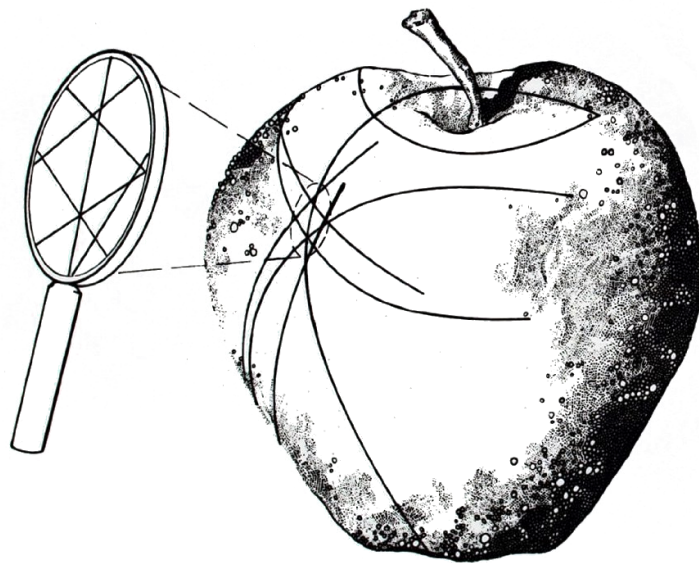


*Master Astronomie, Astrophysique et Ingénierie Spatiale*  
Année M2 — Parcours Recherche — 2016/2017

# GRAVITATION RELATIVISTE



Alexandre LE TIEC



« La gravité est le bonheur des imbéciles. »  
— Montesquieu, *Mes pensées*



# SOMMAIRE

Préface	vii
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Gravitation relativiste en action . . . . .	2
1.2 Quelques repères historiques . . . . .	6
1.3 Espace, temps et espace-temps . . . . .	7
1.4 Métrique de l'espace-temps . . . . .	10
1.5 Gravitation et géométrie . . . . .	12
<b>2 Cadre géométrique</b>	<b>15</b>
2.1 Notion de variété . . . . .	15
2.2 Courbes et vecteurs . . . . .	18
2.3 Formes linéaires et tenseurs . . . . .	21
2.4 Tenseur métrique . . . . .	27
2.5 Dérivation covariante . . . . .	31
<b>3 Physique en espace-temps courbe</b>	<b>39</b>
3.1 Lignes d'univers . . . . .	39
3.2 Cinématique relativiste . . . . .	43
3.3 Dynamique relativiste . . . . .	48
3.4 Tenseur énergie-impulsion . . . . .	53
3.5 Symétries et lois de conservation . . . . .	58
3.6 Référentiels localement inertiels . . . . .	61
<b>4 Gravitation relativiste</b>	<b>65</b>
4.1 Tenseur de courbure . . . . .	65
4.2 Équation d'Einstein . . . . .	74
4.3 Formulation lagrangienne . . . . .	79
<b>5 Champ à symétrie sphérique</b>	<b>81</b>
5.1 Métrique de Schwarzschild . . . . .	81
5.2 Décalage spectral gravitationnel . . . . .	81
5.3 Orbites des corps matériels . . . . .	81
5.4 Trajectoires des photons . . . . .	82
5.5 Précession des gyroscopes . . . . .	82
5.6 Étoiles relativistes . . . . .	82

<b>6</b>	<b>Trous noirs</b>	<b>83</b>
6.1	Effondrement gravitationnel . . . . .	83
6.2	Nature des singularités . . . . .	83
6.3	Horizon des événements . . . . .	83
6.4	Trous noirs en rotation . . . . .	83
6.5	Mouvement géodésique . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Ondes gravitationnelles</b>	<b>86</b>
7.1	Équation d'Einstein linéarisée . . . . .	86
7.2	Jauge de Lorenz et jauge TT . . . . .	86
7.3	Génération d'ondes gravitationnelles . . . . .	86
7.4	Sources astrophysiques et cosmologiques . . . . .	86
7.5	Détection d'ondes gravitationnelles . . . . .	87
<b>8</b>	<b>Cosmologie</b>	<b>89</b>
8.1	Univers homogène et isotrope . . . . .	89
8.2	Décalage spectral et distances . . . . .	89
8.3	Équations de Friedmann-Lemaître . . . . .	89
<b>A</b>	<b>Unités géométriques</b>	<b>91</b>
<b>B</b>	<b>Calcul des variations</b>	<b>93</b>
<b>C</b>	<b>Intégration</b>	<b>95</b>
	Liste des symboles	97
	Bibliographie	99

# PRÉFACE

Ce document est le fruit d'un cours proposé dans le cadre du M2 Recherche, spécialité « Astronomie et Astrophysique » de l'Observatoire de Paris, des Universités Paris 6, 7 et 11, et de l'École normale supérieure. Ce cours propose une introduction à la théorie de la relativité générale, privilégiant une approche géométrique, avec applications à l'astrophysique relativiste (étoiles à neutrons et trous noirs), au rayonnement gravitationnel et à la cosmologie. Tout en assurant un certain niveau de généralité et de rigueur mathématique, ces notes font la part belle aux applications, et elles se veulent complémentaires des exemples vus en cours et des exercices proposés en travaux dirigés.

## *Pré-requis*

Les connaissances requises correspondent à une formation orientée principalement vers la physique ou les mathématiques au niveau M1. Une bonne maîtrise du calcul différentiel et de l'algèbre linéaire est indispensable. Une exposition préalable à la théorie de la relativité restreinte est également souhaitable.

## *Ressources*

Lors de la rédaction de ce document, j'ai fait un usage fréquent de nombreuses ressources. En particulier, le chapitre 1 s'inspire fortement des chapitres d'introduction des ouvrages de J. Hartle [L3] et de R. Wald [L6], ainsi que des notes de cours de L. Blanchet [C1], tandis que les chapitres 2 et 3 reposent en grande partie sur les notes de cours de É.ourgoulhon [C3] et de R. Geroch [L2]. Certaines des figures des chapitres 2 et 4 sont adaptées du cours de géométrie différentielle de K. Krane [C4]. Enfin, l'illustration figurant sur la page de garde reproduit celle du célèbre ouvrage de Misner, Thorne et Wheeler [L4].

## *Remerciements*

Je suis particulièrement reconnaissant à É.ourgoulhon de m'avoir permis de réutiliser ses propres notes de cours. J'exprime également ma gratitude à J. Novak pour ses suggestions suite à la relecture d'une partie de ce document. Bonne lecture !

Alexandre Le Tiec  
*letiec.yolasite.com*





# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

La relativité générale est la théorie de l'espace, du temps et de la gravitation formulée par A. Einstein en 1915. Parfois présentée comme la plus importante création intellectuelle jamais enfantée par un seul homme, la relativité générale a révolutionné notre compréhension de la nature de l'espace et du temps, ainsi que notre perception familière de la force de gravitation. En relativité générale, la gravitation possède l'interprétation extraordinaire d'être la manifestation géométrique de la courbure de l'espace-temps engendrée par la présence de masse-énergie. Cette théorie prédit également des phénomènes « exotiques », absents de la théorie de la gravitation de Newton, parmi lesquels l'existence de trous noirs et d'ondes gravitationnelles, ainsi que le caractère dynamique de l'Univers. À ce jour, la relativité générale a passé avec succès tous les tests expérimentaux auxquels elle a été soumise.

Avant de discuter la place croissante occupée par la relativité générale dans le paysage de l'astrophysique contemporaine, commençons par rappeler quelques généralités concernant la nature de la force de gravité. La gravitation est l'une des quatre *interactions fondamentales* connues. Les interactions électromagnétique, faible et forte sont toutes les trois décrites par des théories quantiques des champs. L'interaction gravitationnelle, elle, est décrite par une théorie *classique* des champs, la relativité générale, qui se ramène à la théorie de la gravitation de Newton dans la limite où les champs sont faibles et les vitesses non relativistes.

L'interaction gravitationnelle se distingue également des autres interactions fondamentales du fait de sa *très faible intensité*. Par exemple, le rapport des forces gravitationnelle et électromagnétique s'exerçant entre deux électrons est constant (indépendant de la distance) et environ égal à  $10^{-43}$  ! Toutefois, malgré son extrême faiblesse la gravitation domine l'Univers à grande échelle. En effet, l'interaction gravitationnelle est à la fois :

- *Universelle*, car toutes les formes de masse-énergie génèrent un champ gravitationnel et subissent l'influence de la gravité ;
- *À longue portée*, puisque le potentiel gravitationnel décroît comme l'inverse de la distance. Il n'y a pas d'échelle établissant une portée finie de l'interaction gravitationnelle, contrairement aux interactions nucléaires faible et forte ;
- *Non écrantée*, puisqu'il n'y a pas de « charge gravitationnelle » (masse grave) négative pour contrebalancer les effets des charges positives. Ainsi, contrairement à l'interaction électromagnétique, la gravitation est toujours *attractive*.

## 1.1 Gravitation relativiste en action

La théorie de Newton de la gravitation permet d'expliquer un grand nombre de phénomènes physiques depuis l'échelle du système solaire jusqu'à celle des amas de galaxies. Dans ce cours, nous ne nous intéresserons pas aux phénomènes où la gravitation est importante, mais à ceux nécessitant une description *relativiste* de la gravitation. Nous verrons que pour un système physique de masse  $M$  et de taille caractéristique  $R$ , une description relativiste de la gravitation est nécessaire lorsque le *paramètre de compacité*

$$\Xi \equiv \frac{GM}{c^2 R} \quad (1.1)$$

est égal à une fraction significative de l'unité. Pour l'instant, remarquons simplement que ce nombre sans dimension est affaire à la fois de gravitation et de relativité, puisqu'il combine la constante universelle de gravitation  $G$  et la vitesse de la lumière dans le vide  $c$ . Dans les paragraphes qui suivent, nous allons passer en revue les principaux systèmes physiques pour lesquels il est nécessaire de faire appel à la théorie de la relativité générale.

### *Système solaire*

La Terre est un corps très peu compact, puisque  $\Xi_{\oplus} \sim 10^{-9}$ . Cependant, afin d'assurer le bon fonctionnement du système de positionnement GPS (*Global Positioning System*), il est crucial d'analyser la transmission des signaux radio dans le cadre de la relativité générale. En effet, le niveau de précision de positionnement requis, de l'ordre du mètre à la surface du globe, est tel que la prise en compte des effets relativistes dans le champ gravitationnel de la Terre est indispensable. Il s'agit du premier exemple d'application technologique de la relativité générale, et non des moindres !

Pour le Soleil,  $\Xi_{\odot} \sim 10^{-6}$ , de sorte que les corrections relativistes à la gravitation newtonienne sont faibles. Toutefois, étant donné la précision des mesures astrométriques actuelles, il est nécessaire de les prendre en compte, par exemple pour le guidage de sondes dans le système solaire et pour le calcul des éphémérides des planètes. Ainsi, comme nous le verrons au chapitre 5, l'avance observée du périhélie de Mercure ne peut pas être entièrement expliquée par la gravitation newtonienne. La relativité générale prédit également que les rayons lumineux passant près du Soleil sont déviés et leur durée de propagation altérée. Ces effets relativistes sont couramment incorporés dans les mesures astronomiques et astrométriques de précision. La gravitation relativiste en champ faible est, entre autre, abordée dans le cours EC8 « Physique fondamentale et métrologie ».

### *Étoiles relativistes*

La plupart des étoiles voient leur force de gravité contrebalancée par la pression du gaz chauffé par des réactions thermonucléaires en leur cœur. Lorsqu'une étoile finit par épuiser son carburant, un *effondrement gravitationnel* s'ensuit. Pour les étoiles suffisamment massives, le cœur se retrouve alors supporté par des forces de pression d'origines non thermiques (pression de dégénérescence des électrons ou interaction forte entre les nucléons), donnant

lieu à la formation de *naines blanches* ou d'*étoiles à neutrons*, pour lesquelles  $\Xi_{\text{n.b.}} \sim 10^{-3}$  et  $\Xi_{\text{é.n.}} \sim 0,2$ . Il existe une masse maximale admissible pour les naines blanches : la masse de Chandrasekhar, de l'ordre de  $1,4 M_{\odot}$  ; l'effondrement gravitationnel d'un cœur plus massif donne lieu à la formation d'une étoile à neutrons ou d'un trou noir. Les étoiles à neutrons sont des astres compacts responsables de certains phénomènes astrophysiques extrêmes, tels que les *pulsars* et certains *sursauts  $\gamma$* . Il existe également une masse maximale pour ces étoiles : la limite d'Oppenheimer-Volkoff, de l'ordre de  $3 M_{\odot}$  ; l'effondrement gravitationnel d'un cœur stellaire plus massif conduit inexorablement à la formation d'un trou noir. Les étoiles relativistes font l'objet du cours ET9 « Objets compacts et phénomènes associés ».

### *Trous noirs*

La relativité générale prédit la formation d'un *trou noir* lorsqu'un corps de masse donnée est comprimé dans un volume suffisamment petit de sorte que l'attraction gravitationnelle à sa surface devient si intense que rien ne peut y échapper, pas même la lumière. En physique newtonienne, une particule de masse  $m$  parvient marginalement à s'échapper de l'emprise gravitationnelle d'un corps de masse  $M$  et de rayon  $R$  lorsque sa vitesse  $v$  est égale à la vitesse de libération du corps en question, telle que l'énergie cinétique de la particule est égale à son énergie potentielle gravitationnelle, *i.e.*  $mv^2/2 = GmM/R$ . La vitesse de libération est donc égale à celle de la lumière,  $v = c$ , lorsque

$$\frac{2GM}{c^2R} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \Xi = \frac{1}{2}. \quad (1.2)$$

Bien que cette analyse newtonienne ne s'applique pas à un contexte de gravitation relativiste, il se trouve qu'elle donne le bon critère pour qu'un corps sphérique de masse  $M$  soit un trou noir de rayon  $R$ , pour peu que celui-ci soit correctement interprété. La surface qui délimite un trou noir s'appelle l'*horizon des événements*. De la masse, de l'énergie, de l'information, ou un observateur peuvent le traverser, tombant ainsi dans le trou noir, mais rien ne peut en sortir. L'horizon des événements est une « membrane » immatérielle à sens unique.

Bien que les trous noirs soient formés lors de processus complexes d'effondrement gravitationnel, la relativité générale prédit que ces objets sont entièrement caractérisés par une poignée de nombres : leur masse, leur moment angulaire et leur charge électrique, que l'on peut supposer nulle. (En effet, toute charge électrique résiduelle est rapidement neutralisée par des particules de charge opposée présentes dans le milieu interstellaire.) Pour reprendre les mots d'un astrophysicien célèbre :

« Les trous noirs de la nature sont les objets macroscopiques les plus parfaits de l'Univers : les seuls éléments entrant dans leur construction sont nos concepts d'espace et de temps. Et puisque la théorie de la relativité générale fournit une unique famille de solutions pour leur description, ce sont également les objets les plus simples. »

— Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*

Comme leur nom l'indique, les trous noirs sont des astres obscurs ; mais l'intense courbure de l'espace-temps qu'ils engendrent dans leur environnement immédiat est responsable de processus astrophysiques extrêmes trahissant leur présence. Ainsi, de la matière tombant vers un trou noir se met en orbite, créant un disque d'accrétion chaud qui se trouve être à l'origine du rayonnement électromagnétique énergétique observé dans les *binaires X*. À plus grande échelle, l'énergie de rotation d'un trou noir massif entouré d'un disque d'accrétion magnétisé est vraisemblablement à l'origine des *quasars*, les plus énergétiques des noyaux actifs de galaxies. Ces processus astrophysiques de haute énergie sont explorés dans les cours ET8 « Accrétion et jets » et ET9 « Objets compacts et phénomènes associés ».

### Cosmologie

La compacité d'un corps de masse donnée peut être augmentée en diminuant sa taille caractéristique ; c'est ainsi que les trous noirs sont formés par effondrement gravitationnel. Alternativement, il est possible d'accroître la compacité d'un système physique étendu si la masse  $M$  incluse dans un volume de taille caractéristique  $R$  croît plus vite que  $R$  lui-même. C'est le cas en cosmologie, la branche de l'astrophysique décrivant l'histoire, l'évolution et la structuration de l'Univers dans son ensemble. En effet, à grande échelle l'Univers observable apparaît *homogène* et *isotrope*, avec une densité moyenne  $\rho \simeq 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  aujourd'hui, de sorte que le paramètre de compacité associé à un volume d'Univers de rayon  $R$  vaut approximativement  $\Xi = 4\pi G \rho R^2 / (3c^2)$ . Par conséquent, le paramètre de compacité atteint la valeur critique  $1/2$  lorsque

$$R = \left( \frac{3c^2}{8\pi G \rho} \right)^{1/2} \simeq 6 \text{ Gpc}, \quad (1.3)$$

une échelle inférieure à la taille de l'Univers observable aujourd'hui. Une description relativiste de la cosmologie est donc nécessaire. La relativité générale fournit le cadre conceptuel permettant de comprendre l'*expansion* observée de l'Univers, de retracer son histoire et son évolution jusqu'au *Big Bang*, il y a quelques 13,8 milliards d'années. Le vaste champ de la cosmologie, une science en plein essor, fait l'objet des cours EC6 « Structure et évolution de l'Univers » et ET13 « Cosmologie et univers primordial ».

Système physique	Masse ( $M_{\odot}$ )	Rayon (km)	Densité ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	Compacité
Terre	$3 \times 10^{-6}$	$6 \times 10^3$	$5 \times 10^3$	$10^{-9}$
Soleil	1	$7 \times 10^5$	$10^3$	$10^{-6}$
Naine blanche	0,1 – 0,4	$\sim 10^4$	$\sim 10^{10}$	$\sim 10^{-3}$
Étoile à neutrons	1 – 3	$\sim 10$	$\sim 10^{18}$	$\sim 0,2$
Trou noir stellaire	$\gtrsim 3 - 30$	$9 \left( \frac{M}{3M_{\odot}} \right)$	0	0,5
Trou noir massif	$10^6 - 10^{10}$	$2 \left( \frac{M}{10^8 M_{\odot}} \right) \text{ ua}$	0	0,5
Univers observable	$10^{24}$	14 Gpc	$10^{-26}$	0,5

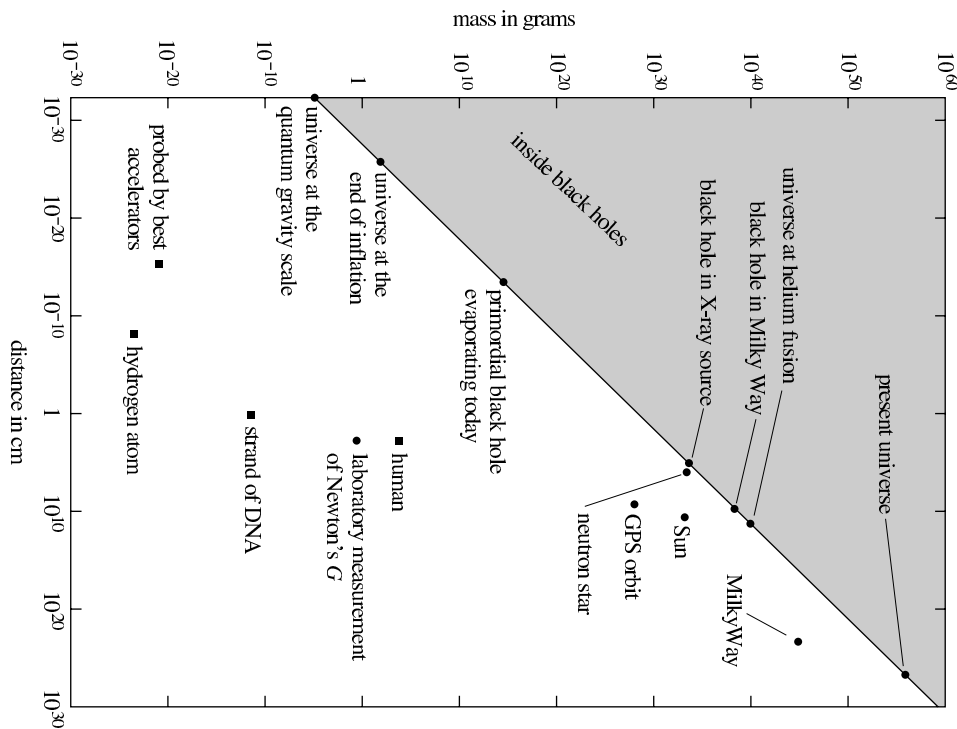


FIG. 1.1 : La masse de multiples systèmes physiques en fonction de leur taille caractéristique. Un système physique de masse  $M$  est de taille caractéristique  $R$  requiert une description relativiste de la gravitation lorsque le paramètre de compacité  $GM/(c^2R)$  est égal à une fraction significative de l'unité. Un trou noir de masse  $M$  possède une taille caractéristique  $R = 2GM/c^2$ , dont l'équation est représentée par la droite séparant les zones blanche et grisée. Figure tirée de [L3].

## Ondes gravitationnelles

Contrairement à la théorie de Newton de la gravitation, la relativité générale incorpore le principe de relativité, de sorte que l'interaction gravitationnelle se propage à vitesse finie (celle de la lumière). La relativité générale prédit donc l'existence d'*ondes gravitationnelles*. Toute distribution asymétrique de masse accélérée génère des ondes gravitationnelles. Ainsi, la coalescence de deux trous noirs massifs au cœur d'une galaxie génère plus d'énergie que l'ensemble des étoiles contenues dans l'Univers observable, la vaste majorité de cette énergie étant émise sous forme d'ondes gravitationnelles !

Une fois générées, ces ondes se propagent en interagissant faiblement avec la matière du milieu interstellaire et intergalactique. Par conséquent, ces « nouveaux messagers » encodent des informations de première main à l'égard de leur source, et de nature très différente de celles fournies par les ondes électromagnétiques. Toutefois, du fait du très faible couplage du champ gravitationnel avec la matière, leur détection directe est particulièrement difficile. Malgré cela, plusieurs collaborations internationales ont relevé le défi technologique visant à détecter les ondes gravitationnelles émises par diverses sources astrophysiques prometteuses, à l'aide de détecteurs interférométriques terrestres (LIGO, Virgo) ou dans l'espace (eLISA).

Cent ans après la prédiction de l'existence des ondes gravitationnelles, la collaboration scientifique LIGO/Virgo a annoncé en février 2016 avoir détecté, pour la toute première fois, des ondes gravitationnelles émises lors du spiralement et de la fusion d'un couple de trous noirs de  $\sim 30M_{\odot}$  chacun, inaugurant ainsi l'ère de l'astronomie gravitationnelle !

## 1.2 Quelques repères historiques

Il est toujours souhaitable de connaître, au moins dans ses grandes lignes, l'histoire de son sujet d'étude. Nous rappelons donc ci-dessous les dates de quelques découvertes importantes jalonnant l'histoire de la relativité générale, sans commentaires, car la plupart des concepts mentionnés seront expliqués par la suite. On remarquera, en particulier, que la confirmation expérimentale (E) ou observationnelle (O) de nombreuses prédictions théoriques (T) a dû attendre la seconde moitié du xx<sup>e</sup> siècle, et que certaines de ces découvertes ont valu à leurs auteurs l'attribution du prix Nobel de physique.

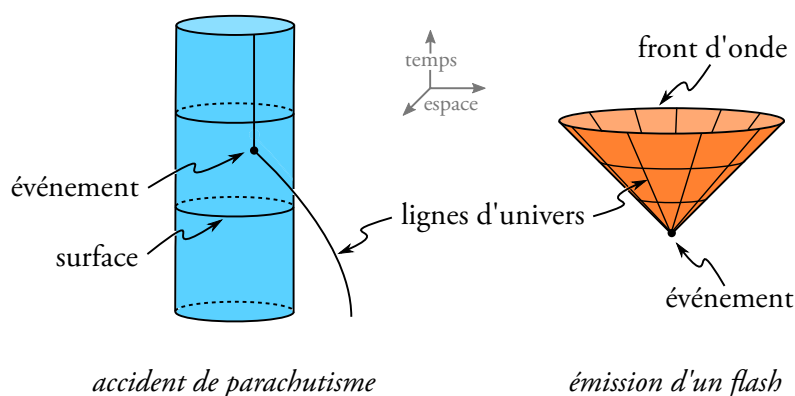
Année	Découverte	Nature	Auteurs	Nobel
1911	Décalage spectral gravitationnel	T	Einstein	
1915	Théorie de la relativité générale	T	Einstein	
1915	Déviations de la lumière	T	Einstein	
1916	Solution de Schwarzschild	T	Schwarzschild	
1916	Rayonnement gravitationnel	T	Einstein	
1916	Effet de précession géodétique	T	de Sitter	
1918	Effet de précession Lense-Thirring	T	Lense-Thirring	
1919	Déviations de la lumière	O	Eddington	
1920'	Solutions cosmologiques	T	Friedmann-Lemaître	
1929	Expansion de l'Univers	O	Hubble	
1930	Masse maximale d'une naine blanche	T	Chandrasekhar	1983
1933	Matière noire	O	Zwicky	
1936	Lentille gravitationnelle	T	Einstein	
1939	Effondrement gravitationnel	T	Oppenheimer-Volkoff	
1959	Décalage spectral gravitationnel	E	Pound-Rebka	
1962	Binaires X	O	Giacconi <i>et al.</i>	2002
1963	Trou noir en rotation	T	Kerr	
1964	Retard gravitationnel de la lumière	T	Shapiro	
1964	Fond diffus cosmologique	O	Penzias-Wilson	1978
1965	Barres résonnantes	E	Weber	
1967	Pulsars	O	Bell-Hewish	1974
1968	Retard gravitationnel de la lumière	O	Shapiro <i>et al.</i>	
1969	Quasars et noyaux actifs de galaxies	T	Lynden-Bell	
1974	Pulsars binaires	O	Hulse-Taylor	1993
1979	Lentilles gravitationnelles	O	Walsh <i>et al.</i>	
1980	Redshift gravitationnel (GPA)	E	Vessot, Levine <i>et al.</i>	
1988	Effet de précession géodétique	E	Shapiro <i>et al.</i>	
1992	Spectre et anisotropies du fond diffus	O	Mather, Smoot <i>et al.</i>	2006
1998	Énergie noire	O	Perlmutter, Riess <i>et al.</i>	2011
2000'	Trou noir supermassif Sgr A*	O	Genzel, Ghez <i>et al.</i>	
2011	Effet Lense-Thirring (GPB)	E	Everitt <i>et al.</i>	
2015	Ondes gravitationnelles	E	Abbott <i>et al.</i>	2017?

### 1.3 Espace, temps et espace-temps

Une compréhension approfondie des théories de la relativité restreinte et de la relativité générale est rendue difficile par un certain nombre de préconceptions erronées concernant la nature de l'espace et du temps. Commençons donc par éclairer les différences majeures entre les structures causales de l'espace-temps en physique pré-relativiste — mécanique galiléenne et newtonienne — et en relativité restreinte. Cette section, ainsi que la suivante, reprennent en grande partie l'introduction de l'ouvrage de R. Wald [L6].

#### *Structure causale de l'espace-temps*

L'espace-temps est un continuum quadri-dimensionnel composé d'événements, où chaque événement peut être conçu comme un point de l'espace à un instant donné. La trajectoire d'une particule dans l'espace-temps est une courbe paramétrée appelée *ligne d'univers*. Cette description de l'espace-temps s'applique aussi bien à la physique pré-relativiste qu'aux théories de la relativité restreinte et générale. Tout événement peut être entièrement caractérisé par la donnée de quatre nombres ; en langage ordinaire, trois pour la position spatiale et un pour la position temporelle. Comme nous le verrons dans le chapitre 2, une façon mathématiquement précise de formuler ces idées est de postuler que l'espace-temps est une *variété* quadri-dimensionnelle.



Toutefois, avant que la théorie de la relativité restreinte ne soit formulée, il était de plus présupposé que l'espace-temps possède la structure additionnelle suivante : étant donné un événement  $p$ , il existe une notion naturelle, indépendante d'un observateur, d'événements ayant lieu « en même temps » que  $p$ . Plus précisément, étant donnés deux événements  $p$  et  $q$ , l'une des trois possibilités mutuellement exclusives suivantes doit être vérifiée :

- (i) Il est possible, au moins en principe, pour un observateur ou un corps matériel d'aller de l'événement  $q$  jusqu'à l'événement  $p$ , auquel cas  $q$  est dit être dans le passé de  $p$  ;
- (ii) Il est possible d'aller de  $p$  à  $q$ , auquel cas  $q$  est dit être dans le futur de  $p$  ;
- (iii) Il est impossible, même en principe, pour un observateur ou un corps matériel d'être présent à la fois en  $p$  et en  $q$ .

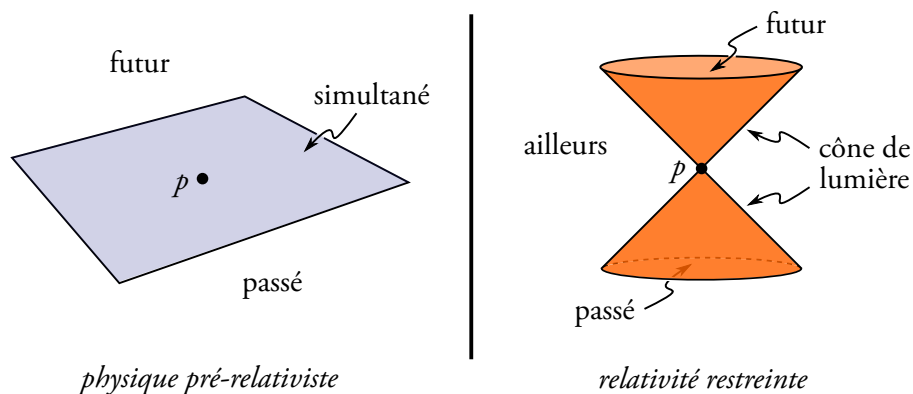
En physique pré-relativiste, on suppose que les événements de la troisième catégorie forment un ensemble tri-dimensionnel et définissent une notion de *simultanéité* avec  $p$ .

Cette hypothèse concernant la structure causale de l'espace-temps permet une décomposition naturelle de l'espace-temps en « tranches d'espace » paramétrées par le temps. Elle permet en particulier d'étudier le mouvement des particules dans l'espace absolu newtonien au cours du temps absolu newtonien. Notamment, bien que les particules se déplacent nécessairement « vers l'avant » dans le temps (*i.e.* du passé vers le futur), il n'y a pas de borne supérieure à la vitesse relative de deux particules.

Ces présupposés concernant la structure causale de l'espace-temps sont erronés. En relativité restreinte, il est toujours possible de définir le passé et le futur d'un événement donné, mais les événements de la catégorie (iii) forment un ensemble plus grand, et peuvent être classés dans les sous-ensembles suivants :

- (a) Les événements appartenant au bord de l'ensemble des événements dans le futur de  $p$ . Ils ne peuvent être atteints par une particule matérielle passant par  $p$ , mais peuvent l'être par un signal lumineux émis en  $p$ .
- (b) Les événements appartenant au bord de l'ensemble des événements dans le passé de  $p$ . Un signal lumineux passant par l'un de ces événements peut atteindre  $p$ .
- (c) Les événements qui n'appartiennent pas aux ensembles précédents. Ces événements sont dits du genre espace par rapport à  $p$  et forment un ensemble *quadri*-dimensionnel.

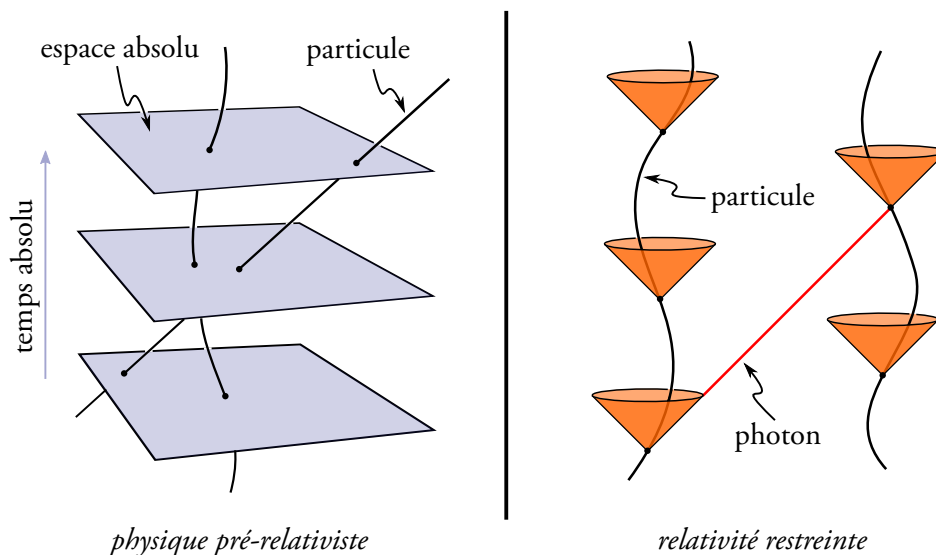
Par conséquent, la structure causale de l'espace-temps relativiste définit en chaque point  $p$  une notion de *cône de lumière*, c'est-à-dire l'ensemble de tous les événements qui pourraient être atteints par des rayons lumineux passant par  $p$ .



