ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES

PLAN

1 Présentation générale

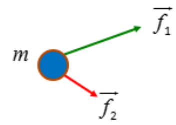
1.1 Rappels de cas physiques

Deux exemples d'introduction, ici, de la problématique liée aux équations différentielles.

1.1.1 RFDC

La relation fondamentale de la dynamique classique, due à Newton, exprime que la résultante des forces appliquées à un corps est proportionnelle à son accélération, le coefficient de proportionnalité étant la masse du corps :

$$\sum \vec{f_i} = m \times \vec{a}$$



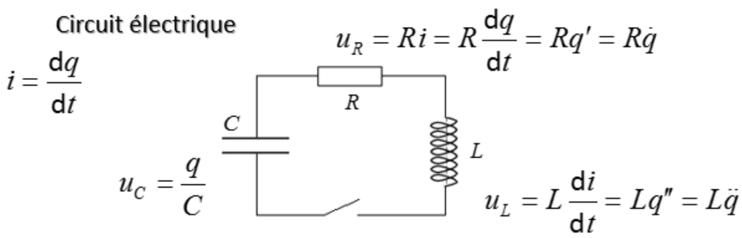
L'accélération peut être vue comme une fonction du temps. Selon cette variable, elle est la dérivée de la vitesse et la dérivée seconde de la position.
Certaines forces appliquées au corps sont constantes ou variables :
* le poids dépend de la masse, qui peut varier avec le temps, et de g, variable aussi selon la position changeante du corps) ;
* la force de rappel d'un ressort dépend de l'allongement de ce dernier, donc de la position du corps ;
* la force de frottement exercée par un fluide dépend de la vitesse du corps et de sa forme
* etc.

La RFDC met donc en relation la variable temps, la position, la vitesse et l'accélération, le but du jeu étant de déterminer une expression de ces trois dernières en fonction du temps…

1.1.2 Circuit RLC

Dans un conducteur circulent des charges électriques (q, en coulombs). On définit l'intensité du courant comme le débit de ces charges, par seconde :

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$



L'intensité est exprimée en coulombs par seconde, autrement dit en ampères.

Lorsque le courant circule dans un composant électrique, il se produit une tension (même dans un fil seul, mais elle est souvent négligée) entre les deux bornes de ce composant.
Le calcul de cette tension dépend de la nature du composant. La figure ci-dessus montre comment calculer la tension aux bornes d'une résistance (de valeur R), d'une bobine (d'inductance L) et d'un condensateur (de capacité C).

Ecrire la loi des mailles dans le schéma pris en exemple (la somme des trois tensions est nulle) met en relation la charge, sa dérivée et sa dérivée seconde. L'objectif est, comme dans le point 1.1.1, de déterminer une expression de la charge, ou de l'intensité, en fonction du temps, grâce à la relation établie plus tôt.

Ici, par exemple : $Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = 0$ doit nous conduire à déterminer $q(t)$.

On retrouve cette problématique dans d'autres domaines (chimie, thermodynamique), partout où l'on doit étudier l'évolution d'un système dynamique. Souvent, l'équation ne peut être résolue et on a recours à l'outil informatique pour pratiquer des simulations numériques. Ce chapitre traite de quelques-unes des équations que l'on sait résoudre…

1.2 Notion d'équation différentielle

Les fonctions seront ici d'une variable réelle, définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Une ***équation différentielle*** est une équation « (E) » dont l'inconnue « y » est une fonction.
Cette équation peut faire intervenir : La variable, notée en général x
L'inconnue, notée en général y
Les dérivées successives de y, jusqu'à un ***ordre n***.

(E), équation différentielle d'ordre n, se ramène à la forme : $F\left(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)}, y^{(n)}\right)=0$

Dire que la fonction f d'une variable réelle, définie et n fois dérivable sur un intervalle I, est une ***solution*** – ou ***intégrale*** – de (E), c'est dire que la fonction

$$x \longrightarrow F\left(x, f(x), f'(x), f''(x),..., f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x)\right)$$

est définie sur I et coïncide sur I avec la fonction nulle.
Autrement dit, la fonction f vérifie l'équation (E).
Résoudre une équation différentielle se dit également ***intégrer*** une équation différentielle.

1.3 Définitions

* L'***ordre*** d'une telle équation est le degré maximal de dérivation rencontré.
Equation différentielle du 1er ordre : $F(x, y, y')=0$; du 2^{d} ordre : $F(x, y, y', y'')=0$

* Une équation différentielle est dite ***linéaire*** lorsqu'elle peut se ramener à la forme :

$$a_0(x)\,y + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y'' + ... + a_n(x)\,y^{(n)} = f(x) \quad \text{(E)}$$

Son ***équation homogène*** associée est :

$$a_0(x)\,y + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y' + ... + a_n(x)\,y^{(n)} = 0 \quad \text{(EH)}$$

Remarque : le terme « homogène » est utilisé couramment mais n'est pas très bien choisi puisqu'il entre en conflit avec la définition des « équations différentielles homogènes » (hors programme) qui ne sont pas liées à celles décrites ci-dessus.

