GETARAN MEKANIK

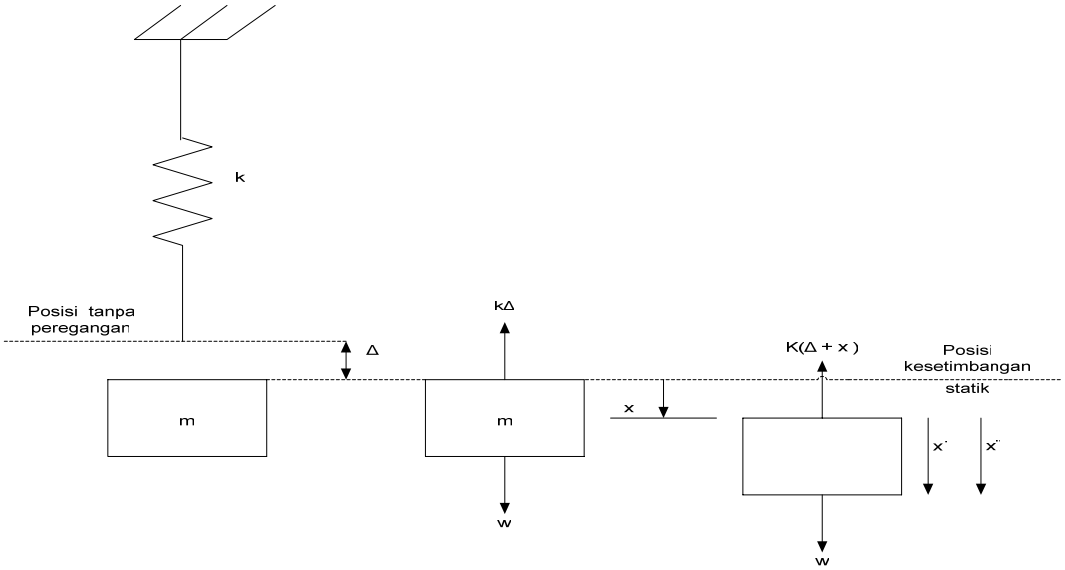
Pengertian Getaran

Getaran adalah gerakan bolak-balik dalam suatu interval waktu tertentu. Getaran berhubungan dengan gerak osilasi benda dan gaya yang berhubungan dengan gerak tersebut. Semua benda yang mempunyai massa dan elastisitas mampu bergetar, jadi kebanyakan mesin dan struktur rekayasa (engineering) mengalami getaran sampai derajat tertentu dan rancangannya biasanya memerlukan pertimbangan sifat osilasinya.

Ada dua kelompok getaran yang umum yaitu :

(1). Getaran Bebas.

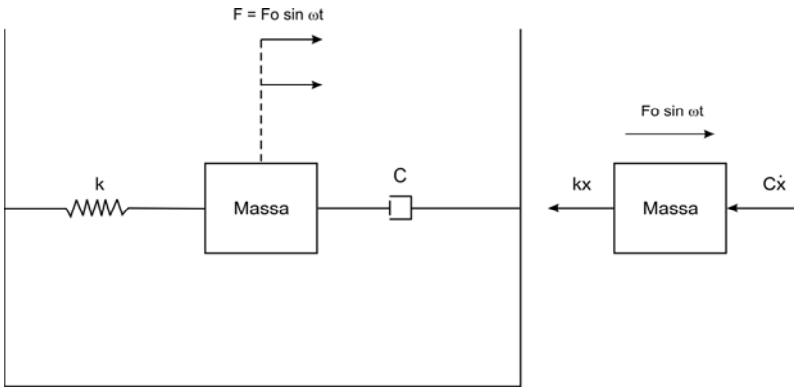
Getaran bebas terjadi jika sistem berosilasi karena bekerjanya gaya yang ada dalam sistem itu sendiri (inherent), dan jika ada gaya luas yang bekerja. Sistem yang bergetar bebas akan bergerak pada satu atau lebih frekuensi naturalnya, yang merupakan sifat sistem dinamika yang dibentuk oleh distribusi massa dan kekuatannya. Semua sistem yang memiliki massa dan elastisitas dapat mengalami getaran bebas atau getaran yang terjadi tanpa rangsangan luar.



Gambar. 2.3 Sistem Pegas – massa dan diagram benda bebas

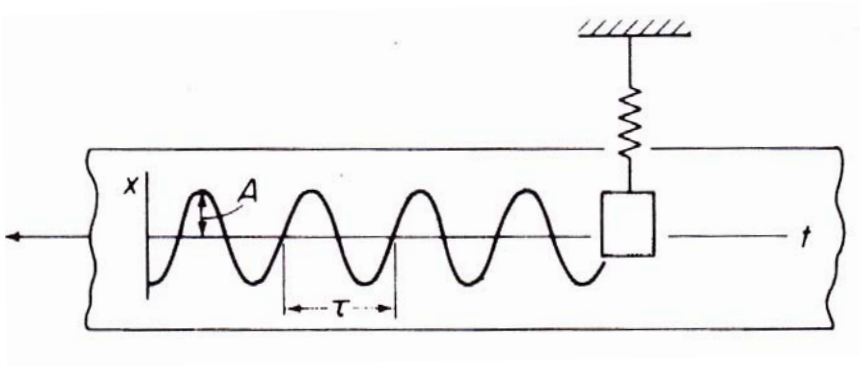
(2). Getaran Paksa.

Getaran paksa adalah getaran yang terjadi karena rangsangan gaya luar, jika rangsangan tersebut berosilasi maka sistem dipaksa untuk bergetar pada frekuensi rangsangan. Jika frekuensi rangsangan sama dengan salah satu frekuensi natural sistem, maka akan didapat keadaan resonansi dan osilasi besar yang berbahaya mungkin terjadi. Kerusakan pada struktur besar seperti jembatan, gedung ataupun sayap pesawat terbang, merupakan kejadian menakutkan yang disebabkan oleh resonansi. Jadi perhitungan frekuensi natural merupakan hal yang utama.



Gambar 2.4 Getaran paksa dengan peredam

2.1.3. Gerak Harmonik



Gambar 2.5 Rekaman Gerak Harmonik

Gerak osilasi dapat berulang secara teratur atau dapat juga tidak teratur, jika gerak itu berulang dalam selang waktu yang sama maka gerak itu disebut gerak periodik. Waktu pengulangan tersebut disebut perioda osilasi dan kebalikannya disebut frekuensi. Jika

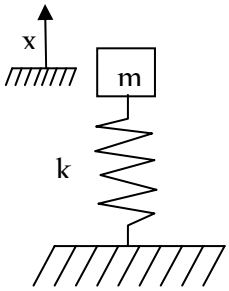
gerak dinyatakan dalam fungsi waktu x (t), maka setiap gerak periodik harus memenuhi hubungan (t) = x (t + τ).

Prinsip D'Alembert

Sebuah alternatif pendekatan untuk mendapatkan persamaan adalah penggunaan Prinsip D'Alembert yang menyatakan bahwa sebuah sistem dapat dibuat dalam keadaan keseimbangan dinamis dengan menambahkan sebuah gaya fiktif pada gaya-gaya luar yang biasanya dikenal sebagai gaya inersia.

- **Persamaan Differential Gerak**

Model fisik dari getaran bebas tanpa redaman dapat dilihat pada gambar dibawah ini:

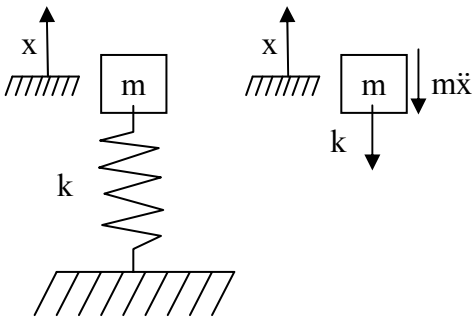


Gambar 2.1: Model Fisik Sistem
Getaran Bebas 1 DOF Tanpa Redaman

Dimana,

x	adalah simpangan
m	adalah massa
k	adalah konstanta pegas

Untuk mendapatkan model matematika dari model fisik di atas yaitu dengan dilakukan analisis diagram benda bebas (FBDA)



Gambar 2.2: *Free Body Diagram Analysis*
(FBDA) pada Getaran Bebas 1 DOF Tanpa

Dimana,

kx adalah gaya pegas

$m\ddot{x}$ adalah gaya inersial

Dengan menggunakan persamaan kestimbangan gaya arah vertikal dapat dinyatakan model matematika dari sistem di atas adalah sebagai berikut:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Prinsip D'Alembert

Sebuah alternatif pendekatan untuk mendapatkan persamaan adalah penggunaan Prinsip D'Alembert yang menyatakan bahwa sebuah sistem dapat dibuat dalam keadaan keseimbangan dinamis dengan menambahkan sebuah gaya fiktif pada gaya-gaya luar yang biasanya dikenal sebagai gaya inersia.