De manière cruciale, il n'existe pas de surface tri-dimensionnelle absolue dans l'espace-temps relativiste, de sorte qu'il n'y a pas non plus de notion de simultanéité absolue. Comme nous allons le voir, un observateur peut toujours définir une notion d'événements ayant lieu « en même temps » qu'un événement donné, définissant ainsi une surface tri-dimensionnelle dans l'espace-temps, mais cette notion dépend de son état de mouvement. Au contraire, les cônes de lumière sont des surfaces absolues dans l'espace-temps relativiste.



La division absolue, en physique pré-relativiste, de l'espace-temps en tranches d'espace paramétrées par le temps est remplacée en relativité restreinte par la règle selon laquelle les particules ne peuvent pas voyager plus vite que la lumière, de sorte que leurs lignes d'univers restent confinées à l'intérieur des cônes de lumière.



### Référentiels globalement inertiels

En relativité restreinte, ainsi qu'en physique pré-relativiste, on dispose de la notion de *mouvement inertiel*, ou mouvement « non accéléré », c'est-à-dire du mouvement qu'un corps matériel suivrait s'il n'était soumis à l'action d'aucune force extérieure. Un observateur inertiel peut étiqueter les événements de l'espace-temps de la façon suivante. Il se fabrique un repère cartésien à l'aide de trois tiges se croisant à angles droits, dont la géométrie est supposée euclidienne, et assigne aux points de la grille des coordonnées cartésiennes  $x, y, z$ . Il place ensuite une horloge en chaque point de la grille et synchronise ces dernières à l'aide d'une procédure symétrique, par exemple en échangeant des signaux lumineux. (À cause de la structure causale de l'espace-temps relativiste, la synchronisation des horloges n'est pas triviale en relativité restreinte.) Les coordonnées  $t, x, y, z$  ainsi attribuées à chaque événement sont dites globalement inertielles. Il existe bien entendu une infinité de tels référentiels globalement inertiels.

Considérons deux observateurs inertiels, et comparons les coordonnées qu'ils attribuent à un même événement dans la situation suivante. Un observateur  $\mathcal{O}$  attribue à un événement les coordonnées  $t, x, y, z$ , tandis qu'un observateur  $\mathcal{O}'$  se déplaçant à la vitesse constante  $v$  le long de l'axe des  $x$ , et rencontrant l'observateur  $\mathcal{O}$  à l'événement  $p$  de coordonnées  $t = x = y = z = 0$ , assigne au même événement les coordonnées  $t', x', y', z'$ . En physique pré-relativiste, où la construction d'un référentiel globalement inertiel détaillée ci-dessus est valable, à ceci près que la synchronisation des horloges est triviale du fait du caractère absolu

du temps, les deux systèmes de coordonnées sont reliés par la transformation galiléenne

$$t' = t, \quad (1.4a)$$

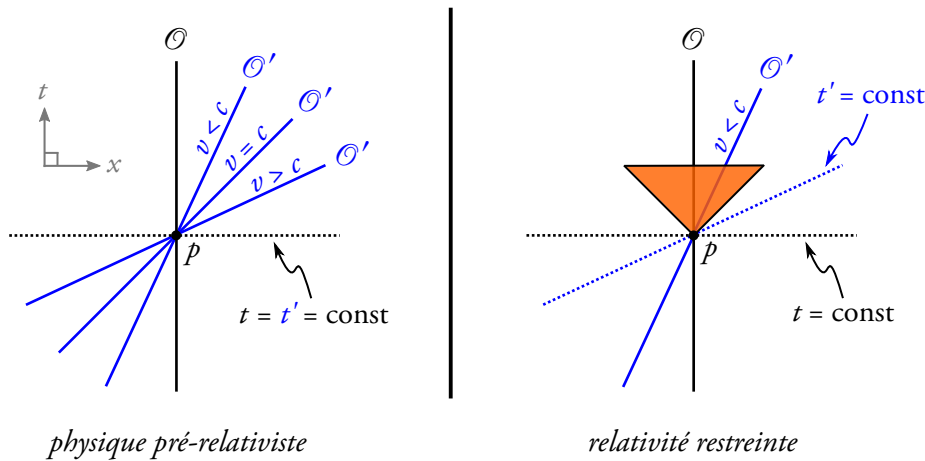
$$x' = x - vt. \quad (1.4b)$$

En relativité restreinte, par contre, les coordonnées assignées par l'observateur  $\mathcal{O}'$  sont reliées à celles attribuées par l'observateur  $\mathcal{O}$  par une *transformation de Lorentz* :

$$t' = \gamma(t - vx/c^2), \quad (1.5a)$$

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (1.5b)$$

où  $\gamma \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  est le facteur de Lorentz. La première équation montre que la notion de simultanéité associée à l'observateur  $\mathcal{O}$ , à savoir  $t = \text{const}$ , ne coïncide pas avec celle de l'observateur  $\mathcal{O}'$ , à savoir  $t' = \text{const}$ . Toutefois, conformément au postulat fondamental de la relativité restreinte, la vitesse de la lumière telle que mesurée par les observateurs inertiels  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$ , ainsi que par tout observateur inertiel, est constante et égale à  $c$ .



## 1.4 Métrique de l'espace-temps

Nous avons vu que deux observateurs inertiels attribuent à un même événement des coordonnées différentes. Clairement, les coordonnées dépendent autant de l'observateur que de la structure de l'espace-temps. Il est particulièrement intéressant de déterminer quelles quantités physiques ont une signification *absolue* (indépendante d'un observateur), reflétant ainsi une propriété *intrinsèque* de la structure de l'espace-temps. Cela revient à déterminer quelles fonctions de coordonnées inertielles ne dépendent pas du choix de référentiel.

En physique pré-relativiste, l'intervalle de temps  $\Delta t$  entre deux événements quelconques a une signification absolue ; tous les observateurs s'accorderont sur la valeur de  $\Delta t$ . De plus, la distance spatiale euclidienne  $\|\Delta \vec{x}\|$  entre deux événements simultanés a également une signification absolue. Toutefois, ces deux grandeurs sont les seules ayant une valeur absolue. Par exemple, deux observateurs ayant une vitesse relative non nulle ne seront pas d'accord sur la distance spatiale séparant deux événements non simultanés. (*Exercice : le démontrer.*)

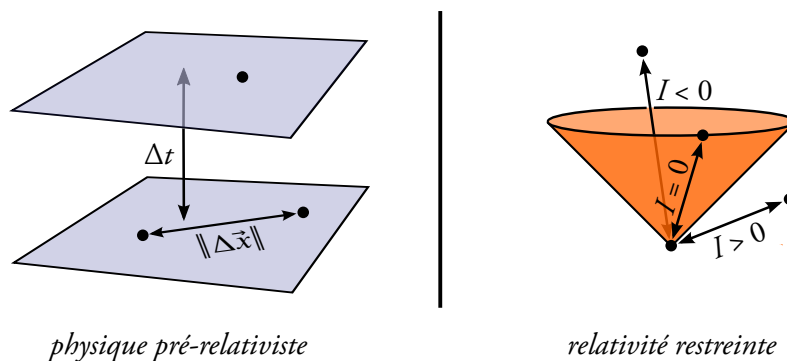
En relativité restreinte, ni l'intervalle de temps, ni la distance spatiale entre deux événements « relativement simultanés » — c'est-à-dire perçus comme étant simultanés par un observateur donné — n'ont de valeur absolue. La seule grandeur invariante reliée à une paire d'événements donnée est l'*intervalle d'espace-temps*  $I$ , qui, dans un référentiel globalement inertiel, prend la forme

$$I = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \quad (1.6)$$

En effet, les *transformations de Poincaré* — c'est-à-dire l'ensemble de toutes les transformations possibles entre référentiels globalement inertiels — sont précisément les transformations linéaires qui laissent l'intervalle  $I$  inchangé<sup>1</sup>. Ainsi, la transformation de Lorentz (1.5), un cas particulier de transformation de Poincaré, est telle que (*Exercice : le vérifier.*)

$$I' = -c^2(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 = I. \quad (1.7)$$

L'intervalle d'espace-temps  $I$  est la seule grandeur indépendante d'un observateur qui caractérise les relations spatio-temporelles entre les événements. Toutes les propriétés de l'espace-temps de la relativité restreinte se déduisent de l'intervalle (1.6).



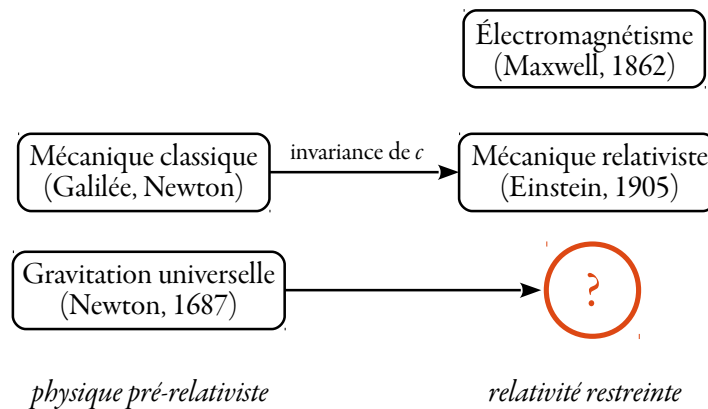
De manière tout à fait remarquable, la *forme* de l'intervalle  $I$  est quadratique dans les différences des coordonnées, et invariante par changement de système de coordonnées globalement inertiels. L'intervalle d'espace-temps a donc les mêmes propriétés mathématiques que la formule de Pythagore pour la distance entre deux points en géométrie euclidienne, à l'exception du signe moins devant le premier terme. Par analogie avec la métrique ordinaire de la géométrie euclidienne, en relativité restreinte nous sommes donc naturellement conduits à interpréter l'intervalle  $I$  comme la *métrique* de l'espace-temps. Plus précisément, la métrique de l'espace-temps sera définie au chapitre 2 comme un champ tensoriel associé à l'intervalle d'espace-temps entre deux événements « infiniment proches ».

<sup>1</sup>Il s'agit également du groupe d'invariance des équations de Maxwell de l'électromagnétisme. C'est précisément ce constat, combiné à la nécessité de réconcilier la mécanique galiléenne avec l'électromagnétisme, suite aux résultats négatifs des expériences de Michelson et Morley, qui a conduit Einstein à formuler la théorie de la relativité restreinte.

Tandis qu'en géométrie euclidienne la distance entre deux points est nécessairement positive, la métrique étant définie positive, en relativité restreinte l'intervalle d'espace-temps (1.6) peut être positif, négatif ou nul (même pour deux événements distincts). Cette différence de signature n'induit que des différences mineures dans l'analyse de ces géométries : en relativité restreinte, l'espace-temps est décrit d'une façon qui est mathématiquement identique à celle de la géométrie euclidienne, à l'exception des changements de signe induits par la signature lorentzienne de la métrique. En particulier, les coordonnées globalement inertielles de la relativité restreinte sont analogues aux coordonnées cartésiennes de la géométrie euclidienne. De même, les lignes d'univers d'observateurs inertiels sont analogues aux lignes droites (géodésiques) de la géométrie euclidienne.

## 1.5 Gravitation et géométrie

La théorie newtonienne de la gravitation fait intervenir la notion d'influence instantanée exercée par un corps sur un autre (l'interaction gravitationnelle se propage instantanément). Par conséquent, cette théorie est incompatible avec le cadre conceptuel de la relativité restreinte. Tout comme les lois de la physique non gravitationnelle ont été reformulées de façon à être rendues compatibles avec la structure de l'espace-temps de la relativité restreinte, on peut se demander si la théorie de la gravitation universelle peut elle aussi être modifiée afin d'être rendue compatible avec le principe de relativité restreinte. Il se trouve que deux idées fondamentales ont incité Einstein à ne pas emprunter cette voie, mais plutôt à fonder une théorie entièrement nouvelle de l'espace-temps et de la gravitation.



### *Principe d'équivalence*

La première de ces deux idées repose sur l'observation de l'*universalité* du mouvement de chute libre. En effet, tous les corps sont affectés par la gravité, et, de fait, tous les corps tombent précisément de la même façon dans un champ gravitationnel. Ainsi, le mouvement de chute libre est indépendant de la masse des corps, et, de manière plus remarquable encore, de leur composition. Ce fait, connu sous le nom de *principe d'équivalence*, s'exprime en mécanique classique par l'égalité de la masse inerte et de la masse grave.

Rappelons que la masse inerte  $m_i$  d'un corps intervient dans la seconde loi de Newton,  $\vec{F} = m_i \vec{a}$ , et qu'elle caractérise la « résistance » de ce corps à toute modification de son état de mouvement. La masse grave  $m_g$ , quant à elle, intervient dans l'expression de la force de gravitation universelle,  $\vec{F}_g = m_g \vec{g}$ , et mesure la « sensibilité » du corps en question à un champ de gravitation  $\vec{g}$  externe. L'égalité  $m_i = m_g$ , qui implique  $\vec{a} = \vec{g}$  pour tous les corps, n'admet aucune explication naturelle dans le cadre de la gravitation newtonienne ; il s'agit d'une coïncidence numérique pour le moins mystérieuse.

Le principe d'équivalence a été testé à de très nombreuses reprises, à commencer par les expériences historiques de balance à torsion d'Eötvös [A3], qui atteignent déjà une précision relative supérieure à  $10^{-8}$ . Plusieurs expériences récentes utilisant un principe similaire sont parvenues à établir une limite supérieure de l'ordre de  $10^{-13}$  sur une possible violation du principe d'équivalence [A6]. Le satellite Microscope du Centre national d'études spatiales va, sous peu, tester le principe d'équivalence dans l'espace avec une précision inégalée de  $10^{-15}$  [A7].

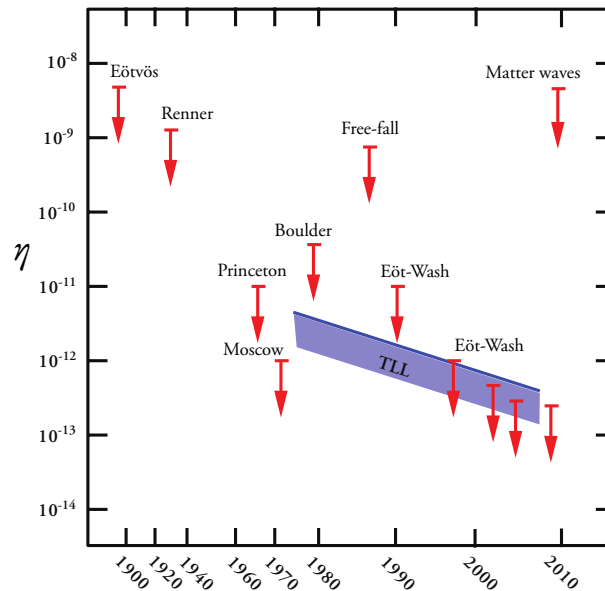


FIG. 1.2 : La précision des tests du principe d'équivalence en fonction de l'année. Le paramètre de Eötvös  $\eta = 2(a_1 - a_2)/(a_1 + a_2)$  mesure l'accélération relative de deux corps de compositions distinctes dans un champ gravitationnel externe. L'acronyme TLL réfère à la télémétrie laser-Lune [A5]. Figure adaptée de [A8].

Cette propriété d'universalité du mouvement de chute libre singularise la gravitation par rapport aux autres interactions. En effet, puisque le mouvement des corps est indépendant de leur nature, les trajectoires des corps en chute libre définissent un ensemble de courbes privilégiées dans l'espace-temps. Cela suggère que les propriétés de la gravité peuvent être attribuées à la structure de l'espace-temps lui-même. Plus précisément, le principe d'équivalence suggère que le mouvement de chute libre dans un champ gravitationnel est analogue au mouvement inertiel en physique pré-relativiste et en relativité restreinte. La gravité ne serait alors pas une force, mais plutôt une modification de la structure de l'espace-temps permettant à deux observateurs inertiels d'accélérer l'un par rapport à l'autre.

## Principe de Mach

La seconde idée à l'origine de la relativité générale, le *principe de Mach*, est de nature plus épistémologique. En physique pré-relativiste, ainsi qu'en relativité restreinte, la structure de l'espace-temps est donnée une fois pour toute, et n'est pas affectée par l'éventuelle présence de corps matériels. En particulier, la notion de mouvement inertiel ne dépend pas de la distribution de la matière dans l'Univers. Le physicien et philosophe E. Mach trouvait cette idée insatisfaisante. En effet, d'après Mach c'est la distribution de l'ensemble de la matière dans l'Univers qui détermine ceux des référentiels qui sont inertiels. Einstein partageait ce point de vue et s'est donc efforcé de développer une théorie de la gravitation dans laquelle la structure de l'espace-temps est influencée par la présence de matière.

## Relativité générale

Après de longues années de gestation et de multiples tentatives infructueuses, Einstein a découvert que ces idées peuvent être réalisées par une simple généralisation de la géométrie lorentzienne plate de la relativité restreinte (la géométrie minkowskienne) en une géométrie lorentzienne *courbe*, de la même façon que la géométrie riemannienne courbe généralise la géométrie euclidienne plate. La relativité générale est donc une théorie de la structure de l'espace et du temps qui rend compte de tous les effets liés à la gravitation en termes de la courbure de la géométrie de l'espace-temps. De plus, la courbure de l'espace-temps est reliée au tenseur énergie-impulsion de la matière à travers une équation postulée par Einstein, en accord avec le principe de Mach.

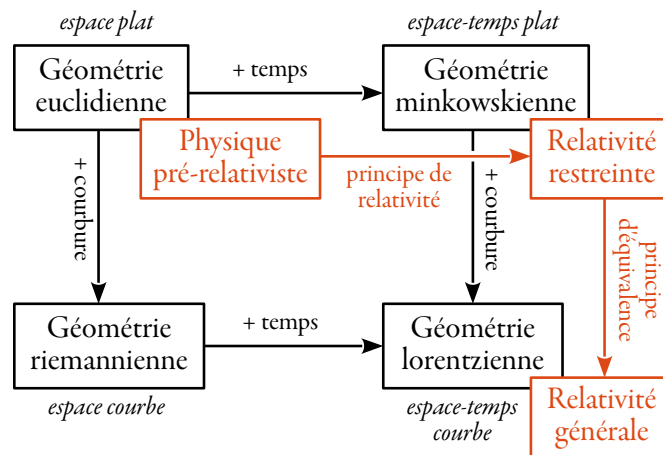


FIG. 1.3 : Le cheminement historique et conceptuel ayant conduit à la formulation de la relativité générale a requis une combinaison de principes physiques et de considérations géométriques.

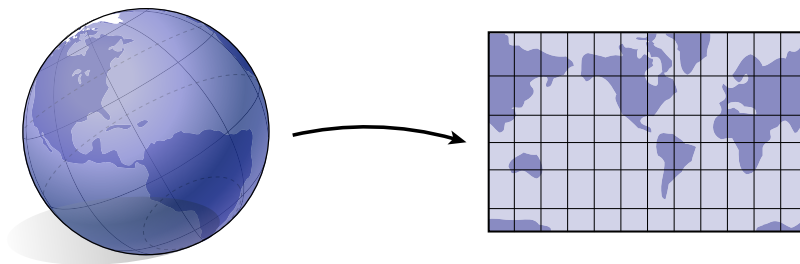
## CHAPITRE 2

# CADRE GÉOMÉTRIQUE

L'objectif de ce chapitre est d'introduire le cadre géométrique sur lequel repose la théorie de la relativité générale. Après avoir défini le concept de variété dans le § 2.1, nous étudierons successivement les notions de courbe et de vecteur dans le § 2.2, puis celles de forme linéaire et de tenseur dans le § 2.3. Le tenseur métrique, qui joue un rôle fondamental en relativité générale, sera introduit au § 2.4. Enfin, nous verrons comment formuler le calcul différentiel en espace-temps courbe, grâce à la notion de dérivée covariante, dans le § 2.5.

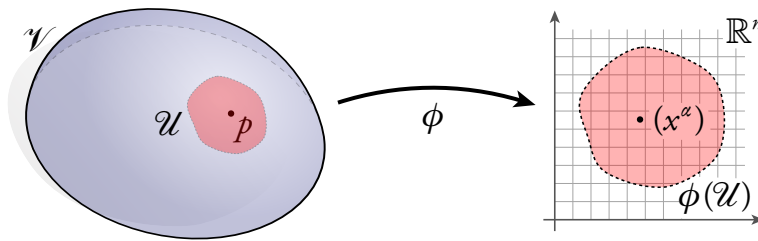
### 2.1 Notion de variété

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, la relativité a opéré la fusion de l'espace et du temps ; deux notions qui étaient complètement distinctes en physique pré-relativiste. Notre expérience sensorielle suggère que l'espace-temps est un « continuum quadri-dimensionnel », au sens où quatre nombres sont nécessaires afin de caractériser un événement. En physique pré-relativiste, ainsi qu'en relativité restreinte, on suppose ainsi que tous les événements de l'espace-temps peuvent être mis en correspondance biunivoque avec les points de  $\mathbb{R}^4$ , et ce de façon continue. En relativité générale, par contre, la structure de l'espace-temps n'est pas connue par avance, de sorte que nous ne souhaitons pas préjuger de ses propriétés globales. Notre situation est comparable à celle d'hypothétiques explorateurs à la surface de la Terre. Ces explorateurs peuvent, localement, repérer leur position à la surface de globe à l'aide de deux nombres. Par contre, ils commettraient une grave erreur en supposant qu'il est possible de mettre en correspondance, de manière continue et biunivoque, l'ensemble des points à la surface de la Terre avec un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ .



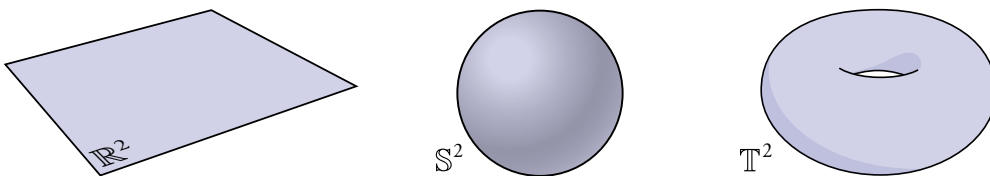
Afin de commencer notre exploration mathématique de la structure de l'espace-temps (ainsi que celle de la surface du globe), nous avons donc besoin de la notion de variété, c'est-à-dire d'un ensemble qui « ressemble localement » à l'ensemble  $\mathbb{R}^n$  des  $n$ -uplets de nombres réels, mais dont les propriétés globales peuvent être différentes. Plus précisément, une *variété*  $\mathcal{V}$  de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  est un espace topologique tel que, en chacun de ses points, on peut définir un voisinage homéomorphe à un ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .<sup>1</sup> En langage imagé, cela signifie que pour toute partie suffisamment petite de  $\mathcal{V}$ , il est possible d'étiqueter les points  $p$  par  $n$  nombres. On appelle alors *système de coordonnées* (ou *carte*) sur un ensemble ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{V}$  tout « étiquetage » des points  $p$  de  $\mathcal{U}$ , c'est-à-dire tout homéomorphisme<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{U} \subset \mathcal{V} &\longrightarrow \phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n \\ p &\longmapsto (x^1, \dots, x^n). \end{aligned} \quad (2.1)$$



Il est important de souligner que la ressemblance locale avec  $\mathbb{R}^n$  s'arrête à l'étiquetage des points et ne s'étend pas à la structure d'espace euclidien de  $\mathbb{R}^n$ . En particulier, le choix du système de coordonnées est *entièrement libre*, car si  $(x^\alpha) \equiv (x^1, \dots, x^n)$  est un système de coordonnées sur  $\mathcal{U}$  et  $F^\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $1 \leq \alpha \leq n$ ) des applications bijectives, continues, et de réciproques continues, alors  $(y^\alpha) \equiv (y^1, \dots, y^n)$  avec  $y^\alpha = F^\alpha(x^1, \dots, x^n)$  constitue un système de coordonnées tout aussi valide sur  $\mathcal{U}$ . Par ailleurs, les propriétés *globales* d'une variété peuvent différer de façon significative de celles de  $\mathbb{R}^n$ ; comme nous le verrons dans le chapitre 4, une variété peut avoir une courbure non nulle et une topologie non triviale.

En dimension  $n = 2$ , quelques exemples élémentaires de variétés incluent le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$ , la sphère  $\mathbb{S}^2$  et le tore  $\mathbb{T}^2$ . L'espace-temps de la relativité restreinte est constitué de la variété de dimension  $n = 4$  la plus simple qui soit, à savoir  $\mathbb{R}^4$  lui-même. Les espaces-temps de la relativité générale peuvent, quant à eux, être décrits par des variétés différentes de  $\mathbb{R}^4$ , en particulier en présence de trous noirs et en cosmologie.



<sup>1</sup>La définition complète inclut deux propriétés supplémentaires permettant d'éviter des cas pathologiques.

<sup>2</sup>Un homéomorphisme entre deux espaces topologiques, ici  $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$  et  $\phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ , est une application bijective continue dont la réciproque est également continue.



Notons que la définition d'une variété est *intrinsèque*, au sens où elle ne présuppose pas que  $\mathcal{V}$  soit plongé dans un espace plus grand. Ainsi, on peut définir les exemples de variétés de dimension  $n = 2$  ci-dessus sans faire usage de l'espace euclidien tridimensionnel  $\mathbb{R}^3$ . De même, l'espace-temps quadri-dimensionnel n'est pas, à notre connaissance, plongé dans un espace de dimension supérieure.

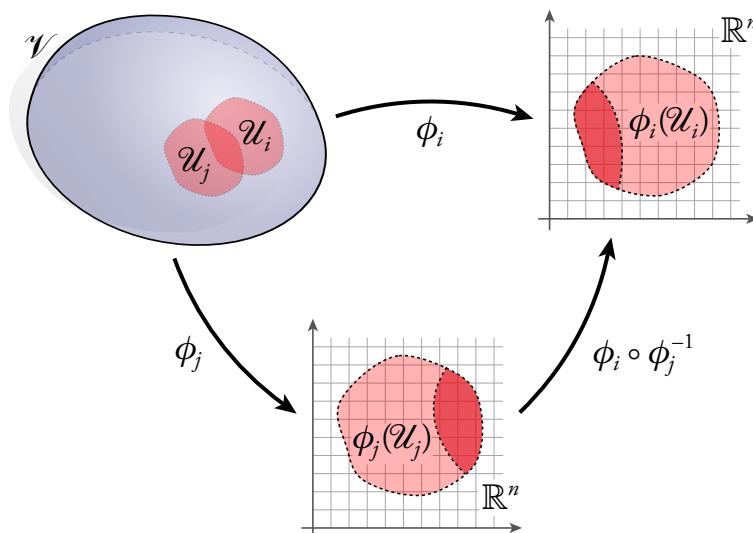
De manière générale, l'usage d'un seul système de coordonnées ne permet pas de couvrir intégralement une variété  $\mathcal{V}$ . On appelle *atlas* tout ensemble fini de couples  $(\mathcal{U}_k, \phi_k)_{1 \leq k \leq K}$ , où  $K \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{U}_k$  est un ouvert de  $\mathcal{V}$  et  $\phi_k$  un système de coordonnées (une carte) sur  $\mathcal{U}_k$ , tel que la réunion des  $\mathcal{U}_k$  couvre  $\mathcal{V}$  :

$$\bigcup_{k=1}^K \mathcal{U}_k = \mathcal{V}. \quad (2.2)$$

La définition que nous avons donnée d'une variété assure la continuité de cet ensemble. En physique, où le calcul différentiel joue un rôle essentiel, nous avons également besoin de la notion de différentiabilité. Afin de garantir cette dernière, nous pouvons nous reposer sur la structure différentiable de  $\mathbb{R}^n$ , en passant par les cartes. On dit alors que  $\mathcal{V}$  est une *variété différentiable* si, et seulement si, pour toute intersection non vide  $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$  de deux cartes  $\phi_i$  et  $\phi_j$ , l'application

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \phi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \subset \mathbb{R}^n \quad (2.3)$$

est différentiable, c'est-à-dire de classe  $C^\infty$ . Notons que l'application ci-dessus va d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  vers un autre ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , de sorte que la notion de différentiabilité invoquée à son égard n'est autre que celle des applications internes à  $\mathbb{R}^n$ . La condition (2.3) assure que les systèmes de coordonnées  $\phi_k$  sont reliés de façon régulière dans leurs intersections.



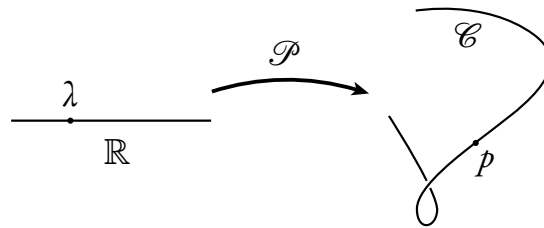
## 2.2 Courbes et vecteurs

La notion de vecteur joue un rôle essentiel dans la formulation des lois de la physique. Ce concept géométrique est généralement introduit dans le cadre de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , mais il se généralise immédiatement au cas de l'espace  $\mathbb{R}^n$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ). Du fait de leur absence de courbure, l'espace euclidien et l'espace-temps de la relativité restreinte sont dotés d'une structure naturelle d'espace vectoriel. Ainsi, étant donné un choix d'origine, chaque point définit un unique vecteur. Sur une variété, on ne peut *a priori* pas définir les vecteurs comme des quantités reliant deux points — sauf pour des points « infiniment proches ». En effet, en raison de la courbure, le vecteur « sort » de la variété. En particulier, l'addition de deux vecteurs issus de deux points différents serait problématique.

### *Courbe*

Par contre, une notion bien définie sur une variété est celle de courbe. Celle-ci va nous permettre de définir les vecteurs comme des vecteurs tangents à une courbe donnée. Mathématiquement, une *courbe*  $\mathcal{C}$  sur une variété  $\mathcal{V}$  est l'image d'une application différentiable

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{V} \\ \lambda &\longmapsto p = \mathcal{P}(\lambda) \in \mathcal{C}. \end{aligned} \quad (2.4)$$



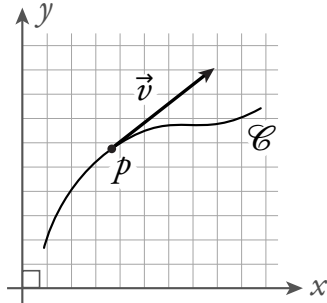
Ainsi,  $\mathcal{C} = \{\mathcal{P}(\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ . L'application  $\mathcal{P}$  est appelée le *paramétrage* de la courbe et  $\lambda$  est la *paramètre* de la courbe. Étant donné un système de coordonnées  $(x^\alpha)$ , une courbe est décrite par la donnée de  $n$  fonctions  $X^\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que nous supposons différentiables, et telles que l'équation paramétrique de  $\mathcal{C}$  est donnée par  $x^\alpha = X^\alpha(\lambda)$ , avec  $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ .

### *Vecteur tangent*

Afin de motiver la définition d'un vecteur sur une variété, examinons le cas d'une courbe  $\mathcal{C}$  dans le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $\{x = X(\lambda), y = Y(\lambda)\}$  l'équation paramétrique de  $\mathcal{C}$  en coordonnées cartésiennes. Au sens usuel des vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ , le vecteur  $\vec{v}$  tangent à  $\mathcal{C}$  en un point  $p = \mathcal{P}(\lambda)$  est le vecteur de composantes cartésiennes  $(dX/d\lambda, dY/d\lambda)$ . Considérons à présent un champ scalaire différentiable, c'est-à-dire une application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur le plan. L'accroissement élémentaire de  $f$  le long de la courbe  $\mathcal{C}$  est donné par la formule  $df|_{\mathcal{C}} = (\partial f/\partial x) dX + (\partial f/\partial y) dY$ , d'où l'on déduit le taux de variation

$$\left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\mathcal{C}} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f. \quad (2.5)$$

Par conséquent, il est possible de voir le vecteur tangent  $\vec{v}$  comme un opérateur qui à tout champ scalaire  $f$  fait correspondre la dérivée directionnelle (2.5) le long de la courbe. C'est ce point de vue que nous allons utiliser afin de définir la notion de vecteur sur une variété.



