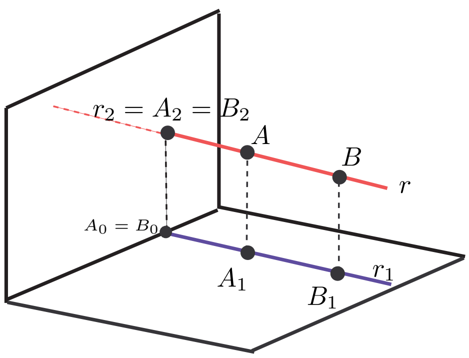
- Uma reta fronto-horizontal é paralela a ambos os planos de projeção e tem suas projeções também paralelas à LT.
- Toda reta fronto-horizontal é frontal e horizontal.
- O segmento $\overline{AB}$ de uma reta fronto-horizontal projeta-se em V.G. nos planos de projeção.
- Todos os seus pontos têm cotas iguais e afastamentos iguais.

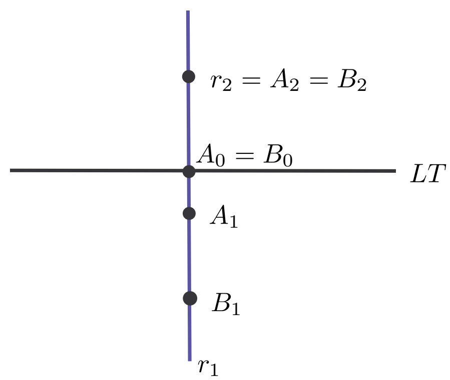




2.3.5 Épura de uma reta de topo

Reta de topo é uma reta perpendicular ao plano vertical PV.





<u>Propriedades</u>:

- Reta de topo é um caso particular de reta horizontal.

- Sua projeção no plano PH é perpendicular à LT e está em V.G.. Sua projeção vertical é um ponto.

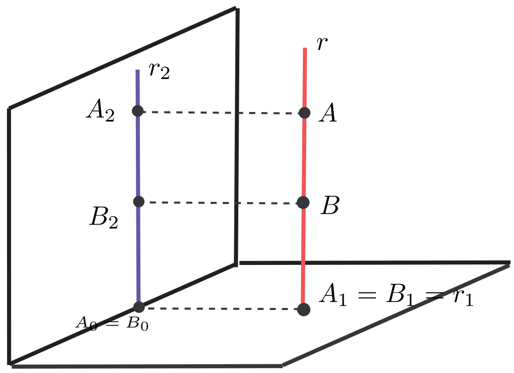
2.3.6 Épura de uma reta vertical

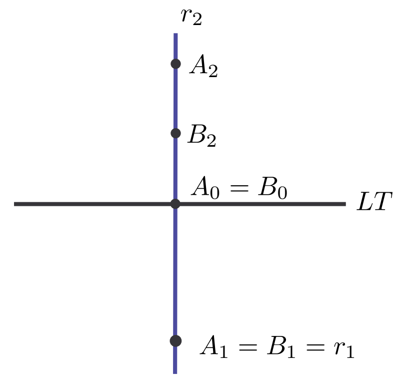
Reta *vertical* é uma reta perpendicular ao plano horizontal PH.

<u>Propriedades</u>:

- Reta vertical é um caso particular de reta frontal.

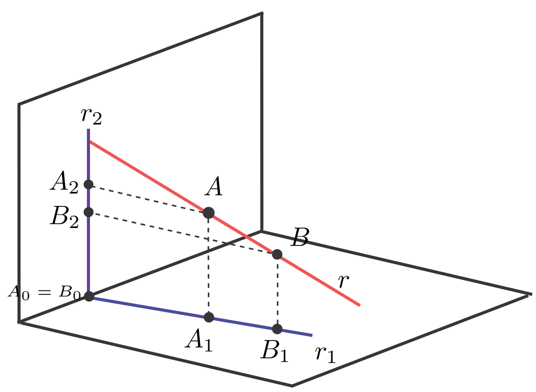
- Sua projeção no plano PV é perpendicular à LT e está em V.G.. Sua projeção horizontal é um ponto.

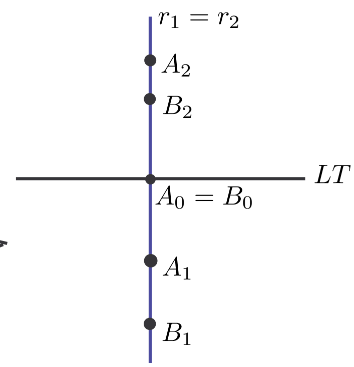




2.3.7 Épura de uma reta de perfil

Reta de perfil é uma reta que é ortogonal à LT, mas não é horizontal nem frontal.





Propriedades:

- Toda reta de perfil está contida em um plano perpendicular a LT e, portanto, perpendicular ao PH e ao PV. (Demonstre.)
- Suas projeções nos planos PH e PV são perpendiculares a LT. Na épura, essas projeções são coincidentes. (Demonstre.)

2.4 Determinando retas

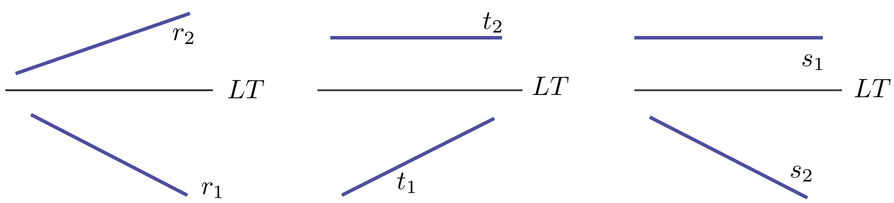
Em Geometria Descritiva diz-se que uma reta está determinada quando os elementos gráficos que estão na épura permitem concluir a posição exata da reta no espaço. De agora em diante, diremos que r é uma *reta qualquer* quando r não é uma das retas particulares estudadas nas seções anteriores. Na épura, podemos determinar uma reta das seguintes maneiras:

(i) *Tendo dois pontos da reta.* Isto significa que, se A e B são pontos da reta, devemos ter na épura os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2.

(ii) *Tendo as projeções da reta.* Aqui temos três casos a considerar:

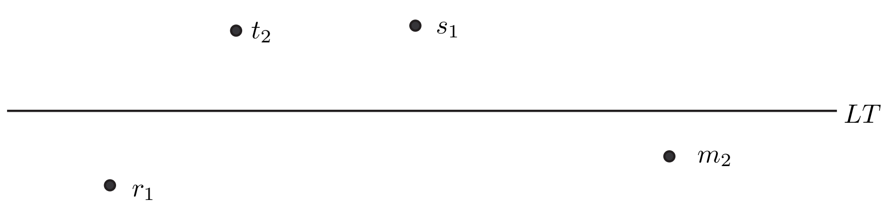
(a) Retas quaisquer, horizontais, frontais ou fronto-horizontais: as projeções determinam completamente a reta.

Por exemplo, nas épuras abaixo, r é uma reta qualquer, t é uma reta horizontal e s é uma reta frontal.



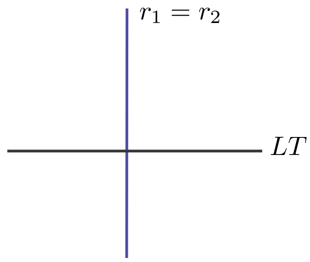
(b) Retas verticais ou de topo ficam completamente determinadas por sua projeção pontual.

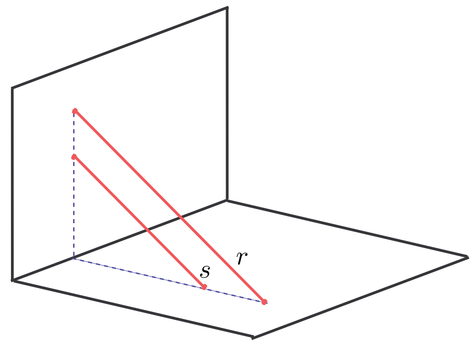
Nos exemplos abaixo, r é uma reta vertical que está contida na união do 1^o e 4^o diedros, t é uma reta de topo que está na união do 1^o e 2^o diedros, s é uma reta vertical que está na união do 2^o e 3^o diedros, e m é uma reta de topo que está na união do 3^o e 4^o diedros.