Jawab persamaan differential gerak

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Misal jawab

x = A sin ωt + B cos ωt

$$\dot{x} = \omega A\cos\omega t - \omega B\sin\omega t$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A\sin\omega t - \omega^2 B\cos\omega t$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$m\left(-\omega^2 x\right) + kx = 0$$

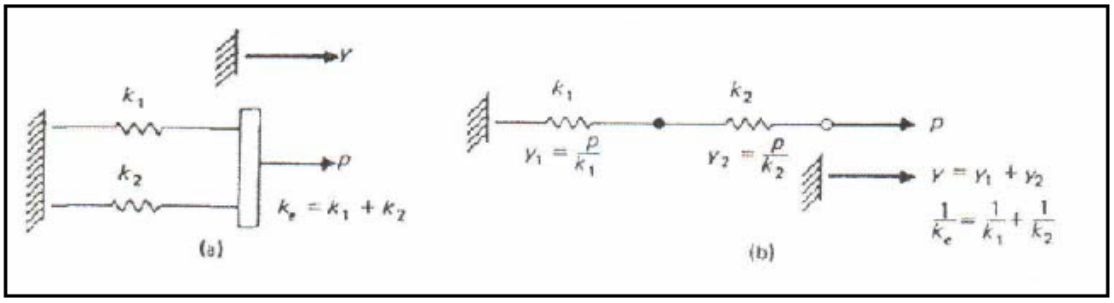
$$\left(k - m\omega^2\right)x = 0$$

Getaran terjadi, jika x # 0. oleh karena itu (k - $m\omega^2$) = 0 dan akibatnya

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}(\,frekuensipribadi)$$

Pegas dipasang Seri atau Paralel

Pemasangan konstanta pegas ekivalen dari suatu sistem dapat dilakukan melalui dua cara yaitu paralel (gambar V.5(a)) dan seri (gambar V.5(b))



Gambar V.5. Kombinasi Pegas (a). Pegas Paralel; (b) Pegas Seri

Untuk dua pegas paralel, gaya P yang diperlukan untuk membuat perpindahan pada satu sistem adalah sebesar perkalian antara perpindahan dengan jumlah kedua konstanta pegas tersebut, sehingga besar kekakuan pegas total adalah :

$$k_e = k_1 + k_2$$

Atau secara umum, dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$k_e = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

dimana : n adalah jumlah pegas yang dipasang paralel

Sedangkan, untuk dua pegas terpasang seri, gaya P menghasilkan perpindahan total y dari ujung bebas pada susunan pegas sebesar :

$$y = \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2}$$

Akibatnya, gaya yang diperlu t satu unit perpindahan (konstanta pegas ekivalen) diberikan oleh

$$k_e = \frac{P}{y}.$$

Dengan mensubstitusi y dari persamaan ini ke dalam persamaan V.4, maka didapatkan nilai kebalikan dari konstanta pegas :

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Secara umum, konstanta pegas ekivalen yang terpasang seri

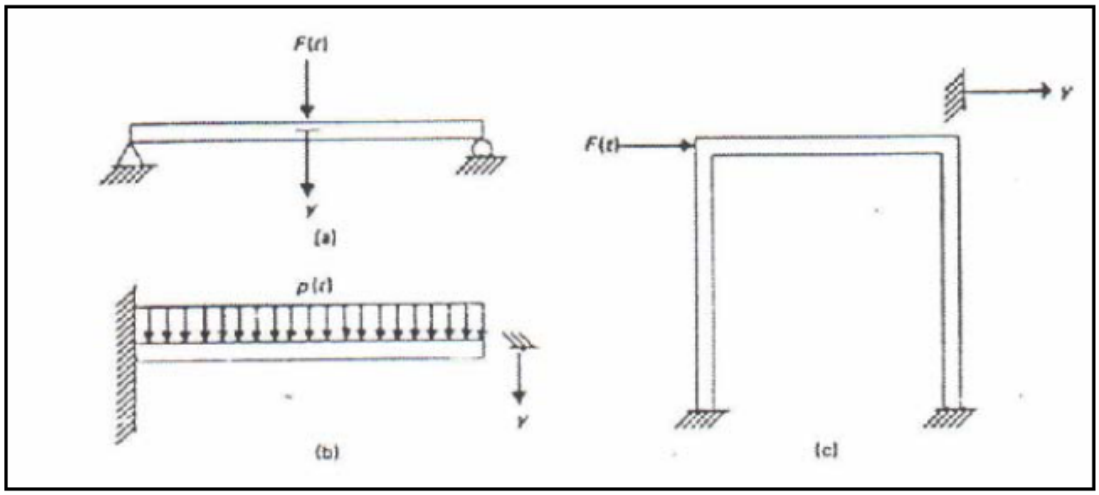
$$\frac{1}{k_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}$$

dimana : n adalah jumlah pegas terpasang seri.

SISTEM DERAJAT KEBEBASAN TUNGGAL TAK TEREDAM

Umum

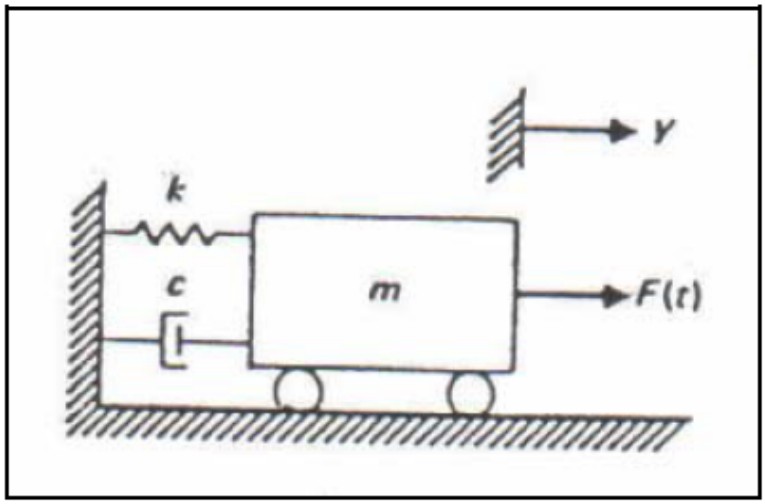
Dalam dinamika struktur, jumlah koordinat bebas (*independent coordinates*) diperlukan untuk menetapkan susunan atau posisi sistem pada setiap saat, yang berhubungan dengan jumlah derajat kebebasan (*degree of fredom*). Pada umumnya, struktur berkesinambungan (*continuous structure*) mempunyai jumlah derajat kebebasan (*number of degrees of fredom*) tak berhingga. Namun dengan proses idealisasi atau seleksi, sebuah model matematis yang tepat dapat mereduksi jumlah derajat kebebasan menjadi suatu jumlah diskrit dan untuk beberapa keadaan dapat menjadi berderajat kebebasan tunggal. Pada gambar V.1. terlihat beberapa contoh struktur yang dapat dianggap sebagai struktur berderajat kebebasan satu (*one degree of freedom*) dalam analisis dinamis, yaitu struktur yang dimodelisasikan sebagai sistem dengan koordinat perpindahan tunggal (single displacement coordinate).



Gambar V.1. Contoh Struktur yang Dimodelisasikan sebagai Sistem Derajat Kebebasan Tunggal

Sistem derajat kebebasan tunggal ini dapat dijelaskan secara tepat dengan model matematis seperti pada Gambar V.2, dimana memiliki elemen-elemen sebagai berikut :

1. Elemen massa (m), menyatakan massa dan sifat inersia dari struktur.
2. Elemen pegas (*k*), menyatakan gaya balik elastis (*elastic restoring force*) dan kapasitas energi potensial dari struktur.
3. Elemen redaman (*c*), menyatakan sifat geseran dan kehilangan energi dari struktur.
4. Gaya pengaruh (F(t)), menyatakan gaya luar yang bekerja pada sistem Struktur



Gambar V.2. Model Matematis Sistem Derajat Kebebasan Tunggal

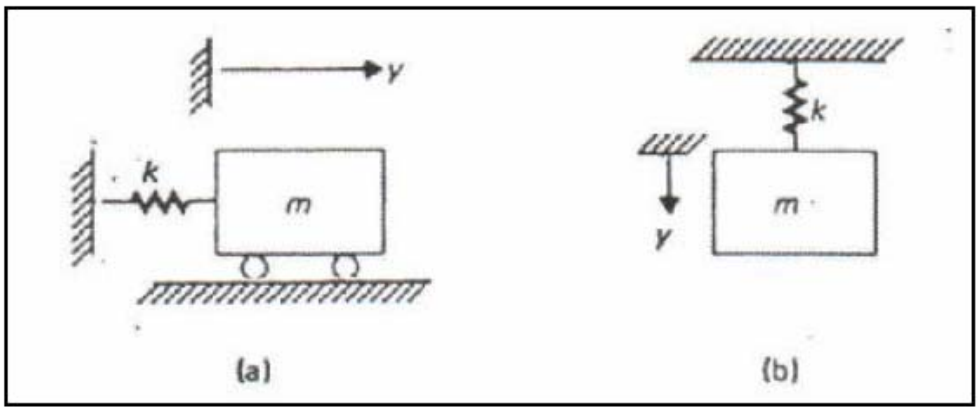
Dengan mengambil model matematis pada gambar V.2, dianggap bahwa tiap elemen dalam sistem menyatakan satu sifat khusus, yaitu

1. Massa (m), menyatakan sifat khusus inersia (property of inertia), bukan elastisitas atau kehilangan energi.
2. Pegas (k), menyatakan elastisitas, bukan inersia atau kehilangan energi.
3. Peredam (c), menyatakan kehilangan energi.

Sistem Tak Teredam (*Undamped System*)

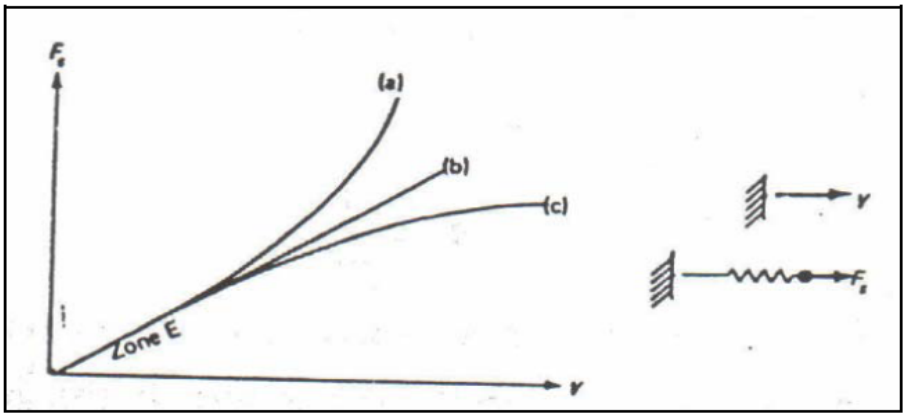
Analisis sistem dasar yang sederhana dalam pembahasan dinamika struktur adalah sistem derajat kebebasan tunggal, dimana gaya geseran atau redaman diabaikan, dan sebagai tambahan, akan ditinjau sistem yang bebas dari gaya aksi gaya luar selama bergerak atau bergetar. Pada keadaan ini, sistem tersebut hanya dikendalikan oleh pengaruh atau kondisi yang dinamakan kondisi awal (initial conditions), yaitu perpindahan yang diberikan dalam kecepatan pada saat t=0, pada saat pembahasan dimulai. Sistem derajat

kebebasan tunggal tak teredam sering dihubungkan dengan osilator sederhana tak teredam (*simple undamped oscillator*) yang selalu disajikan seperti gambar V.3 (a) dan V.3 (b) ataupun sebagai bentuk yang mirip dengan yang di atas.