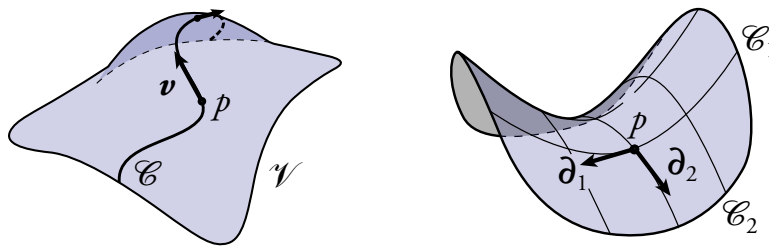
Étant donnée une courbe  $\mathcal{C}$  sur une variété  $\mathcal{V}$  et un paramétrage  $\mathcal{P}(\lambda)$  de  $\mathcal{C}$ , on définit le *vecteur tangent*  $v$  associé au paramétrage  $\mathcal{P}(\lambda)$  en un point  $p \in \mathcal{C}$  comme l'opérateur qui à tout *champ scalaire*  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable au voisinage de  $p$  fait correspondre la dérivée  $df/d\lambda$  le long de la courbe :

$$v(f) \equiv \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\mathcal{C}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ f(\mathcal{P}(\lambda + \varepsilon)) - f(\mathcal{P}(\lambda)) \right\}. \quad (2.6)$$

Étant donné un système de coordonnées  $(x^\alpha)$  au voisinage d'un point  $p \in \mathcal{V}$ , il existe  $n$  courbes privilégiées passant par  $p$  et associées aux coordonnées  $x^\alpha$  : les *lignes de coordonnées*, notées  $\mathcal{C}_\alpha$ . Pour tout  $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathcal{C}_\alpha$  est la courbe paramétrée par  $\lambda = x^\alpha$ , passant par  $p$ , et telle que pour tout  $\beta \neq \alpha$  les coordonnées  $x^\beta$  sont constantes. Nous noterons  $\partial_\alpha$  le vecteur tangent à la courbe  $\mathcal{C}_\alpha$  paramétrée par  $x^\alpha$ . Au vu de la définition (2.6), son action sur un champ scalaire  $f$  est donnée par

$$\partial_\alpha(f) = \left. \frac{df}{dx^\alpha} \right|_{\mathcal{C}_\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}. \quad (2.7)$$

Notons que dans la dernière égalité nous avons considéré  $f$  comme une fonction des coordonnées  $(x^\alpha)$ , tandis que, strictement parlant,  $f$  est une fonction des points sur  $\mathcal{V}$ . L'action des vecteurs tangents aux lignes de coordonnées consiste donc à renvoyer les dérivées partielles par rapport aux coordonnées ; d'où la notation adoptée.



### Espace vectoriel tangent

Si l'on se donne l'équation paramétrique de la courbe  $\mathcal{C}$  dans un système de coordonnées  $(x^\alpha)$  sur une variété  $\mathcal{V}$ , alors la définition (2.6) devient

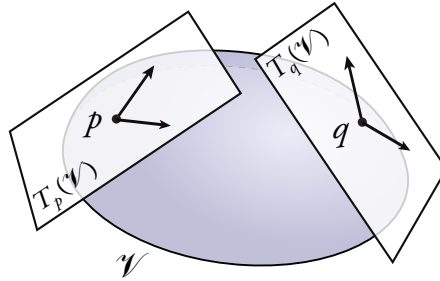
$$v(f) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{dX^\alpha}{d\lambda} = \partial_\alpha(f) \frac{dX^\alpha}{d\lambda}, \quad (2.8)$$

où l'on a introduit la *convention de sommation d'Einstein* sur les indices répétés. Nous l'utiliserons systématiquement par la suite, ce qui allègera les notations en nous évitant d'écrire de nombreux signes de sommation  $\Sigma$ . Puisque le résultat (2.8) est valable pour tout champ scalaire  $f$ , on obtient la décomposition suivante du vecteur  $v$  :

$$v = v^\alpha \partial_\alpha, \quad \text{avec} \quad v^\alpha = \frac{dX^\alpha}{d\lambda}. \quad (2.9)$$

Ce résultat implique que l'ensemble des vecteurs en un point  $p \in \mathcal{V}$  — c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs tangents à toutes les courbes passant par  $p$  — forme un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{R}$  dont  $(\partial_\alpha)$  est une base. Cet espace vectoriel, que l'on dénote  $T_p(\mathcal{V})$ , est l'*espace vectoriel tangent* à la variété  $\mathcal{V}$  au point  $p$ . La base  $(\partial_\alpha)$  est appelée *base naturelle* associée aux coordonnées  $(x^\alpha)$ . Les nombres  $v^\alpha = dX^\alpha/d\lambda$  sont les *composantes* du vecteur  $v$  par rapport à cette base.

Il est important de souligner que l'espace vectoriel tangent dépend du point  $p$  considéré. En effet, de manière générale il y a autant d'espaces vectoriels tangents  $T_p(\mathcal{V})$  que de points  $p$  sur une variété  $\mathcal{V}$ . Cette situation diffère de celle de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , où il n'y a qu'un seul espace vectoriel global, à savoir  $\mathbb{R}^3$  lui-même.



Considérons à présent un second système de coordonnées  $(x'^\alpha)$  sur  $\mathcal{V}$ . Le vecteur (2.9) peut alors être décomposé sur la base naturelle associée selon  $v = v'^\alpha \partial'_\alpha$ . Quel est alors le lien entre les composantes  $v^\alpha$  et  $v'^\alpha$  par rapport aux bases  $(\partial_\alpha)$  et  $(\partial'_\alpha)$ ? Faisant usage de la loi de composition des dérivées partielles, l'Éq. (2.7) implique  $\partial'_\beta(f) = (\partial x'^\alpha / \partial x^\beta) \partial_\alpha(f)$  pour tout champ scalaire  $f$ , de sorte que

$$v'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} v^\beta. \quad (2.10)$$

Les vecteurs sont parfois introduits comme des collections de nombres  $(v^\alpha)$  obéissant à la loi de transformation (2.10) sous un changement de système de coordonnées  $(x^\alpha) \mapsto (x'^\alpha)$ . Ce résultat apparaît ici comme une conséquence de la définition (2.6) que nous avons adoptée, qui est la définition *intrinsèque* des vecteurs en géométrie différentielle.

### Déplacement élémentaire

De manière générale, il n'est pas possible de relier deux points  $p$  et  $q$  sur une variété par un vecteur, sauf si ces points sont « infiniment proches ». En effet, dans ce cas il existe un unique morceau d'une courbe  $\mathcal{C}$  passant par  $p$  et  $q$ . Soit alors  $\mathcal{P}(\lambda)$  un paramétrage de  $\mathcal{C}$  tel que  $p = \mathcal{P}(\lambda)$  et  $q = \mathcal{P}(\lambda + d\lambda)$ , où  $d\lambda$  est l'accroissement infinitésimal du paramètre  $\lambda$  entre  $p$  et  $q$ . Définissons le vecteur suivant :

$$d\mathbf{l} \equiv \mathbf{v} d\lambda, \quad (2.11)$$

où  $\mathbf{v}$  est le vecteur tangent à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $p$  et associé au paramétrage  $\mathcal{P}(\lambda)$ . Puisque  $\mathbf{v} \in T_p(\mathcal{V})$  et  $d\lambda \in \mathbb{R}$ , le vecteur  $d\mathbf{l}$  appartient également à l'espace tangent au point  $p$ . En utilisant la définition (2.6) d'un vecteur tangent à une courbe, l'action du vecteur (2.11) sur un champ scalaire  $f$  est donnée par

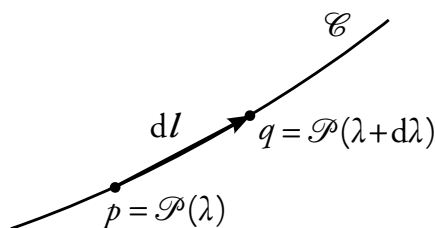
$$d\mathbf{l}(f) \equiv \mathbf{v}(f) d\lambda = \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\mathcal{C}} d\lambda = f(q) - f(p). \quad (2.12)$$

Cette égalité montre que  $d\mathbf{l}$  ne dépend que des points  $p$  et  $q$ , et pas du paramétrage de la courbe  $\mathcal{C}$ . Nous l'appellerons donc *déplacement élémentaire* (ou déplacement infinitésimal) du point  $p$  en  $q$ .

Étant donné un système de coordonnées  $(x^\alpha)$  défini au voisinage du point  $p$ , soit  $(x_0^\alpha)$  les coordonnées de  $p$  et  $(x_0^\alpha + dx^\alpha)$  les coordonnées de  $q$ . Alors (2.12) implique  $d\mathbf{l}(f) = df = (\partial f / \partial x^\alpha) dx^\alpha = \partial_\alpha(f) dx^\alpha$ . Cette équation étant valable pour tout champ scalaire, on en déduit

$$d\mathbf{l} = dx^\alpha \partial_\alpha. \quad (2.13)$$

Ainsi, les composantes du vecteur de déplacement infinitésimal  $d\mathbf{l}$  par rapport à la base naturelle  $(\partial_\alpha)$  associée aux coordonnées  $(x^\alpha)$  ne sont autres que les incréments  $dx^\alpha$ .



## 2.3 Formes linéaires et tenseurs

En relativité générale les vecteurs ne suffisent pas, à eux seuls, afin de formuler l'ensemble des lois de la physique. Il nous faut également introduire les notions de forme linéaire, dont l'opérateur « gradient » est l'exemple le plus connu, et de tenseur.

### Forme linéaire

Une opération fondamentale sur les vecteurs consiste à leur associer un nombre, et ce de manière linéaire. Ainsi, en tout point  $p \in \mathcal{V}$ , une *forme linéaire* est une application

$$\begin{aligned} \omega : T_p(\mathcal{V}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \omega(v) \end{aligned} \quad (2.14)$$

vérifiant la propriété de linéarité  $\omega(\lambda u + v) = \lambda \omega(u) + \omega(v)$  pour tout  $u, v \in T_p(\mathcal{V})$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ . L'ensemble des formes linéaires sur  $T_p(\mathcal{V})$  constitue un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{R}$ , que l'on appelle *espace dual* à  $T_p(\mathcal{V})$ , et que l'on note  $T_p^*(\mathcal{V})$ .

Étant donnée une base naturelle  $(\partial_\alpha)$  de  $T_p(\mathcal{V})$ , il existe une unique base de l'espace dual  $T_p^*(\mathcal{V})$ , que nous noterons  $(dx^\alpha)$ , vérifiant la propriété

$$dx^\alpha(\partial_\beta) = \delta^\alpha_\beta, \quad (2.15)$$

où le *symbole de Kronecker*  $\delta^\alpha_\beta$  est tel que  $\delta^\alpha_\beta = 1$  si  $\alpha = \beta$  et 0 si  $\alpha \neq \beta$ . La base  $(dx^\alpha)$  est la *base duale* à la base  $(\partial_\alpha)$ . La notation  $(dx^\alpha)$  provient du fait que l'action de la forme linéaire  $dx^\alpha$  sur le vecteur de déplacement infinitésimal (2.13) renvoie le nombre  $dx^\alpha$  :

$$dx^\alpha(dl) = dx^\alpha(dx^\beta \partial_\beta) = dx^\beta \underbrace{dx^\alpha(\partial_\beta)}_{\delta^\alpha_\beta} = dx^\alpha. \quad (2.16)$$

On prendra bien soin de ne pas confondre la forme linéaire  $dx^\alpha \in T_p^*(\mathcal{V})$  avec l'incrément  $dx^\alpha \in \mathbb{R}$  de la coordonnée  $x^\alpha$ . La base duale  $(dx^\alpha)$  peut être utilisée pour décomposer une forme linéaire  $\omega \in T_p^*(\mathcal{V})$  quelconque, définissant ainsi ses *composantes*  $\omega_\alpha$  par rapport aux coordonnées  $(x^\alpha)$  :

$$\omega = \omega_\alpha dx^\alpha. \quad (2.17)$$

Celles-ci se déduisent immédiatement de l'action de la forme linéaire  $\omega$  sur les vecteurs  $\partial_\alpha$  de la base naturelle, puisque  $\omega_\alpha = \omega(\partial_\alpha)$ . (*Exercice : le vérifier.*) En terme de composantes, l'action d'une forme linéaire  $\omega$  sur un vecteur  $v$  prend une forme très simple, analogue au produit scalaire euclidien usuel :

$$\omega(v) = \omega_\alpha dx^\alpha(v^\beta \partial_\beta) = \omega_\alpha v^\beta \underbrace{dx^\alpha(\partial_\beta)}_{\delta^\alpha_\beta} = \omega_\alpha v^\alpha. \quad (2.18)$$

Considérons un second système de coordonnées  $(x'^\alpha)$  sur  $\mathcal{V}$ . La forme linéaire (2.17) peut alors être décomposée sur la base duale associée selon  $\omega = \omega'_\alpha dx'^\alpha$ . Quel est le lien entre les composantes  $\omega_\alpha = \omega(\partial_\alpha)$  et  $\omega'_\alpha = \omega(\partial'_\alpha)$  par rapport aux bases  $(dx^\alpha)$  et  $(dx'^\alpha)$  ? Sous un changement de système de coordonnées  $(x^\alpha) \mapsto (x'^\alpha)$ , les vecteurs des bases naturelles  $(\partial_\alpha)$  et  $(\partial'_\alpha)$  vérifient  $\partial'_\alpha = (\partial x^\beta / \partial x'^\alpha) \partial_\beta$ , de sorte que

$$\omega'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \omega_\beta. \quad (2.19)$$

Tandis que la loi de transformation (2.10) des vecteurs fait intervenir le jacobien du changement de système de coordonnées  $(x^\alpha) \mapsto (x'^\alpha)$ , la loi de transformation (2.19) des formes linéaires fait intervenir le jacobien inverse.

Bien entendu, les bases naturelles ne sont pas les seules bases sur l'espace vectoriel tangent  $T_p(\mathcal{V})$ . Il est tout à fait possible d'introduire une base  $(e_\alpha)$  qui n'est pas associée à un système de coordonnées sur  $\mathcal{V}$ , comme par exemple une base orthonormale par rapport à une métrique (voir le § 2.4 ci-après). Il existe alors une unique base  $(e^\alpha)$  de l'espace dual  $T_p^*(\mathcal{V})$  telle que

$$e^\alpha(e_\beta) = \delta^\alpha_\beta. \quad (2.20)$$

La base  $(e^\alpha)$  est la *base duale* à la base  $(e_\alpha)$ . La relation (2.15) est un cas particulier de l'Éq. (2.20) dans lequel  $e_\alpha = \partial_\alpha$  et  $e^\alpha = dx^\alpha$ .

### Gradient

Un exemple bien connu de forme linéaire est le gradient d'un champ scalaire. En effet, pour tout champ scalaire  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , le *gradient* de  $f$ , noté  $\nabla f$ , est la forme linéaire qui à tout vecteur  $v \in T_p(\mathcal{V})$  associe le nombre

$$(\nabla f)(v) \equiv v(f) = \frac{df}{d\lambda}. \quad (2.21)$$

Décomposons cette forme linéaire par rapport à la base duale  $(dx^\alpha)$  associée à un système de coordonnées  $(x^\alpha)$ . D'après les Éqs. (2.17) et (2.7), les composantes de cette forme linéaire sont données par  $(\nabla f)(\partial_\alpha) = \partial_\alpha(f) = \partial f / \partial x^\alpha$ , de sorte que

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha. \quad (2.22)$$

Ces composantes obéissent bien à la loi de transformation (2.19) des formes linéaires. L'opérateur « gradient » est donc une forme linéaire, et non un vecteur. Notons enfin qu'en appliquant la forme linéaire (2.22) au vecteur de déplacement infinitésimal (2.11), ou de manière équivalente à (2.13), on retrouve la formule usuelle pour la différentielle d'une fonction  $f$  de  $n$  variables  $(x^\alpha)$ , à savoir

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha. \quad (2.23)$$

### Tenseur

La relativité générale fait amplement usage de vecteurs et de formes linéaires, ainsi que de leur généralisation : les tenseurs. Un *tenseur de type  $(k, l)$* , avec  $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ , ou tenseur  $k$  fois contravariant et  $l$  fois covariant, est une application

$$T : \overbrace{T_p^*(\mathcal{V}) \times \cdots \times T_p^*(\mathcal{V})}^{k \text{ fois}} \times \overbrace{T_p(\mathcal{V}) \times \cdots \times T_p(\mathcal{V})}^{l \text{ fois}} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega_1, \cdots, \omega_k, v_1, \cdots, v_l) \longmapsto T(\omega_1, \cdots, \omega_k, v_1, \cdots, v_l) \quad (2.24)$$

qui est linéaire par rapport à chacun de ses arguments (multilinéaire). L'entier  $k + l$  s'appelle la *valence* ou le *rang* du tenseur. Ainsi, une forme linéaire est un tenseur de type  $(0, 1)$ . Par ailleurs, l'isomorphisme  $T_p^{**}(\mathcal{V}) \simeq T_p(\mathcal{V})$  implique que tout vecteur  $v$  peut être considéré comme une forme linéaire sur l'espace vectoriel  $T_p^*(\mathcal{V})$  suivant

$$\begin{aligned} v : T_p^*(\mathcal{V}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto v(\omega) \equiv \omega(v). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Grâce à cette dualité, les vecteurs peuvent être interprétés comme des tenseurs de type  $(1, 0)$ .

En un point  $p$ , l'ensemble de tous les tenseurs d'un type donné forme un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Afin de construire une base de cet espace, il nous faut introduire une nouvelle opération : le *produit tensoriel*, noté  $\otimes$ . Si  $T$  est un tenseur de type  $(k, l)$  et  $S$  un tenseur de type  $(m, n)$ , on définit le tenseur  $T \otimes S$  de type  $(k + m, l + n)$  de la façon suivante : étant donnés  $k + m$  formes linéaires  $\omega_1, \dots, \omega_{k+m}$  et  $l + n$  vecteurs  $v_1, \dots, v_{l+n}$ ,

$$\begin{aligned} T \otimes S(\omega_1, \dots, \omega_{k+m}, v_1, \dots, v_{l+n}) &= T(\omega_1, \dots, \omega_k, v_1, \dots, v_l) \\ &\quad \times S(\omega_{k+1}, \dots, \omega_{k+m}, v_{l+1}, \dots, v_{l+n}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

On notera que, en général, le produit tensoriel ne commute pas, c'est-à-dire  $T \otimes S \neq S \otimes T$ . Un tenseur qui peut s'exprimer sous forme d'un produit tensoriel de vecteurs et de formes linéaires est dit *simple*.

Soit  $(e_\alpha)$  une base de l'espace vectoriel tangent  $T_p(\mathcal{V})$  et  $(e^\alpha)$  la base duale de  $T_p^*(\mathcal{V})$  associée. Alors les  $n^{k+l}$  tenseurs simples  $(e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_k} \otimes e^{\beta_1} \otimes \dots \otimes e^{\beta_l})$  forment une base de l'ensemble des tenseurs de type  $(k, l)$  au point  $p$ . Tout tenseur  $T$  de type  $(k, l)$  peut donc s'exprimer comme une combinaison linéaire de ces tenseurs simples :

$$T = T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_k} \otimes e^{\beta_1} \otimes \dots \otimes e^{\beta_l}. \quad (2.27)$$

Les  $n^{k+l}$  nombres  $T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l}$  sont les *composantes* du tenseur  $T$  par rapport à la base  $(e_\alpha)$ . Elles peuvent être calculées à partir de l'action du tenseur  $T$  sur les éléments des bases  $(e_\alpha)$  et  $(e^\alpha)$ . En effet, en utilisant l'Éq. (2.20) il vient

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} = T(e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_k}, e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_l}). \quad (2.28)$$

Bien entendu, la décomposition (2.27) est valable dans le cas particulier d'une base naturelle associée à un système de coordonnées  $(x^\alpha)$ , c'est-à-dire lorsque  $e_\alpha = \partial_\alpha$  et  $e^\alpha = dx^\alpha$ . Dans ce cas, les lois de transformation (2.10) et (2.19) pour les composantes d'un vecteur et d'une forme linéaire sous un changement de coordonnées  $(x^\alpha) \mapsto (x'^\alpha)$  se généralisent aisément au cas d'un tenseur de type  $(k, l)$ . On obtient la loi de transformation des tenseurs (*Exercice : le vérifier.*)

$$T'^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\alpha_k}}{\partial x^{\rho_k}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_l}}{\partial x'^{\beta_l}} T^{\rho_1 \dots \rho_k}_{\sigma_1 \dots \sigma_l}. \quad (2.29)$$

Dans les manuels de géométrie différentielle datant de la première moitié du xx<sup>e</sup> s., ainsi que dans de nombreux ouvrages d'introduction à la relativité générale, les tenseurs sont introduits comme des collections de nombres  $(T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l})$  obéissant à la loi de transformation



(2.29) sous un changement de système de coordonnées  $(x^\alpha) \mapsto (x'^\alpha)$ . Cette relation est en fait une conséquence de la définition (2.24), qui ne requiert pas l'introduction d'un système de coordonnées, et met donc en évidence la nature intrinsèque des tenseurs.

À l'inverse du produit tensoriel, l'opération de *contraction* permet de réduire la valence d'un tenseur. Étant donné un tenseur  $T$  de type  $(k, l)$ , on définit un tenseur  $CT$  de type  $(k-1, l-1)$  de la façon suivante : soient  $T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l}$  les composantes de  $T$  par rapport à une base  $(e_\alpha)$  ; alors les composantes du tenseur  $CT$  par rapport à cette même base sont données par

$$(CT)^{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}}_{\beta_1 \dots \beta_{l-1}} = T^{\alpha_1 \dots \gamma \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \gamma \dots \beta_l}, \quad (2.30)$$

avec sommation implicite sur l'indice  $\gamma$ . Le tenseur ainsi obtenu est indépendant du choix de la base  $(e_\alpha)$ , de sorte que l'opération de contraction est bien définie. (*Exercice : le vérifier.*) Par contre, le tenseur  $CT$  ainsi défini dépendra, de manière générale, du choix des indices covariants et contravariants qui sont sommés.

Les constructions qui précèdent, conduisant à définir les notions de vecteur, de forme linéaire et de tenseur, s'appuient sur l'espace vectoriel tangent  $T_p(\mathcal{V})$  en un point  $p$  d'une variété  $\mathcal{V}$ . Le choix de  $p$  étant arbitraire, ces constructions peuvent à l'évidence être répétées en tout point de la variété. On appelle alors *champ tensoriel* une application qui associe à tout point  $p \in \mathcal{V}$  un tenseur sur l'espace vectoriel tangent  $T_p(\mathcal{V})$  associé<sup>3</sup>. Par convention, un champ scalaire est considéré comme un champ tensoriel de type  $(0, 0)$ . Par la suite, nous supposerons toujours les champs tensoriels comme étant différentiables.

## Notation

Il existe trois notations fréquemment utilisées afin de représenter les tenseurs : (i) la notation en composantes, (ii) la notation sans indices, et (iii) la notation avec indices abstraits. Dans la notation en composantes, un tenseur  $T$  de type  $(k, l)$  est représenté par ses composantes  $T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l}$  par rapport à une base [voir l'équation (2.27)]. Cette notation permet d'exprimer les opérations sur les tenseurs — comme le produit tensoriel et la contraction — de façon claire, explicite et systématique. Par contre, elle nous invite à concevoir les tenseurs comme des collections de composantes, et non comme des objets à part entière qui ne requièrent pas l'introduction d'une base ou d'un système de coordonnées. Au contraire, la notation sans indices (que nous avons utilisée jusqu'à présent) rend bien manifeste la nature intrinsèque des tenseurs. Toutefois, cette notation devient vite encombrante lorsqu'il s'agit d'effectuer des opérations tensorielles, même modérément complexes, et elle nécessite de se souvenir des types des divers tenseurs considérés.

Un bon compromis est la *notation avec indices abstraits*, qui combine les avantages respectifs de deux notations précédentes. L'idée est de ne pas introduire de base, mais d'utiliser une notation qui « imite » celle en composantes. Ainsi, un tenseur  $T$  de type  $(k, l)$  sera noté  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ , où les indices  $a_i$  et  $b_j$  ne représentent pas les composantes de ce tenseur par rapport à une base, mais servent à indiquer le type du tenseur, ainsi que l'ordre dans lequel celui-ci agit sur des vecteurs et des formes linéaires. Une égalité entre deux tenseurs (entre

<sup>3</sup>Par abus ou économie de langage, on parle souvent de tenseur (resp. vecteur) pour faire référence à un champ tensoriel (resp. vectoriel).

deux applications multilinéaires) sera donc écrite à l'aide d'indices romains, tandis que pour écrire une égalité entre les composantes de deux tenseurs dans une base donnée (entre deux nombres réels), nous utiliserons des lettres grecques. Nous adopterons également la convention d'omettre le symbole  $\otimes$  du produit tensoriel. Dans la pratique, la notation avec indices abstraits est formellement identique à la notation en composantes ; il s'agit plutôt d'une différence de « philosophie ». Dorénavant, nous utiliserons systématiquement la notation avec indices abstraits pour représenter les tenseurs.

Type du tenseur	Notation sans indices	Notation en composantes	Notation avec indices abstraits
(1, 0)	$v$	$(v^\alpha)$	$v^a$
(0, 1)	$\omega$	$(\omega_\alpha)$	$\omega_a$
$(k, l)$	$T$	$(T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l})$	$T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$
(0, 0)	$\omega(v)$	$\omega_\alpha v^\alpha$	$\omega_a v^a$
(2, 1)	$u \otimes v \otimes \omega$	$(u^\alpha v^\beta \omega_\gamma)$	$u^a v^b \omega_c$
(0, 2)	$R(v, \cdot, \cdot, \omega)$	$(R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta v^\alpha \omega_\delta)$	$R_{abc}{}^d v^a \omega_d$
(2, 1)	$C_1^2 S(\cdot, \cdot, v, \cdot)$	$(S^{\alpha\beta\gamma}_{\beta\delta\epsilon} v^\delta)$	$S^{abc}_{bde} v^d$

Certains tenseurs possèdent des propriétés de symétrie. Par exemple, un tenseur  $S_{ab}$  est dit *symétrique* si, et seulement si,  $S_{ab} = S_{ba}$ . De même, un tenseur  $A_{ab}$  est dit *antisymétrique* si, et seulement si,  $A_{ab} = -A_{ba}$ . Un tenseur  $T_{ab}$  de type (0, 2) générique peut toujours être décomposé en une partie symétrique et une partie antisymétrique selon  $T_{ab} = T_{(ab)} + T_{[ab]}$ , où

$$T_{(ab)} \equiv \frac{1}{2} (T_{ab} + T_{ba}), \quad (2.31a)$$

$$T_{[ab]} \equiv \frac{1}{2} (T_{ab} - T_{ba}). \quad (2.31b)$$

À l'évidence,  $S_{[ab]} = 0$  et  $A_{(ab)} = 0$ . Ces notations se généralisent à un tenseur  $T_{a_1 \dots a_l}$  de type (0,  $l$ ), pour lequel on définit les parties totalement symétrique et totalement antisymétrique

$$T_{(a_1 \dots a_l)} \equiv \frac{1}{l!} \sum_{\pi} T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(l)}}, \quad (2.32a)$$

$$T_{[a_1 \dots a_l]} \equiv \frac{1}{l!} \sum_{\pi} \epsilon_{\pi} T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(l)}}, \quad (2.32b)$$

où les sommes s'effectuent sur toutes les permutations circulaires  $\pi$  des indices  $a_1, \dots, a_n$ , de signature  $\epsilon_{\pi}$ . Ces notations indicielles peuvent également être combinées entre elles. Par exemple, le tenseur  $T_{(ab)[cd]}$  de type (0, 4) est symétrique par échange de ses deux premiers indices et antisymétrique par échange de ses deux derniers indices.

## 2.4 Tenseur métrique

La physique pré-relativiste est basée sur un espace affine de dimension  $n = 3$  sur  $\mathbb{R}$ , que l'on appelle « l'espace », et elle manipule les vecteurs de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  associé. Sur cet espace vectoriel, une structure très importante est le *produit scalaire* entre deux vecteurs. En effet, le produit scalaire fonde toute la géométrie ; il permet notamment de définir la norme d'un vecteur, l'angle entre deux vecteurs, et d'introduire des relations d'orthogonalité entre deux sous-espaces. Sur une variété  $\mathcal{V}$ , cette notion est fournie par une *métrique*, c'est-à-dire par une application bilinéaire qui associe un nombre à tout couple de vecteurs.

En plus de remplacer le produit scalaire euclidien usuel de la physique pré-relativiste, en relativité générale, la métrique joue un rôle physique de premier plan. En effet, la métrique fournit une notion de « passé » et de « futur » ; elle sous-tend la causalité de l'espace-temps ; elle détermine le mouvement des particules en chute libre et des photons ; elle permet de calculer l'écoulement du temps le long d'une trajectoire ; elle définit une notion de référentiel localement inertiel ; et elle remplace le potentiel gravitationnel newtonien.

### Définition

Par conséquent, en chaque point  $p$  d'une variété  $\mathcal{V}$ , on munie l'espace vectoriel tangent  $T_p(\mathcal{V})$  d'une *métrique*  $g_{ab}$ , c'est-à-dire d'une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée. Rappelons que :

- *Forme bilinéaire* signifie que  $g_{ab}$  est une application de  $T_p(\mathcal{V}) \times T_p(\mathcal{V}) \rightarrow \mathbb{R}$  qui est linéaire par rapport à chacun de ses arguments, c'est-à-dire un tenseur de type  $(0, 2)$  ;
- *Symétrique* signifie que  $g_{ab}u^a v^b = g_{ab}v^a u^b$  pour tout couple de vecteurs  $u^a$  et  $v^a$ , de sorte que  $g_{ab} = g_{ba}$  ;
- *Non dégénérée* signifie que  $g_{ab}u^a v^b = 0$  pour tout vecteur  $v^a$  si et seulement si  $u^a = 0$ .

Ces propriétés étant caractéristiques d'un produit scalaire, une métrique  $g_{ab}$  définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel tangent  $T_p(\mathcal{V})$  en chaque point  $p \in \mathcal{V}$ . Par conséquent, deux vecteurs  $u^a$  et  $v^a$  sont donc dits *orthogonaux* par rapport à  $g_{ab}$  si et seulement si

$$g_{ab}u^a v^b = 0. \quad (2.33)$$

Étant donnée une base naturelle  $(\partial_\alpha)^a$  de  $T_p(\mathcal{V})$  ainsi que la base duale  $(dx^\alpha)_a$  associée, la formule (2.27) permet d'exprimer le tenseur métrique  $g_{ab}$  en termes de ses composantes  $g_{\alpha\beta}$  selon

$$g_{ab} = g_{\alpha\beta} (dx^\alpha)_a (dx^\beta)_b, \quad \text{avec} \quad g_{\alpha\beta} = g_{ab} (\partial_\alpha)^a (\partial_\beta)^b. \quad (2.34)$$

Puisque  $g_{ab}$  est une forme bilinéaire symétrique, les composantes  $g_{\alpha\beta}$  forment une matrice symétrique. Celles-ci permettent d'exprimer le produit scalaire entre deux vecteurs  $u^a$  et  $v^a$  en fonction de leurs composantes  $u^\alpha$  et  $v^\alpha$  par rapport à une base  $(\partial_\alpha)^a$  suivant

$$g_{ab}u^a v^b = g_{\alpha\beta}u^\alpha v^\beta. \quad (2.35)$$

### Dualité métrique

L'existence d'une métrique  $g_{ab}$  sur une variété  $\mathcal{V}$  induit un isomorphisme naturel entre les vecteurs de  $T_p(\mathcal{V})$  et les formes linéaires de  $T_p^*(\mathcal{V})$ . En effet, à tout vecteur  $v^a$  on peut associer la forme linéaire

$$v_a \equiv g_{ab} v^b. \quad (2.36)$$

D'autre part, puisque  $g_{ab}$  est non dégénérée, il existe un tenseur  $g^{ab}$  de type  $(2, 0)$  tel que  $g^{ab} g_{bc} = \delta^a_c$ , où  $\delta^a_c$  est l'application identité vue de  $T_p(\mathcal{V})$  dans  $T_p(\mathcal{V})$ . Ce tenseur, la *métrique inverse*, est lui-même symétrique :  $g^{ab} = g^{ba}$ . (*Exercice : le vérifier.*) Ainsi, on peut également associer à toute forme linéaire  $\omega_a$  un vecteur

$$\omega^a \equiv g^{ab} \omega_b. \quad (2.37)$$

Le produit scalaire entre deux vecteurs  $u^a$  et  $v^a$  peut donc s'écrire sous de multiples formes, toutes équivalentes :  $g_{ab} u^a v^b = u_b v^b = g^{ab} u_b v_a = u^a v_a$ .

Cet isomorphisme est la raison pour laquelle le concept de forme linéaire n'est pas plus familier des physiciens : en physique pré-relativiste, où nous sommes habitués à travailler en coordonnées cartésiennes dans l'espace euclidien usuel  $\mathbb{R}^3$ , les composantes de la métrique euclidienne  $f_{ab}$  et de la métrique inverse  $f^{ab}$  valent

$$(f_{\alpha\beta}) = (f^{\alpha\beta}) = \text{diag}(+1, +1, +1), \quad (2.38)$$

de sorte qu'il n'est pas nécessaire d'opérer la distinction entre vecteurs et formes linéaires. En relativité générale, la métrique  $g_{ab}$  n'étant pas connue par avance, il est crucial de maintenir clairement cette distinction.

Plus généralement, à tout tenseur de type  $(k, l)$  donné on peut associer un tenseur de type  $(k-1, l+1)$  en contractant avec la métrique  $g_{ab}$ , et un tenseur de type  $(k+1, l-1)$  en contractant avec la métrique inverse  $g^{ab}$ . Ces opérations peuvent être répétées ou combinées en contractant plusieurs fois avec la métrique ou son inverse. Nous utiliserons la même lettre pour représenter les tenseurs résultants. Par exemple, si  $T^{abc}_{de}$  est un tenseur de type  $(3, 2)$ , alors nous noterons  $T^a_{bcde}$  le tenseur  $g_{bf} g^{dh} g^{ej} T^{afc}_{bj}$ .