(c) Retas de perfil não ficam determinadas por suas projeções. Isto significa que dadas as projeções de uma reta de perfil, não é possível concluir sobre sua posição exata no espaço. Uma reta de perfil *somente* fica determinada por dois de seus pontos.

Note na figura abaixo que a reta r de projeções r_1 e r_2 não está determinada (qualquer outra reta contida no plano perpendicular à LT em que r está contida tem projeções coincidentes com as projeções de r).





2.5 Pontos onde uma reta intercepta os planos de projeções

Os pontos onde uma reta intercepta os planos PH e PV são chamados *traços* da reta e são denotados por H e V, respectivamente. H é o *traço horizontal* da reta e V é o *traço vertical*. Assim, H é o único ponto da reta que tem cota nula e, conseqüentemente, $H_2 \in LT$. Analogamente, V é o único ponto da reta que tem afastamento nulo e portanto, $V_1 \in LT$.

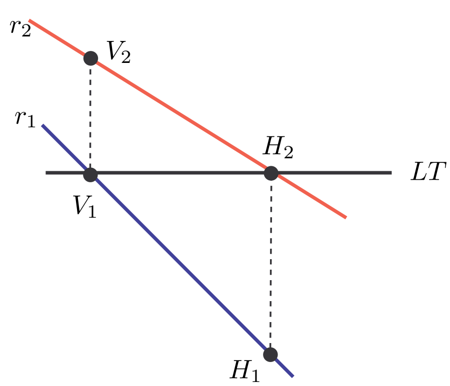
Seja r uma reta. Esquematizando temos:

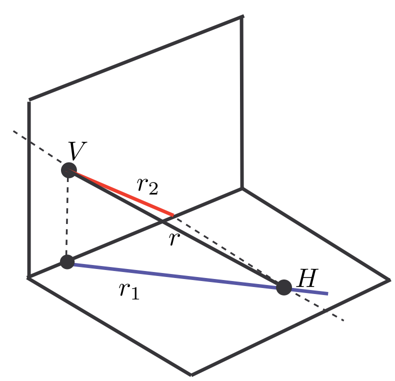
$$H \in PH \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} H = H_1 \in r_1 \\ H_2 \in r_2 \cap LT \end{cases}$$

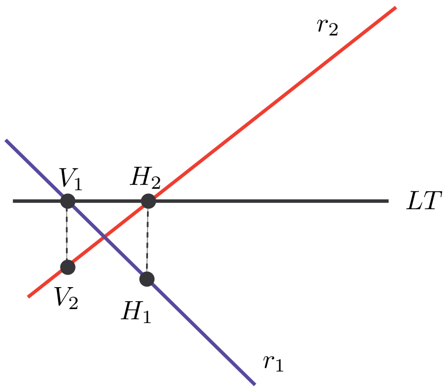
$$V \in PV \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} V_1 \in r_1 \cap LT \\ V = V_2 \in r_2 \end{cases}$$

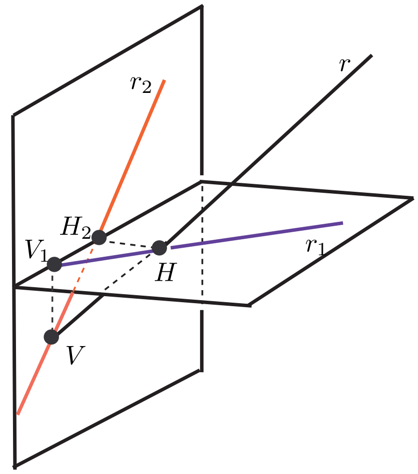
Por definição, retas que não interceptam o PH não têm traço horizontal, e retas que não interceptam o PV não têm traço vertical.

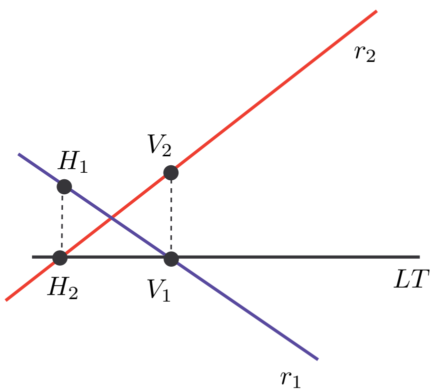
Exemplos 2.2. Nas épuras abaixo determinamos os traços das retas dadas.

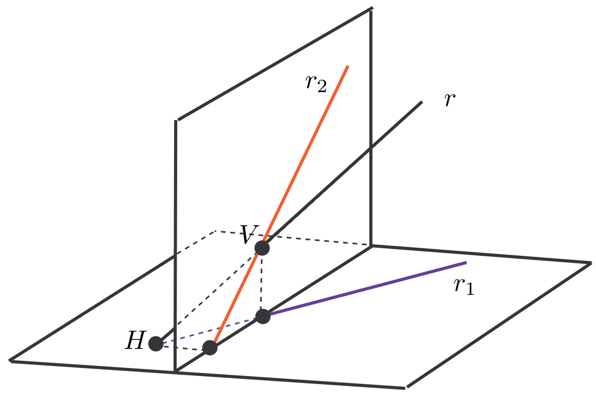












Observemos que se r é uma reta de perfil, não sabendo ainda como determinar os seus traços. Aprenderemos a fazer isto nas próximas seções.

2.6 Convenção para pontos na épura

Consideremos um sistema de coordenadas para a reta LT. A cada ponto $P = (P_1, P_2)$ do espaço existe um único $P_0 \in LT$ que, na épura, é o ponto obtido da interseção da linha de chamada que passa por P_1 e P_2 com LT. Com o objetivo de colocar os dados na épura, façamos a seguinte convenção: cada ponto do Espaço é fixado na épura por meio de três coordenadas, como segue:

$$P \equiv (x; y; z) \ ,$$

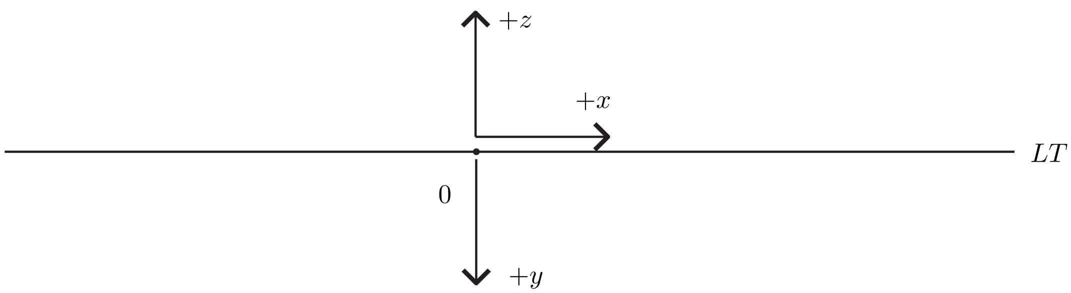
sendo:

- $x =$ coordenada de P_0 na LT. Chamamos x de *abscissa* do ponto P;

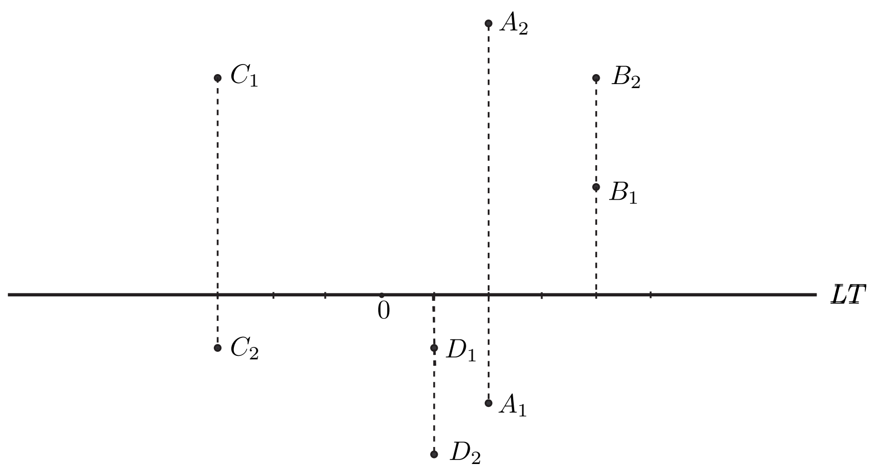
- y = *afastamento* de P. Logo, y dá a posição de P_1 na linha de chamada que passa por P_0. Convenciona-se positivo para baixo;

- z = *cota* de P. Assim, dá a posição de P_2 na linha de chamada que passa por P_0. Convenciona-se positivo para cima.