Gambar V.3. Bentuk Alternatif Model Matematis Sistem Derajat Kebebasan Tunggal

Kedua gambar tersebut merupakan model matematis secara dinamis ekivalen.dan hanya tergantung pada pilihan perorangan saja dalam penggunaannya. Pada model ini massa m dihambat oleh pegas k dan bergerak menurut garis lurus sepanjang satu sumber koordinat. Karakteristik mekanis dari pegas digambarkan antara besar gaya Fs yang bekerja pada ujung pegas dengan hasil perpindahan y seperti terlihat pada Gambar V.4 yang menunjukkan secara grafik dari tiga jenis pegas yang berbeda.



Gambar V.4. Hubungan gaya dan perpindahan (a). Pegas Kuat; (b). Pegas Linear; (c). Pegas Lemah

Berdasarkan gambar V.4., karakteristik lengkungan (a) menyatakan sifat dari pegas kuat (hard spring), dimana gaya harus memberikan pengaruh lebih besar untuk suatu

perpindahan yang disyaratkan seiring dengan terdeformasinya pegas. Sedangkan, karakteristik lengkungan (b), menyatakan sifat pegas linear, karena deformasinya selaras (proportional) dengan gaya dan gambar grafisnya mempunyai karakteristik garis lurus. Konstanta keselarasan antara gaya dan perpindahan dari pegas linier disebus konstanta pegas (*spring constant*), yang biasa dinyatakan dengan "k", sehingga persamaan yang menyatakan hubungan antara gaya dan perpindahan pegas linier adalah sebagai berikut :

$$F_s = ky \quad \text{..... (V.1)}$$

Pegas dengan karakteristik lengkungan (c) pada gambar V.4 disebut pegas lemah, dimana pertambahan gaya untuk memperbesar perpindahan cenderung mengecil pada saat deformasi pegas menjadi makin besar.

Hukum Gerak Newton

Hubungan analitis antara perpindahan y dan waktu t, diberikan oleh Hukum Newton Kedua untuk gerak sebagai berikut :

$$F = ma$$

dimana : F : gaya yang bekerja pada partikel massa m

a : resultan percepatan

Persamaan V.8 dapat ditulis dalam bentuk ekivalen, dimana besaran komponennya menurut sumbu koordinat x, y dan z, yaitu :

$$\sum F_x = ma_x$$

$$\sum F_y = ma_y$$

$$\sum F_z = ma_z$$

Percepatan didefinisikan sebagai turunan kedua vektor posisi terhadap waktu, yang berarti ketiga persamaan adalah persamaan differensial. Persamaan Hukum Newton dapat digunakan pada benda idealis seperti partikel yang bermassa tetapi tidak bervolume, tetapi juga dapat digunakan pada benda berdimensi yang bergerak. Benda kaku yang bergerak pada sebuah bidang adalah simetris terhadap bidang gerak (bidang x-z), sehingga mengakibatkan Hukum Newton perlu dimodifikasi menjadi :

$$\sum F_x = m(a_G)_x$$

$$\sum F_y = m(a_G)_y$$

$$\sum M_G = I_G \alpha$$

$(a_G)_x, (a_G)_y$: komponen percepatan sepanjang sumbu x dan y dari pusat benda yang bermassa G

α : percepatan sudut

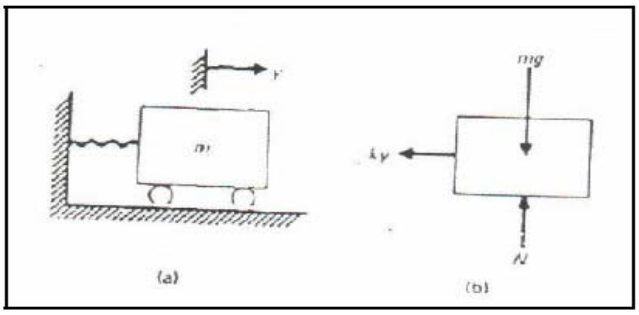
I_G : momen inersia massa benda terhadap sumbu melalui pusat massa G

$\sum M_G$: jumlah momen gaya yang bekerja pada benda terhadap sumbu melalui pusat massa G yang tegak lurus pada bidang x-y.

Diagram Benda Bebas

Digram Free Body adalah suatu sketsa dari benda yang dipisahkan dari benda lainnya, dimana semua gaya luar pada benda terlihat jelas. Pada Gambar V.6(b)

Mengilustrasikan Diagram Free Body dari massa osilator (m) yang dipindahkan pada arah positif menurut koordinat y, yang memberikan gaya pada pegas sebesar *F ky s* = (asumsi pegas linier).



Gambar V.6. Diagram Free Body, (a). Sistem Derajat Kebebasan Tunggal; (b). Gaya-gaya Luar

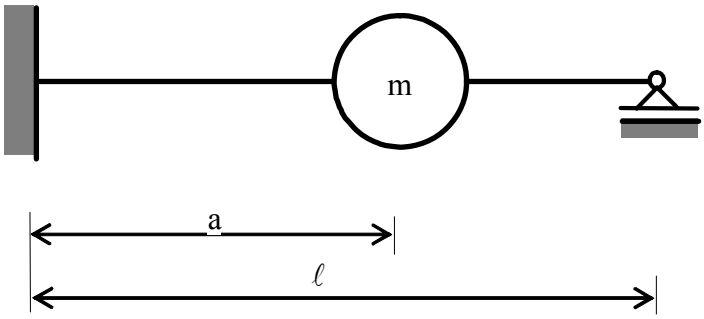
Berat dari mg dan reaksi normal N dari permukaan penunjang diperlihatkan juga untuk pelengkap meskipun gaya-gaya ini bekerja pada arah vertikal dan tidak termasuk dalam

persamaan gerak yang ditulis menurut arah y. Penggunaan Hukum Gerak Newton memberikan.

$$-ky = m\ddot{y}$$

Dimana gaya pegas bekerja pada arah negatif mempunyai tanda minus dan percepatan dinyatakan oleh $\ddot{y}$. Pada notasi ini, dua titik di atas menyatakan turunan kedua terhadap waktu dan satu titik menyatakan turunan pertama terhadap waktu, yaitu kecepatan.

Contoh : Sistem Massa Balok



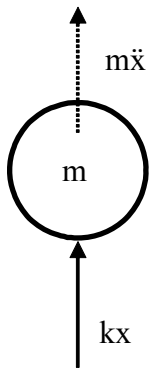
Lendutan pada massa m adalah:

$$\delta = \frac{Pa^3(\ell - a)^2}{12 \cdot EI \cdot \ell^3}(4\ell - a)$$

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{P \cdot 12EI \cdot \ell^3}{P \cdot a^3(\ell - a)^2(4\ell - a)}$$

$$= \frac{12EI \cdot \ell^3}{a^3(\ell - a)^2(4\ell - a)}$$

Diagram benda bebas dari sistim adalah:



Dari persamaan kesetimbangan pada DBB diperoleh :

$$\sum F_y = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

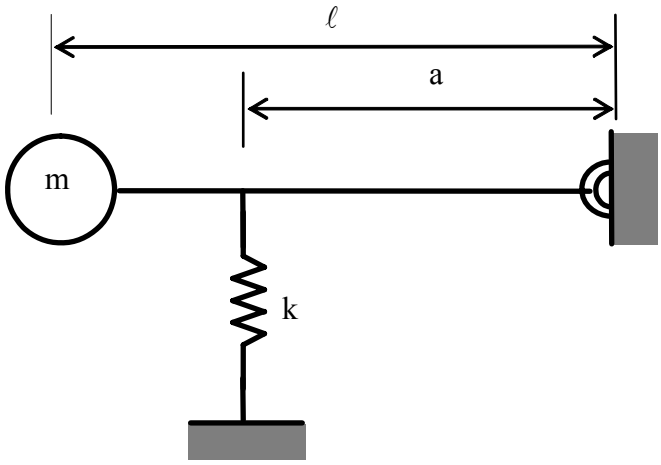
Misal jawab sistem adalah:

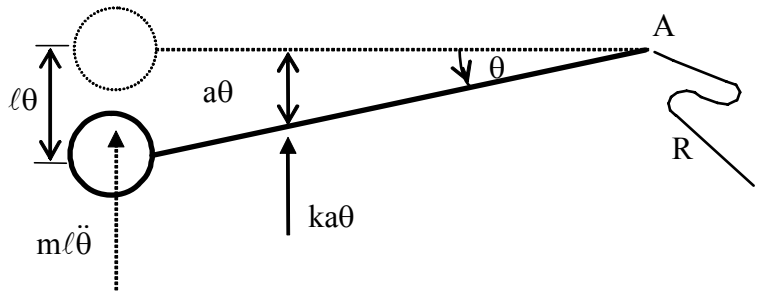
$$x = X\sin\omega t$$
$$\dot{x} = \omega X\cos\omega t$$
$$\ddot{x} = -\omega^2 X\sin\omega t$$

Apabila disubstitusikan ke PDG diperoleh:

$$-m\omega^2 x + kx = 0$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$\omega_n = \sqrt{\frac{12EI\cdot\ell^3}{ma^3(\ell-a)^2(4\ell-a)}}$$

Contoh : Sistem Massa pegas.





$$\sum M_A = 0$$

$$m\ell^2\ddot{\theta} + ka^2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = X\sin\omega t$$
$$\left(-\omega^2 m\ell^2 + ka^2\right)X\sin\omega t = 0 \qquad \ddot{\theta} = -\omega^2 X\sin\omega t$$
$$-\omega^2 m\ell^2 + ka^2 = 0$$