### Bases orthonormales et signature

Puisque les composantes de la métrique  $g_{ab}$  forment une matrice symétrique  $(g_{\alpha\beta})$ , en tout point  $p \in \mathcal{V}$  il est possible d'introduire une base  $(e_\alpha)^a$  de  $T_p(\mathcal{V})$  qui diagonalise cette matrice. Par ailleurs, comme  $g_{ab}$  est non dégénérée, dans cette base tous les éléments de la diagonale sont non nuls. On peut alors normaliser les vecteurs de base de sorte que

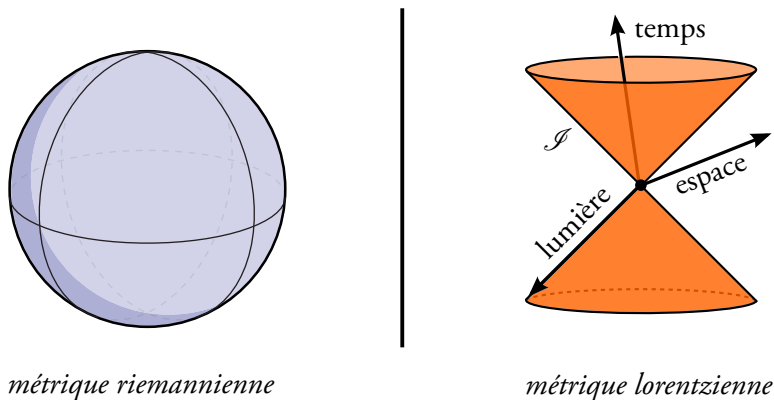
$$(g_{\alpha\beta}) = \text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1). \quad (2.39)$$

Une telle base est dite *orthonormale*. Il existe de nombreuses bases orthonormales, mais un théorème classique d'algèbre linéaire, le *théorème d'inertie de Sylvester*, stipule que le nombre  $s$  d'éléments négatifs (et donc le nombre  $n - s$  d'éléments positifs) est indépendant du choix

de base orthonormale. Ce nombre est intrinsèque à la métrique  $g_{ab}$  et constitue sa *signature*, ce que l'on note

$$\text{sign } g_{ab} = (\underbrace{-, \dots, -}_{s \text{ fois}}, \underbrace{+, \dots, +}_{n-s \text{ fois}}). \quad (2.40)$$

Une métrique telle que  $s = 0$  est dite *riemannienne*. Dans ce cas  $g_{ab}$  est définie positive, ce qui signifie que  $g_{ab} u^a u^b \geq 0$  pour tout vecteur  $u^a$ , et que  $g_{ab} u^a u^b = 0$  si et seulement si  $u^a = 0$ . Les métriques riemanniennes décrivent les espaces courbes ordinaires, comme par exemple la surface d'une sphère, munie d'une métrique de signature  $(+, +)$ . Une métrique telle que  $s = 1$  est dite *lorentzienne*. Dans ce cas, la norme  $g_{ab} u^a u^b$  d'un vecteur  $u^a$  n'est pas nécessairement positive. Un vecteur  $u^a$  non nul est dit du *genre temps* si, et seulement si, (ssi)  $g_{ab} u^a u^b < 0$ , du *genre lumière* ssi  $g_{ab} u^a u^b = 0$ , et du *genre espace*<sup>4</sup> ssi  $g_{ab} u^a u^b > 0$ . Le sous-ensemble de  $T_p(\mathcal{V})$  formé par tous les vecteurs du genre lumière est le *cône isotrope*  $\mathcal{I}$  de  $g_{ab}$  au point  $p$ . (Le mot « cône » signifie que si  $v^a \in \mathcal{I}$ , alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda v^a \in \mathcal{I}$ .) En tout point, les vecteurs du genre temps (resp. du genre espace) sont confinés à l'intérieur (resp. à l'extérieur) du cône de lumière. Les espaces-temps relativistes sont décrits par des métriques lorentziennes de signature  $(-, +, +, +)$ .



### Distance entre deux points

Considérons deux points  $p$  et  $q$  « infiniment proches » sur une variété  $\mathcal{V}$ . Nous avons vu au § 2.2 qu'il est possible de leur associer un vecteur séparation infinitésimal  $dl^a \in T_p(\mathcal{V})$ . On définit alors le carré de la distance entre  $p$  et  $q$  par rapport à la métrique  $g_{ab}$  comme le nombre réel infinitésimal

$$ds^2 \equiv g_{ab} dl^a dl^b. \quad (2.41)$$

Cette notion de distance sur  $\mathcal{V}$  justifie le qualificatif de « métrique » attribué au tenseur  $g_{ab}$ . En relativité générale, le scalaire (2.41) est l'*intervalle d'espace-temps* entre les événements  $p$  et  $q$ . Sur une variété munie d'une métrique riemannienne, la distance (2.41) est toujours positive, tandis que sur une variété munie d'une métrique lorentzienne,  $ds^2$  peut être positif, négatif ou nul, selon que  $dl^a$  est du genre espace, temps ou lumière.

<sup>4</sup>Ce choix de vocabulaire, à connotation « physique », sera justifié dans le chapitre 3.

Étant donné un système de coordonnées  $(x^\alpha)$  au voisinage de  $p$ , soit  $dx^\alpha$  les différences de coordonnées entre  $p$  et  $q$ . En vertu de l'Éq. (2.13), il s'agit également des composantes du vecteur  $dl^a$  par rapport à la base naturelle  $(\partial_\alpha)^a$ , de sorte que (2.41) prend la forme

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (2.42)$$

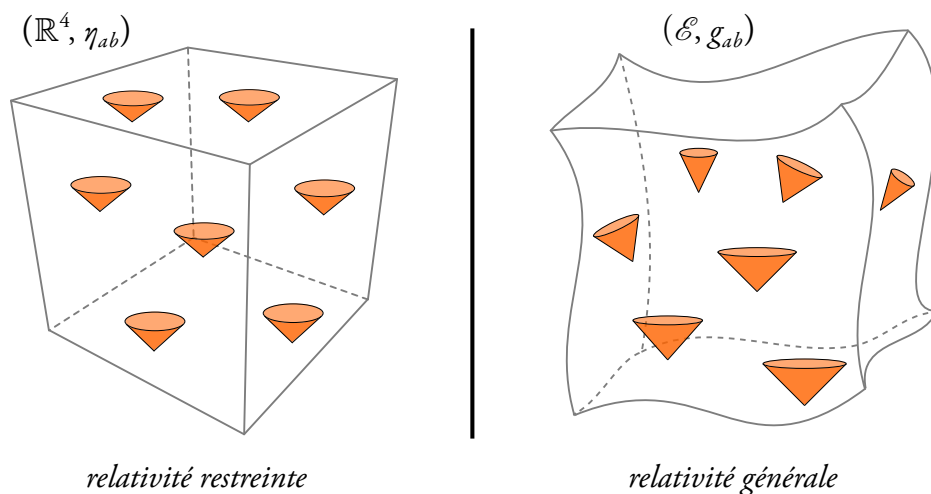
Si la séparation entre  $p$  et  $q$  n'est pas infinitésimale, il est nécessaire de se donner une courbe reliant ces points. La distance est alors définie en intégrant  $(\pm ds^2)^{1/2}$  le long de cette courbe. Nous verrons au § 2.5 qu'il existe des courbes qui extrémisent (localement) la distance entre deux points donnés : les géodésiques.

### Bilan

La description mathématique d'un espace-temps relativiste se résume donc à un couple  $(\mathcal{E}, g_{ab})$ , où  $\mathcal{E}$  est une variété différentiable de dimension  $n = 4$  et  $g_{ab}$  est une métrique lorentzienne, c'est-à-dire un champ tensoriel de type  $(0, 2)$  symétrique, non dégénéré, et de signature  $(-, +, +, +)$ . La différence fondamentale entre la théorie de la relativité restreinte (permettant la description des interactions autres que gravitationnelle) et celle de la relativité générale (qui incorpore la gravitation) est la suivante :

- En relativité restreinte, la variété d'espace-temps et la métrique sont toutes deux fixées *a priori* :  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$  et  $g_{ab} = \eta_{ab}$  est la métrique de Minkowski. Le couple  $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$  est appelé espace-temps de Minkowski ;
- En relativité générale, ni la variété d'espace-temps, ni la métrique ne sont déterminées *a priori*. En particulier,  $g_{ab}$  doit être calculée en résolvant l'équation d'Einstein, qui fera l'objet du chapitre 4.

La relativité générale est une théorie physique de nature fondamentalement *géométrique*. La formulation la plus naturelle des lois de la physique en espace-temps courbe fait usage de champs tensoriels définis sur une variété lorentzienne.



## 2.5 Dérivation covariante

Les lois de la physique s'expriment sous la forme d'équations *différentielles*. Afin de formuler ces lois en espace-temps courbe, nous avons besoin de savoir calculer la dérivée d'un champ tensoriel. Une telle notion requiert la comparaison de deux tenseurs définis en deux points  $p$  et  $q$  voisins, et donc l'information nécessaire pour « connecter » les espaces tangents  $T_p(\mathcal{V})$  et  $T_q(\mathcal{V})$  associés. Étant donnée la seule structure de variété, nous allons voir qu'il existe une infinité de telles connexions possibles. Par contre, l'existence d'une métrique  $g_{ab}$  sur une variété singularise un *unique* opérateur de dérivation, la connexion de Levi-Civita. En relativité générale, où l'on dispose d'une métrique lorentzienne, les lois de la physique sont formulées à l'aide de cette connexion.

### Définition

On appelle *dérivée covariante*, ou *connexion*, toute application  $\nabla$  associant à tout champ tensoriel de type  $(k, l)$  un champ tensoriel de type  $(k, l + 1)$  et vérifiant les cinq propriétés listées ci-dessous. Dans la notation avec indices abstraits, si  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  est un tenseur de type  $(k, l)$ , alors on notera  $\nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  le tenseur de type  $(k, l + 1)$  résultant de l'action de  $\nabla$  sur  $T$ . Les cinq propriétés requises d'une dérivée covariante sont les suivantes :

- (i) *Linéarité* : pour tout couple  $(T, S)$  de tenseurs de type  $(k, l)$ , et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\nabla_c (\lambda T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + S^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}) = \lambda \nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \nabla_c S^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l};$$

- (ii) *Règle de Leibnitz* : pour tous tenseurs  $T$  et  $S$  de types  $(k, l)$  et  $(m, n)$ ,

$$\begin{aligned} \nabla_c (T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} S^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n}) &= (\nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}) S^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n} \\ &+ T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} (\nabla_c S^{a_1 \dots a_m}_{b_1 \dots b_n}); \end{aligned}$$

- (iii) *Commutation* avec l'opération de contraction : pour tout tenseur  $T$  de type  $(k, l)$ ,

$$\nabla_d (T^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l}) = \nabla_d T^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l}; \quad (2.43)$$

- (iv) *Compatibilité* avec la notion de vecteur comme opérateur de dérivée directionnelle : pour tout champ scalaire  $f$  et pour tout vecteur  $v^a$ ,

$$v(f) = v^a \nabla_a f; \quad (2.44)$$

- (v) *Absence de torsion* : pour tout champ scalaire  $f$ ,

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f. \quad (2.45)$$

---

<sup>5</sup>Cette notation est légèrement abusive car le symbole  $\nabla_a$  ne représente pas une forme linéaire.

Ces propriétés sont toutes familières du calcul différentiel ordinaire dans  $\mathbb{R}^n$ , à l'exception de la propriété (iii) de commutation avec la contraction. La propriété (iv) est compatible avec la définition du gradient introduite dans le § 2.3. Si la propriété (v) n'est pas imposée, alors on peut montrer qu'il doit exister un tenseur  $T_{ab}^c$  antisymétrique dans les indices  $a$  et  $b$ , le *tenseur de torsion*, tel que  $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f + T_{ab}^c \nabla_c f$ . La propriété (v) signifie donc que le tenseur de torsion est identiquement nul. Il existe des théories de la gravitation alternatives à la relativité générale pour lesquelles on suppose  $T_{ab}^c \neq 0$ .

### Existence

Commençons par nous assurer qu'il existe bien des connexions sur une variété. Considérons un système de coordonnées  $(x^\alpha)$ , ainsi que la base naturelle et la base duale associées. On peut alors définir une dérivée covariante  $\partial_a$ , la *dérivée ordinaire*, de la façon suivante. Pour tout champ tensoriel  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  ayant pour composantes  $T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l}$  dans la base associée aux coordonnées  $(x^\alpha)$ , on définit le tenseur  $\partial_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  comme le tenseur dont les composantes dans cette même base sont les dérivées partielles  $\partial(T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l})/\partial x^\gamma$  par rapport aux coordonnées. Les cinq conditions requises d'une dérivée covariante sont toutes bien satisfaites par la connexion  $\partial_a$ .

Étant donné un second système de coordonnées  $(x'^\alpha)$ , les composantes du tenseur  $\partial_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  par rapport à la base naturelle associée à ces nouvelles coordonnées se calculent à l'aide de la loi de transformation des tenseurs (2.29). De manière générale, elles ne coïncident pas avec les dérivées partielles  $\partial(T'^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l})/\partial x'^\gamma$  des composantes  $T'^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l}$  de  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  par rapport à la base naturelle associée aux coordonnées  $(x'^\alpha)$ . Par exemple, dans le cas d'un champ vectoriel  $v^a$ , on montre que (*Exercice : le vérifier.*)

$$\frac{\partial v'^\alpha}{\partial x'^\beta} \neq \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\beta} \frac{\partial v^\rho}{\partial x^\sigma}. \quad (2.46)$$

Ainsi, la dérivée ordinaire  $\partial_a$  est liée au choix d'un système de coordonnées. Cette connexion n'est donc pas naturellement associée à la structure de variété.

### Multiplicité

De quelle liberté disposons-nous pour définir des dérivées covariantes ? Afin de répondre à cette question, considérons deux connexions  $\nabla_a$  et  $\hat{\nabla}_a$ , et comparons leur actions sur divers champs tensoriels. Remarquons tout d'abord que, d'après la propriété (v),  $\nabla_a$  et  $\hat{\nabla}_a$  agissent de la même façon sur les champs scalaires, de sorte que

$$(\nabla_a - \hat{\nabla}_a)f = 0 \quad (2.47)$$

pour tout champ scalaire  $f$ . Considérons donc l'action de l'opérateur  $\nabla_a - \hat{\nabla}_a$  sur un champ tensoriel de valence plus élevée. Si  $\omega_a$  et  $\omega'_a$  sont deux champs de formes linéaires, alors les propriétés (i) et (ii) impliquent

$$(\nabla_a - \hat{\nabla}_a)(f\omega_b + \omega'_b) = f(\nabla_a - \hat{\nabla}_a)\omega_b + (\nabla_a - \hat{\nabla}_a)\omega'_b, \quad (2.48)$$



où l'on a également utilisé l'Éq. (2.47). Comme l'opérateur  $\nabla_a - \hat{\nabla}_a$  agit de manière linéaire, on se convaincra qu'il doit exister un tenseur  $C^c_{ab}$  de type (1, 2) tel que<sup>6</sup>

$$\nabla_a \omega_b = \hat{\nabla}_a \omega_b - C^c_{ab} \omega_c. \quad (2.49)$$

Ce résultat met en évidence le possible désaccord entre les dérivées covariantes  $\nabla_a$  et  $\hat{\nabla}_a$ . Il permet également d'établir une propriété de symétrie vérifiée par le tenseur  $C^c_{ab}$ . En effet, en posant  $\omega_b = \nabla_b f = \hat{\nabla}_b f$  dans l'Éq. (2.49), on obtient

$$C^c_{ab} \nabla_c f = \hat{\nabla}_a \hat{\nabla}_b f - \nabla_a \nabla_b f. \quad (2.50)$$

Par ailleurs, d'après la propriété (iv) les tenseurs  $\hat{\nabla}_a \hat{\nabla}_b f$  et  $\nabla_a \nabla_b f$  sont symétriques, de sorte que l'Éq. (2.50) implique

$$C^c_{ab} = C^c_{ba}. \quad (2.51)$$

Ainsi, en chaque point d'une variété de dimension  $n$ , le tenseur  $C^c_{ab}$  possède  $n^2(n+1)/2$  composantes indépendantes, ce qui correspond à 40 champs scalaires en dimension  $n = 4$ .

Considérons maintenant l'action de  $\nabla_a - \hat{\nabla}_a$  sur un champ vectoriel  $v^a$  quelconque. En posant  $f = \omega_b v^b$ , les propriétés (ii) et (iii) ainsi que le résultat (2.49) permettent d'écrire

$$(\nabla_a - \hat{\nabla}_a)(\omega_b v^b) = -C^c_{ab} \omega_c v^b + \omega_b (\nabla_a - \hat{\nabla}_a) v^b. \quad (2.52)$$

D'après (2.47), le membre de gauche de cette équation est nul. En échangeant les indices contractés  $b$  et  $c$  dans le premier terme du membre du droite, et en remarquant que l'égalité est valable pour tout  $\omega_b$ , on obtient le résultat voulu, à savoir

$$\nabla_a v^b = \hat{\nabla}_a v^b + C^b_{ac} v^c. \quad (2.53)$$

Les résultats (2.49) et (2.53) se généralisent aisément à des champs tensoriels d'ordres plus élevés par simple application de la règle de Leibnitz. Ainsi, l'action de la dérivée covariante  $\nabla_a$  sur un champ tensoriel de type  $(k, l)$  s'exprime en termes de  $\hat{\nabla}_a$  et de  $C^c_{ab}$  selon

$$\nabla_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} = \hat{\nabla}_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} + \sum_{i=1}^k C^b_i{}_{ad} T^{b_1 \dots \overset{i}{d} \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} - \sum_{j=1}^l C^d_{ac_j} T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots \underset{j}{d} \dots c_l}. \quad (2.54)$$

### *Symbole de Christoffel*

L'application la plus importante du résultat général (2.54) correspond au cas où l'une des dérivées covariantes coïncide avec la dérivée ordinaire associée à un système de coordonnées :  $\hat{\nabla}_a = \partial_a$ . Dans ce cas, le tenseur  $C^c_{ab}$  est noté  $\Gamma^c_{ab}$  et s'appelle le *symbole de Christoffel*. En particulier, pour tout champ vectoriel  $v^a$  et pour tout champ de formes linéaires  $\omega_a$ ,

$$\nabla_a v^b = \partial_a v^b + \Gamma^b_{ac} v^c, \quad (2.55a)$$

$$\nabla_a \omega_b = \partial_a \omega_b - \Gamma^c_{ab} \omega_c. \quad (2.55b)$$

<sup>6</sup>La démonstration rigoureuse de ce résultat exigerait une excursion mathématique bien trop longue.

Puisque l'on sait comment calculer la dérivée ordinaire  $\partial_a$  associée à un système de coordonnées  $(x^\alpha)$ , les formules (2.55) [et plus généralement l'Éq. (2.54) avec  $\hat{\nabla}_a = \partial_a$  et  $C^c_{ab} = \Gamma^c_{ab}$ ] nous permettent de calculer la dérivée covariante  $\nabla_a$  si  $\Gamma^c_{ab}$  est connu.

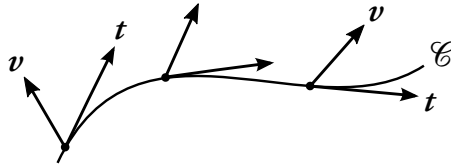
Tel que nous l'avons défini ici, le symbole de Christoffel  $\Gamma^c_{ab}$  est un tenseur associé à la connexion  $\nabla_a$  ainsi qu'au système de coordonnées utilisé pour définir  $\partial_a$ . Cela implique que sous un changement de système de coordonnées  $(x^\alpha) \mapsto (x'^\alpha)$ , on change non seulement de dérivée ordinaire,  $\partial_a \rightarrow \partial'_a$ , mais également de symbole de Christoffel :  $\Gamma^c_{ab} \rightarrow \Gamma'^c_{ab}$ . Par conséquent, les composantes de  $\Gamma^c_{ab}$  par rapport aux coordonnées  $(x^\alpha)$  ne sont pas reliées aux composantes de  $\Gamma'^c_{ab}$  par rapport aux coordonnées  $(x'^\alpha)$  par la loi de transformation (2.29), car on change de tenseur en plus de changer de système de coordonnées.

### Transport parallèle

Étant donnée une dérivée covariante  $\nabla_a$ , il est possible de définir une notion de *transport parallèle* d'un vecteur le long d'une courbe  $\mathcal{C}$  de vecteur tangent  $t^a$ . Un vecteur  $v^a$  défini en chaque point de  $\mathcal{C}$  est dit être transporté parallèlement le long de cette courbe si l'équation

$$t^a \nabla_a v^b = 0 \quad (2.56)$$

est satisfaite le long de  $\mathcal{C}$ . Cette relation exprime le fait que le vecteur  $v^a$  «demeure inchangé» tandis qu'il est transporté le long de la courbe, dont la direction est en tout point donnée par le vecteur tangent  $t^a$ . De même, un tenseur  $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$  de type  $(k, l)$  défini en chaque point de  $\mathcal{C}$  est transporté parallèlement le long de cette courbe s'il vérifie  $t^c \nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = 0$ .



Introduisant un système de coordonnées, la relation (2.56) peut se réécrire en termes de la dérivée ordinaire et du symbole de Christoffel sous la forme  $t^a \partial_a v^b + t^a \Gamma^b_{ac} v^c = 0$ . Si  $\lambda$  est le paramètre associé au vecteur tangent  $t^a$  à la courbe  $\mathcal{C}$ , alors cette dernière équation a pour composantes

$$\frac{dv^\alpha}{d\lambda} + t^\beta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} v^\gamma = 0. \quad (2.57)$$

Étant donnée une condition initiale pour le vecteur  $v^a$ , les propriétés des équations différentielles ordinaires garantissent l'existence d'une unique solution à l'Éq. (2.57). Par conséquent, un vecteur en un point  $p \in \mathcal{C}$  définit un unique vecteur transporté parallèlement en tout autre point de la courbe. Ainsi, étant données une dérivée covariante  $\nabla_a$  et une courbe  $\mathcal{C}$  reliant deux points  $p$  et  $q$ , nous pouvons utiliser le transport parallèle pour identifier les espaces tangents  $T_p(\mathcal{V})$  et  $T_q(\mathcal{V})$ , et ainsi comparer deux vecteurs (ou de manière générale deux tenseurs) définis en des points différents. Par contre, nous verrons au chapitre 4 que le résultat de l'opération de transport parallèle dépend du choix de la courbe.

### Compatibilité avec la métrique

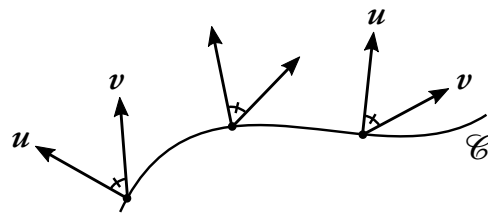
Comme nous l'avons vu, étant donnée la seule structure de variété, une infinité de dérivées covariantes peuvent être définies, aucune d'entre elles n'étant privilégiée. Nous allons maintenant établir que l'existence d'une métrique  $g_{ab}$  sur une variété singularise une *unique* connexion. Cela provient du fait qu'une métrique donne lieu à une condition naturelle que l'on peut imposer sur le transport parallèle. En effet, si  $u^a$  et  $v^a$  sont deux vecteurs transportés parallèlement le long d'une courbe de vecteur tangent  $t^a$ , alors il est naturel d'exiger que le produit scalaire  $g_{ab}u^a v^b$  soit lui aussi transporté parallèlement le long de cette courbe :

$$t^a \nabla_a (g_{bc} u^b v^c) = 0. \quad (2.58)$$

En particulier, la norme d'un vecteur transporté parallèlement le long d'une courbe est alors conservée elle aussi. Comme  $u^a$  et  $v^a$  obéissent à l'équation (2.56), on montre aisément que la condition (2.58) est vérifiée pour toute courbe et pour tout couple de vecteurs  $u^a$  et  $v^a$  si et seulement si (*Exercice : le vérifier.*)

$$\nabla_a g_{bc} = 0. \quad (2.59)$$

Une dérivée covariante  $\nabla_a$  qui vérifie cette propriété est dite *compatible* avec la métrique  $g_{ab}$ . Dans ce cas, la métrique inverse  $g^{ab}$  vérifie elle aussi  $\nabla_a g^{bc} = 0$ . (*Exercice : le démontrer.*)



En géométrie euclidienne, la dérivée ordinaire  $\partial_a$  associée à un système de coordonnées cartésiennes est compatible avec la métrique euclidienne  $f_{ab}$  de l'espace. De même, en relativité restreinte, la dérivée ordinaire  $\partial_a$  associée à un système de coordonnées globalement inertielles est compatible avec la métrique de Minkowski  $\eta_{ab}$ . La condition de compatibilité (2.59) peut donc être vue comme une généralisation des relations  $\partial_a f_{bc} = 0$  et  $\partial_a \eta_{bc} = 0$  aux espaces-(temps) courbes, indépendamment du système de coordonnées.

	Espace euclidien	Relativité restreinte	Relativité générale
Dimension	3	4	4
Métrique	$f_{ab}$	$\eta_{ab}$	$g_{ab}$
Coordonnées	cartésiennes	globalement inertielles	quelconques
Dérivée	ordinaire $\partial_a$	ordinaire $\partial_a$	covariante $\nabla_a$
Compatibilité	$\partial_a f_{bc} = 0$	$\partial_a \eta_{bc} = 0$	$\nabla_a g_{bc} = 0$

### Connexion de Levi-Civita

La relation (2.59) est précisément la contrainte additionnelle que nous souhaitons imposer sur la connexion  $\nabla_a$ . En effet, le théorème fondamental de la géométrie riemannienne stipule que sur une variété munie d'une métrique  $g_{ab}$ , il existe une unique connexion  $\nabla_a$  telle que  $\nabla_a g_{bc} = 0$ . Afin de démontrer ce résultat, considérons un système de coordonnées  $(x^\alpha)$ , ainsi que la dérivée ordinaire  $\partial_a$  associée. En appliquant la formule générale (2.54) au cas du champ tensoriel  $g_{ab}$ , avec  $\hat{\nabla}_a = \partial_a$  et  $C^c_{ab} = \Gamma^c_{ab}$ , il vient

$$0 = \nabla_a g_{bc} = \partial_a g_{bc} - \Gamma^d_{ab} g_{dc} - \Gamma^d_{ac} g_{bd}. \quad (2.60)$$

Afin d'isoler le symbole de Christoffel à partir de cette formule, considérons la combinaison linéaire suivante des dérivées ordinaires de la métrique :

$$\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab} = (\Gamma_{cab} + \Gamma_{bac}) + (\Gamma_{cba} + \Gamma_{abc}) - (\Gamma_{bac} + \Gamma_{acb}). \quad (2.61)$$

En utilisant la propriété de symétrie (2.51), le membre de droite de cette expression se réduit à  $2\Gamma_{cab}$ , de sorte que le symbole de Christoffel est donné par la formule suivante :

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}). \quad (2.62)$$

Ainsi, étant donnée une métrique  $g_{ab}$ , nous pouvons déterminer le symbole de Christoffel  $\Gamma^c_{ab}$ , et par conséquent la dérivée covariante d'un champ tensoriel quelconque, en calculant les dérivées partielles des composantes de la métrique par rapport aux coordonnées  $(x^\alpha)$ .

Ce résultat montre que la condition de compatibilité (2.59) spécifie de manière *unique* la connexion  $\nabla_a$ . L'unique dérivée covariante compatible avec une métrique  $g_{ab}$  s'appelle la *connexion de Levi-Civita*. En relativité générale, la connexion de Levi-Civita est précisément la dérivée covariante utilisée pour formuler les équations différentielles auxquelles obéissent les tenseurs représentant les diverses grandeurs physiques.

### Divergence d'un champ vectoriel

L'expression (2.62) du symbole de Christoffel permet d'établir une formule utile pour la divergence d'un champ de vecteurs. En se souvenant de l'expression de la variation du déterminant d'une matrice inversible  $M$ , à savoir  $\delta \ln |\det M| = \text{Tr}(M^{-1} \times \delta M)$ , il vient

$$\Gamma^\beta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\beta\gamma} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln \sqrt{|g|}, \quad (2.63)$$

où  $g \equiv \det(g_{\alpha\beta})$  est le déterminant de la matrice formée par les composantes  $g_{\alpha\beta}$  de la métrique  $g_{ab}$  par rapport à une base naturelle. Notons que la valeur de  $g$  dépend du choix de système de coordonnées. En combinant le résultat (2.63) avec l'expression (2.55a) pour la dérivée covariante d'un champ de vecteurs, on en déduit la formule

$$\nabla_a v^a = \partial_a v^a + \Gamma^\beta_{\alpha\beta} v^\alpha = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{|g|} v^\alpha). \quad (2.64)$$

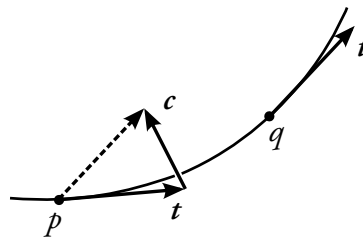
Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , ce résultat permet de retrouver les formules bien connues pour la divergence d'un champ de vecteurs dans divers systèmes de coordonnées usuels (cartésiennes, sphériques, cylindriques, etc).

## Géodésiques

Intuitivement, une géodésique est une ligne dont la courbure est «aussi faible que possible». Il s'agit des lignes les « plus droites » que l'on puisse concevoir dans un espace courbe. Mathématiquement, étant donnée une variété munie d'une métrique  $g_{ab}$  et de la connexion de Levi-Civita  $\nabla_a$  associée, une *géodésique* est une courbe dont le vecteur tangent  $t^a$  est transporté parallèlement à lui-même, c'est-à-dire une courbe telle que

$$c^b \equiv t^a \nabla_a t^b = 0. \quad (2.65)$$

Les géodésiques généralisent aux espaces(-temps) courbes les lignes droites de la géométrie euclidienne et les trajectoires des observateurs inertiels de la relativité restreinte.



Afin de se forger une meilleure intuition de la nature des courbes géodésiques, introduisons un système de coordonnées  $(x^\alpha)$  et considérons les composantes de l'équation (2.65) par rapport à la base naturelle associée. En appliquant la formule (2.57) au cas où  $v^a$  coïncide avec le vecteur tangent  $t^a$  à la courbe, et dont les composantes  $t^\alpha$  sont, d'après l'Éq. (2.9), données par  $t^\alpha = dX^\alpha/d\lambda$ , on obtient

$$\frac{d^2 X^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dX^\beta}{d\lambda} \frac{dX^\gamma}{d\lambda} = 0. \quad (2.66)$$

Il s'agit d'un système de  $n$  équations différentielles du second ordre, non linéaires et couplées pour les  $n$  fonctions  $X^\alpha(\lambda)$  qui décrivent l'équation paramétrique de la géodésique. D'après le théorème de Cauchy, étant données des conditions initiales  $X^\alpha(\lambda_0)$  et  $(dX^\alpha/d\lambda)(\lambda_0)$ , ce système admet une unique solution. Par conséquent, en un point quelconque d'une variété, il passe une et une seule géodésique de direction donnée.

La propriété fondamentale d'une géodésique est d'*extrémiser localement la distance* entre deux points donnés. Dans une variété munie d'une métrique riemannienne, les géodésiques sont les courbes qui minimisent la distance entre deux points donnés, comme par exemple les arcs de grand cercle sur une sphère. Dans le cas d'une métrique de signature lorentzienne, on distingue :

- Les géodésiques du genre espace, qui minimisent la distance parmi toutes les courbes du genre espace entre deux points ;
- Les géodésiques du genre temps, qui maximisent la distance parmi toutes les courbes du genre temps entre deux points, comme prouvé dans l'annexe B ;
- Les géodésiques de longueur nulle, ou géodésiques lumière, qui sont des courbes du genre lumière obéissant à l'équation (2.65).

En effet, puisque le vecteur tangent  $t^a$  est transporté parallèlement à lui-même le long d'une géodésique, le produit scalaire  $g_{ab} t^a t^b$  est constant, de sorte que le genre d'une géodésique (temps, lumière, espace) est bien défini, au sens où il ne peut pas varier le long de la courbe. En relativité générale, les courbes géodésiques jouent un rôle de premier plan ; comme nous allons le voir dans le chapitre 3, les photons se déplacent le long de géodésiques lumière et les particules en chute libre le long de géodésiques du genre temps.

## CHAPITRE 3

# PHYSIQUE EN ESPACE-TEMPS COURBE

L'objectif de ce chapitre est de reformuler les lois de la physique dans le cadre de l'espace-temps courbe de la relativité générale, à l'exception de l'équation d'Einstein, qui fera l'objet du chapitre 4. Nous introduirons les concepts de ligne d'univers et de temps propre dans le § 3.1. Nous aborderons ensuite la cinématique relativiste dans le § 3.2, puis la dynamique relativiste dans le § 3.3. Le tenseur énergie-impulsion, source du champ de gravité en relativité générale, sera défini dans le § 3.4. Enfin, nous discuterons des liens entre symétries et lois de conservation dans le § 3.5, et des référentiels localement inertiels dans le § 3.6.