ESQUEMA:



Exemplo 2.3. Faça a épura dos pontos $A = (+2; +2; +5)$, $B = (+4; -2; +4)$, $C = (-3; -4; -1)$ e $D = (+1; +1; -3)$. Em qual diedro está cada um dos pontos?



2.7 Pertinência de ponto e reta

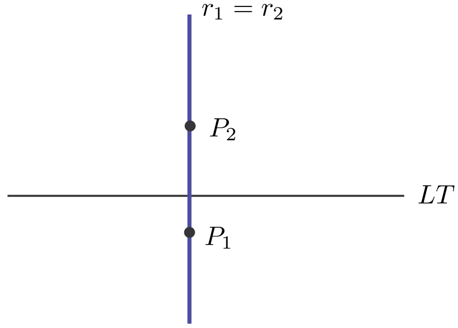
Sejam A, P e B pontos colineares do espaço. Suponha que $A - P - B$, ou seja P está entre A e B. Então, uma das possibilidades acontece:

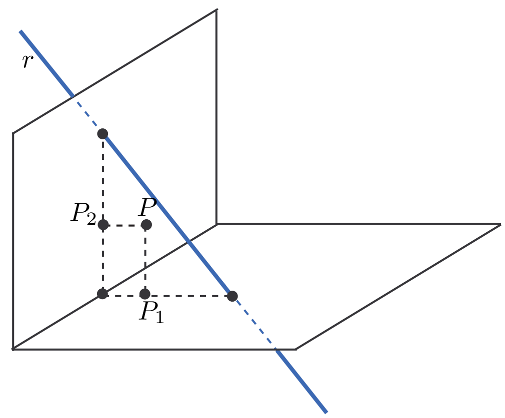
(i) A reta $\ell(A, B)$ é vertical e assim, $A_1 = P_1 = B_1$ e $A_2 - P_2 - B_2$.

(ii) A reta $\ell(A, B)$ é uma reta de topo. Logo, $A_1 - P_1 - B_1$ e $A_2 = P_2 = B_2$.

(iii) A reta $\ell(A, B)$ não é vertical nem de topo. Neste caso, $A_1 - P_1 - B_1$ e $A_2 - P_2 - B_2$.

Seja P um ponto e r uma reta. Se $P \in r$, sabemos que as projeções do ponto pertencem as projeções de mesmo índice da reta. A recíproca nem sempre é verdadeira. Por exemplo, na épura abaixo temos $P_1, P_2 \in r_1 = r_2$, porém $P \notin r$. Note que r é uma reta de perfil.





Na verdade, a recíproca da afirmação acima é verdadeira para todos os tipos de retas, com exceção de retas de perfil. De fato, consideremos os casos:

(i) Retas quaisquer, horizontais (mas não de topo), frontais (mas não verticais) ou fronto-horizontais: Se as projeções de um ponto pertencem as projeções de mesmo índice da reta, então o ponto pertence à reta.

De fato, seja r uma das retas acima e P um ponto tal que $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$. Consideremos planos Γ_1 e Γ_2 perpendiculares a PH e PV, respectivamente, e contendo r (Γ_1 e Γ_2 são os planos projetantes de r sobre Π_1 e Π_2, respectivamente). Note que $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ (exceto quando $r_1 = r_2 = r$, mas este caso é trivial). Então $r_1 = \Gamma_1 \cap PH$ e $r_2 = \Gamma_2 \cap PV$. Assim obtemos:

$$r \subset \Gamma_1 \text{ e } r \subset \Gamma 2 \ \Rightarrow\ r \subset \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \ \Rightarrow\ r = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \text{, uma vez que } \Gamma_1 \neq \Gamma_2 .$$

Além disso, ($P_1 \in r_1 \Rightarrow P \in \Gamma_1$) e ($P_2 \in r_2 \Rightarrow P \in \Gamma_2$). Logo, $P \in \Gamma_1$ e $P \in \Gamma_2 \;\Rightarrow\; P \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = r$, como afirmamos.

(ii) Retas verticais e de topo: Basta que a projeção pontual da reta coincida com a projeção de mesmo índice do ponto para concluirmos que o ponto pertece a reta.

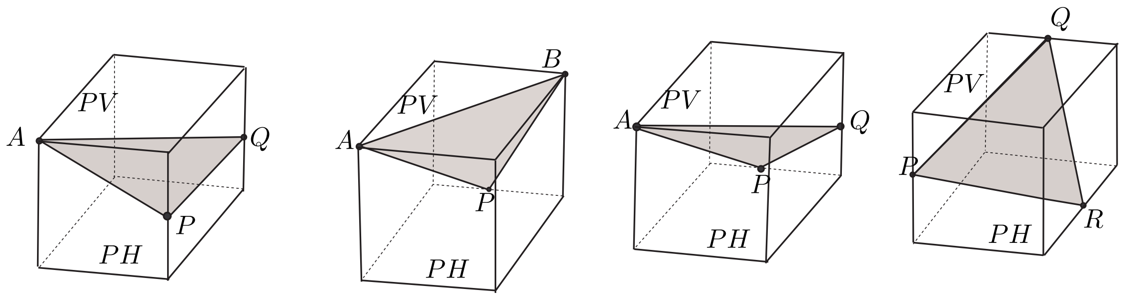
(iii) Retas de perfil: Seja $r = \ell(A, B)$ uma reta de perfil e P um ponto tal que $P_1, P_2 \in r_1 = r_2$. Se $P \in r$, suponhamos por exemplo que $A - P - B$. Então $A_1 - P_1 - B_1$ e $A_2 - P_2 - B_2$. Conseqüentemente, a seguinte igualdade é satisfeita:

$$\frac{P_2A_2}{P_2B_2} = \frac{P_1A_1}{P_1B_1}\,. \tag{2.1}$$

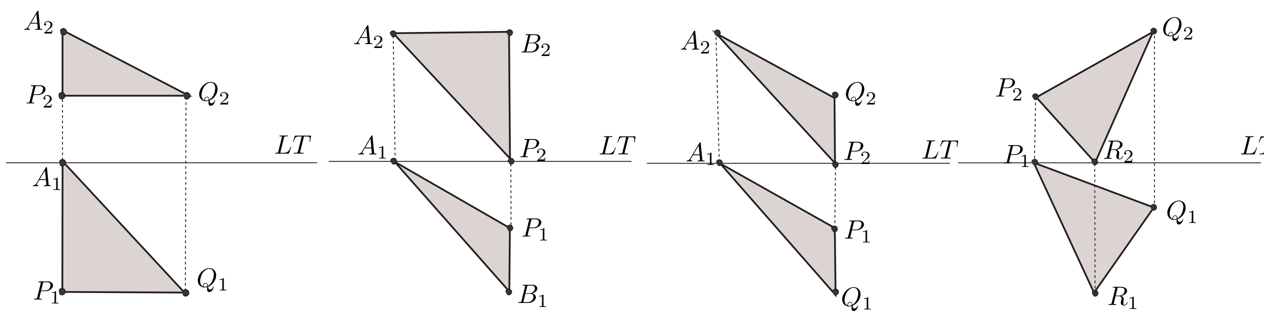
Reciprocamente, para verificar na épura se P pertence a r, suponhamos que $P_i \neq A_i\,, B_i$, para $i = 1, 2$ e que $A_1 - P_1 - B_1$. Então $A_2 - P_2 - B_2$ (caso contrário $P \notin r$). Afirmamos que se (2.1) é satisfeita, então $P \in r$. A demonstração desta afirmação segue da semelhança dos triângulos AMP e PNB, onde $M = \ell(A, A_1) \cap \ell(P, P_2)$ e $N = \ell(P, P_1) \cap \ell(B, B_2)$, e é deixada como exercício. Portanto, para verificarmos na épura se $P \in r$, devemos proceder como em Desenho Geométrico na busca da 4^a *Proporcional*. Assim, se x é a 4^a Proporcional de P_2A_2, P_2B_2 e P_1A_1 então $P \in r$ se e somente se $P_1B_1 = x$.