* Une équation différentielle linéaire est dite ***à coefficients constants*** lorsque les coefficients multiplicatifs de y et de ses dérivées ne dépendent pas de x : $a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + ... + a_n y^{(n)} = f(x)$ (E)

2 Équations différentielles linéaires du 1er ordre

On appelle équation différentielle ***linéaire*** du premier ordre toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme : $y' + A(x).y = f(x)$ (E)

$A(x)$ et $f(x)$: expressions de x, définies et continues sur un même intervalle.

2.1 Équation homogène associée $y' + A(x).y = 0$ (EH)

Une telle équation est « ***à variables séparables*** » (voir au-dessous).

2.1.1 Équation différentielle à coefficient constant $y' + ay = 0$

La résolution de ces équations est directe.

Introduisons la méthode dite de ***séparation des variables*** :
* Ecrire y' sous sa forme différentielle ;
* Séparer x et y : y et dy d'un côté, x et dx de l'autre ;
* Intégrer, puis donner y en fonction de x.

Ici : * $y' + ay = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -ay \Leftrightarrow \mathrm{d}y = -ay.\mathrm{d}x \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -a.\mathrm{d}x$

* On intègre : $\int \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -a.\int \mathrm{d}x + K \Leftrightarrow \ln|y| = -ax + K \Leftrightarrow |y| = \mathrm{e}^{-ax+K} = \mathrm{e}^{-ax} \times \mathrm{e}^{K}$

(K, réel quelconque ; e^K, réel strictement positif quelconque)

* D'où les solutions de l'équation différentielle : $\boxed{y = C.\mathrm{e}^{-ax}}$ (C réel quelconque)

« Les fonctions proportionnelles à leur dérivée sont les fonctions proportionnelles à des exponentielles bien choisies »
Au vu de la simplicité de l'équation de départ, on retiendra par cœur son résultat et on s'autorisera à l'utiliser directement sans utiliser la séparation des variables.

2.1.2 Recherche générale de la solution de $y' + A(x).y = 0$ (EH)

Dans le cas général, la solution « exponentielle » n'est pas applicable.
On applique alors la ***séparation des variables*** :

L'équation homogène $y' + A(x).y = 0$ s'écrit : $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -A(x).\mathrm{d}x$.

Intégrons les deux membres de cette équation : $\ln|y| = -\int A(x).\mathrm{d}x + K$,

ce qui donne les solutions de l'équation homogène de la forme : $\boxed{y_{\mathrm{H}} = C.\mathrm{e}^{-\int A(x).\mathrm{d}x}}$

n.b. : à partir d'un exemple, on peut toujours rechercher y_{H} « manuellement » par séparation des variables, sans se souvenir de cette dernière formule.

2.2 Équation avec second membre $y' + A(x).y = f(x)$ (E)

2.2.1 Résultat général

Leur résolution se fait en deux temps :

1. Résoudre l'équation homogène associée (EH) (solution générale : y_{H})
2. Trouver une solution particulière de l'équation (E) (notée y_{P})

La solution générale de l'équation est alors : $\boxed{y = y_{\mathrm{H}} + y_{\mathrm{P}}}$

Le sujet de cette partie est de savoir déterminer une solution particulière de l'équation.

Preuve de la forme de la solution générale :
* Prenons la fonction $y = y_{\mathrm{H}} + y_{\mathrm{P}}$.

$$y' + A(x).y = f(x) \Leftrightarrow (y_{\mathrm{H}} + y_{\mathrm{P}})' + A(x)(y_{\mathrm{H}} + y_{\mathrm{P}}) = f(x) \Leftrightarrow y'_{\mathrm{H}} + A(x)\,y_{\mathrm{H}} + y'_{\mathrm{P}} + A(x)\,y_{\mathrm{P}} = f(x)$$

Or $y'_{\mathrm{H}} + A(x)\,y_{\mathrm{H}} = 0$ car y_{H} est solution de l'équation homogène,

et $y'_{\mathrm{P}} + A(x)\,y_{\mathrm{P}} = f(x)$ car y_{P} est une solution de l'équation complète.

Conclusion : toutes les formes $y_{\mathrm{H}} + y_{\mathrm{P}}$ sont solutions de l'équation complète.