### 3.1 Lignes d'univers

#### *Photons*

En théorie classique des champs, la lumière est décrite par un champ électromagnétique. Le concept de *rayon lumineux*, ou de *photon*, apparaît alors comme une idéalisation d'un paquet d'ondes dans la limite de l'optique géométrique, où la longueur d'onde typique du rayonnement est petite par rapport aux échelles caractéristiques du problème. Dans le § 3.3 nous prouverons que, dans cette limite, un photon se propage nécessairement le long d'une géodésique de longueur nulle, c'est-à-dire d'une courbe dont le vecteur tangent est du genre lumière en tout point, et qui obéit à l'équation (2.65).

En un point  $p \in \mathcal{E}$  donné, l'ensemble des courbes représentant les photons a pour support un cône infinitésimal, le *cône de lumière* au point  $p$ , formé de tous les rayons lumineux émis depuis  $p$  ou reçus en  $p$ . Le fait que les cônes de lumière soient une structure intrinsèque de l'espace-temps  $(\mathcal{E}, g_{ab})$ , *i.e.* que leur définition ne fasse pas appel à la notion d'observateur, est la traduction mathématique de l'indépendance de la vitesse de la lumière par rapport à tous les observateurs inertiels ; l'un des postulats fondamentaux de la relativité.

Un photon est caractérisé par une géodésique de longueur nulle, mais également par la donnée d'un vecteur  $p^a$  tangent à cette courbe en tout point. Ce vecteur, qui a la dimension d'une impulsion, est la *quadri-impulsion* du photon. Il s'agit par définition d'un vecteur du genre lumière, de sorte que

$$g_{ab} p^a p^b = 0. \quad (3.1)$$

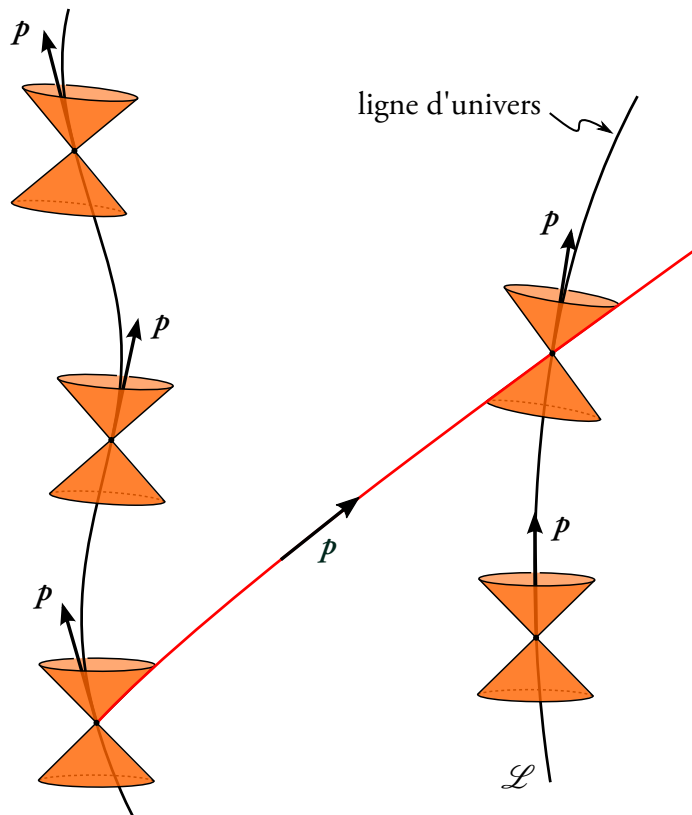
## Particules

Tout comme le photon, le point matériel ou *particule* de la mécanique classique devient une courbe dans l'espace-temps relativiste. Cette courbe, la *ligne d'univers*  $\mathcal{L}$  de la particule, décrit l'intégralité de son histoire. Alors que les courbes décrivant les photons doivent être du genre lumière, on postule que toute ligne d'univers est une courbe du genre temps, c'est-à-dire une courbe dont le vecteur tangent est du genre temps en tout point. Cette propriété mathématique traduit l'impossibilité pour une particule de voyager plus vite que la lumière. La ligne d'univers d'une particule est donc nécessairement confinée à l'intérieur du cône de lumière en tout point de sa trajectoire.

Une particule est également caractérisée par sa *quadri-impulsion*  $p^a$ , un champ de vecteurs tangents à sa ligne d'univers. Il s'agit par définition d'un vecteur du genre temps. Tout comme dans le cas d'un photon, la quadri-impulsion  $p^a$  contient l'intégralité de la description physique (non quantique) d'une particule sans spin ni structure interne. En particulier, le carré scalaire de  $p^a$  est constant,

$$g_{ab} p^a p^b = -m^2, \quad (3.2)$$

où la constante  $m > 0$  s'interprète comme la *masse* (ou masse au repos) de la particule. Dans la limite où  $m \rightarrow 0$ , la description d'une particule se réduit donc à celle d'un photon.





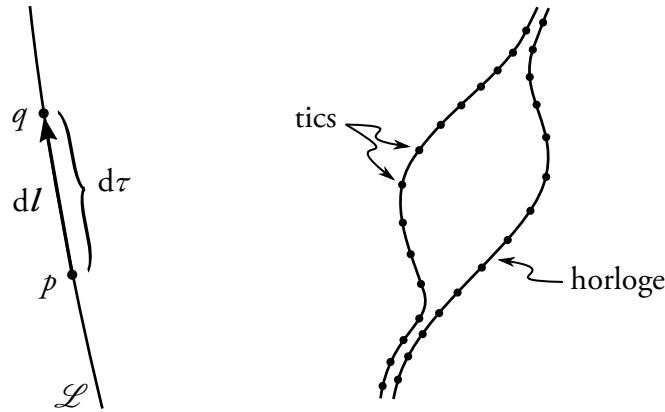
### Temps propre

Une interprétation physique fondamentale du tenseur métrique  $g_{ab}$  est liée à la mesure du temps écoulé le long de la ligne d'univers d'une particule. Soient  $p$  et  $q$  deux événements infinitésimalement voisins le long de la ligne d'univers  $\mathcal{L}$  d'une particule, tels que  $q$  est dans le futur de  $p$ . Comme le vecteur déplacement élémentaire  $dl^a$  du point  $p$  en  $q$  est tangent à la courbe  $\mathcal{L}$ , il est du genre temps, de sorte que l'intervalle d'espace-temps  $ds^2 = g_{ab}dl^a dl^b$  entre  $p$  et  $q$  est négatif. Le *temps propre* écoulé entre les événements  $p$  et  $q$  le long de  $\mathcal{L}$  est alors défini comme le nombre

$$d\tau \equiv (-ds^2)^{1/2}. \quad (3.3)$$

Cette grandeur correspond physiquement au temps mesuré par une horloge idéale qui serait transportée par la particule le long de sa trajectoire. Étant donné un paramétrage  $\mathcal{P}(\lambda)$  de la ligne d'univers  $\mathcal{L}$ , le déplacement élémentaire  $dl^a$  est relié au vecteur tangent  $v^a$  associé à ce paramétrage par l'Éq. (2.11), de sorte que la définition (3.3) du temps propre peut se réécrire sous la forme

$$d\tau = (-g_{ab}v^a v^b)^{1/2} d\lambda. \quad (3.4)$$



Considérons à présent deux événements  $p = \mathcal{P}(\lambda)$  et  $q = \mathcal{P}(\lambda')$  sur la ligne d'univers  $\mathcal{L}$ , que l'on ne suppose plus « infinitésimalement proches ». Alors le temps propre écoulé entre ces deux événements est simplement donné par l'intégrale de (3.3) le long de la courbe  $\mathcal{L}$  :

$$\tau(p, q) \equiv \int_p^q d\tau = \int_\lambda^{\lambda'} (-g_{ab}v^a v^b)^{1/2} d\lambda. \quad (3.5)$$

Ainsi, la longueur d'une courbe du genre temps entre deux points est égale au temps propre écoulé entre ces événements le long de la courbe. Supposons par exemple que deux jumeaux strictement identiques voient leurs lignes d'univers se croiser une première fois en  $p$ , puis une seconde fois en  $q$ . De manière générale, ces deux courbes n'auront pas la même longueur entre  $p$  et  $q$ , de sorte que l'un des jumeaux aura vieilli plus que l'autre entre ces événements.

### Quadrivitesse

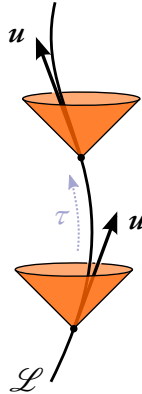
Le temps propre permet d'associer à la ligne d'univers d'une particule un champ de vecteurs tangents indépendant de tout paramétrage. On appelle *quadrivitesse* d'une particule de ligne d'univers  $\mathcal{L}$  le vecteur  $u^a \in T_p(\mathcal{E})$  défini en tout point  $p \in \mathcal{L}$  par

$$u^a \equiv \frac{dl^a}{d\tau}, \quad (3.6)$$

où  $dl^a$  est le vecteur de déplacement infinitésimal de  $p$  en un point voisin de  $\mathcal{L}$ , et  $d\tau$  est l'incrément de temps propre correspondant. Si l'on souhaite donner un sens mathématique rigoureux à la dérivée (3.6), on notera que  $u^a$  coïncide avec le vecteur tangent à la courbe  $\mathcal{L}$  lorsque celle-ci est paramétrée par le temps propre  $\tau$  lui-même. En combinant les Éqs. (3.3) et (3.6), ou alternativement en posant  $\lambda = \tau$  et  $v^a = u^a$  dans l'Éq. (3.4), on constate que la quadrivitesse est un vecteur *unitaire* pour la métrique  $g_{ab}$ , au sens où

$$g_{ab} u^a u^b = -1. \quad (3.7)$$

En physique pré-relativiste, le vecteur vitesse  $\vec{v}$  d'une particule mesure son taux de déplacement à travers l'espace. Il dépend autant d'un choix de référentiel que du mouvement de la particule elle-même, et la norme (euclidienne)  $\|\vec{v}\|$  peut varier le long de la trajectoire. En relativité générale, la quadrivitesse  $u^a$  d'une particule est une propriété intrinsèque à la particule, indépendante d'un choix de référentiel. La normalisation absolue (3.7) reflète le fait que  $u^a$  n'est pas une vitesse à travers l'espace, mais une vitesse « à travers l'espace-temps », dans lequel la particule voyage « toujours au même rythme ».



Par ailleurs, puisque la quadri-impulsion  $p^a$  d'une particule est tangente à sa ligne d'univers, les vecteurs  $p^a$  et  $u^a$  sont nécessairement colinéaires. Une comparaison des carrés scalaires (3.2) et (3.7) montre que le coefficient de proportionnalité est simplement donné par la masse  $m$  de la particule, de sorte que

$$p^a = m u^a. \quad (3.8)$$

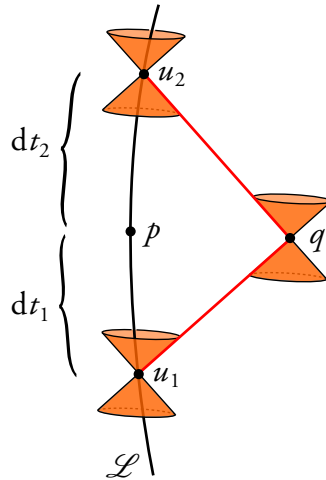
## 3.2 Cinématique relativiste

### *Simultanéité et espace local de repos*

Considérons un *observateur*  $\mathcal{O}$ , que nous modéliserons par une particule de ligne d'univers  $\mathcal{L}$ . Soit  $p$  un événement le long de  $\mathcal{L}$ , et soit  $q$  un événement infiniment voisin de  $p$ . Sous quelles conditions l'observateur  $\mathcal{O}$  qualifierait-il les événements  $p$  et  $q$  de simultanés ? Un critère possible de simultanéité est le suivant : l'observateur  $\mathcal{O}$  envoie un photon depuis un point  $u_1$ , qui est reçu en  $q$  puis réfléchi sans délai pour atteindre de nouveau l'observateur en un point  $u_2$ . Si  $t$  est la valeur du temps propre le long de  $\mathcal{L}$  au point  $p$ , alors les événements  $p$  et  $q$  sont dits *simultanés* si, et seulement si,

$$t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2), \quad (3.9)$$

où  $t_1$  et  $t_2$  correspondent aux temps propres respectifs des événements  $u_1$  et  $u_2$  le long de  $\mathcal{L}$ . En d'autres termes, les événements  $p$  et  $q$  sont dits simultanés si et seulement si l'intervalle de temps propre infinitésimal  $dt_1$  entre les événements  $u_1$  et  $p$  est égal à l'intervalle de temps propre infinitésimal  $dt_2$  entre les événements  $p$  et  $u_2$ .



Soit  $dt$  cet intervalle de temps propre commun, de sorte que  $-dt u^a$  est le vecteur joignant  $p$  et  $u_1$ , et  $dt u^a$  le vecteur joignant  $p$  et  $u_2$ . Notons  $dt n^a$  le vecteur infinitésimal joignant  $p$  et  $q$ . Comme les paires d'événements  $(u_1, q)$  d'une part, et  $(q, u_2)$  d'autre part, sont reliés par des rayons lumineux, les vecteurs  $dt u^a + dt n^a$  et  $dt u^a - dt n^a$  sont du genre lumière :

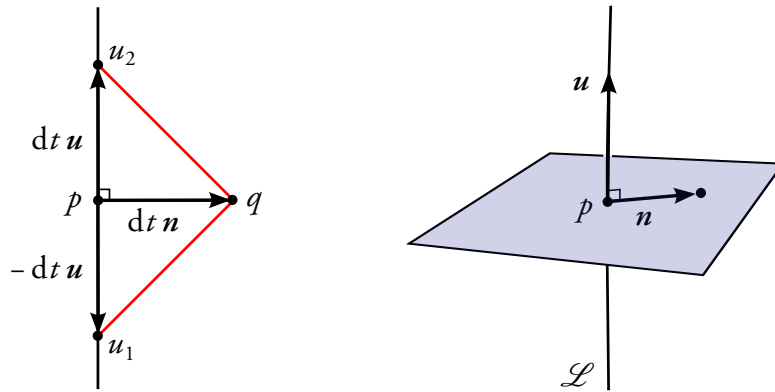
$$(u^a + n^a)(u_a + n_a) = 0, \quad (3.10a)$$

$$(u^a - n^a)(u_a - n_a) = 0. \quad (3.10b)$$

En développant ces deux équations et en soustrayant les résultats, on montre aisément que le critère de simultanéité (3.9) est équivalent à la condition d'orthogonalité

$$u^a n_a = 0. \quad (3.11)$$

En conclusion, au voisinage du point  $p$ , les événements de  $\mathcal{E}$  simultanés à  $p$  du point de vue de  $\mathcal{O}$  sont caractérisés par l'orthogonalité de leur séparation du point  $p$  et de la quadrivitesse  $u^a$  de  $\mathcal{O}$  en ce point. Ces événements définissent donc un sous-espace vectoriel de l'espace tangent  $T_p(\mathcal{E})$ , à savoir le sous-espace vectoriel perpendiculaire à  $u^a$ . La métrique  $g_{ab}$  étant une forme bilinéaire non dégénérée, ce sous-espace tri-dimensionnel ; il s'agit donc d'un hyperplan de  $T_p(\mathcal{E})$ . De plus, cet hyperplan est du genre espace, au sens où tous les vecteurs qui lui appartiennent sont du genre espace. (*Exercice : le vérifier.*) Cet ensemble est l'*espace local de repos* de l'observateur  $\mathcal{O}$  au point  $p$ . En termes « newtoniens », on peut l'interpréter comme l'espace à trois dimensions, à un instant donné, par rapport à l'observateur  $\mathcal{O}$ .



Il est important de remarquer que l'espace local de repos dépend à la fois de l'observateur et de l'événement considéré le long de sa ligne d'univers. En particulier, deux observateurs  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  dont les lignes d'univers  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  se croisent en un événement  $p$  ne possèdent pas le même espace local de repos en ce point ; la notion de simultanéité est donc *relative*.

### Facteur de Lorentz et vitesse relative

Considérons deux observateurs  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$ , dont les lignes d'univers  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  se croisent en un point  $p$ . Soient  $\tau$  et  $\tau'$  les temps propres de  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  en  $p$ . Au bout d'un intervalle de temps infinitésimal  $d\tau'$ , l'observateur  $\mathcal{O}'$  s'est déplacé du point  $p$  en  $q'$ . Soit  $\tau + d\tau$  la date attribuée par l'observateur  $\mathcal{O}$  à l'événement  $q'$ , conformément au critère de simultanéité développé au paragraphe précédent. Contrairement à ce que prédit la physique pré-relativiste,  $d\tau$  n'est pas égal à  $d\tau'$ . Le rapport de ces deux intervalles de temps propre définit le *facteur de Lorentz*  $\gamma$  de  $\mathcal{O}'$  par rapport à  $\mathcal{O}$  :

$$d\tau = \gamma d\tau'. \quad (3.12)$$

Exprimons le facteur de Lorentz en fonction des quadrivesses  $u^a$  et  $u'^a$  des observateurs  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$ . Soit  $q$  l'événement de  $\mathcal{L}$  considéré comme simultané avec  $q'$  par l'observateur  $\mathcal{O}$ , de sorte que  $d\tau u^a$  est le vecteur déplacement élémentaire de  $p$  en  $q$ . Notons  $d\tau v^a$  le vecteur déplacement infinitésimal joignant  $q$  et  $q'$ . Ce vecteur est orthogonal à  $u^a$ , car il appartient à l'espace local de repos de  $\mathcal{O}$ . Le vecteur  $v^a$  est la *vitesse de  $\mathcal{O}'$  relativement à  $\mathcal{O}$* , c'est-à-dire le déplacement de  $\mathcal{O}'$  par unité de temps propre de  $\mathcal{O}$ . On a donc  $d\tau' u'^a = d\tau u^a + d\tau v^a$ . En substituant  $d\tau$  en faveur de  $d\tau'$  à l'aide de l'Éq. (3.12), on obtient

$$u'^a = \gamma(u^a + v^a). \quad (3.13)$$

En contractant cette égalité avec  $u_a$  et en faisant usage du caractère unitaire de  $u^a$ , ainsi que de l'orthogonalité de  $u^a$  et  $v^a$ , c'est-à-dire  $u^a u_a = -1$  et  $v^a u_a = 0$ , on trouve

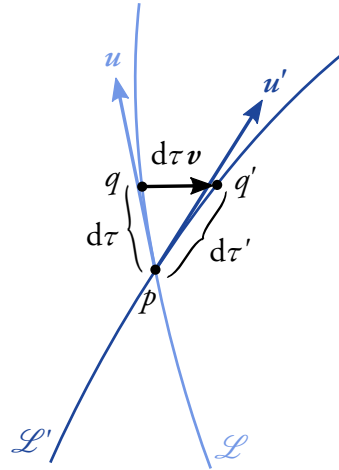
$$\gamma = -u^a u'_a. \quad (3.14)$$

Ainsi, du point de vue géométrique, le facteur de Lorentz correspond à l'opposé du produit scalaire entre les vecteurs unitaires tangents aux deux lignes d'univers considérées.

D'autre part, en prenant le carré scalaire de l'Éq. (3.13) et en utilisant les normalisations  $u'^a u'_a = -1$  et  $u^a u_a = -1$ , ainsi que la condition d'orthogonalité  $v^a u_a = 0$ , on obtient

$$\gamma = (1 - v^a v_a)^{-1/2}. \quad (3.15)$$

Le vecteur  $v^a$  est du genre espace,  $v^a v_a > 0$ , car il appartient à l'espace local de repos de  $\mathcal{O}$ ; par conséquent  $\gamma > 1$ , de sorte que  $d\tau > d\tau'$ . Il s'agit du célèbre phénomène de « dilatation des temps », bien connu en relativité restreinte.



### Décomposition spatiale et temporelle

L'équation (3.13) est un exemple de décomposition orthogonale d'un vecteur par rapport à la quadrivitesse d'un observateur. De manière générale, étant donné un observateur  $\mathcal{O}$  de quadrivitesse  $u^a$  tangente à sa ligne d'univers  $\mathcal{L}$ , tout vecteur  $v^a$  peut être décomposé de façon naturelle en une composante colinéaire à  $u^a$  et une composante orthogonale à  $u^a$  selon

$$v^a = \underbrace{-(v^b u_b) u^a}_{\text{colinéaire à } u^a} + \underbrace{(v^a + (v^b u_b) u^a)}_{\text{orthogonal à } u^a}. \quad (3.16)$$

Ces deux termes peuvent être interprétés comme les composantes « temporelle » et « spatiale » de  $v^a$  par rapport à  $u^a$ . La composante spatiale appartient à l'espace local de repos de  $\mathcal{O}$  au point considéré. En introduisant les opérateurs de *projection tangente et orthogonale* à  $u^a$ ,

$$k^a_b \equiv -u^a u_b, \quad (3.17a)$$

$$h^a_b \equiv \delta^a_b + u^a u_b, \quad (3.17b)$$

la décomposition (3.16) peut se réécrire sous la forme  $v^a = k^a_b v^b + h^a_b v^b$ . Ces deux tenseurs vérifient les propriétés attendues d'opérateurs de projection, à savoir

$$\begin{cases} k^a_b u^b = u^a \\ h^a_b u^b = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} k^a_c k^c_b = k^a_b, \\ h^a_c h^c_b = h^a_b. \end{cases} \quad (3.18)$$

Par exemple, étant donné un événement  $q$  infiniment voisin d'un événement  $p$  le long de  $\mathcal{L}$ , le vecteur déplacement élémentaire  $dl^a$  de  $p$  en  $q$  peut être décomposé, relativement à l'observateur  $\mathcal{O}$  de quadrivitesse  $u^a$ , selon

$$dl^a = k^a_b dl^b + h^a_b dl^b. \quad (3.19)$$

Le premier terme (resp. le second terme) représente ce que l'observateur appellerait le « déplacement temporel » (resp. le « déplacement spatial ») entre  $p$  et  $q$ , de sorte que l'intervalle de temps  $dt \equiv \|k^a_b dl^b\|_g$  et la distance spatiale  $dr \equiv \|h^a_b dl^b\|_g$  entre ces deux événements, tels que perçus par l'observateur  $\mathcal{O}$ , sont donnés par (*Exercice : le vérifier.*)

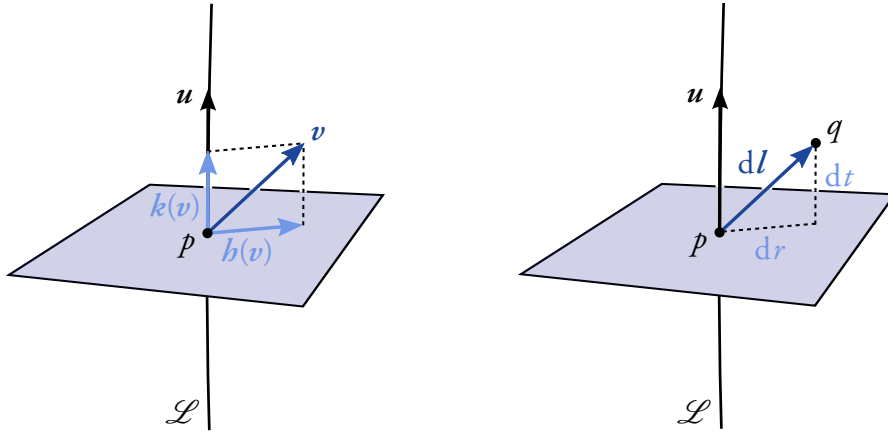
$$dt = -dl^a u_a, \quad (3.20a)$$

$$dr = (dl_a h^a_b dl^b)^{1/2}. \quad (3.20b)$$

En calculant le carré scalaire de (3.19), et en tenant compte de l'orthogonalité des « déplacements temporel et spatial »,  $(k^a_b dl^b)(h_{ac} dl^c) = 0$ , on trouve que l'observateur  $\mathcal{O}$  associe la décomposition suivante de l'intervalle d'espace-temps entre  $p$  et  $q$  :

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2. \quad (3.21)$$

Un deuxième observateur  $\mathcal{O}'$ , dont la ligne d'univers  $\mathcal{L}'$  croiserait  $\mathcal{L}$  au point  $p$ , associerait différents « déplacements temporel et spatial » aux événements  $p$  et  $q$ ,  $dt' \neq dt$  et  $dr' \neq dr$ , mais il tomberait d'accord sur la valeur de l'intervalle d'espace-temps :  $-dt'^2 + dr'^2 = ds^2$ . Ainsi, chaque observateur possède sa propre décomposition (locale) de l'espace-temps en « espace » et en « temps ». En ce sens, la perception intuitive de la différence entre l'espace et le temps, et leur union dans l'espace-temps, peuvent coexister.



## Énergie et quantité de mouvement

Enfin, considérons un observateur  $\mathcal{O}$  de ligne d'univers  $\mathcal{L}$  et de quadrivitesse  $u^a$ , ainsi qu'une particule de masse nulle (un photon) ou non (une particule matérielle) de quadri-impulsion  $p^a$ , dont la ligne d'univers  $\mathcal{L}'$  croise  $\mathcal{L}$  en un point  $p$ . Nous pouvons retrouver les expressions habituelles pour l'énergie et la quantité de mouvement de la particule, telles que mesurées par l'observateur  $\mathcal{O}$  au point  $p$ , en décomposant la quadri-impulsion  $p^a$  par rapport à la quadrivitesse  $u^a$ . En utilisant les Éqs. (3.16) et (3.17), il vient

$$p^a = \underbrace{-(p^b u_b)}_{\text{énergie } E} u^a + \underbrace{h^a_b p^b}_{\text{impulsion } P^a}. \quad (3.22)$$

L'énergie de la particule par rapport à  $\mathcal{O}$  est le coefficient apparaissant dans le premier terme,  $E \equiv -p^a u_a$ , c'est-à-dire la composante de  $p^a$  le long de  $u^a$ . La quantité de mouvement ou impulsion de la particule, telle que mesurée par l'observateur  $\mathcal{O}$ , est le second terme dans la décomposition (3.22) de la quadri-impulsion,  $P^a \equiv h^a_b p^b$ , c'est-à-dire la composante de  $p^a$  orthogonale à la quadrivitesse, et vérifiant donc  $P^a u_a = 0$ .

En calculant le carré scalaire de  $p^a$  et en utilisant les conditions de normalisation (3.1) ou (3.2) et (3.7), on obtient

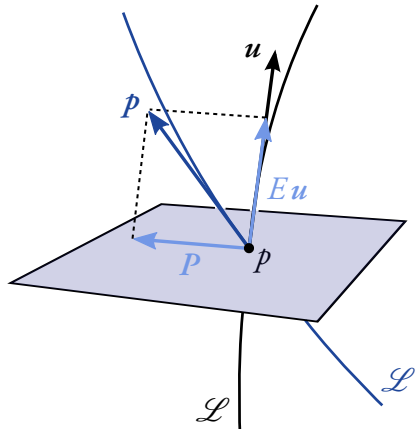
$$E^2 = P^a P_a + m^2. \quad (3.23)$$

Pour un photon,  $m = 0$ , de sorte que l'énergie est purement cinétique, avec  $E = (P^a P_a)^{1/2}$ . Dans le cas d'une particule de masse  $m > 0$ , si  $u'^a$  dénote sa quadrivitesse, alors  $p^a = m u'^a$ . Par conséquent, en exprimant le produit scalaire  $E = -p^a u_a$  en terme du facteur de Lorentz (3.14), et le vecteur  $P^a = p^a - E u^a$  en terme de la vitesse relative  $v^a$  à l'aide de l'Éq. (3.13), l'énergie et l'impulsion mesurées par l'observateur  $\mathcal{O}$  prennent la forme

$$E = m\gamma, \quad (3.24a)$$

$$P^a = m\gamma v^a. \quad (3.24b)$$

Si les lignes d'univers  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  coïncident, de sorte que les vecteur  $u^a$  et  $u'^a$  sont colinéaires,  $v^a = 0$  et  $\gamma = 1$ . Ainsi, dans le référentiel propre de la particule, la quantité de mouvement est nulle et l'énergie mesurée égale à l'énergie de masse :  $P^a = 0$  et  $E = m$ .

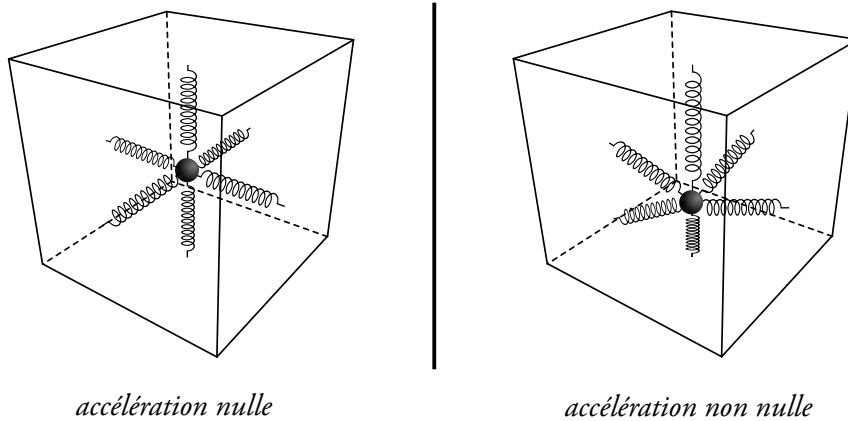


Comment se fait-il que les formules (3.21), (3.23) et (3.24) soient identiques à celles, bien connues, de la relativité restreinte, alors que nous travaillons dans le cadre de la relativité générale ? Tout simplement parce qu'elles résultent de mesure *locales* (effectuées au point  $p$ ), et que la courbure de l'espace-temps ne se manifeste que lorsque l'on effectue des mesures sur un domaine d'extension finie.

### 3.3 Dynamique relativiste

#### *Accélération*

Considérons un observateur de quadrivitesse  $u^a$ . En chaque point  $p$  de sa ligne d'univers  $\mathcal{L}$ , cet observateur peut déterminer par une mesure physique — à l'aide, par exemple, d'un accéléromètre — un vecteur  $a^b$  du genre espace orthogonal à sa quadrivitesse  $u^a$ . Ce vecteur est l'*accélération* de l'observateur. L'accélération est une grandeur locale, absolue, qui peut être mesurée sans aucune référence au « monde extérieur ». À titre d'exemple, l'observateur peut se munir d'une petite boîte cubique contenant une masse reliée aux centres des six faces de la boîte par des ressorts de tension identique. Le déplacement de la masse par rapport à sa position d'équilibre, au centre de la boîte, le renseigne alors sur la direction et l'amplitude de son accélération [L2].



D'autre part, en chaque point  $p$  de  $\mathcal{L}$  nous pouvons construire le vecteur  $c^b \equiv u^a \nabla_a u^b$ . Géométriquement, ce vecteur mesure la « courbure » de cette ligne d'univers (voir le § 2.5). Physiquement, il mesure le taux de variation de la quadrivitesse dans la direction de celle-ci, et possède donc les dimensions d'une accélération. Par ailleurs, en vertu de la normalisation  $u^a u_a = -1$ , ce vecteur est également orthogonal à  $u^a$ , car  $c^b u_b = \frac{1}{2} u^a \nabla_a (u^b u_b) = 0$ . Nous sommes donc conduits à postuler que l'accélération  $a^b$ , telle que mesurée physiquement par un observateur à l'aide d'un accéléromètre, coïncide avec la courbure géométrique  $c^b$  de sa ligne d'univers, de sorte que

$$a^b = u^a \nabla_a u^b. \quad (3.25)$$



### Notion de force

Si une particule de masse  $m$  et de quadrivitesse  $u^a$  possède une accélération (3.25) non nulle, alors celle-ci est attribuable à une *force* (ou à un ensemble de forces)  $f^a$  d'origine non gravitationnelle, et telle que

$$f^b = ma^b. \quad (3.26)$$

Cette relation peut être vue comme une généralisation de la seconde loi de la dynamique de Newton. La force (3.26) caractérise l'ensemble des influences non gravitationnelles exercées sur une particule. Nous verrons quelques exemples de forces par la suite. Puisque l'accélération (3.25) d'une particule est orthogonale à sa quadrivitesse  $u^a$ , la force s'exerçant sur une particule est un vecteur du genre espace, et tel que

$$f^a u_a = 0. \quad (3.27)$$

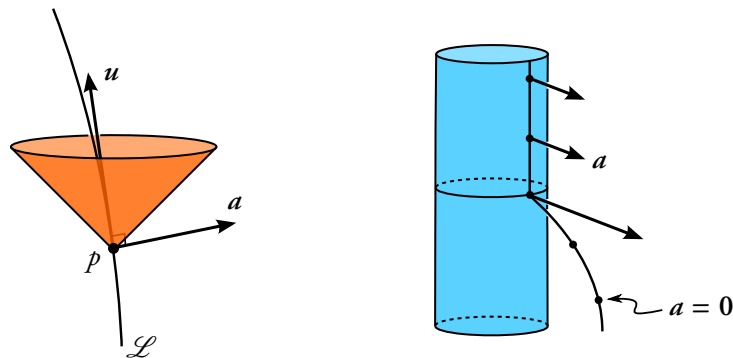
En physique pré-relativiste, il est courant de décrire les effets exercés par divers champs (électrique, gravitationnel, etc.) sur les particules en termes de champs de forces. Ainsi, on dispose d'un champ de vecteurs  $\vec{f}$  tel que, en chaque point, la force s'exerçant sur la particule est égale à  $\vec{f}$ . Une telle description est impossible dans l'espace-temps relativiste, puisque la force s'exerçant sur une particule est nécessairement orthogonale à sa quadrivitesse. En effet, si un champ de forces  $f^a$  dans l'espace-temps nous était donné par avance, nous pourrions toujours trouver un observateur donc la quadrivitesse  $u^a$  n'est pas orthogonale à  $f^a$ .