2.8 Exercícios

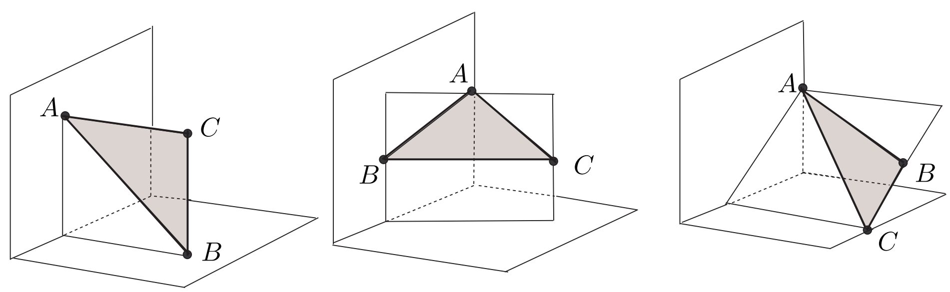
1. Dar a épura dos triângulos dados nas figuras abaixo. Seus vértices estão sobre vértices de um cubo de aresta 1, ou sobre pontos médios P, Q, R de arestas do cubo.

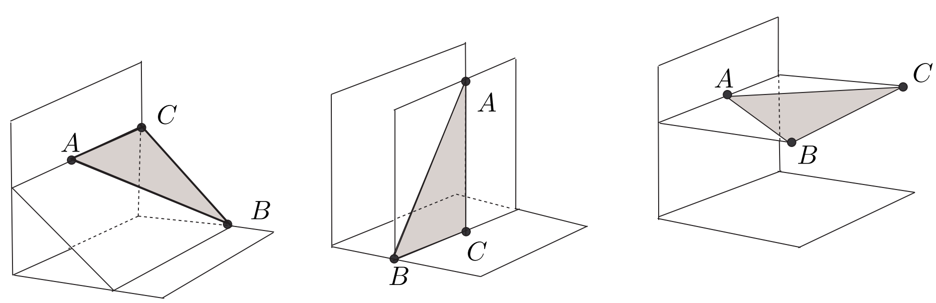


Resolução:



2. Dar a épura de cada um dos triângulos ABC das figuras abaixo, sabendo que cada vértice ou é um vértice de um quadrado de lado $3cm$ ou é um ponto médio de um lado do quadrado.





3. Dada a reta de perfil $r = \ell(A, B)$ e a projeção horizontal P_1 de um ponto $P \in r$, obter a projeção P_2 em cada um dos seguintes casos:

   (a) $A = (1, 2, 4)$, $B = (1, 5, 1)$ e $A_1 - P_1 - B_1$.

   (b) $A = (1, 5, 5)$, $B = (1, 3, 4)$ e $P_1 - B_1 - A_1$.

   (c) $A = (1, 5, -3)$, $B = (1, 1, 4)$ e $B_1 - P_1 - A_1$.

   Dica:

   (a) Como $A_1 - P_1 - B_1$, então $A_2 - P_2 - B_2$. Logo P_2 deve satisfazer $\frac{P_2A_2}{P_2B_2} = \frac{P_1A_1}{P_1B_1}$.

   (b) Como $P_1 - B_1 - A_1$, então $P_2 - B_2 - A_2$. Logo P_2 deve satisfazer $\frac{P_2B_2}{A_2B_2} = \frac{P_1B_1}{A_1B_1}$.

   (c) Como $B_1 - P_1 - A_1$, então $B_2 - P_2 - A_2$. Logo P_2 deve satisfazer $\frac{B_1P_1}{A_1P_1} = \frac{B_2P_2}{A_2P_2}$.

4. (*Traços de uma reta de perfil*) Seja $r = \ell(A, B)$ uma reta de perfil. Determinar os traços H e V de r nos três casos dados no exercício anterior.

   Dica: Sabemos que H_2 e V_1 pertencem à LT. Resta então determinar os pontos H_1 e V_2 utilizando o mesmo raciocínio do exercício anterior.

5. Seja r a reta que passa pelos pontos $A = (2; 2; 5)$ e $B = (-3; -4; -2)$. a) Dê a épura de r e determine na épura os seus traços H e V. b) Verifique se o ponto $P = (2, -5, -2)$ pertence à r, justificando sua resposta.

6. Dê o afastamento de um ponto P pertencente a uma reta frontal r, sabendo que o ponto $Q = (2; 1; 2)$ pertence a r. Explique o seu raciocínio.

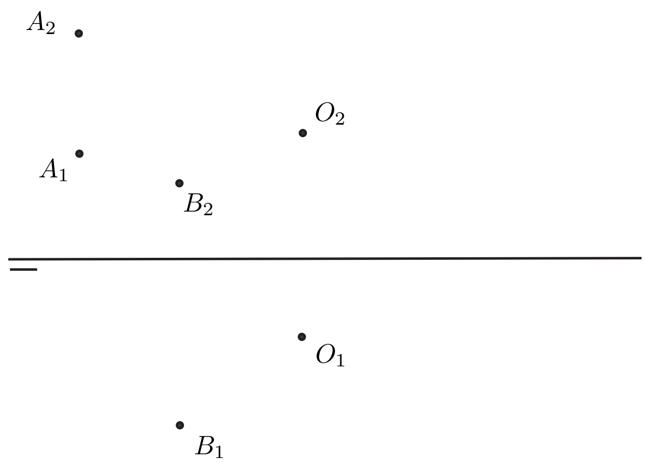
7. Faça uma épura contendo uma reta r de topo, um ponto $P \in r$ e um ponto $Q \notin r$.

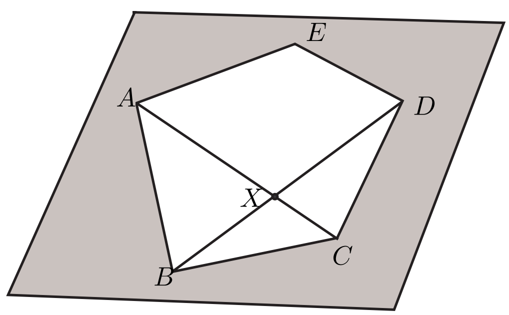
8. Dê a cota e o afastamento de um ponto P pertencente a uma reta fronto-horizontal r , sabendo que o ponto $Q = (1; 2; 3)$ pertence a r. Justifique sua resposta.