* Considérons la différence de deux solutions particulières de l'équation complète : w_{P} et z_{P}.

$$(w_{\mathrm{P}} - z_{\mathrm{P}})' + A(x)(w_{\mathrm{P}} - z_{\mathrm{P}}) = (w'_{\mathrm{P}} + A(x)\,w_{\mathrm{P}}) - (z'_{\mathrm{P}} + A(x)\,z_{\mathrm{P}}) \overset{(\mathrm{E})}{=} f(x) - f(x) = 0$$

et donc $w_{\mathrm{P}} - z_{\mathrm{P}}$ est une solution « y_{H} » de l'équation homogène.

* La preuve est faite que toutes les solutions de (E) sont toutes les fonctions de type $y = y_{\mathrm{H}} + y_{\mathrm{P}}$.

2.2.2 Coefficient constant : $y'+ay=f(x)$

Dans ce cas de figure, il est possible de rechercher une solution particulière y_P en se basant sur la forme de $f(x)$ puis en procédant par identification. Les quelques exemples ci-dessous sont à connaître :

- si $f(x)$ est un polynôme de degré n, alors on recherchera y_P sous la même forme (sauf si a = 0, cas où l'on recherchera un polynôme d'un degré de plus).
- si $f(x)$ est un sinus, un cosinus ou une combinaison linéaire des deux, alors on recherchera y_P sous la forme d'une combinaison linéaire des deux.
- si $f(x)$ est le produit d'un polynôme de degré n par une exponentielle e^{kx}, alors on recherchera y_P comme le produit d'un polynôme de degré n par cette exponentielle.

2.2.3 Cas général $y'+A(x).y=f(x)$ (E)

Lorsque le coefficient de l'équation n'est pas constant, les conseils donnés dans la partie 2.2.2 ne s'appliquent plus. On dispose d'une méthode générale, pour la recherche d'une fonction y_P dans le cadre des ED linéaires du premier ordre : la ***variation de la constante***. Un calcul prédéfini et équivalent peut se substituer à elle : la méthode de ***Lagrange***.

Variation de la constante :
elle consiste à donner à y_P la forme d'écriture de y_H, mais remplaçant la constante présente dans y_H par une fonction à déterminer (ex : si $y_H = Ce^{-x^2}$, alors on pose $y_P = C(x)e^{-x^2}$ et on cherche $C(x)$.

Application au cas général : $y_P = C(x).e^{-\int A(x).dx}$.

Substituons cette expression dans l'équation (E). Il vient :

$$\left[C(x).e^{\int -A(x).dx}\right]' + A(x).C(x).e^{\int -A(x).dx} = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \left[C'(x).e^{\int -A(x).dx} + C(x)\left(-A(x).e^{\int -A(x).dx}\right)\right] + A(x).C(x).e^{\int -A(x).dx} = f(x)$$

$$\Leftrightarrow C'(x).e^{\int -A(x).dx} = f(x) \Leftrightarrow C'(x) = f(x).e^{\int A(x).dx} \Leftrightarrow y_P = e^{-\int A(x).dx} \times \int f(x).e^{\int A(x).dx}.dx$$

D'où la ***méthode de Lagrange*** : $\boxed{y_P = y_H \times \int \frac{f(x)}{y_H}.dx}$

*n.b. : Lorsqu'un énoncé propose une forme pour y_P, on évitera l'emploi de cette méthode générale, au profit d'une **identification**.*

Remarque : Lorsque la forme générale des solutions d'une équation différentielle est donnée, on peut avoir à rechercher parmi elles <u>celle qui vérifie un critère donné</u> (« avoir une valeur donnée en un point donné » ou « avoir un nombre dérivé donné en un point donné »).

3 Équations différentielles du 2^d ordre

3.1 Équations différentielles du 2^d ordre se ramenant au 1^er ordre

Équation différentielle se ramenant au 1^er ordre, de la forme $f\left(x, y', y''\right) = 0$, « ***dégénérée*** »

En posant $z = y'$ l'équation devient $f\left(x, z, z'\right) = 0$, ce qui est une **équation linéaire du 1^er ordre** en z que l'on résout, puis il reste à intégrer z pour obtenir y.

Remarque : on est amené à faire deux intégrations successives, ce qui introduira deux constantes. En effet, les solutions des équations du 2^d ordre comportent toujours 2 constantes indépendantes correspondant à deux étapes d'intégration.

Exemple : $y' - xy'' = x$ (E)

On pose $z = y'$ et on a une équation différentielle linéaire du premier ordre en z : $z - xz' = x$.

(EH) : $z - xz' = 0$; séparation des variables : $\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, d'où $z_{\mathrm{H}} = \lambda x$.

Sur (E), la variation de la constante donne $\lambda'(x) = \frac{-1}{x}$, soit $\lambda(x) = -\ln x$ et $z_{\mathrm{P}} = -x\ln x$.

$z = z_{\mathrm{H}} + z_{\mathrm{P}}$ et la solution générale de (E) est $y = \int z = \lambda\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \ln x\right) + K = \frac{x^2}{2}\left(C - \ln x\right) + K$.

n.b. : une étape a été celle de la recherche d'une primitive de $x\ln x$, que l'on peut trouver par parties en posant $u' = x$ et $v = \ln x$.