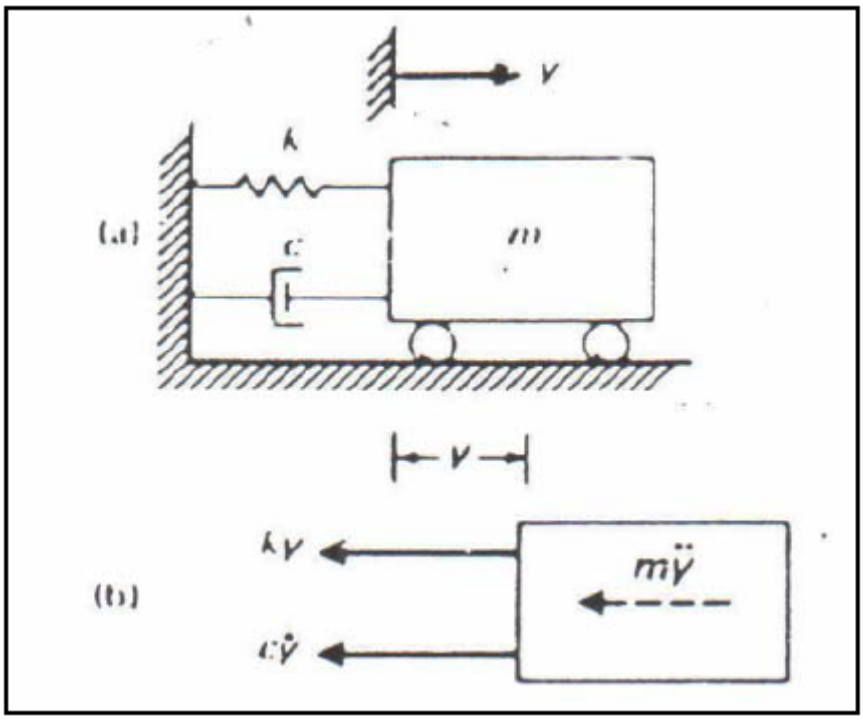
$$\omega^2 m\ell^2 = ka^2$$

$$\omega^2 = \frac{ka^2}{m\ell^2}$$

maka frekuensi pribadi sistem :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{ka^2}{m\ell^2}}$$

Getaran Bebas dengan Redaman



Bila peredaman diperhitungkan, berarti gaya peredam juga berlaku pada massa selain gaya yang disebabkan oleh peregangan pegas. Bila bergerak dalam fluida benda akan mendapatkan peredaman karena kekentalan fluida. Gaya akibat kekentalan ini sebanding dengan kecepatan benda. Konstanta akibat kekentalan (viskositas) *c* ini dinamakan koefisien peredam, dengan satuan N s/m (SI)

$$F_d = -cv = -c\dot{x} = -c\frac{dx}{dt}$$

Dengan menjumlahkan semua gaya yang berlaku pada benda kita mendapatkan persamaan

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0.$$

Solusi persamaan ini tergantung pada besarnya redaman. Bila redaman cukup kecil, sistem masih akan bergetar, namun pada akhirnya akan berhenti. Keadaan ini disebut kurang redam, dan merupakan kasus yang paling mendapatkan perhatian dalam analisis vibrasi. Bila peredaman diperbesar sehingga mencapai titik saat sistem tidak lagi berosilasi, kita mencapai titik **redaman kritis**. Bila peredaman ditambahkan melewati titik kritis ini sistem disebut dalam keadaan lewat redam.

Nilai koefisien redaman yang diperlukan untuk mencapai titik redaman kritis pada model massa-pegas-peredam adalah:

$$c_c = 2\sqrt{km}$$

Untuk mengkarakterisasi jumlah peredaman dalam sistem digunakan nisbah yang dinamakan nisbah redaman. Nisbah ini adalah perbandingan antara peredaman

sebenarnya terhadap jumlah peredaman yang diperlukan untuk mencapai titik redaman kritis. Rumus untuk nisbah redaman (ζ) adalah

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}.$$

Sebagai contoh struktur logam akan memiliki nisbah redaman lebih kecil dari 0,05, sedangkan suspensi otomotif akan berada pada selang 0,2-0,3.

Solusi sistem kurang redam pada model massa-pegas-peredam adalah

$$x(t) = Xe^{-\zeta\omega_n t}\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t - \phi), \quad \omega_n = 2\pi f_n$$

Nilai *X*, amplitudo awal, dan ϕ, ingsutan fase, ditentukan oleh panjang regangan pegas.

Dari solusi tersebut perlu diperhatikan dua hal: faktor eksponensial dan fungsi cosinus. Faktor eksponensial menentukan seberapa cepat sistem teredam: semakin besar nisbah redaman, semakin cepat sistem teredam ke titik nol. Fungsi kosinus melambangkan osilasi sistem, namun frekuensi osilasi berbeda daripada kasus tidak teredam.

Frekuensi dalam hal ini disebut "frekuensi alamiah teredam", f_d, dan terhubung dengan frekuensi alamiah takredam lewat rumus berikut.

$$f_d = \sqrt{1-\zeta^2} f_n$$

Frekuensi alamiah teredam lebih kecil daripada frekuensi alamiah takredam, namun untuk banyak kasus praktis nisbah redaman relatif kecil, dan karenanya perbedaan tersebut dapat diabaikan. Karena itu deskripsi teredam dan takredam kerap kali tidak disebutkan ketika menyatakan frekuensi alamiah.

Contoh 1.

Sebuah sistem bergetar terdiri dari berat W = 44.5 N dan pegas kekakuan k = 3504 N/m, dipengaruhi redaman liat (viscous damped) sehingga dua amplitudo puncak secara berurutan adalah 1.00 sampai 0.85. Tentukan :

(a). Frekuensi natural dari sistem tak teredam

(b). Pengurangan logaritmis (logarithmic decrement)

(c). rasio redaman (damping ratio)

(d). koefisien redaman

(e). frekuensi natural teredam

Penyelesaian :

(a). Frekuensi natural dari sistem tak teredam dalam radian per detik adalah :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{W/g}} = \sqrt{\frac{3504}{(44.5/9.81)}} = 27.79\,\mathbf{rad/s}$$

Atau dalam putaran per detik

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{27.79}{2\pi} = 4.42\,\mathbf{sps}$$

(b). Pengurangan logaritmis (logarithmic decrement)

$$\delta = \ln\frac{y_1}{y_2} = \ln\frac{1.00}{0.85} = 0.163$$

(c). rasio redaman (damping ratio)

$$\xi \approx \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0.163}{2\pi} = 0.026$$

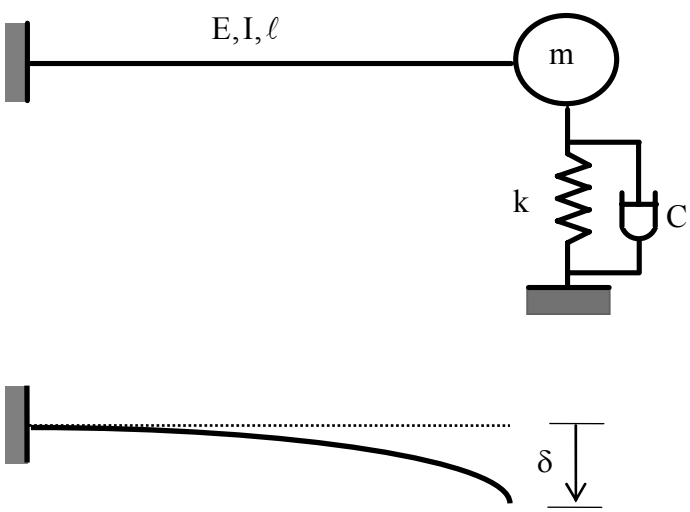
(d). koefisien redaman

$$c = \xi\, c_{cr} = 0.026\left(2\ x\sqrt{3504\, x\left(44.5/\ 9.81\right)}\right) = 6.55\ \text{N s/m}$$

(e). frekuensi natural teredam

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 27.79\sqrt{1-(0.026)^2} = 27.78\ rad/s$$

Contoh Soal :



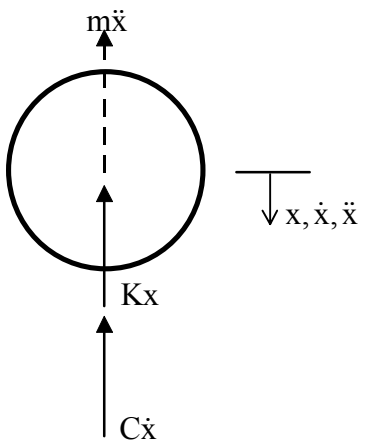
$$\delta = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

$$K_{\text{ba tang}} = \frac{3EI}{\ell^3}$$

sehingga $K_{skivalen}$

$$K = \frac{3EI}{\ell^3} + k$$

maka diagram benda bebas (DBB) adalah



persamaan gerak sistem

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$$

asumsi

$$x = Ae^{\lambda t}$$

$$\dot{x} = \lambda Ae^{\lambda t}$$

$$\ddot{x} = \lambda^2 Ae^{\lambda t}$$

dengan mensubsitusikannya ke persamaan gerak diperoleh

$$\left(m\lambda^2 + c\lambda + K\right)Ae^{\lambda t} = 0$$

$$m\lambda^2 + c\lambda + K = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mK}}{2m}$$

$$= \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{3EI/\ell^3 + k}{m}} \qquad \Rightarrow \qquad \text{pers. karakteristik}$$

untuk kondisi kritis :

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m} = 0 \qquad \text{maka} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-c}{2m}$$

kondisi tanpa redaman : $m\ddot{x} + Kx = 0$

maka $\omega_n^{\,2} = \dfrac{K}{m}$

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_n = 0$$

$$\left(\frac{c}{2m} + \omega_n\right)\left(\frac{c}{2m} - \omega_n\right) = 0 \qquad \text{maka :} \quad \frac{c}{2m} = -\omega_n \quad \text{atau} \quad \frac{c}{2m} = \omega_n$$