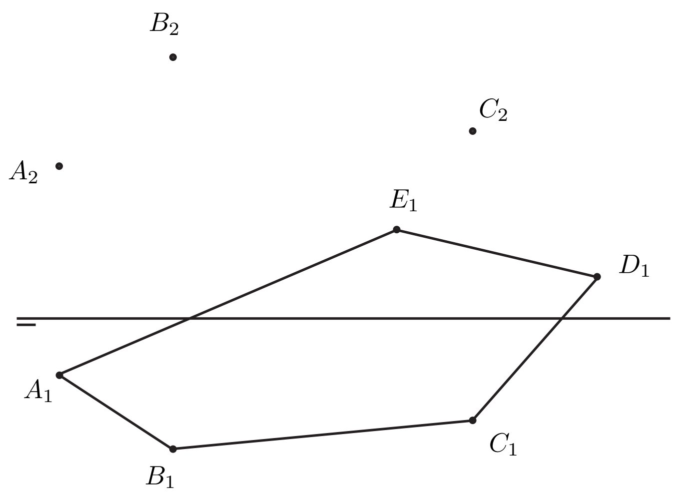
9. Seja r a reta que passa pelos pontos $A = (0; 2; 2)$ e $B = (0; 4; 2)$. a) Dê a épura de r e determine na épura os seus traços H e V. b) Verifique se o ponto $P = (0; 0; 2)$ pertence à r, justificando sua resposta.

10. Dê a épura de um paralelogramo $ABCD$, sendo dados A, B e O, onde O é o ponto de interseção das diagonais do paralelogramo. *(Figura abaixo).*

11. São dados: a projeção horizontal $A_1B_1C_1D_1E_1$ de um pentágono (irregular) plano $ABCDE$ do espaço e as projeções verticais A_2, B_2 e C_2 dos vértices A, B e C do pentágono. Dar a projeção vertical do pentágono.







12. Dê a épura de uma reta $r = \ell(A, B)$, sabendo que A e B satisfazem: afastamento de A é $3\,cm$, afastamento de B é $5\,cm$ e $AB = 6\,cm$.

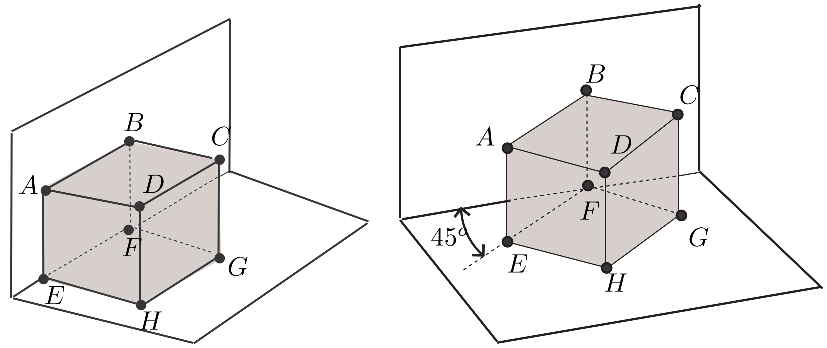
13. Dê a épura de um triângulo equilátero ABC, cuja projeção vertical é um segmento paralelo à LT medindo $4\,cm$.

14. Um segmento $\overline{AB}$ horizontal e com $5\,cm$ de comprimento tem a extremidade B em PV. Sabendo que $A = (2; 3; 5)$, dê a épura de $\overline{AB}$.

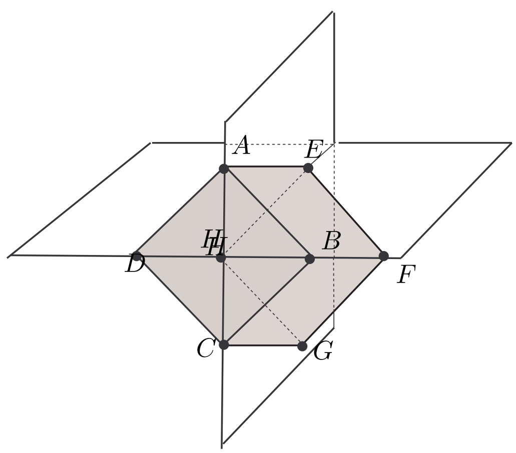
15. Dê a épura de um cubo $ABCDEFGH$ de aresta $5\,cm$ que está no 1^o diedro, tem a face $ABCD$ contida em PH, e a face $ADEH$ contida em PV.

16. Dar a épura de um triângulo equilátero ABC, de lado $6\,cm$, contido em PH, com $A \in LT$ e $\overline{BC}$ perpendicular à LT em um ponto com abscissa maior do que a abscissa de A.

17. Fazer a épura dos cubos de aresta a dados nas figuras abaixo.



18. Dê a épura do cubo $ABCDEFGH$ de aresta 1, representado na figura abaixo.



2.9 Estudo do plano

Veremos nesta seção, posições que um plano pode ocupar com relação aos planos de projeção. Evidentemente, se um plano não é perpendicular ao plano de projeção, então sua projeção é o próprio plano de projeção. Sendo assim, como a projeção de um plano não nos fornece informações sobre este plano, então este plano é dado, na épura, por seus traços.

Quando estudamos retas, vimos que os traços de uma reta são os pontos de interseção da reta com os planos de projeção. De maneira análoga, temos os *traços* de um plano, que são as retas de interseção do plano com os planos de projeção.

Seja Π um plano qualquer. Se Π não é paralelo nem coincidente com PH, o *traço horizontal* de Π é a reta $h_\Pi = \Pi \cap PH$. Se Π não é paralelo nem coincidente com PV, o *traço vertical* de Π é a reta $v_\Pi = \Pi \cap PV$. Quando Π é paralelo ou coincidente com um dos planos de projeção, então Π não tem traço neste plano.

Propriedades: ***1.*** *Seja* $\Pi \neq PH$ *e* $\Pi \neq PV$. *Se* Π *contém a linha de terra* LT, *então os dois traços de* Π *coincidem com a linha de terra.*

De fato, temos:

$$LT \subset \Pi \Rightarrow LT \subset (\Pi \cap PH) = h_\Pi \Rightarrow LT = h_\Pi \ ,$$

$$LT \subset \Pi \Rightarrow LT \subset (\Pi \cap PV) = v_\Pi \Rightarrow LT = v_\Pi \ .$$

Logo, $LT = h_\Pi = v_\Pi$.

2. *Se* $\Pi \neq PH$ *e* $\Pi \neq PV$ *então* $h_\Pi = LT$ *se e somente se* $v_\Pi = LT$.

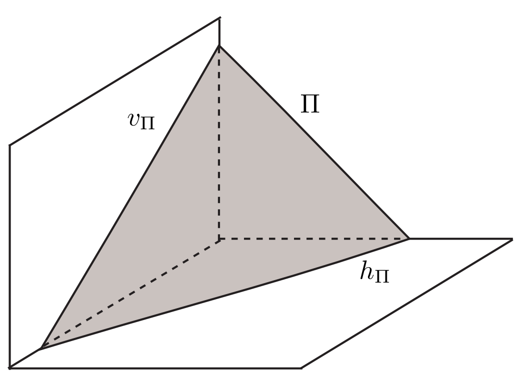
De fato,

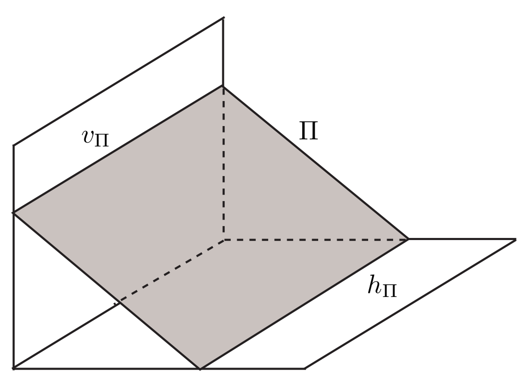
$$h_\Pi = LT \Rightarrow LT \subset \Pi \Rightarrow h_\Pi = v_\Pi = LT \, , \text{ pelo item anterior} \, .$$

De modo análogo temos,

$$v_\Pi = LT \Rightarrow LT \subset \Pi \Rightarrow v_\Pi = h_\Pi = LT \, .$$

3. *Se um plano tem os dois traços distintos então, ou os traços são concorrentes num ponto pertencente à LT, ou são paralelos à LT.*





De fato, como h_Π e v_Π são retas distintas e coplanares então, ou são paralelas, ou são concorrentes. Suponhamos que h_Π e v_Π são concorrentes e seja $\{O\} = h_\Pi \cap v_\Pi$. Temos:

$$O \in h_\Pi \Rightarrow O \in PH$$

e

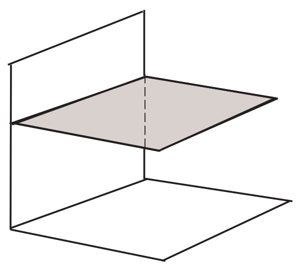
$$O \in v_\Pi \Rightarrow O \in PV.$$

Logo, $O \in PH \cap PV = LT$.