3.2 Équations différentielles linéaires du 2^d ordre à coefficients constants $ay'' + by' + cy = f\left(x\right)$

La forme générale des solutions de (E) est, à l'instar du premier ordre, la somme :

1. de la forme générale des solutions de (EH), « y_{H} »

et 2. d'une solution particulière quelconque de (E), « y_{P} »

$$\boxed{y = y_{\mathrm{H}} + y_{\mathrm{P}}}$$

3.2.1 Équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$

On rencontre cette forme en mécanique : équation du mouvement avec force de rappel (masse + ressort + frottement), ou encore dans les circuits électriques (condensateur + bobine + résistance : circuit RLC).

Au second ordre, la recherche générale des solutions y_{H} ne peut se faire par séparation des variables (cette méthode n'est applicable qu'au premier ordre). A coefficients constants, on pourra s'appuyer sur des solutions exponentielles (page suivante) ; à coefficients variables, on tentera un changement de variable (ici : de fonction) pour se ramener à coefficients constants (hors programme).

En testant dans (EH) des solutions particulières de la forme e^{rx}, l'équation homogène implique :

$$ar^2 + br + c = 0$$

où l'on exprime le ***polynôme caractéristique*** de l'équation, dont on cherchera les racines.

<u>Si $\Delta > 0$</u>, ce polynôme possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, donnant deux solutions particulières $\mathrm{e}^{r_1 x}$ et $\mathrm{e}^{r_2 x}$, et on montre que toutes les solutions de (EH) sont engendrées par ces deux solutions particulières. Autrement dit : $\boxed{y_H = A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x}}$

où A et B sont des constantes réelles arbitraires

<u>Si $\Delta < 0$</u>, il possède deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, donnant deux solutions particulières exponentielles complexes. On montre que toutes les solutions de (EH) sont engendrées par ces deux solutions particulières. Autrement dit :

$$y = \lambda_1 \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)x}$$ où λ_1 et λ_2 sont des constantes complexes

Or, nous cherchons à exprimer les seules fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Reprenons les deux solutions particulières complexes :

$$y_1 = \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i.\sin(\beta x)\right) \quad \text{et} \quad y_2 = \mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) - i.\sin(\beta x)\right)$$

On peut toujours construire deux autres fonctions à partir de celles-ci, réelles cette fois, indépendantes linéairement et tout autant solutions de (EH) :

$$f_1(x) = \frac{y_1(x) + y_2(x)}{2} = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) \text{ et } f_2(x) = \frac{y_1(x) - y_2(x)}{2} = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

On montre alors que les solutions réelles de (EH) sont les fonctions qu'elles engendrent.

Ainsi, la forme générale des solutions à valeurs réelles est : $\boxed{y_H = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right)}$

où A et B sont des constantes réelles

<u>Si $\Delta = 0$</u>, le polynôme caractéristique admet une racine double r, réelle, et on montre (hors programme) que la forme générale des solutions de (EH) est : $\boxed{y_H = (Ax + B)\mathrm{e}^{rx}}$ où A et B sont des constantes réelles.

3.2.2 Équation avec second membre : identifications possibles

Au second ordre, la recherche générale d'une solution particulière y_P peut se faire par « variation des constantes » (hors programme) à l'image de la variation de la constante vue au premier ordre. Cette technique retourne en général des calculs et intégrations longs et fastidieux.

Dans le cas d'une ED à coefficients constants, pour des cas simples de $f(x)$, on pourra chercher y_P par ***identification*** avec des règles assez similaires de celles vues au premier ordre :

- si $f(x)$ est un polynôme de degré n, alors on recherchera y_P sous la même forme (sauf si équation dégénérée).
- si $f(x)$ est un sinus, un cosinus ou une combinaison linéaire des deux, alors on recherchera y_P sous la forme d'une combinaison linéaire des deux.
- si $f(x)$ est le produit d'un polynôme de degré n par une exponentielle e^{kx}, alors on recherchera y_P comme le produit d'un polynôme de degré d par cette exponentielle :
  * $d = n$ si le coefficient k n'est pas une racine de $ar^2 + br + c$,
  * $d = n + 1$ si le coefficient k est une racine simple de $ar^2 + br + c$,
  * $d = n + 2$ si le coefficient k est la racine double de $ar^2 + br + c$.

Remarque : Lorsque la forme générale des solutions d'une équation différentielle est donnée, on peut avoir à rechercher parmi elles <u>celle qui vérifie deux critères donnés</u> (« avoir deux valeurs données en deux points donnés » ou « avoir une valeur donnée et un nombre dérivé donné en un point donné »).