### Chute libre

Une particule soumise à la seule action de la gravité est dite en *chute libre*. En gravitation relativiste, une particule en chute libre possède un mouvement *inertiel*, ou mouvement non accéléré,  $a^b = 0$ , de sorte que sa quadrivitesse obéit à l'équation des géodésiques

$$u^a \nabla_a u^b = 0. \quad (3.28)$$

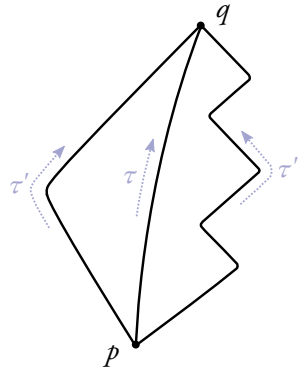
La ligne d'univers  $\mathcal{L}$  d'une particule en chute libre est donc une géodésique du genre temps. L'équation du mouvement (3.28) généralise aux espaces-temps courbes, c'est-à-dire en présence d'un champ de gravité, le principe d'inertie de la relativité restreinte. Dans le chapitre 4, nous verrons que ce résultat central est une conséquence de l'équation d'Einstein.



Comme évoqué dans le § 2.5, les géodésiques du genre temps ont la propriété de *maximiser* (localement) la longueur entre deux points. Par ailleurs, nous avons vu dans le § 3.1 que la longueur d'une ligne d'univers entre deux points coïncide avec le temps propre écoulé entre ces deux événements. Par conséquent, étant donnés deux événements  $p$  et  $q$  le long de la ligne d'univers d'une particule en chute libre, celle-ci vérifie la condition de stationnarité

$$\delta\tau(p, q) = 0. \quad (3.29)$$

Dans l'appendice B nous vérifierons, à l'aide de la formule (3.5), que cette condition conduit bien à l'équation des géodésiques sous la forme (2.66). De manière générale, le temps propre écoulé entre deux événements  $p$  et  $q$  est donc d'autant plus court que la ligne d'univers est accélérée. Ainsi, dans l'exemple ci-dessous,  $\tau(p, q) > \tau'(p, q) > \tau''(p, q)$ .



Les descriptions newtonienne et einsteinienne du mouvement d'une particule en chute libre dans un champ de gravité sont radicalement différentes. En gravitation newtonienne, le mouvement d'une particule en chute libre est non inertiel, car accéléré sous l'effet d'une force d'origine gravitationnelle,  $\vec{a} = \vec{\nabla}U$ . La particule décrit alors une courbe non géodésique dans un espace(-temps) plat. En gravitation relativiste, au contraire, le mouvement de la particule est inertiel et sa trajectoire géodésique, mais dans un espace-temps courbé par l'énergie et l'impulsion de la matière (voir le chapitre 4). Ce mouvement est universel, car déterminé exclusivement par la géométrie de l'espace-temps. La relativité générale explique ainsi naturellement l'observation de l'universalité du mouvement de chute libre.

### Électromagnétisme

Un champ électromagnétique est décrit par un champ tensoriel  $F_{ab}$  antisymétrique, le *tenseur de Faraday*. Ce champ peut être défini de manière opérationnelle, par la force qu'il exerce sur une particule d'épreuve chargée électriquement : si une particule de masse  $m$ , de charge  $e$ , et de quadrivitesse  $u^a$  est présente, alors la force exercée en ce point par le champ est  $f^a = eF^{ab}u_b$ , de sorte que l'équation du mouvement (3.26) prend la forme

$$m u^a \nabla_a u^b = e F^{bc} u_c. \quad (3.30)$$

La *force de Lorentz* s'exerçant sur une particule chargée est un exemple bien connu de force. En particulier, elle vérifie bien la contrainte  $f^a u_a = 0$  en vertu de l'antisymétrie du tenseur de Faraday, car  $F^{ab} u_a u_b = F^{[ab]} u_{(a} u_{b)} = 0$ .

D'autre part, les équations fondamentales décrivant la dynamique d'un champ électromagnétique  $F_{ab}$ , les *équations de Maxwell*, sont données par<sup>1</sup>

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0, \quad (3.31a)$$

$$\nabla_b F^{ab} = j^a. \quad (3.31b)$$

Le vecteur  $j^a$  est la *densité de quadri-courant* associée à une distribution de matière chargée. Tandis que l'équation de Lorentz (3.30) exprime l'action d'un champ électromagnétique sur une particule d'épreuve chargée, l'équation de Maxwell (3.31b) décrit l'action réciproque d'une distribution de matière chargée sur le champ électromagnétique.

En utilisant certaines des propriétés du tenseur de courbure, que nous introduirons dans le chapitre 4, on peut montrer à l'aide des Éqs. (3.31) que la densité de quadri-courant obéit identiquement à la contrainte

$$\nabla_a j^a = 0, \quad (3.32)$$

qui traduit la conservation locale de la charge. En effet, en chaque point de la ligne d'univers d'un observateur de quadrivitesse  $u^a$ , le scalaire  $\mu \equiv -j^a u_a$  correspond à la *densité de charge* telle que mesurée par cet observateur, tandis que la projection orthogonale à sa quadrivitesse,  $J^a \equiv h^a_b j^b$ , correspond à la *densité de courant* :

$$j^a = \underbrace{-(j^b u_b)}_{\text{densité de charge } \mu} u^a + \underbrace{h^a_b j^b}_{\text{densité de courant } J^a}. \quad (3.33)$$

Par exemple, dans le cas d'un fluide de poussière chargée caractérisée par un champ de quadrivitesse  $v^a$ , un champ de densité  $n$  (voir le § 3.4), et une charge électrique  $e$  par particule, la densité de quadri-courant est donnée par l'expression  $j^a = e n v^a$ . Un observateur comobile avec le fluide, c'est-à-dire dont la quadrivitesse  $u^a$  est égale à  $v^a$  en tout point, mesure alors une densité de charge  $\mu = e n$  et un courant  $J^a$  nul.

Par ailleurs, ce même observateur peut décomposer le champ électromagnétique  $F_{ab}$  en un *champ électrique*  $E_a$  et un *champ magnétique*  $B_a$  selon

$$E_a \equiv F_{ab} u^b, \quad (3.34a)$$

$$B_a \equiv \varepsilon_{abcd} u^b F^{cd}, \quad (3.34b)$$

où  $\varepsilon_{abcd}$  est un tenseur totalement antisymétrique normalisé de sorte que  $\varepsilon^{abcd} \varepsilon_{abcd} = -4!$ . La construction des champs électrique et magnétique à partir du champ électromagnétique requiert donc le choix d'un observateur ; deux observateurs en mouvement relatif perçoivent des champs électriques et magnétiques différents.

Les vecteurs associés aux formes linéaires (3.34) sont du genre espace, car ils sont tous deux orthogonaux à la quadrivitesse de l'observateur :  $E^a u_a = 0$  et  $B^a u_a = 0$ . Ils possèdent donc trois degrés de liberté chacun, dont la somme est équivalente aux six degrés de liberté contenus dans le tenseur de Faraday, qui peut s'exprimer sous la forme

$$F_{ab} = 2u_{[a} E_{b]} - \varepsilon_{abcd} u^c B^d. \quad (3.35)$$

<sup>1</sup>Il est commode d'utiliser un système d'unités où la constante de perméabilité du vide  $\mu_0 = 1$ .

On peut s'assurer que lorsque l'on remplace cette décomposition dans les définitions (3.34) des champs électrique et magnétique, on obtient bien des identités (*Exercice : le faire*). Par ailleurs, en substituant (3.35) dans les équations de Maxwell (3.31) et en projetant les relations résultantes parallèlement et perpendiculairement à la quadrivitesse  $u^a$  de l'observateur, on retrouve la forme usuelle des équations de Maxwell.

### Optique géométrique

La lumière et le champ électromagnétique ne sont pas des phénomènes physiques distincts, car la lumière n'est jamais qu'un ensemble d'ondes dans le champ électromagnétique. Toutes les propriétés de la lumière doivent donc pouvoir être dérivées à partir des équations de Maxwell. Dans ce paragraphe, nous allons établir les quelques propriétés des rayons lumineux, ou photons, que nous avons utilisées jusqu'à présent. Pour ce faire, considérons un champ électromagnétique de la forme

$$F_{ab} = A_{ab} e^{i\alpha\psi}, \quad (3.36)$$

où  $A_{ab}$  est un champ tensoriel antisymétrique,  $\psi$  un champ scalaire, et  $\alpha$  un nombre. [Il est entendu que seule la partie réelle de l'Éq. (3.36) joue un rôle physique.] Afin de modéliser un paquet d'ondes électromagnétiques, nous supposons que le champ  $A_{ab}$  est à support compact, c'est-à-dire non nul seulement à l'intérieur d'un tube dans l'espace-temps. Nous sommes intéressés par la limite où  $\alpha \rightarrow +\infty$ , de sorte que lorsque  $\psi$  varie un peu, le facteur  $\exp(i\alpha\psi)$  oscille un très grand nombre de fois. Il s'agit de la *limite de l'optique géométrique*, où la longueur d'onde typique du rayonnement est très petite par rapport aux autres échelles caractéristiques du problème.

En l'absence de matière chargée ( $j^a = 0$ ), les équations de Maxwell (3.31) avec la forme (3.36) du tenseur de Faraday impliquent

$$\nabla_{[a} A_{bc]} + i\alpha \nabla_{[a} \psi A_{bc]} = 0, \quad (3.37a)$$

$$\nabla_a A^{ab} + i\alpha \nabla_a \psi A^{ab} = 0. \quad (3.37b)$$

Dans la limite où  $\alpha \rightarrow +\infty$ , les premiers termes deviennent négligeables devant les seconds. Ainsi, en posant  $k_a \equiv \nabla_a \psi$ , nous obtenons une solution des équations de Maxwell du vide, dans la limite de l'optique géométrique, si et seulement si

$$k_{[a} A_{bc]} = 0, \quad (3.38a)$$

$$k_a A^{ab} = 0. \quad (3.38b)$$

En contractant (3.38a) avec  $k^a$  et en utilisant (3.38b), on obtient  $\frac{1}{3}(k^a k_a) A_{bc} = 0$ . Puisque  $A_{bc}$  est non nul, il vient nécessairement  $k^a k_a = 0$ . Le vecteur  $k^a$  est donc du genre lumière. En utilisant la définition de  $k^a$ , la condition d'absence de torsion, ainsi que la normalisation de  $k^a$ , on montre de plus que ce vecteur est tangent à une géodésique de longueur nulle :

$$k^a \nabla_a k_b = k^a \nabla_a \nabla_b \psi = k^a \nabla_b \nabla_a \psi = k^a \nabla_b k_a = \frac{1}{2} \nabla_b (k^a k_a) = 0. \quad (3.39)$$

Afin d'interpréter physiquement ces résultats, remarquons tout simplement que les surfaces de phase constante coïncident avec les surfaces  $\psi = \text{cst}$ . Puisque le vecteur  $k^a = \nabla^a \psi$  est orthogonal à ces surfaces, il fournit la direction de propagation du paquet d'ondes dans l'espace-temps. Ainsi, dans la limite de l'optique géométrique, un paquet d'ondes électromagnétiques se propage le long d'une géodésique du genre lumière. Puisque l'électrodynamique quantique nous apprend que la quadri-impulsion d'un photon est proportionnelle à son quadrivecteur d'onde,  $p^a = \hbar k^a$ , où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite, nous avons établi que les photons se propagent le long de géodésiques lumière.

Enfin, considérons un observateur  $\mathcal{O}$  de quadrivitesse  $u^a$ . Nous pouvons alors décomposer le quadrivecteur d'onde de la manière suivante :

$$k^a = \underbrace{-(k^b u_b)}_{\text{fréquence } \omega} u^a + \underbrace{h^a_b k^b}_{\text{vecteur d'onde } K^a}. \quad (3.40)$$

Le produit scalaire  $\omega \equiv u^a \nabla_a \psi$  est le taux de variation de la phase de l'onde par rapport au temps propre de  $\mathcal{O}$ , c'est-à-dire la *fréquence* de l'onde électromagnétique telle que mesurée par cet observateur. Ainsi, l'énergie d'un photon (par rapport à  $\mathcal{O}$ ) est donnée par la célèbre formule  $E = -p^a u_a = \hbar \omega$ . D'autre part, la composante de  $k^a$  orthogonale à la quadrivitesse de l'observateur,  $K^a \equiv h^a_b k^b$ , est le *vecteur d'onde* du rayonnement par rapport à  $\mathcal{O}$ . En comparant avec la décomposition (3.22) de la quadri-impulsion  $p^a$  d'un photon, nous retrouvons l'expression usuelle pour l'impulsion d'un photon, à savoir  $P^a = \hbar K^a$ .

### 3.4 Tenseur énergie-impulsion

En gravitation newtonienne, le potentiel gravitationnel est généré par la distribution de la densité de masse de la matière. En relativité générale, toute forme de matière et de rayonnement génère un champ gravitationnel à travers un certain tenseur symétrique  $T_{ab}$  ayant les dimensions d'une densité d'énergie, et que l'on appelle le *tenseur énergie-impulsion*. Afin de nous familiariser avec les propriétés de ce tenseur, étudions quelques exemples simples pour les types de matière que l'on rencontre le plus fréquemment en astrophysique<sup>2</sup>.

#### *Fluide de poussière*

Un fluide de poussière est composé d'un grand nombre de petites particules qui n'interagissent pas entre elles. En astrophysique, les étoiles dans une galaxie, les galaxies dans l'Univers, ou les particules de matière noire sont fréquemment modélisées comme des fluides de poussière. Un fluide de poussière est entièrement caractérisé par un *champ de quadrivitesse*  $u^a$  tangent aux lignes d'univers des particules, vérifiant donc  $u^a u_a = -1$ , ainsi que par un champ scalaire  $\rho$ , la *densité d'énergie de masse* du fluide, reliée à la densité numérique  $n$  par la formule usuelle  $\rho = mn$ , où  $m$  est la masse d'une particule.

<sup>2</sup>Le terme « matière » est à prendre ici au sens large, puisqu'il désigne nous seulement la matière ordinaire faite d'atomes et de molécules, mais également toute forme d'énergie-impulsion présente dans l'espace-temps, y compris celle du champ électromagnétique.

À quelles équations différentielles obéissent les champs tensoriels  $u^a$  et  $\rho$  ? Remarquons premièrement que, puisque les particules n'interagissent pas, elles ne subissent l'action d'aucune force. D'après la discussion du § 3.3, chaque particule de poussière possède donc un mouvement géodésique, de sorte que le champ de quadrivitesse vérifie

$$u^a \nabla_a u^b = 0. \quad (3.41)$$

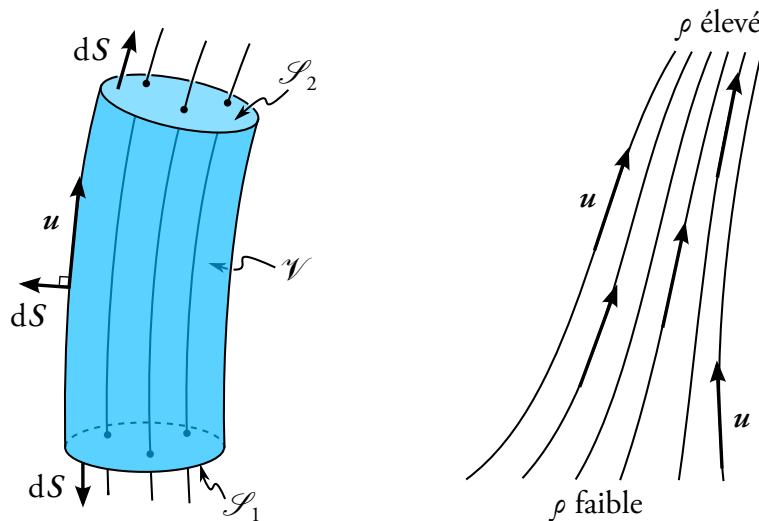
La seconde équation doit, quant à elle, exprimer la conservation de l'énergie (de masse), ou, puisque chaque particule a une masse  $m$  constante, la conservation du nombre de particules. Considérons donc un volume d'espace-temps  $\mathcal{V}$  dont les côtés sont parallèles à  $u^a$  et dont les faces  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont orthogonales à  $u^a$ . La masse en poussière entrant dans ce volume est donnée par l'intégrale  $\int_{\mathcal{S}_1} (\rho u^a) dS_a$ , où  $dS_a$  est l'élément de volume de la face  $\mathcal{S}_1$ , dirigé vers l'extérieur. De même, la masse en poussière sortant du volume  $\mathcal{V}$  est donnée par l'intégrale  $-\int_{\mathcal{S}_2} (\rho u^a) dS_a$ . Puisque le nombre de particules de poussière est conservé,

$$\int_{\partial\mathcal{V}} (\rho u^a) dS_a = 0, \quad (3.42)$$

où nous avons ajouté l'intégrale le long des côtés du tube ; cette dernière ne contribue pas car  $u^a dS_a = 0$  le long des côtés. En utilisant le théorème de Stokes (cf. annexe C), l'intégrale de surface (3.42) peut être convertie en une intégrale de volume spatio-temporel sur  $\mathcal{V}$ , de sorte que  $\int_{\mathcal{V}} \nabla_a (\rho u^a) dV = 0$ . Ce bilan devant être valable pour tout volume  $\mathcal{V}$  d'espace-temps, le fluide de poussière doit obéir à l'équation de continuité

$$\nabla_a (\rho u^a) = 0. \quad (3.43)$$

Intuitivement, cette équation exprime le fait que lorsque les lignes d'univers des particules se rapprochent les unes des autres (divergence  $\nabla_a u^a$  négative), la densité du fluide de poussière augmente le long du flot ; en effet, (3.43) peut se réécrire sous la forme  $u^a \nabla_a \rho = -\rho \nabla_a u^a$ . Ce comportement est attendu d'un ensemble de particules dont le nombre est conservé.



Les formules (3.41) et (3.43) peuvent être combinées en une unique équation exprimant la conservation locale de l'énergie et de l'impulsion. En effet, en multipliant l'Éq. (3.41) par  $\rho$  et l'Éq. (3.43) par  $u^b$ , puis en ajoutant les expressions résultantes, on obtient

$$\rho u^a \nabla_a u^b + u^b \nabla_a (\rho u^a) = 0. \quad (3.44)$$

En contractant cette équation avec  $u_b$  et en utilisant la normalisation  $u_b u^b = -1$ , qui implique  $u_b \nabla_a u^b = 0$ , on retrouve l'équation de continuité, de sorte que l'Éq. (3.44) implique (3.43). En utilisant cette dernière dans l'Éq. (3.44), on en déduit alors l'équation du mouvement (3.41). Par conséquent, l'Éq. (3.44) est complètement équivalente aux expressions (3.41) et (3.43). Enfin, notons que l'Éq. (3.44) peut se réécrire sous la forme compacte

$$\nabla_a T^{ab} = 0, \quad (3.45)$$

où l'on a posé  $T^{ab} \equiv \rho u^a u^b$ . Il s'agit du tenseur énergie-impulsion du fluide de poussière. La dynamique d'un tel fluide et donc entièrement caractérisée par l'équation de conservation (3.45), qui exprime la conservation locale de l'énergie et de l'impulsion. Notons également que le vecteur  $-T^a_b u^b = \rho u^a = n p^a$  est la densité de quadri-impulsion telle que mesurée par un observateur comobile avec le fluide, c'est-à-dire dont la quadrivitesse coïncide avec celle du fluide.

### Fluide parfait

Considérons à présent un fluide parfait, c'est-à-dire un fluide non dissipatif mais pourvu d'une énergie interne qui traduit l'agitation thermique des particules. Un tel fluide est caractérisé non seulement par un champ de quadrivitesse  $u^a$  et un champ de *densité d'énergie*  $\epsilon$ , mais également par un champ de *pression isotrope*  $p$ , conséquence de l'agitation thermique. (Cette description exclut des complications telle qu'une pression anisotrope, des contraintes de cisaillements, ou encore de la viscosité.) La densité d'énergie  $\epsilon$  et la pression  $p$  sont des champs scalaires, et peuvent être mesurées en tout point par un observateur comobile avec le fluide. Afin de compléter la description d'un fluide parfait, il est nécessaire de se donner une *équation d'état*  $p = p(\epsilon)$  reliant la pression à la densité d'énergie.

Tout comme dans le cas d'un fluide de poussière, nous pourrions proposer des équations différentielles raisonnables auxquelles doivent obéir les champs  $u^a$ ,  $\epsilon$  et  $p$ . Alternativement, nous allons énoncer la forme du tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait, puis vérifier que sa conservation conduit à une physique raisonnable. Ainsi, le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait est donné par

$$T_{ab} = (\epsilon + p) u_a u_b + p g_{ab}. \quad (3.46)$$

Un fluide de poussière est donc un cas particulier de fluide parfait, celui pour lequel l'équation d'état est simplement donnée par  $p(\epsilon) = 0$ , de sorte que  $\epsilon = \rho$  (pas d'énergie interne). On notera que lorsque la pression est non nulle, l'expression (3.46) fait explicitement intervenir la métrique. Le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait peut également s'écrire sous la forme  $T_{ab} = \epsilon u_a u_b + p h_{ab}$ , où nous rappelons que  $h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$  est l'opérateur de projection orthogonale au champ de quadrivitesse  $u^a$ .

Pour un fluide parfait, la loi de conservation de l'énergie et de l'impulsion,  $\nabla_a T^{ab} = 0$ , prend la forme  $(\epsilon + p)u^a \nabla_a u^b + h^{ab} \nabla_a p + p u^b \nabla_a u^a + u^b \nabla_a (\epsilon u^a) = 0$ . Afin d'extraire de la physique de cette équation, projetons-la parallèlement et orthogonalement à la quadrivitesse. En contractant cette équation avec  $u_b$ , il vient

$$\nabla_a (\epsilon u^a) = -p \nabla_a u^a. \quad (3.47)$$

Lorsque la pression est nulle,  $\epsilon = \rho$ , nous retrouvons l'équation de continuité (3.43) qui exprime la conservation de l'énergie de masse, ou, de manière équivalente, du nombre de particules. Par contre, lorsque la pression est non nulle l'énergie d'une particule fluide n'est plus conservée. En effet, la convergence (resp. la divergence) du flot,  $\nabla_a u^a < 0$  (resp.  $\nabla_a u^a > 0$ ), induit des forces de pression exerçant un travail susceptible d'augmenter (resp. de diminuer) l'énergie interne du fluide<sup>3</sup>, qui contribue à la densité d'énergie totale  $\epsilon$ .

Par ailleurs, en contractant l'équation de conservation avec le projecteur  $h_{bc}$ , on obtient l'équation du mouvement du fluide, la version relativiste de l'équation d'Euler, qui prend la forme

$$(\epsilon + p)u^a \nabla_a u^b = -h^{bc} \nabla_c p. \quad (3.48)$$

Le membre de droite fait intervenir la projection spatiale (orthogonale à  $u^a$ ) du gradient de pression ; il s'agit d'un second exemple de (densité de) force non gravitationnelle. Lorsque  $p = 0$  nous retrouvons le fait que les particules d'un fluide de poussière suivent un mouvement géodésique. Notons le facteur  $\epsilon + p$  en facteur de l'accélération, qui peut s'interpréter comme la « densité de masse inerte effective » du fluide parfait. En effet, en relativité générale la pression contribue — en plus de la densité d'énergie — à l'inertie d'un fluide.

### Champ électromagnétique

Considérons enfin le cas d'un champ électromagnétique  $F_{ab}$ , dont le tenseur énergie-impulsion est donné par l'expression suivante :

$$T_{ab} = F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd}. \quad (3.49)$$

Remarquons qu'en plus d'être symétrique, le tenseur (3.49) est de trace nulle :  $g^{ab} T_{ab} = 0$ . Par ailleurs, étant donné un observateur  $\mathcal{O}$  de quadrivitesse  $u^a$ , on peut montrer en utilisant la décomposition (3.35) du champ électromagnétique que

$$-T^a{}_b u^b = \frac{1}{2} (E^b E_b + B^b B_b) u^a + \varepsilon^{abc} E_b B_c, \quad (3.50)$$

où  $\varepsilon_{abc} \equiv \varepsilon_{abcd} u^d$  est un tenseur totalement antisymétrique associé à l'espace local de repos de  $\mathcal{O}$ . On reconnaît dans le coefficient en facteur de la quadrivitesse  $u^a$  l'expression usuelle de la densité d'énergie associée au champ électromagnétique, et dans le second terme le vecteur de Poynting, *i.e.* la densité d'impulsion associée au champ. Ainsi, le vecteur  $-T^a{}_b u^b$  représente la densité de quadri-impulsion dans le champ électromagnétique par rapport à un observateur de quadrivitesse  $u^a$ .

<sup>3</sup>Cette situation est comparable à l'augmentation (resp. la diminution) de la température d'un gaz parfait dans un cylindre comprimé (resp. détendu) par des forces de pression exercées par l'intermédiaire d'un piston.



Le tenseur énergie-impulsion (3.49) est-il, lui aussi, conservé? Afin de s'en assurer, calculons sa divergence à l'aide des équations de Maxwell (3.31) :

$$\begin{aligned}\nabla_a T^{ab} &= F^{bc} \nabla_a F_c^a + F_c^a \nabla_a F^{bc} - \frac{1}{2} F_{cd} \nabla^b F^{cd} \\ &= F^{bc} \nabla^a F_{ac} - \frac{3}{2} F_{cd} \nabla^{[b} F^{cd]} = -F^{bc} j_c.\end{aligned}\quad (3.51)$$

En l'absence de matière chargée,  $j^a = 0$ , de sorte que l'énergie et l'impulsion d'un champ électromagnétique  $F_{ab}$  isolé sont bien conservées. Par contre, lorsque  $j^a$  est non nul, le tenseur énergie-impulsion du champ n'est pas conservé, car celui-ci peut échanger de l'énergie et de l'impulsion avec la matière chargée *via* le terme de couplage  $j^a F_{ab}$ . D'ailleurs, dans le cas d'un fluide de poussière chargée, dont le tenseur énergie-impulsion est  $T^{ab} = \rho u^a u^b$ , l'équation de continuité (3.43) et l'équation du mouvement (3.30) impliquent

$$\nabla_a T^{ab} = u^b \nabla_a (\rho u^a) + \rho u^a \nabla_a u^b = F^{bc} j_c.\quad (3.52)$$

Ainsi, bien que les tenseurs énergie-impulsion du champ électromagnétique et de la matière ne sont pas conservés séparément, le tenseur énergie-impulsion *total* du système champ plus matière vérifie l'équation de conservation (3.45).

## Bilan

Dans les paragraphes ci-dessus, nous avons étudié quelques exemples simples de champs de « matière ». Il existe bien entendu de nombreux autres types de matière : fluide dissipatif, solide, champ scalaire, etc. Ces exemples nous ont permis de dégager quelques propriétés générales qui se trouvent être vérifiées par toutes les formes de matière connues, et que nous allons maintenant résumer.

En gravitation relativiste, toute forme de matière est caractérisée par un certain tenseur symétrique  $T_{ab}$  admettant l'interprétation suivante : étant donné un observateur  $\mathcal{O}$  de quadrivitesse  $u^a$ , le vecteur  $-T^a_b u^b$  est la *densité de quadri-impulsion* telle que mesurée par  $\mathcal{O}$ . Celle-ci peut être décomposée en composantes temporelle et spatiale,

$$-T^a_b u^b = \underbrace{(T_{bc} u^b u^c)}_{\text{densité d'énergie}} u^a - \underbrace{T_{bc} u^b h^{ca}}_{\text{densité d'impulsion}},\quad (3.53)$$

de la même façon que la quadri-impulsion  $p^a$  d'une particule a été décomposée en énergie et en quantité de mouvement dans l'Éq. (3.22). Le coefficient dans le premier terme,  $T_{ab} u^a u^b$ , est la *densité d'énergie* relativement à  $\mathcal{O}$ . Le second terme,  $-T_{bc} u^b h^{ca}$ , est orthogonal à  $u^a$  et représente la densité de quantité de mouvement, ou *densité d'impulsion*, telle que mesurée par cet observateur.

Par ailleurs, les formes de matière en présence peuvent interagir localement, échangeant ainsi de l'énergie et de la quantité de mouvement, mais l'énergie totale et la quantité de mouvement totale doivent être conservées localement, de sorte que le tenseur énergie-impulsion de l'ensemble du système — égal à la somme des tenseurs énergie-impulsion des « espèces » en présence — vérifie l'équation de conservation

$$\nabla^a T_{ab} = 0.\quad (3.54)$$

### 3.5 Symétries et lois de conservation

La notion de symétrie joue un rôle de premier plan en physique. En effet, la résolution d'un problème de physique peut être simplifiée drastiquement par quelques considérations de symétrie. À un niveau plus fondamental, le théorème de Noether révèle que l'existence de symétries est intimement liée à celle de quantités conservées. Il en va de même en relativité générale où, bien souvent, toutes les informations simples et utiles à l'égard d'un espace-temps découlent de la présence de symétries.

#### *Champ vectoriel de Killing*

Supposons qu'un espace-temps  $(\mathcal{E}, g_{ab})$  vérifie la propriété suivante : il existe (au moins) un système de coordonnées  $(x^\alpha)$  tel que toutes les composantes  $g_{\alpha\beta}$  de la métrique soient indépendantes de l'une des coordonnées, disons  $x^{\tilde{\alpha}}$ , de sorte que

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\tilde{\alpha}}} = 0. \quad (3.55)$$

Les composantes de la métrique demeurent alors inchangées par translation  $x^{\tilde{\alpha}} \rightarrow x^{\tilde{\alpha}} + \text{cst.}$  de la coordonnée  $x^{\tilde{\alpha}}$ . En d'autres termes, la métrique est invariante par déplacement<sup>4</sup> le long des lignes de champ du vecteur  $(\partial_{\tilde{\alpha}})^a$ , qui correspond à l'un des vecteurs de la base naturelle associée aux coordonnées  $(x^\alpha)$ .

La propriété (3.55) est spécifique au système de coordonnées  $(x^\alpha)$ , et les composantes de la métrique ne satisferont pas, de manière générale, de propriété similaire dans un autre système de coordonnées. C'est pourquoi il est souhaitable de reformuler la propriété (3.55) sous une forme intrinsèque, indépendante d'un choix de coordonnées. Pour ce faire, remarquons que le vecteur  $k^a \equiv (\partial_{\tilde{\alpha}})^a$  a pour composantes  $k^\alpha = \delta^{\alpha}_{\tilde{\alpha}}$  dans la base naturelle associée aux coordonnées  $(x^\alpha)$ , de sorte que (3.55) peut se réécrire sous la forme  $k^c \partial_c g_{ab} = 0$ , où  $\partial_a$  est la dérivée ordinaire associée aux coordonnées  $(x^\alpha)$ . Par ailleurs,

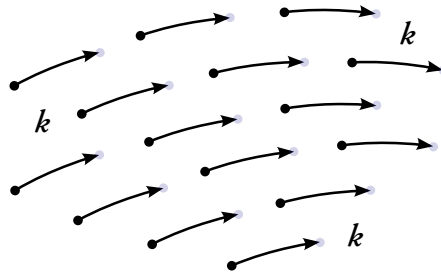
$$\begin{aligned} k^c \partial_c g_{ab} &= k^c (\nabla_c g_{ab} + \Gamma^d_{ac} g_{bd} + \Gamma^d_{bc} g_{ad}) \\ &= g_{bd} (\partial_a k^d + \Gamma^d_{ac} k^c) + g_{ad} (\partial_b k^d + \Gamma^d_{bc} k^c) \\ &= g_{bd} \nabla_a k^d + g_{ad} \nabla_b k^d, \end{aligned} \quad (3.56)$$

où l'on a utilisé l'Éq. (2.60) dans la première égalité, la condition de compatibilité (2.59) et le fait que  $\partial_a k^b = 0$  dans la seconde égalité, ainsi que la définition de la dérivée covariante d'un vecteur dans la troisième. Par conséquent, la propriété (3.55) peut se réexprimer sous la forme géométrique

$$\nabla_{(a} k_{b)} = 0. \quad (3.57)$$

Cette équation est l'*équation de Killing*, et ses solutions des (champs de) *vecteurs de Killing*. L'équation de Killing étant linéaire, un vecteur de Killing  $k^a$  n'est défini qu'à une constante multiplicative près.

<sup>4</sup>Il est possible de donner un sens mathématique rigoureux à cette affirmation, en introduisant la notion de dérivée d'un champ tensoriel le long d'un champ de vecteurs, que l'on appelle *dérivée de Lie*.