(tidak dipakai)

redaman kritis : $c_c = 2m\omega_n = 2m\sqrt{\dfrac{3EI/\ell^3 + k}{m}}$

koefisien redaman: $\xi = \dfrac{c}{c_c} = \dfrac{c}{2m\omega_n}$

$$\frac{c}{2m} = \xi\omega_n$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

$$= -\xi\omega_n \pm \sqrt{\xi^2\omega_n^{\,2} - \omega_n^{\,2}}$$

$$= -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

pada kondisi redaman kritis : $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{-c}{2m} = -\xi\omega_n$

jawab sistem : $x = A_1 e^{-\xi\omega_n t} + A_2 e^{-\xi\omega_n t}$

$$= Ae^{-\xi\omega_n t}$$

pada kondisi under damped : $\xi^2\omega_n^{\,2} - \omega_n^{\,2} < 0$

maka : $\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \sqrt{-1\left(\xi^2\omega_n^{\,2} - \omega_n^{\,2}\right)}$

$$= -\xi\omega_n \pm \sqrt{-\omega_n^{\,2}\left(1 - \xi^2\right)}$$

$$= -\xi\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

jawab system : $x = A_1 e^{(-\xi\omega_n + i\omega_d)t} + A_2 e^{(-\xi\omega_n - i\omega_d)t}$

$$= \left(A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}\right)e^{-\xi\omega_n t}$$

$$= \left\{A_1\left(\cos\omega_d t + i\sin\omega_d t\right) + A_2\left(\cos\omega_d t - i\sin\omega_d t\right)\right\}e^{-\xi\omega_n t}$$

$$= \left[\left(A_1 + A_2\right)\cos\omega_d t + i\left(A_1 - A_2\right)\sin\omega_d t\right]e^{-\xi\omega_n t}$$

$$x = \left(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t\right)e^{-\xi\omega_n t}$$

$$\dot{x} = \left\{\left(-A\sin\omega_d t + B\omega_d\cos\omega_d t\right) + \left(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t\right) - \xi\omega_n\right\}e^{-\xi\omega_n t}$$

$$\dot{x} = \left[\left(B\omega_d - A\xi\omega_n\right)\cos\omega_d t + \left(-A\omega_d - B\xi\omega_n\right)\sin\omega_d t\right]e^{-\xi\omega_n t}$$

$$x = x_0 = A$$

$$t=0 \Rightarrow \dot{x} = \dot{x}_0 = B\omega_d - A\xi\omega_n \qquad B = \frac{\dot{x}_0 + x_0\xi\omega_n}{\omega_d}$$

$$\dot{x}_0 = B\omega_d - x_0\xi\omega_n$$

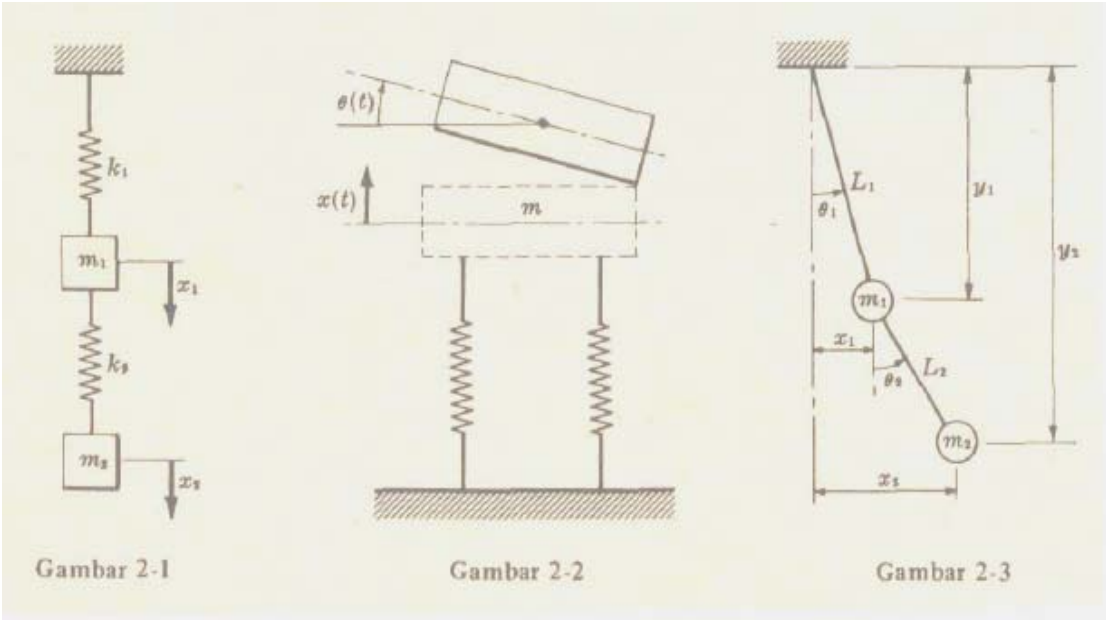
sehingga : $x = e^{-\xi\omega_n t}\left(x_0\cos\omega_d t + \left(\frac{\dot{x}_0 + x_0\xi\omega_n}{\omega_d}\right)\sin\omega_d t\right)$

SISTEM 2 DERAJAT KEBEBASAN (2DOF - MK)

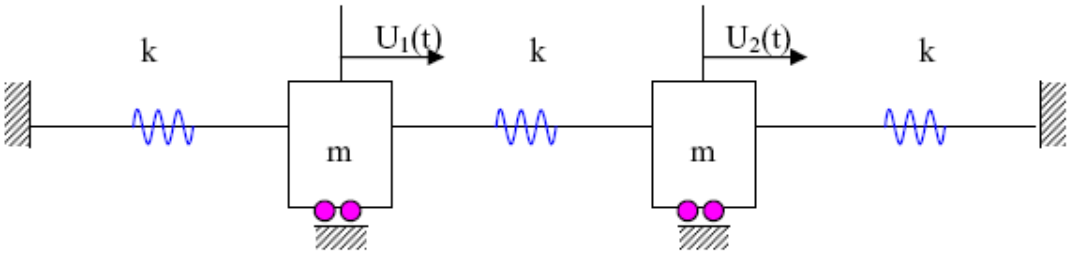
PENDAHULUAN

Sistem yang membutuhkan dua buah koordinat bebas untuk menentukan kedudukannya disebut sistem dua-derajat-kebebasan. Sistem dua-derajat-kebebasan dibagi atas tiga sistem yaitu :

1. Dalam sistem massa pegas seperti terlihat dalam Gambar 2-1 di bawah ini, bila gerakan massa *ml* dan *m2* secara vertikal dibatasi maka paling sedikit dibutuhkan satu koordinat *x(t)* guna menentukan kedudukan massa pada berbagai waktu. Berarti sistem membutuhkan dua buah koordinat bersama-sama untuk menentukan kedudukan massa; sistem ini adalah sistem dua-derajat-kebebasan.
2. Bila massa *m* ditumpu dengan dua buah pegas yang sama seperti terlihat dalam Gam-bar 2-2 di bawah ini gerakannya dibatasi secara vertikal, maka dibutuhkan dua buah koordinat untuk menentukan konfigurasi sistem. Salah satu konfigurasi ini merupakan perpindahan lurus, seperti perpindahan massa x(/). Koordinat yang lain yaitu perpin-dahan sudut, *8(t),* yang mengukur rotasi massa. Ke dua koordinat ini satu sama lain bebas; oleh karena itu sistem ini adalah sistem dua derajat kebebasan.
3. Untuk p.endulum ganda seperti terlihat dalam Gambar 2-3 di bawah ini, jelas bahwa untuk menentukan posisi massa *m1* dan *m2* pada berbagai waktu dibutuhkan dua buah koordinat dan sistem adalah dua derajat kebebasan. Tetapi x1 dan *x2* atau y1 dan *y2,* atau θ1 dan θ*2,* mungkin merupakan kelompok koordinat sistem ini.



Controh diketahui sistem dua derajat kebebasan berikut :



Diketahui massa =10 kg, konstanta pegas =30 N/m.

a. Tentukan persamaan gerak sistem den gan memanfaatkan metode Lagrange!

b. Carilah frekuensi pribadinya

c. Tentukan rasio amplitudonya

d. Analisislah persamaan geraknya

e. Apabila massa sebelah kiri bergerak 1meter dari kedudukan setimbang statis dan kemudian dilepaskan, maka tentukan perpindahan massa u 1(t) dan u2(t)

Solusi

Persamaan umum Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial[Ek]}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial[Ek]}{\partial q_i} + \frac{\partial[Ed]}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial[Ep]}{\partial q_i} = Q_i$$

Ek adalah energi kinetik(akibat gerakan massa);

Ep adalah energi potensial pegas(akibat kerja pegas);

Ed adalah energi terbuang sistem(akibat kerja redaman); Kasus ini *Ed* = 0

Qi adalah gaya luar yg bekerja pada sistem (eksitasi) ; Kasus ini *Qi* □ 0

a. Untuk kasus di atas merupakan 2 derajat kebebasan, sehingga persamaan umum Lagra nge dapat dibuat menjadi 2 bentuk, yaitu penurunan terhadap $u_1(t)$ dan $u_2(t)$.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial[Ek]}{\partial \dot{u}_1} - \frac{\partial[Ek]}{\partial u_1} + \frac{\partial[Ep]}{\partial u_1} = 0 \quad \text{.....[2]}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial[Ek]}{\partial \dot{u}_2} - \frac{\partial[Ek]}{\partial u_2} + \frac{\partial[Ep]}{\partial u_2} = 0 \quad \text{.....[3]}$$

dengan

$$Ek = \frac{1}{2}m\dot{u}_1^{\,2} + \frac{1}{2}.m\dot{u}_2^{\,2} \quad \text{.....[4]}$$

$$Ep = \frac{1}{2}ku_1^{\,2} + \frac{1}{2}k(u_1 - u_2)^2 + \frac{1}{2}ku_2^{\,2} \quad \text{.....[5]}$$

Persamaan 4 dan 5 masuk ke pers 2, maka

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\left[\frac{1}{2}m\dot{u}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m\dot{u}_2^{\,2}\right]}{\partial \dot{u}_1} - \frac{\partial\left[\frac{1}{2}m\dot{u}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m\dot{u}_2^{\,2}\right]}{\partial u_1} + \frac{\partial\left[\frac{1}{2}ku_1^{\,2} + \frac{1}{2}k(u_1 - u_2)^2 + \frac{1}{2}ku_2^{\,2}\right]}{\partial u_1} = 0$$

.....[6]

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m.2\dot{u}_1^{\,1}\right] - 0 + \left[\frac{1}{2}k.2u_1^{\,1} + \frac{1}{2}k.2(u_1 - u_2)^1\right] = 0 \quad \text{.....[7]}$$

$$m.\ddot{u}_1 + ku_1 + k(u_1 - u_2) = 0 \quad \text{.....[8]}$$

$$m.\ddot{u}_1 + 2ku_1 - ku_2 = 0 \quad \text{.....[9]}$$

Persamaan 4 dan 5 masuk ke pers 3, maka

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\left[\frac{1}{2}m\dot{u}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m\dot{u}_2^{\,2}\right]}{\partial \dot{u}_2} - \frac{\partial\left[\frac{1}{2}m\dot{u}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m\dot{u}_2^{\,2}\right]}{\partial u_2} + \frac{\partial\left[\frac{1}{2}ku_1^{\,2} + \frac{1}{2}k(u_1 - u_2)^2 + \frac{1}{2}ku_2^{\,2}\right]}{\partial u_2} = 0$$