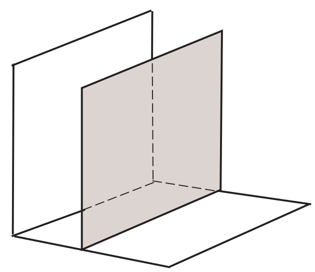
Suponhamos agora que h_Π e v_Π são paralelas. Se h_Π não é paralela à LT, então ou $h_\Pi \cap LT = \{P\}$ ou $h_\Pi = LT$. Se $h_\Pi \cap LT = \{P\}$, então $P \in \Pi \cap PV = v_\Pi$, o que é um absurdo pois h_Π e v_Π são paralelas. Se $h_\Pi = LT$, então $v_\Pi = LT$, o que é um absurdo pois $h_\Pi \neq v_\Pi$. Portanto h_Π é paralela a LT. Segue da transitividade que v_Π também é paralela a LT.

2.10 Épura de planos

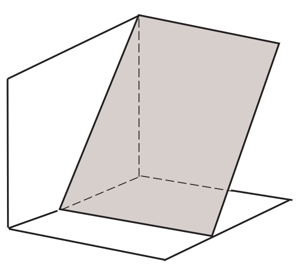
Estudaremos a épura dos seguintes tipos especiais de plano:



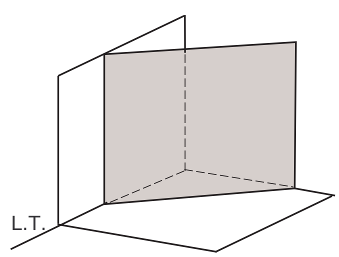
PLANO HORIZONTAL



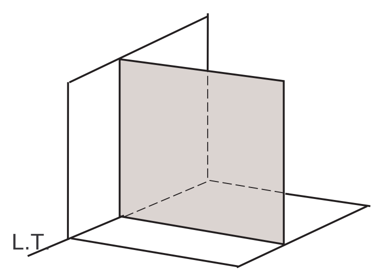
PLANO FRONTAL



PLANO DE TOPO



PLANO VERTICAL



PLANO DE PERFIL

2.10.1 Plano horizontal

É qualquer plano paralelo ou coincidente com o plano PH.

Propriedades:

- Tem apenas traço vertical v_Π, o qual é paralelo ou coincidente com a LT.

- Todos os seus pontos têm a mesma cota.

- Qualquer figura contida em um plano horizontal tem sua projeção horizontal em V.G. e sua projeção vertical contida em v_Π.

Exercícios

1. Dê a épura de um ponto P e de um plano horizontal Π contendo P.

2. Fazer a figura espacial e a épura de um plano horizontal Π e de um triângulo ABC contido em Π.

2.10.2 Plano frontal

É qualquer plano paralelo ou coincidente com o plano PV.

Propriedades:

- Tem apenas traço horizontal h_Π, o qual é paralelo ou coincidente com a LT.
- Todos os seus pontos têm o mesmo afastamento.
- Qualquer figura contida em um plano frontal tem sua projeção vertical em V.G. e sua projeção horizontal contida em h_Π.

Exercícios

1. Repita os exercícios anteriores para um plano frontal.

2. Fazer a figura espacial e a épura de uma circunferência de centro $0 = (1; 2; 2)$ e raio 1 cm, contida em um plano frontal.

3. Sejam $A = (2; 3; 5), B = (5; 3; 7), C = (-1; 3; 1)$ e $D = (-1; 3; 6)$.

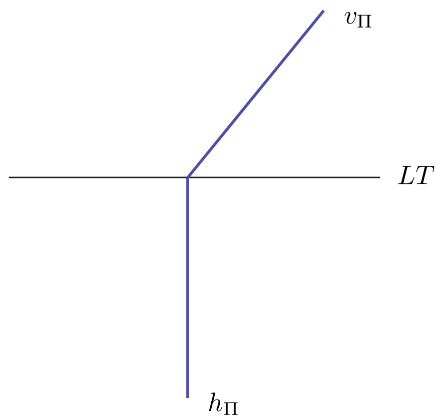
   a) Calcule AB e CD.

   b) Dê a épura de um plano frontal Π contendo A.

   c) Dê as projeções de uma circunferência que contém A e B, tem raio igual a CD e está contida em um plano frontal .

2.10.3 Plano de topo

É qualquer plano perpendicular à PV.



Propriedades:

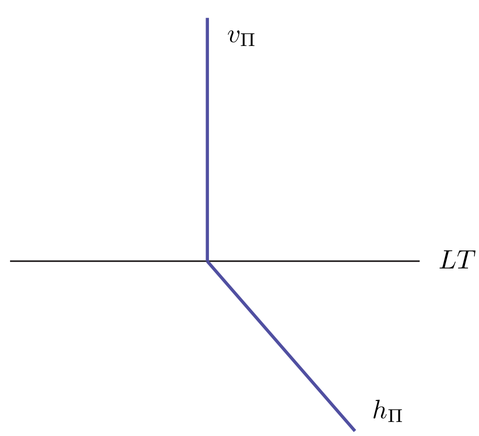
- Plano de horizontal é um caso particular de plano de topo.
- Seu traço horizontal h_Π é perpendicualar a LT.
- Qualquer figura contida em um plano de topo tem sua projeção vertical contida em v_Π.

Exercício

Dado um ponto P, dê a épura de um plano de topo Π que contém P.

2.10.4 Plano vertical

É qualquer plano perpendicular ao plano PH.



Propriedades:

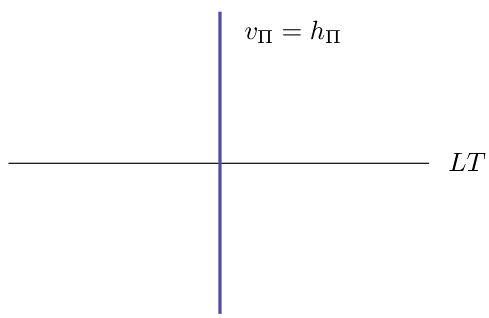
- Plano frontal é um caso particular de plano vertical.
- Seu traço vertical v_Π é perpendicular à LT.
- Qualquer figura contida em um plano vertical tem sua projeção horizontal contida em h_Π.

Exercício

Faça uma épura contendo uma reta r e um plano vertical Π que contém r.

2.10.5 Plano de perfil

É qualquer plano perpendicular a LT.



Propriedades:

- Plano de perfil é um caso particular de plano vertical e de topo.
- Os traços de um plano de perfil coincidem e são perpendiculares á LT.
- Qualquer figura contida em um plano de perfil tem suas projeções contidas nos traços desse plano.

2.11 Exercícios

1. Faça a figura espacial e a épura de um quadrado $ABCD$ de lado medindo $4\,cm$, sabendo que o quadrado está contido em um plano frontal α, e que $A = (-1; 2; 2)$ e $B = (3; 2; 2)$.

2. Dado o ponto $P = (2; 3; 4)$, faça uma épura contendo uma reta horizontal r e um plano horizontal α, ambos contendo P.

3. Dado o ponto $P = (1; -2; 3)$, faça uma épura contendo duas retas r e s tais que $P \notin r$, s é paralela a r e contém P.