Naturellement, un espace-temps est dit *stationnaire* s'il possède un champ de vecteurs de Killing qui est du genre temps en tout point. Un espace-temps stationnaire est dit *statique* si ce champ de vecteurs est, de plus, orthogonal à une famille d'hypersurfaces du genre espace. Physiquement, un système stationnaire présente les mêmes propriétés à chaque instant, mais il n'est pas invariant par renversement du temps, contrairement à un système statique. Un espace-temps est dit *axisymétrique* s'il possède un champ de vecteurs de Killing qui est du genre espace en tout point et dont les lignes de champ sont des courbes fermées. Nous verrons des exemples d'espaces-temps statiques, stationnaires, et/ou axisymétriques lorsque nous étudierons le champ gravitationnel à symétrie sphérique puis les trous noirs en rotation dans les chapitres 5 et 6.

### *Intégrales premières du mouvement*

De manière cruciale, l'existence d'un champ de vecteurs de Killing implique celle d'une *intégrale première*, ou constante du mouvement, le long de chaque courbe géodésique. En effet, si  $p^a$  est la quadrimpulsion d'une particule en chute libre ou d'un photon se déplaçant le long d'une géodésique  $\mathcal{L}$  dans un espace-temps doté d'un champ de vecteurs de Killing  $k^a$ , alors le scalaire  $p^a k_a$  est conservé le long de  $\mathcal{L}$ , puisque

$$p^a \nabla_a (p^b k_b) = (p^a \nabla_a p^b) k_b + p^a p^b \nabla_a k_b = p^a p^b \nabla_{(a} k_{b)} = 0. \quad (3.58)$$

La seconde égalité découle de l'équation des géodésiques (3.28) et du fait que le tenseur  $p^a p^b$  est symétrique. Nous avons utilisé l'équation de Killing (3.57) dans la troisième égalité.

La conservation de  $k^a p_a$  le long de  $\mathcal{L}$  peut également se comprendre en introduisant un système de coordonnées  $(x^\alpha)$  adapté à la symétrie, *i.e.* tel que  $k^a = (\partial_{\bar{\alpha}})^a$ . Alors  $k^a p_a = p_{\bar{\alpha}}$  correspond à la composante de la quadri-impulsion le long de la direction  $(\partial_{\bar{\alpha}})^a$  associée à la coordonnée  $x^{\bar{\alpha}}$ . Cette quantité est conservée en vertu de l'équation des géodésiques (3.28), qui peut être écrite sous la forme équivalente (*Exercice : le vérifier*)

$$p^a \partial_a p_c = \frac{1}{2} (\partial_c g_{ab}) p^a p^b. \quad (3.59)$$

En effet, la composante  $\alpha = \bar{\alpha}$  de cette équation implique, grâce à (3.55), que  $dp_{\bar{\alpha}}/d\tau = 0$ .

Le résultat (3.58) s'avère particulièrement utile pour étudier le mouvement orbital d'un corps matériel ou la trajectoire d'un photon dans un champ gravitationnel à symétrie sphérique, ou autour d'un trou noir en rotation, comme nous le verrons dans les chapitres 5 et 6. Il permet en effet de contourner la résolution de l'équation des géodésiques sous la forme (2.66) d'un système d'équations différentielles du second ordre couplées, et de travailler à la place avec des intégrales premières du mouvement.

### Symétries et énergie-impulsion

Il existe une autre catégorie de quantités conservées en présence d'un champ de vecteurs de Killing, associées cette fois-ci à un système physique étendu. En effet, si  $k^a$  est un champ de vecteurs de Killing et  $T_{ab}$  le tenseur énergie-impulsion associé à un ensemble de champs de matière, alors le courant  $T^{ab}k_b$  est de divergence nulle :

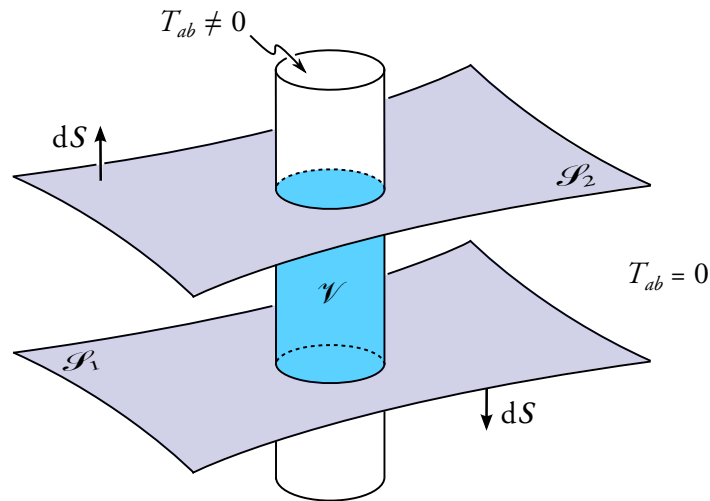
$$\nabla_a(T^{ab}k_b) = (\nabla_a T^{ab})k_b + T^{ab}\nabla_a k_b = T^{ab}\nabla_{(a}k_{b)} = 0. \quad (3.60)$$

La seconde égalité découle de l'équation de conservation (3.54) et du fait que le tenseur  $T^{ab}$  est symétrique, tandis que nous avons utilisé l'équation de Killing (3.57) dans la troisième égalité. Il est donc naturel d'appliquer le théorème de Stokes au vecteur  $T^{ab}k_b$ .

Considérons un système physique isolé, dans un univers autrement vide de matière. Il existe alors un « tube d'univers » tel que  $T_{ab} = 0$  en dehors de ce tube. Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux hypersurfaces du genre espace qui intersectent ce tube (et qui ne se croisent pas). Soit alors  $\mathcal{V}$  le segment de tube compris entre  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ . D'après le théorème de Stokes,

$$\int_{\mathcal{S}_2} (T^{ab}k_b) dS_a - \int_{\mathcal{S}_1} (T^{ab}k_b) dS_a = \int_{\partial\mathcal{V}} (T^{ab}k_b) dS_a = \int_{\mathcal{V}} \nabla_a(T^{ab}k_b) dV = 0. \quad (3.61)$$

L'intégrale  $Q \equiv \int_{\mathcal{S}} (T^{ab}k_b) dS_a$  ne dépend pas du choix de l'hypersurface  $\mathcal{S}$  qui intersecte le tube d'univers, et donc du « temps ». C'est en ce sens qu'il s'agit d'une quantité conservée associée à la distribution de matière. L'interprétation physique de cette grandeur dépend de la nature du vecteur de Killing. Par exemple, si  $k^a$  est du genre temps, alors  $Q$  s'interprète comme la masse du système associée à cette symétrie. Si  $k^a$  est du genre espace et est associé à une invariance par translation (resp. rotation), alors  $Q$  s'interprète comme une composante de la quantité de mouvement (resp. du moment cinétique) du système. On peut ainsi définir la masse et le moment cinétique d'une étoile stationnaire et axisymétrique en rotation.



### 3.6 Référentiels localement inertiels

En relativité restreinte, il existe une infinité de systèmes de coordonnées couvrant entièrement l'espace-temps de Minkowski  $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$  et tels que, en *tout* point, les composantes de la métrique de Minkowski prennent la forme

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1). \quad (3.62)$$

Un tel système de coordonnées définit un référentiel *globalement* inertiel. En relativité générale, au contraire, il n'existe pas de système de coordonnées vérifiant cette propriété pour un espace-temps  $(\mathcal{E}, g_{ab})$  générique. Cette impossibilité est précisément due à l'existence d'un champ gravitationnel, qui se manifeste à travers la courbure de la métrique  $g_{ab}$ . Toutefois, il est toujours possible d'introduire un système de coordonnées  $(x^\alpha)$  tel que, en un point  $p \in \mathcal{E}$  quelconque, les composantes de la métrique et ses dérivées premières vérifient

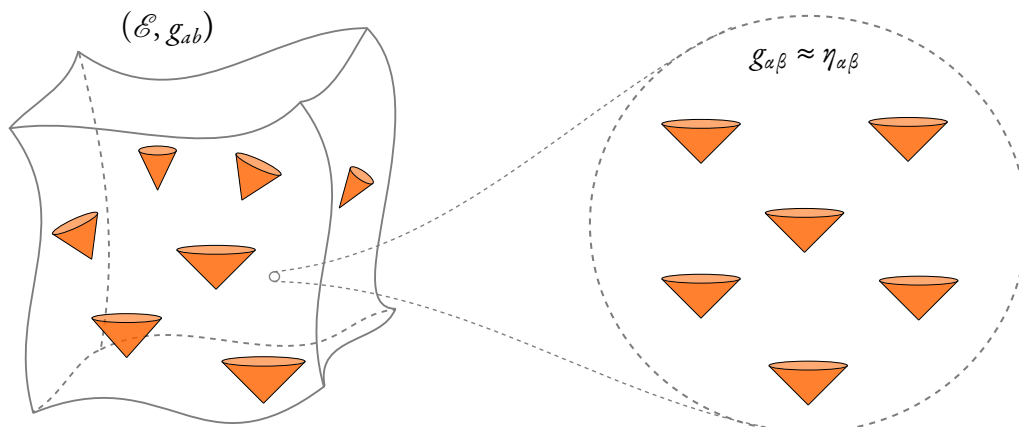
$$g_{\alpha\beta}(p) = \eta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \right|_p = 0. \quad (3.63)$$

Un système de coordonnées vérifiant ces deux conditions est un *référentiel localement inertiel* au point  $p$ . Les conditions (3.63) peuvent, bien entendu, être vérifiées à n'importe quel autre point, mais dans un système de coordonnées différent.

Dans un référentiel localement inertiel, les lois de la physique prennent, localement, la même forme qu'en relativité restreinte. En effet, dans un tel système de coordonnées, toutes les composantes du symbole de Christoffel (2.62) associé à ces coordonnées sont nulles au point  $p$ ,

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \Big|_p = 0, \quad (3.64)$$

de sorte que la dérivée covariante se réduit à la dérivée ordinaire associée à ces coordonnées. En particulier, l'expression (2.66) de l'équation des géodésiques se réduit, au point  $p$ , à celle valable en relativité restreinte en coordonnées inertielles, à savoir  $(d^2 X^\alpha / d\lambda^2)(p) = 0$ . Les référentiels localement inertiels sont la réalisation mathématique du principe d'équivalence, d'après lequel il est toujours possible d'effacer, localement, l'effet d'un champ gravitationnel par un changement de système de coordonnées.



### Coordonnées normales de Riemann

La manière la plus simple de prouver l'existence de référentiels localement inertiels est d'exhiber un système de coordonnées vérifiant les conditions (3.63). Considérons donc un point  $p$ , que nous choisirons comme l'origine de nos coordonnées  $(x^\alpha)$ , ainsi qu'une *tétrade* en ce point, c'est-à-dire un ensemble de quatre vecteurs  $(e_\alpha)^a$  unitaires et orthogonaux :

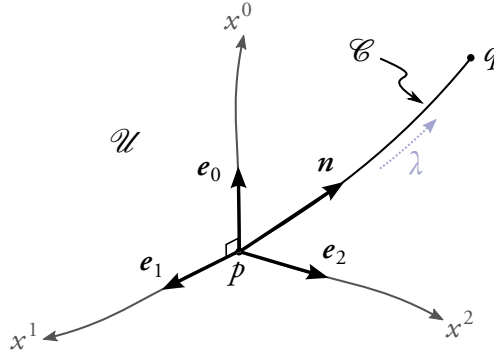
$$g_{ab}(e_\alpha)^a(e_\beta)^b = \eta_{\alpha\beta}. \quad (3.65)$$

Tandis que  $(e_0)^a$  est du genre temps, les trois vecteurs  $(e_i)^a$ , avec  $i \in \{1, 2, 3\}$ , sont du genre espace. Cette tétrade peut, par exemple, coïncider avec la base vectorielle orthonormale d'un laboratoire associé à un observateur en  $p$ , auquel cas  $(e_0)^a$  coïncide avec la quadrivitesse  $u^a$  de cet observateur.

D'autre part, dans une région  $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}$  suffisamment petite au voisinage de l'événement  $p$ , il existe une *unique* courbe géodésique  $\mathcal{C}$  qui connecte un point quelconque  $q \in \mathcal{U}$  à  $p$ . Soit  $n^a$  le vecteur unitaire tangent à cette courbe au point  $p$ . Nous pouvons alors attribuer à l'événement  $q$  les coordonnées

$$x^\alpha \equiv \lambda n^\alpha, \quad (3.66)$$

où les nombres  $n^\alpha$  sont les composantes du vecteur  $n^a$  par rapport à la base  $(e_\alpha)^a$ , et  $\lambda = s$  (resp.  $\lambda = \tau$ ) est la distance géodésique (resp. le temps propre) entre  $p$  et  $q$  si la courbe  $\mathcal{C}$  est du genre espace (resp. du genre temps). Le cas d'une géodésique de longueur nulle se traite par continuité. Les coordonnées ainsi définies sont des *coordonnées normales de Riemann* au point  $p$ . Montrons qu'elles définissent bien un référentiel localement inertiel en ce point.



Par définition des coordonnées normales de Riemann  $(x^\alpha)$ , les vecteurs  $(\partial_\alpha)^a$  de la base naturelle associée coïncident avec les vecteurs  $(e_\alpha)^a$  de la base orthonormale au point  $p$ . Par conséquent, en combinant les Éqs. (2.34) et (3.65), on obtient

$$g_{\alpha\beta}(p) = \eta_{\alpha\beta}. \quad (3.67)$$

La première condition pour un référentiel localement inertiel est donc bien vérifiée. D'autre part, si la géodésique  $\mathcal{C}$  a pour équation paramétrique  $x^\alpha = X^\alpha(\lambda)$ , alors par définition des coordonnées normales de Riemann, nous avons  $dX^\alpha/d\lambda = n^\alpha$  et  $d^2X^\alpha/d\lambda^2 = 0$  au point  $p$ , de sorte que l'équation des géodésiques (2.66) implique

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \Big|_p n^\alpha n^\beta = 0. \quad (3.68)$$

Cette relation devant être valable pour toute direction  $n^a$ , on en déduit immédiatement que  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma|_p = 0$ . La condition de compatibilité (2.60) implique alors que la seconde condition pour un référentiel localement inertiel est bien vérifiée, c'est-à-dire  $\partial g_{\alpha\beta}/\partial x^\gamma|_p = 0$ .

### Référentiel en chute libre

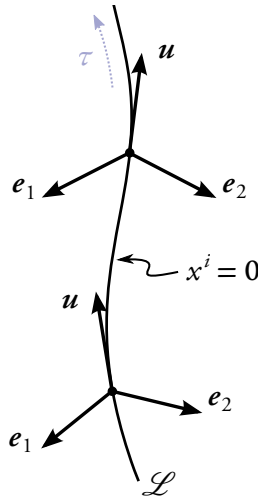
Le principe d'équivalence suggère fortement qu'il devrait être possible de construire un référentiel localement inertiel non seulement en un point, mais tout le long de la ligne d'univers d'un observateur en chute libre. Considérons donc un observateur  $\mathcal{O}$  en chute libre, de quadrivitesse  $u^a$  tangente à sa ligne d'univers  $\mathcal{L}$ . Au voisinage de  $\mathcal{L}$ , cet observateur peut construire un système de coordonnées  $(x^\alpha)$  de la façon suivante.

La coordonnée temporelle  $x^0 = \tau$  coïncide avec le temps propre écoulé le long de  $\mathcal{L}$ , avec les coordonnées spatiales  $x^i$  centrées sur  $\mathcal{O}$ . En un point  $p \in \mathcal{L}$  donné, l'observateur  $\mathcal{O}$  peut introduire une tétrade  $(e_\alpha)^a$  et construire un référentiel localement inertiel selon la procédure décrite précédemment. Le vecteur  $(e_0)^a$  coïncide alors avec la quadrivitesse  $u^a$  de l'observateur au point  $p$ , et les directions spatiales  $(e_i)^a$  avec les axes de rotation de trois gyroscopes. En tout autre point de  $\mathcal{L}$ , la base orthonormale  $(e_\alpha)^a$  est alors déterminée par transport parallèle le long de cette courbe,

$$u^a \nabla_a (e_\alpha)^b = 0, \quad (3.69)$$

de sorte que la condition d'orthonormalité (3.65) est préservée. En effet, puisque  $\mathcal{L}$  est une géodésique du genre temps, le vecteur  $(e_0)^a = u^a$  est transporté parallèlement à lui-même le long de  $\mathcal{L}$ , et nous verrons dans le chapitre 5 que la direction d'un gyroscope transporté par un observateur en chute libre obéit à l'Éq. (3.69).

Les coordonnées  $(x^\alpha) = (\tau, x^i)$  ainsi définies, dans un voisinage de  $\mathcal{L}$ , sont des *coordonnées normales de Fermi* associées à l'observateur. Par construction, le symbole de Christoffel associé est nul le long de la géodésique  $\mathcal{L}$ , à l'origine spatiale des coordonnées ( $x^i = 0$ ). Ces coordonnées sont la réalisation mathématique de la notion de *référentiel en chute libre*, c'est-à-dire de la donnée d'un référentiel localement inertiel tout le long de la ligne d'univers d'un observateur en chute libre.



Dans la pratique, les référentiels localement inertiels en général, et les coordonnées normales de Fermi en particulier, s'avèrent particulièrement utiles. Ainsi, afin de résoudre un problème de relativité générale bien posé, on s'efforcera d'appliquer les deux *règles d'or* [C2] suivantes :

- (i) Décrire tout processus de mesure comme une configuration géométrique sur l'espace-temps  $(\mathcal{E}, g_{ab})$ , et exprimer le résultat de cette mesure par un *invariant* de  $(\mathcal{E}, g_{ab})$  ;
- (ii) À l'aide d'un ou plusieurs référentiels localement inertiels, réduire la description de certains effets physiques *locaux* à leur description en relativité restreinte.

Nous verrons plusieurs exemples d'application de cette stratégie dans le chapitre 5, lorsque nous étudierons les orbites des corps matériels, les trajectoires des photons, et la précession des gyroscopes dans un champ gravitationnel à symétrie sphérique.



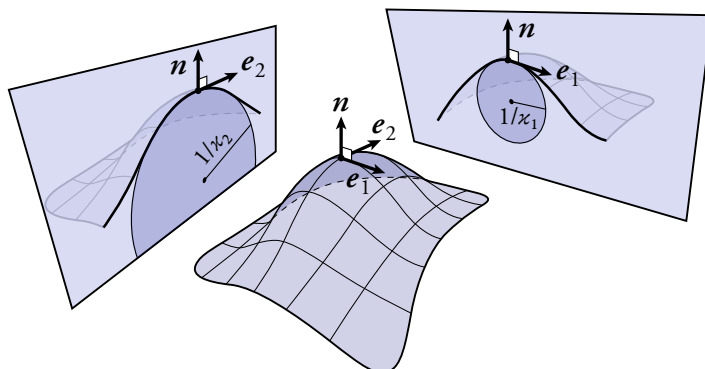
## CHAPITRE 4

# GRAVITATION RELATIVISTE

L'objectif de ce chapitre est double. Il s'agit, premièrement, d'introduire les outils mathématiques requis afin de décrire la courbure de l'espace-temps, et, d'autre part, de formuler l'équation d'Einstein à laquelle obéit la métrique. Après avoir défini le tenseur de courbure puis étudié ses propriétés dans le § 4.1, nous motiverons, énoncerons, puis commenterons l'équation d'Einstein dans le § 4.2, avant de décrire la théorie dans le cadre du formalisme lagrangien, à l'aide du principe de moindre action, dans le § 4.3.

### 4.1 Tenseur de courbure

Nous partageons tous une certaine expérience intuitive et sensible de la notion de courbure. La première formalisation de cette intuition remonte aux travaux des mathématiciens C. F. Gauss et B. Riemann, au cours du XIX<sup>e</sup> s. Dans un premier temps, Gauss étudia la géométrie différentielle courbe des surfaces. Il démontra, en particulier, que la courbure d'une surface peut être caractérisée, en tout point  $p$ , par deux nombres : les courbures principales  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  associées aux directions principales  $e_1^a$  et  $e_2^a$ , toutes deux orthogonales à la normale  $n^a$  à la surface en ce point. Cette notion de courbure est *extrinsèque*, au sens où sa définition requiert un espace ambiant (l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ ) dans lequel la surface est « plongée »<sup>1</sup>.



<sup>1</sup>Cependant, dans son *theorema egregium* (« théorème remarquable » en latin), Gauss prouva que le produit  $\kappa_1 \kappa_2$  des courbures principales, appelé courbure de Gauss, est indépendant de la manière dont la surface est plongée dans l'espace euclidien tridimensionnel.

Par la suite, Riemann prouva qu'il est possible de donner une caractérisation *intrinsèque* de la courbure d'une surface (ou d'une variété de dimension  $n \geq 2$ ), à l'aide d'un tenseur de rang 4, le tenseur de courbure. En relativité générale, nous avons précisément besoin d'une caractérisation intrinsèque de la courbure de l'espace-temps, car celui-ci n'est pas — à notre connaissance — plongé dans un espace de dimension supérieure. Dans ce paragraphe, nous allons établir que l'existence d'une courbure intrinsèque non nulle sur une variété peut être caractérisée par l'une des propriétés suivantes, toutes trois équivalentes :

- (i) La non commutation des dérivées covariantes appliquées à un tenseur de rang  $\geq 1$  ;
- (ii) La variation d'un vecteur induite par transport parallèle le long d'une courbe fermée ;
- (iii) L'accélération relative de deux géodésiques voisines.

### Définition

Du fait de la condition d'absence de torsion (2.45), la dérivée covariante seconde agissant sur un champ scalaire  $f$  a la propriété d'être symétrique par permutation des indices. Cependant, cette propriété n'est pas vérifiée lorsque la dérivée seconde agit sur un tenseur de rang plus élevé, comme par exemple sur une forme linéaire  $\omega_a$ . En effet, l'action de deux dérivées covariantes successives appliquées au tenseur  $f\omega_c$  prend la forme

$$\begin{aligned}\nabla_a \nabla_b (f \omega_c) &= \nabla_a (\omega_c \nabla_b f + f \nabla_b \omega_c) \\ &= (\nabla_a \nabla_b f) \omega_c + \nabla_b f \nabla_a \omega_c + \nabla_a f \nabla_b \omega_c + f \nabla_a \nabla_b \omega_c,\end{aligned}\quad (4.1)$$

où l'on a utilisé la règle de Leibniz à de multiples reprises. En antisymétrisant sur les indices  $a$  et  $b$ , les trois premiers termes s'annulent, de sorte que l'on trouve

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(f \omega_c) = f(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c. \quad (4.2)$$

Par le même argument de linéarité que nous avons utilisé dans le § 2.5, on en déduit l'existence d'un tenseur  $R_{abc}{}^d$  de type (1, 3) tel que

$$\nabla_a \nabla_b \omega_c = \nabla_b \nabla_a \omega_c + R_{abc}{}^d \omega_d. \quad (4.3)$$

Il s'agit du *tenseur de courbure*, ou tenseur de Riemann<sup>2</sup>. Afin d'établir une relation analogue pour un champ vectoriel  $v^a$ , considérons le champ scalaire  $f = \omega_a v^a$ , où  $\omega_a$  est un champ de formes linéaires. En utilisant la règle de Leibniz et la relation (4.3), il vient

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(\omega_c v^c) = \omega_c (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)v^c + R_{abc}{}^d v^c \omega_d. \quad (4.4)$$

D'après la condition d'absence de torsion, le membre de gauche de cette équation est nul. En échangeant les indices contractés  $c$  et  $d$  dans le second terme du membre du droite, et en remarquant que cette égalité est valable pour tout  $\omega_c$ , on obtient l'*identité de Ricci*

$$\nabla_a \nabla_b v^c = \nabla_b \nabla_a v^c - R_{abd}{}^c v^d. \quad (4.5)$$

<sup>2</sup>Il n'y a pas de consensus dans la littérature sur l'ordre des indices du tenseur de Riemann. Nous utilisons ici la même convention que Geroch [L2] et Wald [L6]. Voir Misner, Thorne et Wheeler [L4] pour un tableau résumant les multiples conventions utilisées dans de nombreux ouvrages de référence.

Les expressions (4.3) et (4.5) se généralisent aisément, par induction, à des champs tensoriels de rangs plus élevés. Ainsi, pour un tenseur  $T^{c_1 \dots c_k}_{d_1 \dots d_l}$  de type  $(k, l)$  quelconque,

$$\begin{aligned} \nabla_a \nabla_b T^{c_1 \dots c_k}_{d_1 \dots d_l} &= \nabla_b \nabla_a T^{c_1 \dots c_k}_{d_1 \dots d_l} - \sum_{i=1}^k R_{abe}{}^{c_i} T^{c_1 \dots \overset{i}{e} \dots c_k}_{d_1 \dots d_l} \\ &\quad + \sum_{j=1}^l R_{abd_j}{}^e T^{c_1 \dots c_k}_{d_1 \dots \underset{j}{e} \dots d_l}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

### Composantes

Calculons à présent les composantes  $R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$  du tenseur de Riemann  $R_{abc}{}^d$  par rapport à la base naturelle associée à un système de coordonnées  $(x^\alpha)$ . Comme nous l'avons vu dans le § 2.5, il est possible d'exprimer la dérivée covariante  $\nabla_a$  à l'aide de la dérivée ordinaire  $\partial_a$  et du symbole de Christoffel  $\Gamma_{ab}^c$  associés à ces coordonnées. Ainsi, en prenant la dérivée covariante de la relation (2.55b), il vient

$$\nabla_a \nabla_b \omega_c = \partial_a (\partial_b \omega_c - \Gamma_{bc}^d \omega_d) - \Gamma_{ab}^e (\partial_e \omega_c - \Gamma_{ec}^d \omega_d) - \Gamma_{ac}^e (\partial_b \omega_e - \Gamma_{be}^d \omega_d). \quad (4.7)$$

En antisymétrisant sur les indices  $a, b$  et en utilisant la propriété de symétrie (2.51) de  $\Gamma_{ab}^c$ , ainsi que la commutation des dérivées ordinaires, la définition (4.3) conduit à l'expression suivante du tenseur de Riemann :

$$R_{abc}{}^d = -2\partial_{[a} \Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{c[a} \Gamma_{b]e}^d. \quad (4.8)$$

Rappelons que l'usage de crochets autour d'indices, ici  $a$  et  $b$ , sert à indiquer une antisymétrisation. Les composantes du tenseur de courbure par rapport à la base naturelle associée aux coordonnées  $(x^\alpha)$  sont donc données par la formule

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta = -\frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\delta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\varepsilon\alpha}^\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\varepsilon + \Gamma_{\varepsilon\beta}^\delta \Gamma_{\alpha\gamma}^\varepsilon. \quad (4.9)$$

Elles font intervenir les composantes  $g_{\alpha\beta}$  de la métrique, leurs dérivées partielles premières et secondes par rapport aux coordonnées  $(x^\alpha)$ , ainsi que les composantes  $g^{\alpha\beta}$  de la métrique inverse et leurs dérivées premières. En effet, rappelons que les composantes du symbole de Christoffel associé aux coordonnées  $(x^\alpha)$  ont pour expression

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \left( \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\delta} \right). \quad (4.10)$$

Comme nous l'avons vu dans le § 3.6, il est toujours possible, par un changement de système de coordonnées, d'annuler le symbole de Christoffel en un point  $p$  donné :  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma|_p = 0$ . Par contre, il n'est pas possible d'imposer que les dérivées partielles  $\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma / \partial x^\delta|_p$  s'annulent également, de sorte qu'il est impossible d'annuler les composantes (4.9) du tenseur de courbure par un simple changement de système de coordonnées. Par rapport à des coordonnées localement inertielles au point  $p$ , les composantes du tenseur  $R_{abcd} = g_{de} R_{abc}{}^e$  valent

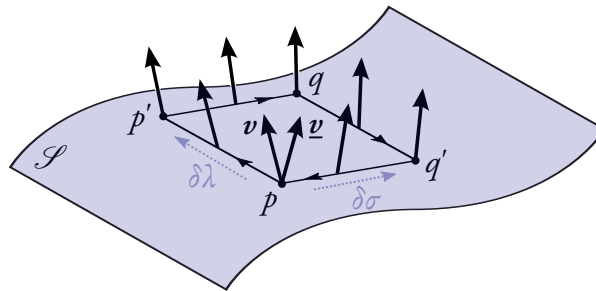
$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}|_p = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\delta} \right). \quad (4.11)$$

### Transport parallèle et courbure

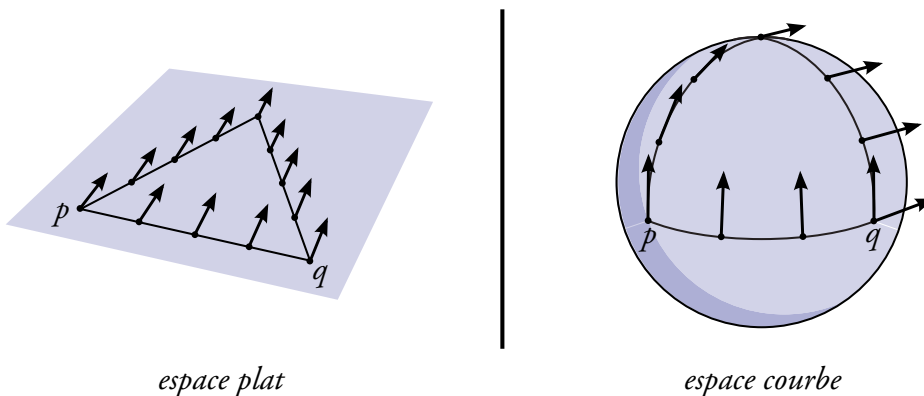
À l'aide d'une surface  $\mathcal{S}$  passant par un point  $p$ , construisons une petite courbe fermée (une boucle  $\mathcal{B}$ ) en ce point. Si  $(\lambda, \sigma)$  est un système de coordonnées sur  $\mathcal{S}$ , soient  $p, p', q$  et  $q'$  les points de  $\mathcal{S}$  de coordonnées  $(0, 0), (\delta\lambda, 0), (\delta\lambda, \delta\sigma)$  et  $(0, \delta\sigma)$ . Soient également  $\delta\lambda u^a$  et  $\delta\sigma s^a$  les vecteurs de déplacement infinitésimal du point  $p$  aux points  $p'$  et  $q'$ . Si  $v^a$  est un vecteur défini au point  $p$  et  $\underline{v}^a$  le vecteur résultant du transport parallèle de  $v^a$  le long de la boucle  $\mathcal{B}$ , alors la variation  $\delta^{(2)} v^a \equiv \underline{v}^a - v^a$  est donnée par l'expression

$$\lim_{\substack{\delta\lambda \rightarrow 0 \\ \delta\sigma \rightarrow 0}} \frac{\delta^{(2)} v^a}{\delta\lambda \delta\sigma} = u^b s^c v^d R_{bcd}{}^a. \quad (4.12)$$

La démonstration de la formule (4.12) est d'autant plus longue et laborieuse que le résultat final est simple et limpide. Nous renvoyons le lecteur intéressé au § 4.3.1 des notes de cours [C3], ou au § 3.2 de l'ouvrage [L6], entre autres références. Le nombre (4.12) caractérise la courbure « contenue » dans la boucle  $\mathcal{B}$ . Ainsi, de manière générale, un vecteur transporté parallèlement le long d'une courbe fermée subit une variation non nulle. De manière équivalente, le résultat du transport parallèle d'un vecteur entre deux points,  $q$  et  $p$  dans le cas présent, dépend du chemin suivi.



La formule (4.12) montre que le résultat du transport parallèle d'un vecteur entre deux points est indépendant du chemin reliant ces points si, et seulement si,  $R_{abc}{}^d = 0$ . C'est le cas, en particulier, pour le plan, l'espace euclidien, et l'espace-temps de Minkowski. Pour la sphère, au contraire, le résultat du transport parallèle d'un vecteur entre deux points dépend du chemin suivi, comme l'illustre la figure ci-dessous.



### Propriétés du tenseur de Riemann

Le tenseur de courbure possède certaines propriétés de symétrie. Il est antisymétrique par échange des deux premiers indices et par échange des deux derniers indices, et il possède également une symétrie par permutation circulaire des trois premiers indices :

$$R_{(ab)cd} = 0 \iff R_{abcd} = -R_{bacd}, \quad (4.13a)$$

$$R_{ab(cd)} = 0 \iff R_{abcd} = -R_{abdc}, \quad (4.13b)$$

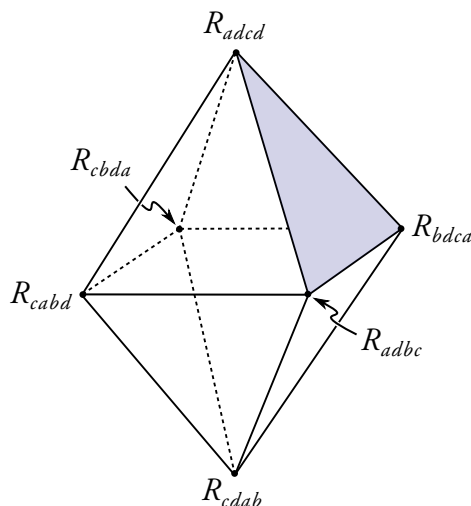
$$R_{[abc]d} = 0 \iff R_{abcd} + R_{cabd} + R_{bcad} = 0, \quad (4.13c)$$

la dernière équivalence étant sujette à l'utilisation des propriétés (4.13a) et (4.13b). Les propriétés de symétrie (4.13) peuvent être combinées afin d'établir que le tenseur de courbure est, en conséquence, également symétrique par échange de la première paire et de la dernière paire d'indices, et totalement antisymétrique dans les trois derniers indices, c'est-à-dire que (*Exercice : le vérifier*)

$$R_{abcd} = R_{cdab}, \quad (4.14a)$$

$$R_{a[bcd]} = 0. \quad (4.14b)$$

Toutes ces propriétés de symétrie peuvent être visualisées : en utilisant les Éqs. (4.13) et (4.14), on peut vérifier que la somme des trois termes correspondant à chacune des huit faces triangulaires de l'octaèdre ci-dessous est nulle [L1]. En dimension  $n$ , le tenseur de Riemann possède  $n^4$  composantes (par rapport à une base donnée). Toutefois, à cause des propriétés (4.13) et (4.14), seules  $n^2(n^2 - 1)/12$  d'entre elles sont *indépendantes*. En relativité générale, le tenseur de Riemann ne possède donc que 20 composantes indépendantes parmi 256.