.....[10]

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m.2\dot{u}_2^{\,1}\right] - 0 + \left[-\frac{1}{2}k.2(u_1 - u_2)^1 + \frac{1}{2}k.2u_2^{\,1}\right] = 0 \quad \text{.....[11]}$$

$$m\ddot{u}_2 - k(u_1 - u_2) + ku_2 = 0 \quad \text{.....[12]}$$

$$m\ddot{u}_2 - ku_1 + 2ku_2 = 0 \quad \text{.....[13]}$$

Pers 9 dan 13 jika diurutkan sbb

Persamaan gerak 1 $\quad m.\ddot{u}_1 + 2ku_1 - ku_2 = 0$ .....[14]

Persamaan gerak 2 $\quad m\ddot{u}_2 - ku_1 + 2ku_2 = 0$ .....[15]

b. Andaikan gerakan adalah periodik dan terdiri dari gerakan h armonis dari berbagai amplitudo dan frekuensi. Ambil suatu contoh $u = A\sin(\omega t + \psi)$. Dari persamaan 14,15 dan dengan memisalkan

Simpangan	$u_1 = A\cos(\omega t + \psi)$	$u_2 = B\cos(\omega t + \psi)$
Kecepatan	$\dot{u}_1 = -A\omega\sin(\omega t + \psi)$	$\dot{u}_2 = -B\omega\sin(\omega t + \psi)$
Percepatan	$\ddot{u}_1 = -A\omega^2\cos(\omega t + \psi)$	$\ddot{u}_2 = -B\omega^2\cos(\omega t + \psi)$

Diperoleh

$$-m\omega^2 A\cos(\omega t + \psi) + 2kA\cos(\omega t + \psi) - kB\cos(\omega t + \psi) = 0 \quad \text{[16]}$$

$$-m\omega^2 B\cos(\omega t + \psi) - kA\cos(\omega t + \psi) + 2kB\cos(\omega t + \psi) = 0 \quad \text{[17]}$$

$$(2k - m\omega^2)A - kB = 0 \quad \text{[18]}$$

$$-kA + (2k - m\omega^2)B = 0 \quad \text{[19]}$$

Pers 18 dan 19 bisa dijadikan satu

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{[20]}$$

Nilai A dan B ada jika Determinan = 0

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{[21]}$$

$$(2k - m\omega^2)(2k - m\omega^2) - (-k)^2 = 0 \quad \text{[22]}$$

$$(4k^2 - 2km\omega^2 - 2km\omega^2 + m^2\omega^4) - k^2 = 0 \quad \text{[23]}$$

$$(m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2) = 0 \quad \text{[24]}$$

$$\omega_{1,2}{}^2 = +\frac{4km}{2m^2} \pm \frac{\sqrt{(-4km)^2 - 4m^2.3k^2}}{2m^2} \quad \text{[25]}$$

$$\omega_{1,2}{}^2 = +\frac{2k}{m} \pm \sqrt{\frac{16k^2m^2 - 12k^2m^2}{4m^4}} \quad \text{[26]}$$

$$\omega_{1,2}{}^2 = +\frac{2k}{m} \pm \frac{k}{m} \quad \text{.....[27]}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{30}{10}} = \sqrt{3}\,\frac{rad}{s} \quad \text{.....[28]}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} = \sqrt{\frac{3.30}{10}} = 3\frac{rad}{s} \quad \text{.....[29]}$$

c. Rasio amplitudo ditentukan dari pers 18 dan 19

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{k}{\left(2k - m\omega_1{}^2\right)} = \frac{30}{2.30 - 10.\left(\sqrt{3}\right)^2} = 1 \quad \text{.....[30]}$$

atau

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{\left(2k - m\omega_1{}^2\right)}{k} = \frac{2.30 - 10.\left(\sqrt{3}\right)^2}{30} = 1 \quad \text{.....[31]}$$

sedangkan

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{k}{\left(2k - m\omega_2{}^2\right)} = \frac{30}{2.30 - 10.3^2} = -1 \quad \text{.....[32]}$$

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{\left(2k - m\omega_2{}^2\right)}{k} = \frac{2.30 - 10.3^2}{30} = -1 \quad \text{.....[33]}$$

d. Penyelesaian umum persamaan gerakan terdiri dua gerakan harmonis dengan frekuensi ω_1 dan ω_2. Oleh karena itu gerakan massa dinyatakan

$$u_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \psi_2) = A_1\cos\left(\sqrt{3}t + \psi_1\right) + A_2\cos(3t + \psi_2) \quad [34]$$

$$u_2(t) = B_1\cos(\omega_1 t + \psi_1) + B_2\cos(\omega_2 t + \psi_2) = B_1\cos\left(\sqrt{3}t + \psi_1\right) + B_2\cos(3t + \psi_2) \quad [35]$$

Dari pers 30 dan 32 diperoleh A_1=B_1 sedangkan A_2=-B_2, sehingga pers 34 dan 35 menjadi

$$u_1(t) = A_1\cos\left(\sqrt{3}t + \psi_1\right) + A_2\cos(3t + \psi_2) \quad \text{.....[36]}$$

$$u_2(t) = A_1\cos\left(\sqrt{3}t + \psi_1\right) - A_2\cos(3t + \psi_2) \quad \text{.....[37]}$$

e. Ke empat konstanta pers 36 dan 37 dievaluasi dengan empat buah kondisi awal, yaitu $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = 0$, $\dot{u}_1(0) = 0$, dan $\dot{u}_2(0) = 0$. Untuk $\psi_1 = \psi_2 = 0$ maka

$$u_1(t) = A_1\cos\left(\sqrt{3}t + \psi_1\right) + A_2\cos(3t + \psi_2) \quad \text{.....[38]}$$

$1 = A_1\cos 0 + A_2\cos 0$, shg $1 = A_1 + A_2$

$$u_2(t) = A_1\cos\left(\sqrt{3}t + \psi_1\right) - A_2\cos(3t + \psi_2) \quad \text{.....[39]}$$

$0 = A_1\cos 0 - A_2\cos 0$, shg $A_1 = A_2$

$$\dot{u}_1(t) = -A_1\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}t + \psi_1\right) - A_2 3\sin(3t + \psi_2) \quad \text{.....[40]}$$

$0 = -A_1\sqrt{3}\sin 0 - A_2 3\sin 0$

$$\dot{u}_2(t) = -A_1\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}t + \psi_1\right) + A_2 3\sin(3t + \psi_2) \quad \text{.....[41]}$$

$0 = -A_1\sqrt{3}\sin 0 + A_2 3\sin 0$

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{2} \quad \text{.....[42]}$$

Maka gerakan massa adalah

$$u_1(t) = \frac{1}{2}\cos\sqrt{3}t + \frac{1}{2}\cos 3t \quad \text{.....[43]}$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2}\cos\sqrt{3}t - \frac{1}{2}\cos 3t \quad \text{.....[44]}$$

Penggandengan Koordinat (ringkasan)

Persamaan gerak sistem dua derajat kebebasan biasanya gandeng (coupled) artinya kedua koordinat muncul dalam stiap persamaan gerak (diverensial).

Massa penggandengan dinamik ada bila matrik massa adalh non diagonal. Penggandengan statik ada bila matrik kekakuan adalah non-diagonal.

Contoh matrik penggandengan dinamik

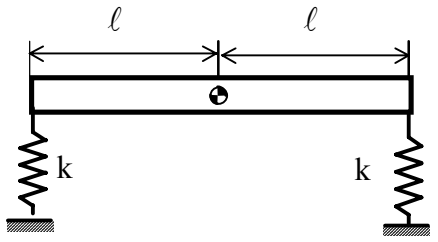
$$\begin{bmatrix} m & me \\ m & me^2 + I_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

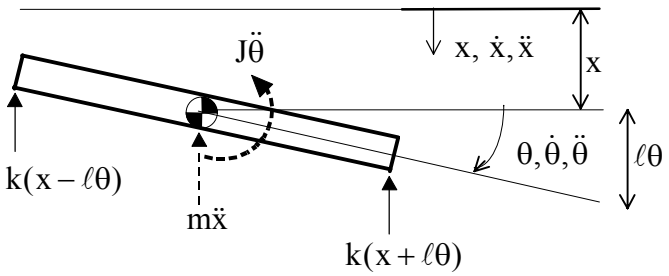
Dapat dicari suatu sistem koordinat yang sama sekali tidak mempunyai salah satu bentuk penggandengan. Setiap persamaan dapat dipecahkan tanpa tergantung pada persamaan lain. Koordinat semacam ini dinamai koordinat utama (proncipal koordinat) atau normat koordinat).

Pada sistem dengan redaman

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

Bila $C_{12} = C_{21} = 0$, maka redaman dikatakan sebanding (dengan matrik kekakuan atau matrik massa) dan persamaan menjadi tak gandeng.





Bila $\ell_1 \neq \ell_2$ dapat terjadi penggandengan statik atau dinamik.

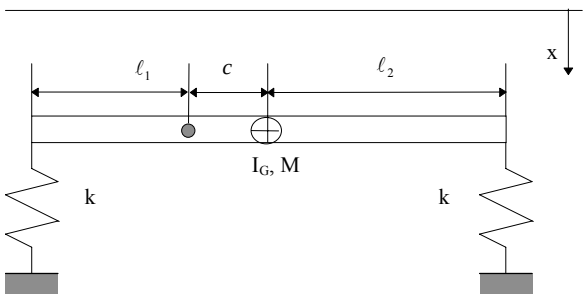
Penggandengan Statik

Dengan memilih koordinat x dan θ , yang ditunjukkan dalam gambar diatas maka terbentuk persamaan matrik

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} (k_1+k_2) & (k_2l_2-k_1l_1) \\ (k_2l_2-k_1l_1) & (k_1l_1^2-k_2l_2^2) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}=\{0\}$$

Bila $k_1\ell_1 = k_2\ell_2$ maka penggandengan akan hilang dan diperoleh getaran dengan x dan θ yang tak gandeng.