4. Faça uma épura contendo um ponto P, uma reta vertical r e de um plano horizontal α, ambos contendo P.

5. Faça a figura espacial e a épura de um quadrado $ABCD$ de lado medindo $5\,cm$, sabendo que o quadrado está contido em um plano horizontal α, e que $A = (1; 2; 2)$ e $B = (6; 2; 2)$.

6. Dê a épura de um cubo de diagonal 10 cm, sabendo que ele tem uma aresta paralela à L.T. e uma aresta vertical.

7. Seja $ABCD$ um retângulo em que $A = (-35; 32; 19)\,mm$, $C = (35; -8; 46)\,mm$, $\overline{AB} = 53\,mm$ e CD é frontal. Dê as coordenadas dos pontos B e D.

8. Dê a épura de uma circunferência de raio $6\,cm$ e centro $O = (2; 3; 1)$, sabendo que ela está contida num plano frontal.

9. No exercício anterior, dê a épura de um quadrado inscrito na circunferência, com lado paralelo à L.T.

10. Faça uma épura contendo um plano Π, uma reta r e um ponto P tal que $r \cap \Pi = P$.

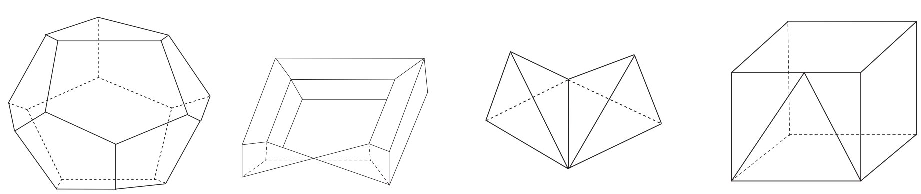
Capítulo 3

Poliedros

Definição 3.1. ***Poliedro*** é uma reunião de um número finito de regiões poligonais convexas, chamadas ***faces*** do poliedro, que satisfazem as condições:
a) cada lado (aresta) de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
b) a interseção de dois polígonos ou é vazia, ou é um vértice comum ou é um lado comum aos dois polígonos.

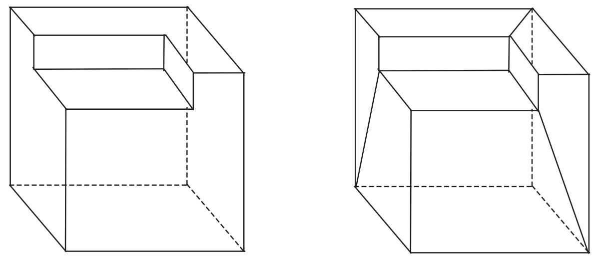
Cada lado comum a duas faces chama-se uma ***aresta*** do poliedro e cada vértice de uma face é chamado também de ***vértice*** do poliedro. Um poliedro é dito ***convexo*** quando o plano que contém cada face deixa as demais faces num mesmo semi-espaço.

Vejamos alguns exemplos de poliedros e figuras que não são poliedros.



Poliedro Convexo   Poliedro não convexo.   Falha a propriedade a)   Falha a propriedade b)

A figura (a) abaixo não é um poliedro pois dois dos polígonos que a constituem não são convexos. Mas podemos acrescentar três arestas de modo a torná-la um poliedro, conforme a figura (b).



(a) (b)

Análogo ao que ocorre com polígonos convexos, alguns poliedros convexos recebem nomes específicos de acordo com o número de faces. Por exemplo, denotando por F o número de faces de um poliedro $\mathcal{P}$, notando que $F \geq 4$, temos:

$F = 4 \Rightarrow \mathcal{P}$ é um Tetraedro;

$F = 6 \Rightarrow \mathcal{P}$ é um Hexaedro;

$F = 8 \Rightarrow \mathcal{P}$ é um Octaedro;

$F = 12 \Rightarrow \mathcal{P}$ é um Dodecaedro;

$F = 20 \Rightarrow \mathcal{P}$ é um Icosaedro.

Prismas e pirâmides são também exemplos de poliedros.

Definição 3.2. Seja $\mathcal{P}$ um poliedro, com V vértices, A arestas e F faces, o número $\chi(P) = V - A + F$ é chamado de *característica de Euler-Poincaré* do poliedro $\mathcal{P}$.

O teorema seguinte diz que quando o poliedro é convexo, sua característica de Euler-Poincaré é 2.

Teorema 3.3. (Teorema de Euler) *Seja $\mathcal{P}$ um poliedro convexo, com V vértices, A arestas e F faces. Então $V - A + F = 2$.*

Demonstração. a) Seja $\mathcal{P}'$ uma reunião finita de polígonos planos convexos tais que:

i) cada lado de polígono é comum no máximo a dois polígonos;

ii) havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma única poligonal fechada, plana ou não, chamada *contorno*;

iii) a interseção de dois polígonos ou é vazia ou é um vértice comum ou uma aresta comum;

iv) o plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semi-espaço (condição de convexidade).

$\mathcal{P}'$ é chamado de *superfície poliédrica convexa.*

Por indução finita referente ao número de faces, vamos provar primeiramente que vale a relação:

$$V' - A' + F' = 1,$$

onde

V' é o número de vértices,

A' é o número de arestas e

F' é o número de faces da superfície $\mathcal{P}'$.

1) Para $F' = 1$.

Neste caso $\mathcal{P}'$ se reduz a um polígono plano convexo, então $V' = A'$. Logo, $V' - A' + F' = F' = 1$, como queríamos.

2) Admitindo que $V' - A' + F' = 1$ vale para uma superfície poliédrica convexa $\mathcal{P}'$ de F' faces (que possui V' vértices e A' arestas), vamos provar que também vale para uma superfície de $F' + 1$ faces.

Acrescentando a $\mathcal{P}'$ (que é aberta) uma face de p arestas (logo p vértices) e considerando que q dessas arestas coincidem com arestas já existentes, obtemos uma nova superfície com F_a faces, A_a arestas e V_a vértices tais que:

$$
\begin{aligned}
&F_a = F' + 1 \\
&A_a = A' + p - q \qquad &&(q \text{ arestas coincidiram}) \\
&V_a = V' + p - (q + 1) \qquad &&(q \text{ arestas coincidindo, } q + 1 \text{ vértices coincidem}).
\end{aligned}
$$

Formando a expressão $V_a - A_a + F_a$ e substituindo os valores acima, temos:

$$
\begin{aligned}
V_a - A_a + F_a &= V' + p - (q + 1) - (A' + p - q) + (F' + 1) = \\
&= V' + p - q - 1 - A' - p + q - F' + 1 = V' - A' + F'.
\end{aligned}
$$

Como $V_a - A_a + F_a = V' - A' + F'$ provamos que a expressão $V - A + F$ não se altera se acrescentarmos (ou retirarmos) uma face da superfície.

Como, por hipótese de indução, $V' - A' + F' = 1$, concluímos que $V_a - A_a + F_a = 1$, como queríamos.

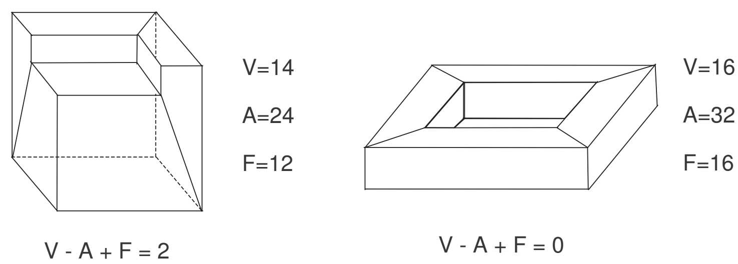
b) Seja $\mathcal{P}' = \mathcal{P} - f$ onde f é uma face qualquer de $\mathcal{P}$. Então $\mathcal{P}'$ é uma superfície poliédrica convexa e assim, pelo provado em a) vale a relação $V' - A' + F' = 1$. Como $V' = V$, $A' = A$ e $F' = F - 1$, vem $V - A + (F - 1) = 1$, ou seja,

$$V - A + F = 2,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

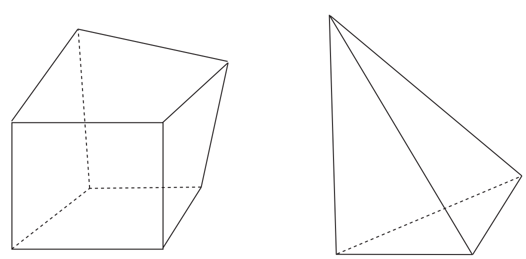
OBS: A relação $V - A + F = 2$ é chamada de *relação de Euler*.