Penggandengan Dinamik



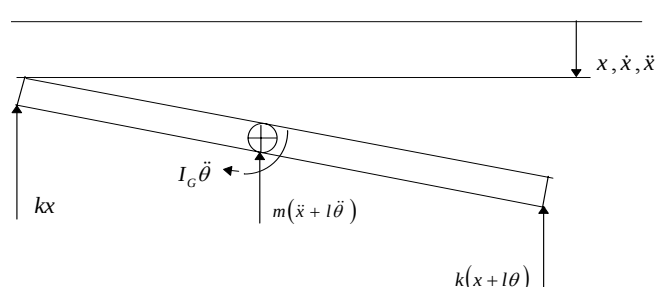
Bila $k_1\ell_3 = k_2\ell_4$ maka persamaan gerak yang diperoleh

$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & Jc \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} (k_1+k_2) & 0 \\ 0 & (k_1\ell_3^2-k_2\ell_4^2) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}=\{0\}$$

Penggandengan Statik dan Dinamik

Bila ujung batang dipilih $x = x_1$ maka akan diperoleh bentuk matrik persamaan gerak

$$\begin{bmatrix} m & m\ell_1 \\ m\ell_1 & J_1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} (k_1+k_2) & k_2\ell \\ k_2\ell & k_2\ell^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta \end{Bmatrix}=\{0\}$$



Contoh Soal

Tentukan ragam normal getaran mobil yang disimulasi oleh sistem dua derajat kebebasanyang disederhanakan dengan nilai-nilai numerik sebagai berikut :

$W = 3220 \text{ lb} = 14{,}3 \text{ kN}$

$l_1 = 4{,}5 \text{ ft} = 1{,}35 \text{ m}$

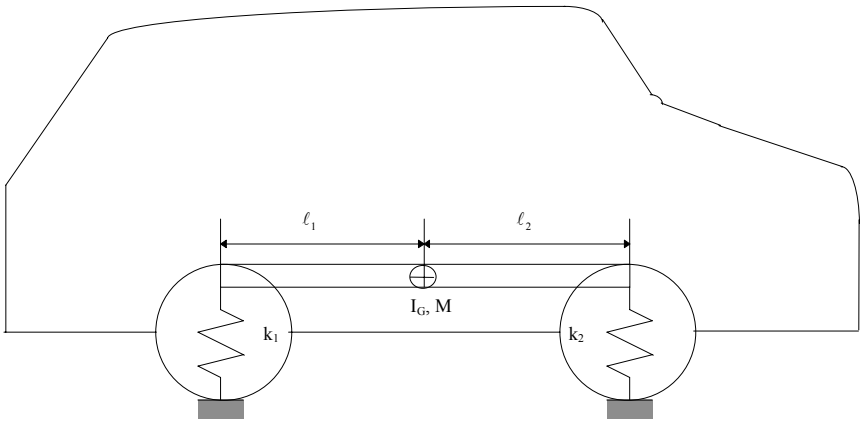
$l_2 = 5{,}5 \text{ ft} = 1{,}65 \text{ m}$

$r = 4 \text{ ft} = 1{,}2 \text{ m}$

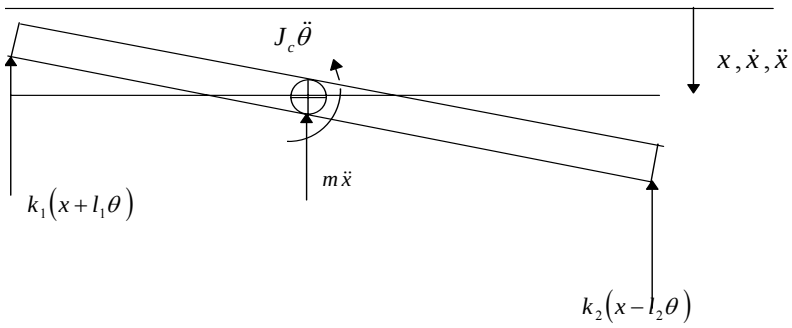
$$J_c = \frac{W}{g} r^2$$

$k_1 = 2400 \text{ lb/ft} = 35{,}2 \times 10^3 \text{ kN/m}$

$k_1 = 2600 \text{ lb/ft} = 38{,}13 \times 10^3 \text{ kN/m}$



Persamaan gerak dari sistem



$$\sum F_x = 0$$

$$m\ddot{x} + k_1(x - l_1\theta) + k_2(x + l_2\theta) = 0$$

$$\sum M_0 = 0$$

$$J_c\ddot{\theta} - k_1(x - l_1\theta)l_1 + k_2(x + l_2\theta)l_2 = 0$$

dengan asumsi jawab

$$\ddot{x} = -X\omega^2 \sin\omega t$$

$$\ddot{\theta} = -\theta\omega^2 \sin\omega t$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2 - \omega^2 m) & -(k_1 l_1 - k_2 l_2) \\ -(k_1 l_1 - k_2 l_2) & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 - \omega^2 J_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \theta \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$\begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - \omega^2 m) & -(k_1 l_1 - k_2 l_2) \\ -(k_1 l_1 - k_2 l_2) & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 - \omega^2 J_c \end{vmatrix} = 0$$

$$(k_1 + k_2 - \omega^2 m)(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 - \omega^2 J_c) - (k_1 l_1 - k_2 l_2)(k_1 l_1 - k_2 l_2) = 0$$

dengan memasukkan nilai-nilai yang diketahui kedalam persamaan diatas diperoleh

$$\omega_1 = 6{,}90 \text{ rad/det}$$

$$\omega_2 = 9{,}06 \text{ rad/det}$$

Ratio amplitudo

$$\left(\frac{X}{\theta}\right)_{\omega_1} = -14{,}6 \text{ ft/rad} = 0{,}0765 \text{ m/derajat} = 76 \text{ mm/derajat}$$

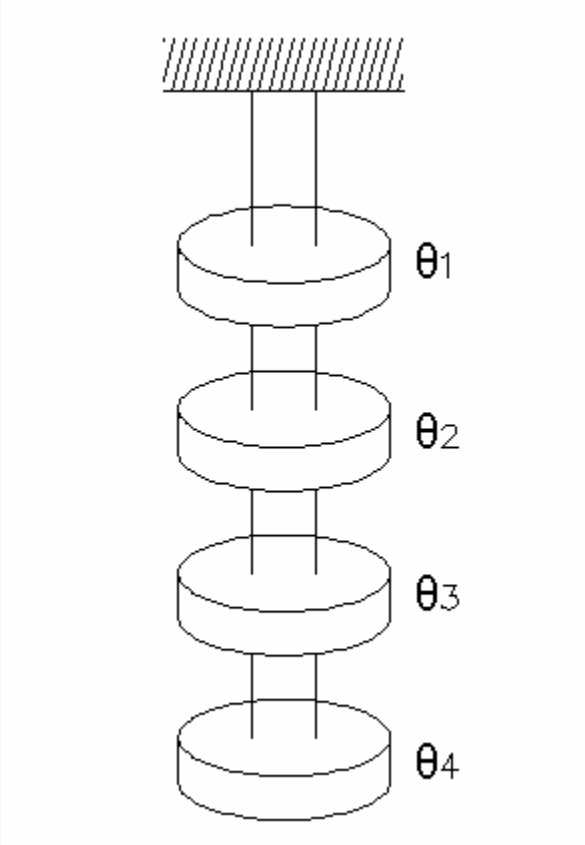
$$\left(\frac{X}{\theta}\right)_{\omega_2} = 1{,}69 \text{ ft/rad} = 0{,}0072 \text{ m/derajat} = 7{,}2 \text{ mm/derajat}$$

SISTEM BANYAK DERAJAT KEBEBASAN

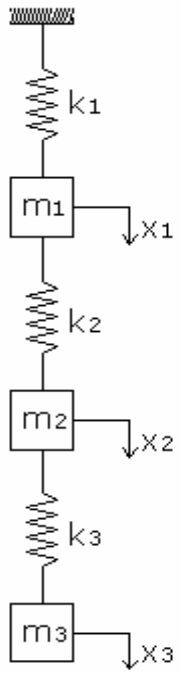
Sistem banyak derajat kebebasan adalah sebuah system yang mempunyai koordinat bebas untuk mengetahui kedudukan massa lebih dari dua buah.

Pada dasarnya, analisa system banyak derajat kebebasan adalah sama dengan system satu atau dua derajat kebebasan. Tetapi karena banyaknya langkah yang harus dilewati untuk mencari frekuensi pribadi melalui perhitungan matematis, maka system digolongkan menjadi banyak derajat kebebasan.

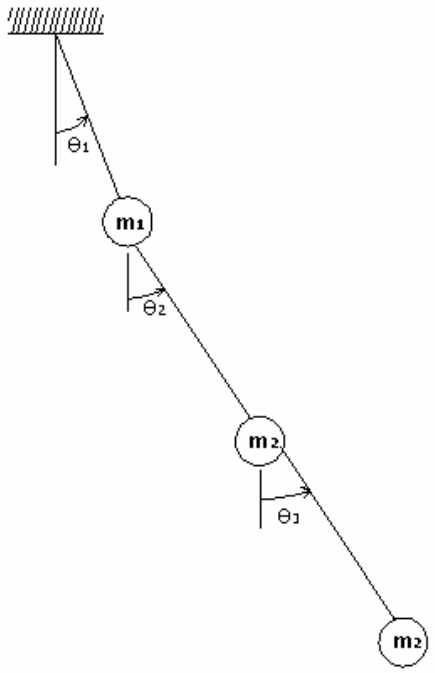
Berikut adalah contoh macam-macam System Banyak Derajat Kebebasan:



Gambar 1. Sistem Torsi 4 Derajat Kebebasan



Gambar 2. Sistem Pegas Massa 3 Derajat Kebebasan.



Gambar 3. Sistem Pendulum 3 Derajat Kebebasan.

FREKUENSI ALAMI SEBUAH STRUKTUR

(Penerapan Metode *Logarithmic Decrement*)

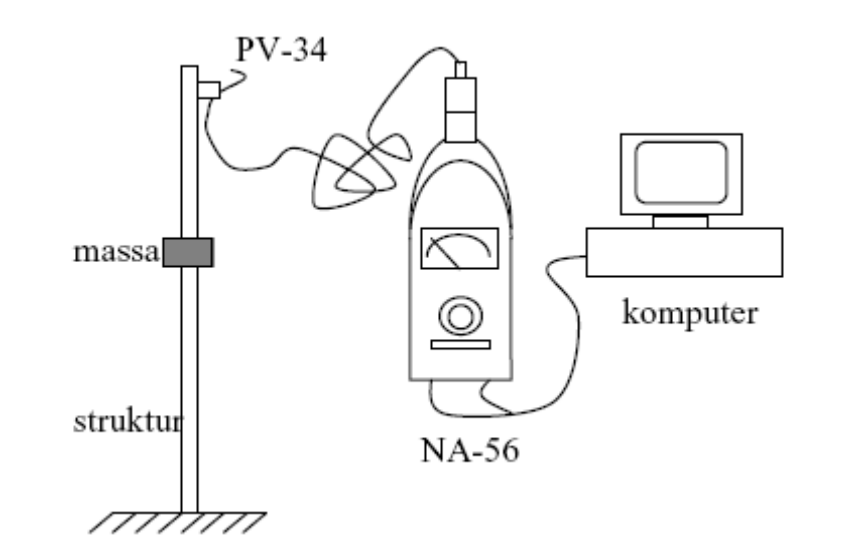
Tujuan Percobaan

Menentukan faktor redaman dan frekuensi alami sebuah struktur.

Alat-Alat Yang Digunakan

1. Accelerator “RION” PV-34
2. Sound Level Meter “RION” NA-56
3. Model struktur pelat logam dengan massa tambahan yg posisinya dapat diubah -ubah
4. Model struktur pelat kayu
5. Personal Computer dengan software PC-SCOPE

Skema susunan alat-alat dalam percobaan ini adalah:



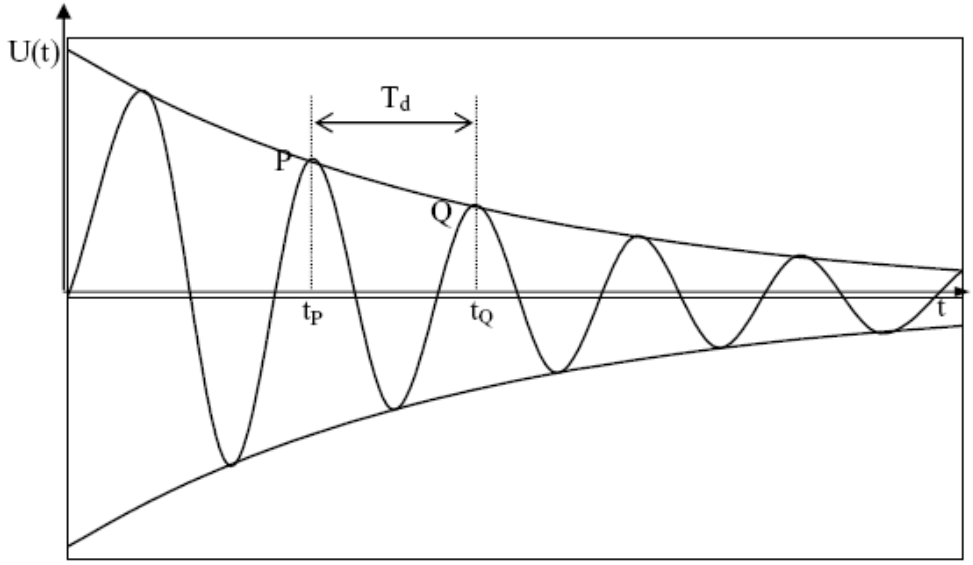
Mekanisme percobaan

Mekanisme percobaan dilakukan dengan menggetarkan batang logam dengan tangan (secara manual) sehingga data yang diperlukan muncul pada layar komputer (lihat gambar). Posisi massa pemberat diubah-ubah pada jarak tertentu dari posisi pencekam pelat logam, sedangkan percobaan pada pelat kayu tidak diberi massa pemberat.

Dasar Teori

Sebuah struktur bergetar dengan redaman kurang dari redaman kritis akan melakukan gerak getar yang persamaan geraknya dapat diungkapkan dengan persamaan yang melukiskan hubungan simpangannya dengan selang waktu, yaitu:

$$U(t) = Ue^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t - \alpha)$$



Periode dirumuskan sebagai berikut:

$$T_d = t_Q - t_P$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

Frekuensi pada saat tertentu

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

Simpangan pada saat t_P dan t_Q adalah

$$U_P(t) = Ue^{-\xi\omega_n t_P}\cos(\omega_d t_P - \alpha)$$

$$U_Q(t) = Ue^{-\xi\omega_n t_Q}\cos(\omega_d t_Q - \alpha)$$

karena titik P dan titik Q sepase maka

$$\cos(\omega_d t_P - \alpha) = \cos(\omega_d t_Q - \alpha)$$

Dekremen logaritma dirumuskan dengan

$$\delta = \ln\left(\frac{U_P}{U_Q}\right) = \ln\left(\frac{Ue^{-\xi\omega_n t_P}\cos(\omega_d t_P - \alpha)}{Ue^{-\xi\omega_n t_Q}\cos(\omega_d t_Q - \alpha)}\right)$$

$$= \ln\left(e^{\xi\omega_n(t_Q - t_P)}\right) = \ln\left(e^{\xi\omega_n T_d}\right)$$

$$\delta = \xi\omega_n T_d$$

$$= \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

atau faktor redaman bisa dirumuskan menjadi

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$$

Bila dari persamaan-persamaan di atas dapat diukur simpangan dan waktu pada titik P dan titik Q, maka dekremen logaritma, faktor redaman, periode getaran teredam, frekuensi getaran teredam dan frekuensi alami sistem bisa dihitung.

Dekremen logaritma tidak hanya dapat dihitung berdas arkan perbandingan simpangan saja, melainkan juga berdasarkan perbandingan kecepatan maupun percepatan. Dengan kata lain: dekremen logaritma tetap dapat diukur, baik pada grafik simpangan, kecepatan maupungrafik percepatan.

Faktor redaman mempunyai batas harga tertentu, yaitu:

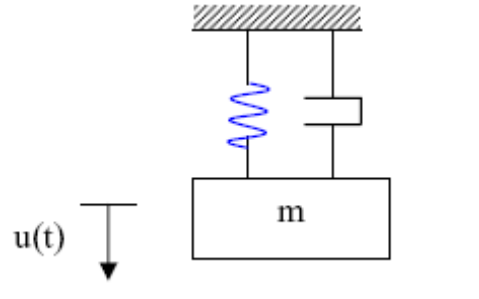
Bila $\xi > 1$, disebut sistem *overdamped* (redaman berat)

$\xi = 1$, disebut sistem redaman kritis

$\xi < 1$, disebut sistem *underdamped* (redaman ringan)

Soal Decrement Logaritma

Diketahui SDOF seperti gambar dibawah dengan massa =2 kg, konstanta pegas =200 N/m. Massa sistem ditarik ke bawah kemudian dilepaskan. Setelah mengalami 4 kali siklus gerakan maka amplitudonya berkurang 80%.



a. Tentukan faktor redamannya

b. Berapa redaman kritisnya

c. Berapa konstanta redaman sistem tersebut

d. Frekuensi pribadi sistem

e. Frekuensi sistem saat redaman terpasang

Solusi

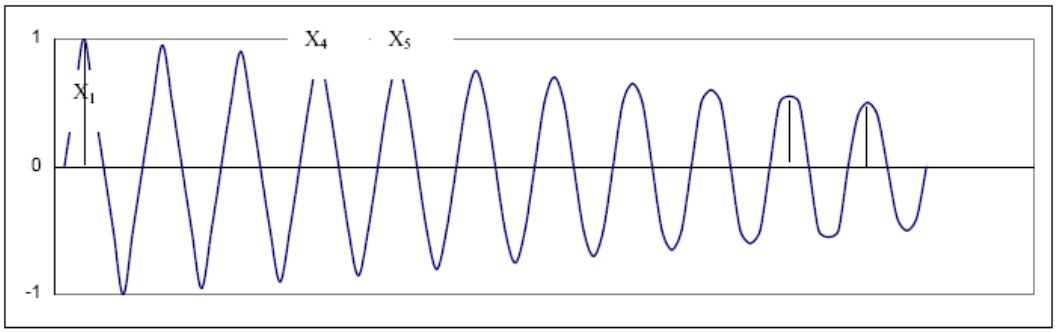
Data :

k = 200N/m

m = 2kg

Amplitudo awal = X1 = 100% = 1

Amplitudo setelah siklus 4 kali gerakan = X5 = 20% = 0,2



Sesuai teori logaritma maka

$$\ln\left[\frac{X_1}{X_5}\right] = \ln\left[\frac{X_1}{X_2}\frac{X_2}{X_3}\frac{X_3}{X_4}\frac{X_4}{X_5}\right]$$

Jika

$$\ln\left[\frac{X_1}{X_2}\right] = \ln\left[\frac{X_2}{X_3}\right] = \ln\left[\frac{X_3}{X_4}\right] = \ln\left[\frac{X_4}{X_5}\right] = \delta$$

maka pers di atas dapat ditulis

$$\ln\left[\frac{X_1}{X_5}\right] = \ln\left[\frac{X_1}{X_2}\right] + \ln\left[\frac{X_2}{X_3}\right] + \ln\left[\frac{X_3}{X4_4}\right] + \ln\left[\frac{X_4}{X_5}\right]$$

$$\ln\left[\frac{1}{0,2}\right] = \delta + \delta + \delta + \delta$$

$$1,609 = 4\delta$$

$$\delta = 0,4023$$

a) Faktor redamannya dicari dari $\delta = \dfrac{2.\pi.\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2.\pi)^2 + \delta^2}} = \frac{0,4023}{\sqrt{(2.\pi)^2 + 0,4023^2}} = 0,0639$$

b) Redaman kritis

$$C_c = 2\sqrt{k.m} = 2\sqrt{200x2} = 40N.s/m$$

c) Konstanta redaman

$$C = 2\zeta\sqrt{k.m} = 2x0,0639\sqrt{200x2} = 2,556N.s/m$$

d) Frekuensi pribadi sistem

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10rad/s$$

e) Frekuensi sistem saat redaman terpasang

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 10\sqrt{1-0,0639^2} = 9,9796rad/s$$