O Teorema de Euler afirma que para todo poliedro convexo vale a relação de Euler. Uma pergunta natural que surge é a respeito da validade da relação de Euler para poliedros não convexos. A resposta para esta questão é a seguinte: se um poliedro não é convexo, a relação de Euler pode valer ou não, conforme mostra os exemplos abaixo:



Definição 3.4. Um poliedro é chamado de *Poliedro de Platão* se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:
a) todas as faces têm o mesmo número de arestas,
b) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas,
c) vale a relação de Euler.

As figuras abaixo são exemplos de Poliedros de Platão.



Teorema 3.5. *Existem cinco, e somente cinco,* classes *de poliedros de Platão.*

Demonstração. Em um poliedro sejam x o número de arestas de cada face ($x \geq 3$) e y o número de arestas em cada vértice ($y \geq 3$).

Como cada aresta pertence a exatamente duas faces, temos que $xF = 2A$, e como as extremidades de cada aresta dão origem a dois vértices e o número de arestas em cada vértice é o mesmo para todos os vértices do poliedro, temos que $yV = 2A$.

Substituindo $F = \dfrac{2A}{x}$ e $V = \dfrac{2A}{y}$ na fórmula de Euler, obtém-se $\dfrac{2A}{x} + \dfrac{2A}{y} = A + 2$, ou seja,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}+\frac{1}{A}. \qquad (*)$$

Como, $x \geq 3$ e $y \geq 3$ então $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{2}{3}$, ou seja, $\frac{1}{2}+\frac{1}{A} \leq \frac{2}{3}$ e portanto $A \geq 6$.

Se $x \geq 4$ e $y \geq 4$ então $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$, o que é impossível pois de (*) segue que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} > \frac{1}{2}$. Logo $x=3$ ou $y=3$.

Se $x=3$ então da equação (*) temos:

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{6}+\frac{1}{A} \;\Rightarrow\; \frac{1}{y}>\frac{1}{6} \;\Rightarrow\; y<6.$$

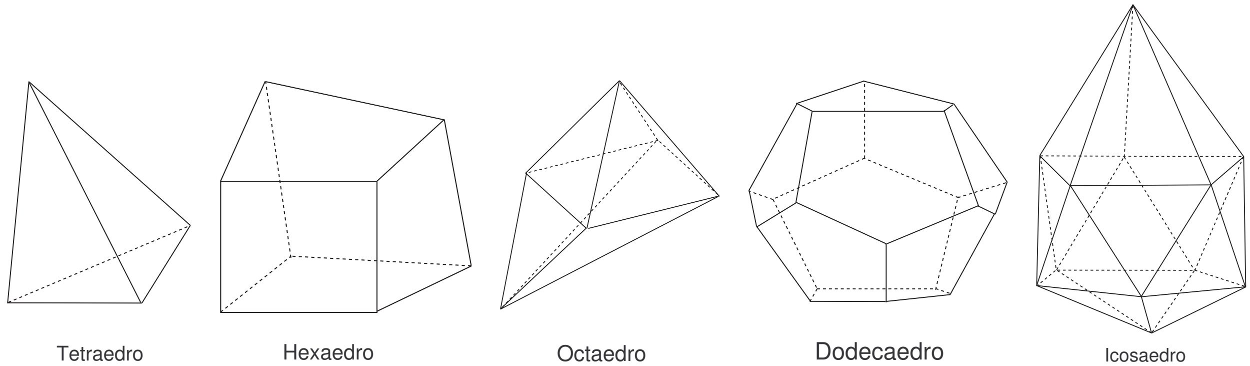
Portanto, se $x=3$ então $3 \leq y \leq 5$. De modo análogo, se $y=3$ obtemos que $3 \leq x \leq 5$. Analisemos então cada caso:

- Quando $x=3$ e $y=3$, temos que $A=6$. Nesse caso usando as relações $xF=2A$ e $yV=2A$, obtemos que $F=4$ e $V=4$ e portanto $\mathcal{P}$ é um **tetraedro**.
- Quando $x=3$ e $y=4$ então $A=12$, $F=8$ e $V=6$ e portanto $\mathcal{P}$ é um **octaedro**.
- Quando $x=3$ e $y=5$ então $A=30$, $F=20$ e $V=12$ e portanto $\mathcal{P}$ é um **icosaedro**.
- Quando $x=4$ e $y=3$ então $A=12$, $F=6$ e $V=8$ e portanto $\mathcal{P}$ é um **hexaedro ou cubo**.
- Quando $x=5$ e $y=3$ então $A=30$, $F=12$ e $V=20$ e portanto $\mathcal{P}$ é um **dodecaedro**. $\square$

A tabela seguinte resume os resultados obtidos na demonstração acima:

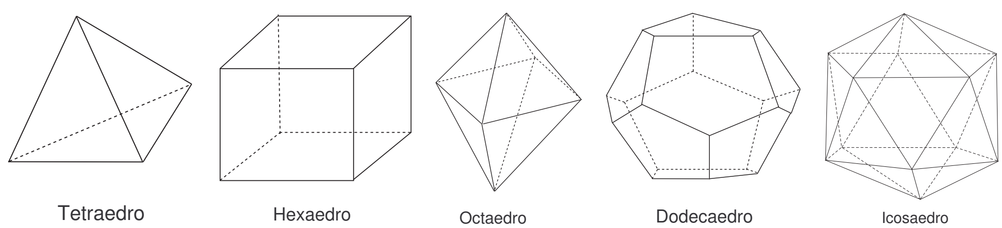
x	y	A	V	F	Classe
3	3	6	4	4	tetraedro
3	4	12	6	8	octaedro
3	5	30	12	20	icosaedro
4	3	12	8	6	cubo
5	3	30	20	12	dodecaedro

As figuras abaixo são exemplos de Poliedros de Platão.



Definição 3.6. Um poliedro convexo é chamado de *poliedro regular* quando:
a) suas faces são polígonos regulares e congruentes,
b) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas.

Pelo Teorema de Euler sabemos que poliedros convexos satisfazem a relação de Euler. Logo, concluímos que poliedros regulares são Poliedros de Platão e, portanto, existem cinco e somente cinco tipos de poliedros regulares: *tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular.*



Exercícios 3.7.

1. Um poliedro convexo de 20 arestas e 10 vértices só possui faces triangulares e quadrangulares . Determine os números de faces de cada gênero.

2. Diagonal de um poliedro é qualquer segmento que une dois vértices que não estão na mesma face. Quantas diagonais possui o icosaedro regular?

3. Mostre que par todo poliedro convexo valem as desigualdades
   $(a)\ A + 6 \leq 3F \quad (b)\ A + 6 \leq 3V.$

4. Mostre que se um poliedro convexo tem 10 arestas então ele tem 6 faces.

Referências Bibliográficas

[1] Dolce, O. e Pompeo, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar*. Volume 9. Atual Editora, 2004.

[2] Lima, E. L. *Medidas e Formas em Geometria* .

[3] Lima, E. L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. Coleção do Professor de Matemática, IMPA, 1991.

[4] Lima, E. L., Carvalho, P.C.P., Wagner, E, Morgado, A.C. *Matemática do Ensino Médio*. Vol 2. Coleção do Professor de Matemática, 2006.

[5] Carvalho, P.C.P. - *Introdução à Geometria Espacial*. Coleção do Professor de Matemática. SBM, 1993.

[6] Machado, A - *Geometria Descritiva*. Editora McGraw-Hill do Brasil, 1979.