La propriété (4.13a) découle immédiatement de la définition (4.3) du tenseur de courbure de Riemann. Par ailleurs, en contractant l'Éq. (4.3) avec  $\omega^c$  et en utilisant la règle de Leibniz, ainsi que la condition d'absence de torsion, on trouve (*Exercice : le vérifier*)

$$R_{abcd} \omega^c \omega^d = \omega^c (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) (\omega^c \omega_c) = 0. \quad (4.15)$$

Le tenseur  $\omega^c \omega^d$  étant symétrique, et puisque cette égalité est valable pour tout  $\omega^c$ , on en déduit que la propriété (4.13b) doit nécessairement être vérifiée. Alternativement, on peut appliquer la formule générale (4.6) au cas du tenseur métrique, de sorte que

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) g_{cd} = R_{abc}{}^e g_{ed} + R_{abd}{}^e g_{ce} = R_{abcd} + R_{abdc}. \quad (4.16)$$

La propriété de compatibilité (2.59) implique alors que le membre de gauche de cette équation est nul, d'où l'on déduit la propriété (4.13b). Enfin, en antisymétrisant l'Éq. (4.3) sur les indices  $a$ ,  $b$  et  $c$ , on obtient

$$R_{[abc]}{}^d \omega_d = 2\nabla_{[a} \nabla_b \omega_{c]} = 0, \quad (4.17)$$

où la dernière égalité découle de l'expression (4.7) du tenseur  $\nabla_a \nabla_b \omega_c$ , de la commutation de deux dérivées ordinaires successives, et de la propriété de symétrie (2.51) du symbole de Christoffel. L'équation (4.17) étant valable pour tout  $\omega_d$ , on en déduit la propriété (4.13c).

Par ailleurs, en plus des symétries algébriques (4.13), le tenseur de courbure vérifie une identité différentielle de grande importance, que nous admettrons : l'*identité de Bianchi*

$$\nabla_{[a} R_{bc]de} = 0. \quad (4.18)$$

### *Tenseur de Ricci et courbure scalaire*

Le tenseur de courbure permet de définir un certain nombre de tenseurs importants de rangs moins élevés. En particulier, le *tenseur de Ricci*

$$R_{ac} \equiv R_{abc}{}^b \quad (4.19)$$

est obtenu par contraction de deux indices du tenseur de Riemann. En vertu de la propriété (4.14a), le tenseur de Ricci est symétrique :  $R_{ab} = R_{ba}$ . Il s'agit du seul tenseur non trivial de rang deux qui peut être obtenu par contraction d'une paire d'indices du tenseur de Riemann. En effet, en utilisant les propriétés (4.13), on montre que les autres contractions se réduisent à  $\pm R_{ab}$  ou sont nulles identiquement. Par ailleurs, le scalaire de Ricci, ou *courbure scalaire*

$$R \equiv g^{ab} R_{ab} = R_{ab}{}^{ab} \quad (4.20)$$

est la trace du tenseur de Ricci. Il s'agit du seul champ scalaire non nul qui peut être construit en contractant deux paires d'indices du tenseur de Riemann.

L'identité de Bianchi implique une relation de grande importance entre les dérivées covariantes des tenseurs (4.19) et (4.20). En contractant, dans un premier temps, l'Éq. (4.18) avec la métrique inverse  $g^{ce}$ , on obtient

$$\nabla_a R_{bd} - \nabla_b R_{ad} + \nabla_c R_{abd}{}^c = 0. \quad (4.21)$$

En contractant ensuite ce résultat avec la métrique inverse  $g^{ad}$ , on trouve  $2\nabla^a R_{ab} = \nabla_b R$ , une relation qui peut être réécrite sous la forme

$$\nabla^a \left( R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right) = 0. \quad (4.22)$$

Le tenseur  $G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}$ , de divergence nulle, est le *tenseur d'Einstein*. Comme nous le verrons dans le § 4.2, ce tenseur intervient de manière centrale dans l'équation de champ de la relativité générale.

### Équation de déviation des géodésiques

Considérons une famille de géodésiques  $(\mathcal{L}_\sigma)_{\sigma \in I}$ , où le paramètre  $\sigma$  décrit un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , chaque courbe  $\mathcal{L}_\sigma$  étant une géodésique paramétrée par  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Soit alors  $\Sigma \subset \mathcal{E}$  la sous-variété de dimension  $n = 2$  générée par l'ensemble de ces courbes, et  $(x^\alpha) = (\lambda, \sigma)$  un système de coordonnées sur  $\Sigma$ . Le champ de vecteurs  $u^a \equiv (\partial_\lambda)^a$  est tangent à la famille de géodésiques, et vérifie donc

$$u^a \nabla_a u^b = 0. \quad (4.23)$$

Par ailleurs, on appelle *vecteur séparation* le champ vectoriel  $s^a \equiv (\partial_\sigma)^a$  défini sur  $\Sigma$ , tel que pour  $d\sigma$  infinitésimal,  $d\sigma s^a$  est le vecteur de déplacement élémentaire du point  $p \in \mathcal{L}_\sigma$  de coordonnées  $(\lambda, \sigma)$  au point  $q \in \mathcal{L}_{\sigma+d\sigma}$  de coordonnées  $(\lambda, \sigma + d\sigma)$ .

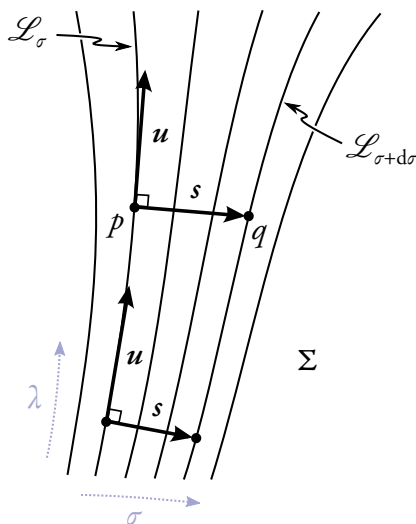
D'autre part, en introduisant la dérivée ordinaire  $\partial_a$  et le symbole de Christoffel  $\Gamma_{ab}^c$  associés aux coordonnées  $(x^\alpha)$ , il est possible de montrer que les vecteurs  $(\partial_\alpha)^a$  de la base naturelle associée commutent, au sens où (*Exercice : le prouver*)

$$u^a \nabla_a s^b = s^a \nabla_a u^b. \quad (4.24)$$

Géométriquement, cette condition traduit précisément le fait que le champ vectoriel  $d\sigma s^a$  « connecte » les géodésiques  $\mathcal{L}_\sigma$  et  $\mathcal{L}_{\sigma+d\sigma}$  en tout point. Une conséquence immédiate de ce résultat est la conservation du produit scalaire  $s^a u_a$  le long de  $\mathcal{L}_\sigma$ . En effet, en utilisant les Éqs. (4.23) et (4.24), la règle de Leibniz, et la conservation de la norme  $u^a u_a$  par transport parallèle, il vient

$$u^a \nabla_a (s^b u_b) = (u^a \nabla_a s^b) u_b = (s^a \nabla_a u^b) u_b = \frac{1}{2} s^a \nabla_a (u^b u_b) = 0. \quad (4.25)$$

Ainsi, pour chaque géodésique  $\mathcal{L}_\sigma$ , si la condition  $s^a u_a = 0$  est imposée en un point par un choix adéquat de paramétrage, alors les vecteurs  $s^a$  et  $u^a$  demeurent orthogonaux en tout autre point de  $\mathcal{L}_\sigma$ . Nous allons à présent dériver l'équation régissant l'évolution, le long de  $\mathcal{L}_\sigma$ , du champ de vecteurs  $u^a \nabla_a s^b$ .

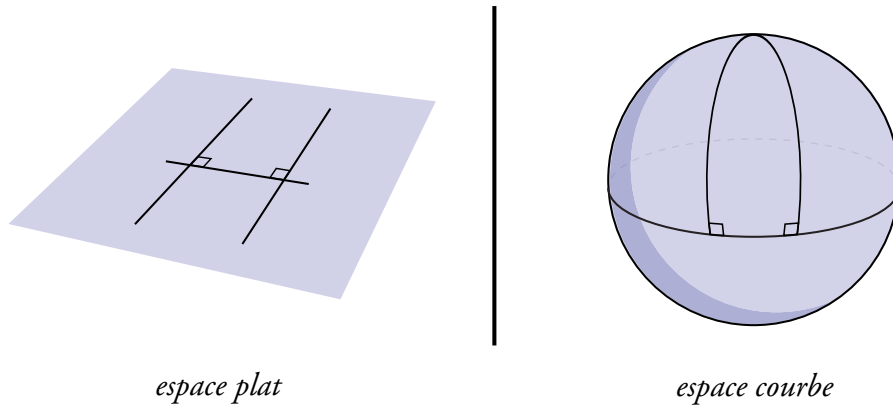


Intuitivement, la dérivée covariante du vecteur séparation le long de  $\mathcal{L}_\sigma$ , à savoir  $u^a \nabla_a s^b$ , représente la « vitesse relative » de deux géodésiques voisines. La dérivée de ce vecteur le long de  $\mathcal{L}_\sigma$ , c'est-à-dire  $u^c \nabla_c (u^b \nabla_b s^a)$ , peut alors s'interpréter comme l'« accélération relative » de ces géodésiques. Tandis qu'il est toujours possible, par un choix de « condition initiale », d'annuler la « vitesse relative »  $u^a \nabla_a s^b$  en un point, montrons que l'accélération relative est contrôlée par le tenseur de courbure :

$$\begin{aligned}
 u^c \nabla_c (u^b \nabla_b s^a) &= u^c \nabla_c (s^b \nabla_b u^a) \\
 &= (u^c \nabla_c s^b) \nabla_b u^a + u^c s^b \nabla_c \nabla_b u^a \\
 &= (s^c \nabla_c u^b) \nabla_b u^a + u^c s^b \nabla_b \nabla_c u^a - R_{cbd}{}^a s^b u^c u^d \\
 &= s^c \nabla_c (u^b \nabla_b u^a) - R_{cbd}{}^a s^b u^c u^d \\
 &= R_{bcd}{}^a s^b u^c u^d.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Nous avons utilisé l'Éq. (4.24) dans la première égalité, la règle de Leibniz dans la seconde, l'identité de Ricci (4.5) et l'Éq. (4.24) dans la troisième, ainsi que l'Éq. (4.23) et la propriété de symétrie (4.13a) dans la dernière. L'avant-dernière égalité résulte de l'échange des indices  $b$  et  $c$  dans le second terme et de l'usage de la règle de Leibniz.

L'équation de déviation des géodésiques (4.26) stipule que l'« accélération relative » de deux géodésiques voisines est nulle pour tout couple de géodésiques si, et seulement si,  $R_{abc}{}^d = 0$ . En l'absence de courbure, l'accélération de déviation est nulle, de sorte que deux géodésiques initialement parallèles ( $u^b \nabla_b s^a = 0$ ) demeurent parallèles<sup>3</sup>. En présence de courbure, au contraire, deux géodésiques initialement parallèles se rapprochent ou s'éloignent nécessairement l'une de l'autre. Il en va ainsi des méridiens à la surface du globe, des courbes géodésiques orthogonales à l'équateur mais qui se croisent aux deux pôles, du fait de la courbure positive de la surface d'une sphère.



<sup>3</sup>Il s'agit là du cinquième postulat d'Euclide, un postulat que de nombreux mathématiciens ont essayé de démontrer, en vain, à partir des quatre autres postulats. C'est précisément l'abandon de ce postulat qui fut, au cours du XIX<sup>e</sup> siècle, à l'origine de la découverte de géométries non euclidiennes, pour lesquelles  $R_{abcd} \neq 0$ .



### Effet de la courbure sur la matière

Considérons à présent le cas physique où  $u^a$  est le champ de quadrivitesse d'un ensemble de particules en chute libre. En introduisant la notation  $\dot{\phantom{x}} \equiv u^a \nabla_a$ , l'équation de déviation des géodésiques (4.26) peut se réécrire sous la forme

$$\ddot{s}^a = K^a_b s^b, \quad (4.27)$$

où le tenseur  $K_{ab} \equiv R_{bcda} u^c u^d$  est symétrique et orthogonal à  $u^a$  :  $K_{ab} = K_{ba}$  et  $K_{ab} u^b = 0$ . Ces propriétés découlent immédiatement des propriétés de symétrie du tenseur de courbure. Par conséquent, en tout point  $p$ , il existe trois couples  $(e_i^a, \chi_i)$  de vecteurs propres et valeurs propres de l'opérateur  $K^a_b$  tels que

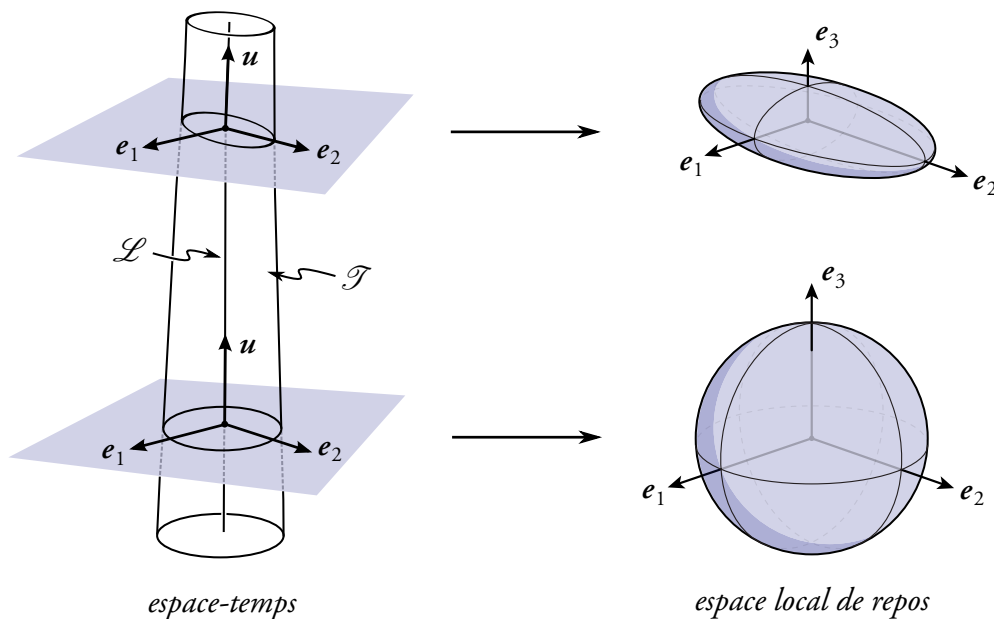
$$K^a_b e_i^b = \chi_i e_i^a. \quad (4.28)$$

Les vecteurs  $e_i^a$  sont du genre espace, car tous trois orthogonaux à la quadrivitesse :  $\chi_i e_i^a u_a = K_{ab} u^a e_i^b = 0$ . Ils forment donc une base de l'espace local de repos au point considéré. Pour ces directions spatiales privilégiées, l'Éq. (4.27) devient simplement

$$\ddot{e}_i^a = \chi_i e_i^a. \quad (4.29)$$

Ainsi, selon le signe de  $\chi_i$  les géodésiques se rapprochent ou s'éloignent dans la direction  $e_i^a$ , le long de  $\mathcal{L}_\sigma$ , et ce d'autant plus vite (mesuré en temps propre) que  $|\chi_i|$  est grand.

Considérons un ensemble de particules en chute libre, initialement au repos les unes par rapport aux autres ( $u^b \nabla_b s^a = 0$ ), et distribuées au voisinage d'une particule « de référence » de ligne d'univers  $\mathcal{L}$ . L'ensemble de ces particules forme un tube d'univers  $\mathcal{T}$  incluant  $\mathcal{L}$ . Supposons de plus que, par rapport à des coordonnées de Fermi associées à la ligne d'univers  $\mathcal{L}$  (voir le § 3.6), les particules soient initialement distribuées sous la forme d'une coquille sphérique centrée sur l'origine de ces coordonnées. L'équation (4.29) montre alors que, sous l'effet de la courbure, cette sphère va se déformer et prendre la forme d'un ellipsoïde dont les trois axes de symétrie coïncident avec les directions  $e_i^a$ .



## 4.2 Équation d'Einstein

Nous avons enfin à notre disposition tous les concepts requis afin de formuler l'équation de champ de la théorie de la relativité générale. Nous allons voir que l'équation d'Einstein relie une partie de la courbure de l'espace-temps (le tenseur d'Einstein  $G_{ab}$ ) à son contenu en matière (le tenseur énergie-impulsion  $T_{ab}$ ), et qu'elle reproduit l'équation de Poisson de la gravitation newtonienne dans la limite appropriée.

### Motivation

En gravitation newtonienne, l'équation du mouvement d'une particule de position  $\vec{x}(t)$  prend la forme  $\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}U$ , où  $U > 0$  est le potentiel gravitationnel. Si  $\vec{s} \equiv \vec{x}_1 - \vec{x}_2$  désigne la position relative de deux particules voisines, alors un développement limité montre que leur accélération relative est donnée, au premier ordre dans la séparation  $\|\vec{s}\|$ , par

$$\ddot{\vec{s}} = (\vec{s} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla}U. \quad (4.30)$$

Cette équation est très clairement analogue à l'équation de déviation des géodésiques (4.27), ce qui suggère la correspondance suivante entre le tenseur de courbure et le champ de marée newtonien :

$$R_{bcd}{}^a u^c u^d \longleftrightarrow \partial^a \partial_b U. \quad (4.31)$$

Par ailleurs, toujours dans le cadre de la gravitation newtonienne, la trace  $\Delta U \equiv \partial^a \partial_a U$  du champ de marée est reliée à la densité de masse  $\rho$  de la matière par l'équation de Poisson

$$\Delta U = -4\pi \rho. \quad (4.32)$$

(Nous utilisons un système d'unités dites géométriques, où  $G = c = 1$  ; voir l'appendice A.) D'autre part, comme nous l'avons vu dans le § 3.4, en relativité générale les divers champs de matière sont décrits par un tenseur énergie-impulsion  $T_{ab}$  tel que [voir l'Éq. (3.53)]

$$T_{ab} u^a u^b \longleftrightarrow \rho. \quad (4.33)$$

En combinant les analogies (4.31) et (4.33) avec l'Éq. (4.32), nous sommes donc naturellement conduits à postuler une équation de la forme  $R_{ab} u^a u^b = 4\pi T_{ab} u^a u^b$ . Celle-ci devant être valable pour tout observateur de quadrivitesse  $u^a$ , ces considérations suggèrent l'équation de champ

$$R_{ab} \stackrel{?}{=} 4\pi T_{ab}. \quad (4.34)$$

Cette relation, qui fut d'ailleurs un temps postulée par Einstein, présente toutefois un défaut fatal. En effet, puisque le tenseur énergie-impulsion a la propriété d'être conservé,

$$\nabla^a T_{ab} = 0, \quad (4.35)$$

la proportionalité de  $R_{ab}$  et  $T_{ab}$  en combinaison avec l'identité de Bianchi contractée (4.22) impliquerait que  $\nabla_a R = 0$ , de sorte que  $R = g^{ab} R_{ab}$  et par conséquent  $T \equiv g^{ab} T_{ab}$  seraient constants. Il s'agit là d'une restriction bien trop forte sur le contenu énergétique de l'univers.

## Énoncé

Toutefois, cette difficulté suggère également une résolution. Afin d'éviter le conflit entre la conservation locale de l'énergie-impulsion d'une part, et l'identité de Bianchi d'autre part, il suffit de postuler l'équation de champ

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi T_{ab}. \quad (4.36)$$

En effet, si l'Éq. (4.36) est vérifiée, alors la conservation locale de l'énergie-impulsion devient une *conséquence* de l'identité de Bianchi. De plus, les correspondances (4.31) et (4.33) qui ont motivé cette équation ne sont pas affectées. En effet, en prenant la trace de l'Éq. (4.36) on obtient  $R = -8\pi T$ , de sorte que cette équation peut s'écrire sous la forme équivalente

$$R_{ab} = 8\pi \left( T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right). \quad (4.37)$$

Dans la limite non-relativiste, la densité d'énergie domine toutes les autres contributions au tenseur énergie-impulsion, de sorte que  $T_{ab} u^a u^b \simeq -T \simeq \rho$ . Par conséquent, l'Éq. (4.37) conduit toujours à la relation  $R_{ab} u^a u^b = 4\pi T_{ab} u^a u^b$  en champ faible.

L'équation d'Einstein (4.36) est l'équation de champ de la théorie de la relativité générale [A1]. Elle exprime la façon dont la géométrie de l'espace-temps est courbée, localement, par la distribution d'énergie-impulsion de la matière. Le mouvement de la matière est, en retour, déterminé par la géométrie de l'espace-temps *via* l'équation de conservation (4.35), qui est une conséquence de l'équation d'Einstein.

## Remarques

- En introduisant un système de coordonnées  $(x^\alpha)$ , l'équation d'Einstein (4.36) peut être vue comme un système de dix équations aux dérivées partielles, non linéaires et couplées, avec pour inconnues les dix composantes  $g_{\alpha\beta}(x)$  de la métrique  $g_{ab}$ . Parmi ces dix équations, seules six sont indépendantes à cause de l'identité de Bianchi (4.22). Parmi les dix composantes  $g_{\alpha\beta}$ , seules six sont à déterminer car les coordonnées peuvent être choisies librement. Il s'agit donc d'un système de six équations à six inconnues.
- Tandis que les équations de Maxwell (3.31) peuvent, sous certaines conditions, être résolues pour le champ électromagnétique  $F_{ab}$  en supposant la densité de quadri-courant  $j^a$  connue, l'équation d'Einstein ne peut pas être résolue pour la métrique  $g_{ab}$  en supposant le tenseur énergie-impulsion  $T_{ab}$  connu, car celui-ci dépend de la métrique.
- La nature géodésique du mouvement d'une particule en chute libre dérive de l'équation d'Einstein. En effet, pour un fluide de poussière dont le tenseur énergie-impulsion  $T^{ab} = \rho u^a u^b$ , l'identité  $\nabla_a G^{ab} = 0$  implique  $\nabla_a T^{ab} = \rho u^a \nabla_a u^b + u^b \nabla_a (\rho u^a) = 0$ . La masse étant conservée,  $\nabla_a (\rho u^a) = 0$ , de sorte que  $u^a \nabla_a u^b = 0$ .
- Un espace-temps est dit *plat* si, et seulement si,  $R_{abcd} = 0$ . En supposant que la variété  $\mathcal{E}$  possède la topologie de  $\mathbb{R}^4$ , on peut montrer que cette condition est nécessaire et suffisante pour que la métrique soit celle de Minkowski :  $g_{ab} = \eta_{ab}$ . L'espace-temps de la théorie de la relativité restreinte est donc plat, c'est-à-dire sans champ de gravitation.

- Dans le vide de matière ( $T_{ab} = 0$ ), l'équation d'Einstein (4.37) implique  $R_{ab} = 0$ . Cette condition étant moins restrictive que  $R_{abcd} = 0$ , un tel espace-temps peut avoir un champ de gravité non nul. Dans le chapitre 6, nous verrons que les trous noirs sont des solutions non triviales de l'équation d'Einstein dans le vide.
- Les membres de gauche des Eqs. (4.36) et (4.37) sont homogènes à une courbure, c'est-à-dire à l'inverse du carré d'une longueur, tandis que le tenseur énergie-impulsion a les dimensions d'une densité d'énergie. Par conséquent, en restaurant les facteurs de  $G$  et de  $c$ , la constante mesurant le couplage de la matière à la géométrie est donnée par  $8\pi G/c^4$ . Sa valeur numérique implique qu'une densité d'énergie énorme est requise afin de courber localement l'espace-temps :

$$\frac{8\pi G}{c^4} \simeq 2 \times 10^{-43} \frac{\text{m}^{-2}}{\text{J} \cdot \text{m}^{-3}}.$$

### Interprétation

Considérons un ensemble d'observateurs en chute libre. En tout point  $p$ , le champ de quadrivitesse  $u^a$  est tangent à la ligne d'univers  $\mathcal{L}$  passant par  $p$ , une géodésique du genre temps. On peut montrer que l'*expansion*

$$\theta \equiv \nabla_a u^a = \frac{1}{V} \frac{dV}{d\tau} \quad (4.38)$$

mesure le taux de variation relatif du volume  $V$  occupé par cet ensemble d'observateurs. Si  $\theta$  est positif (resp. négatif), alors les observateurs tendent à s'éloigner (resp. à se rapprocher) les uns des autres, comme le suggère la discussion entourant l'équation de continuité (3.43).

Par ailleurs, on montre que le taux de variation de l'expansion  $\theta$  par rapport au temps propre  $\tau$  le long de la géodésique de quadrivitesse  $u^a$  est relié au tenseur de Ricci à travers l'équation de Raychaudhuri<sup>4</sup>

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - R_{ab}u^a u^b. \quad (4.39)$$

Cette relation est purement cinématique, et ne fait aucunement référence à l'équation d'Einstein (4.37). Cette dernière n'intervient que dans la relation entre le tenseur de Ricci  $R_{ab}$  et le tenseur énergie-impulsion  $T_{ab}$  de la matière. Dans le cas d'un fluide parfait de tenseur énergie-impulsion (3.46), la formule (4.39) implique (*Exercice : le vérifier*)

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - 4\pi(\epsilon + 3p), \quad (4.40)$$

où  $\epsilon$  est la densité d'énergie et  $p$  la pression isotrope du fluide parfait. Puisque  $\epsilon + 3p > 0$ , l'expansion  $\theta$  décroît au cours du temps. Ceci traduit, à l'évidence, la nature *attractive* de la gravité. La nouveauté par rapport à la gravitation newtonienne réside dans le fait que, en relativité générale, la pression  $p$  est source de gravité, en plus de la densité d'énergie. Nous verrons que cette observation a des conséquences importantes pour la structure des étoiles relativistes et pour l'évolution de l'Univers à grande échelle.

<sup>4</sup>En toute généralité, cette équation fait également intervenir les tenseurs de cisaillement  $\sigma_{ab} \equiv \nabla_{[a}u_{b]}$  et de rotation  $\omega_{ab} \equiv \nabla_{(a}u_{b)} - \frac{1}{3}\theta h_{ab}$ . Afin de simplifier la discussion, nous les supposons tous deux nuls.

## Unicité

Ayant postulé l'équation de champ de la gravitation relativiste à l'aide d'arguments physiques simples, il convient de se poser la question de l'*unicité* du résultat. La discussion qui suit montre que l'on dispose en fait de très peu de liberté afin de construire une théorie relativiste et géométrique de la gravitation. En effet, il est naturel de postuler que la métrique obéit à une équation tensorielle de la forme

$$E_{ab}(g) = T_{ab}, \quad (4.41)$$

où le champ tensoriel  $E_{ab}(g)$  est supposé (i) dépendre localement de la métrique et de ses dérivées premières et secondes uniquement<sup>5</sup>, et (ii) satisfaire identiquement à la contrainte

$$\nabla^a E_{ab} = 0, \quad (4.42)$$

de sorte que la loi (4.35) de conservation locale de l'énergie-impulsion soit une conséquence de l'équation de champ (4.41).

Le théorème suivant, établi par Lovelock en 1969 [A4], apporte une réponse satisfaisante à la question de l'unicité. En dimension  $n = 4$ , un tenseur  $E_{ab}(g)$  vérifiant les propriétés ci-dessus est nécessairement une combinaison linéaire du tenseur d'Einstein et de la métrique, c'est-à-dire

$$E_{ab} = \alpha G_{ab} + \beta g_{ab}, \quad (4.43)$$

où  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Einstein ne prit conscience de la possibilité d'ajouter un terme proportionnel à la métrique dans son équation de champ, de sorte que  $G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}$ , que quelques années après la formulation initiale de sa théorie [A2]. Or, d'après les observations les plus récentes, la *constante cosmologique*  $\Lambda$  est non nulle. Bien que ses effets soient négligeables aux échelles des phénomènes astrophysiques que l'on va étudier dans les chapitres 5, 6 et 7, nous verrons dans le chapitre 8 qu'elle joue un rôle important aux échelles cosmologiques.

## Limite newtonienne

Afin d'établir le contact entre la théorie relativiste de la gravitation d'Einstein et la théorie newtonienne de la gravitation, il nous faut étudier l'équation d'Einstein lorsque le champ gravitationnel est faible et lentement variable (quasi-statique). Le qualificatif de *champ faible* signifie que la métrique physique  $g_{ab}$  est « proche » de la métrique de Minkowski  $\eta_{ab}$  de la relativité restreinte, au sens où

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}, \quad (4.44)$$

avec  $h_{ab}$  une « petite » perturbation. Comme il n'existe pas de métrique définie positive sur l'espace-temps, il n'y a aucune façon naturelle de déterminer lorsqu'un tenseur est « petit ». Cependant, on peut exiger que par rapport à des coordonnées globalement inertielles ( $x^\alpha$ ) de  $\eta_{ab}$ , telles que  $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ , les composantes de la perturbation vérifient

$$|h_{\alpha\beta}| \ll 1. \quad (4.45)$$

---

<sup>5</sup>Les équations de la physique sont, en général, des équations différentielles du second ordre.

Par ailleurs, le qualificatif de *champ lentement variable* signifie que les variations temporelles des composantes de la perturbation sont négligeables par rapport aux variations spatiales de ces mêmes quantités,

$$|\partial h_{\alpha\beta}/\partial t| \ll |\partial h_{\alpha\beta}/\partial x^i|, \quad (4.46)$$

de sorte que de très nombreux termes peuvent être négligés dans l'équation d'Einstein. Cette condition est toujours réalisée lorsque les vitesses caractéristiques au sein de la source de la perturbation sont très faibles par rapport à la vitesse de la lumière.

Ainsi, dans la limite des champs faibles et lentement variables, les composantes (4.10) du symbole de Christoffel se simplifient considérablement, puisqu'elles sont linéaires dans la perturbation métrique :

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\gamma\delta} \left( \frac{\partial h_{\delta\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial h_{\alpha\delta}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\delta}} \right). \quad (4.47)$$

En insérant cette expression dans l'Éq. (4.9) pour les composantes du tenseur de Riemann, puis en négligeant — en vertu des conditions (4.45) et (4.46) — les termes quadratiques dans la perturbation ainsi que les dérivées temporelles, on trouve que la composante dominante du tenseur d'Einstein  $G_{ab}$  vaut

$$G_{00} = -\Delta h_{00}. \quad (4.48)$$

Elle fait intervenir l'opérateur laplacien associé aux coordonnées cartésiennes ( $x^i$ ) de l'espace euclidien usuel. Par ailleurs, dans la limite non-relativiste, le tenseur énergie-impulsion  $T_{ab}$  de la matière est dominé par la densité d'énergie (de masse), de sorte que la source du champ de gravité est simplement

$$T_{00} = \rho. \quad (4.49)$$

Par conséquent, dans la limite des champs faibles et lentement variables, l'équation d'Einstein (4.36) se réduit à l'équation de Poisson (4.32) de la gravitation newtonienne, avec un potentiel gravitationnel newtonien

$$U = \frac{1}{2} h_{00}. \quad (4.50)$$

D'autre part, par rapport aux coordonnées globalement inertielles ( $x^{\alpha}$ ), les composantes de l'équation du mouvement géodésique (3.28) d'une particule en chute libre prennent la forme [voir l'Éq. (2.66)]

$$\frac{d^2 X^{\alpha}}{d\tau^2} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \frac{dX^{\beta}}{d\tau} \frac{dX^{\gamma}}{d\tau} = 0, \quad (4.51)$$

où  $x^{\alpha} = X^{\alpha}(\tau)$  est l'équation paramétrique de cette courbe. Pour des vitesses faiblement relativistes, les composantes  $dX^{\alpha}/d\tau$  peuvent être approximées par  $(1, 0, 0, 0)$  dans le second terme, et le temps propre  $\tau$  peut être approximé par le temps de coordonnée  $t$  dans le premier terme. Les composantes spatiales de l'Éq. (4.51) se réduisent alors à

$$\frac{d^2 X^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} = \frac{\partial U}{\partial x^i}, \quad (4.52)$$

où l'on a utilisé l'Éq. (4.47) avec la condition (4.46) dans la seconde égalité, et l'Éq. (4.50) dans la troisième égalité. On reconnaît l'équation du mouvement d'une particule de masse  $m$  accélérée par une force gravitationnelle  $\vec{F} = m\vec{\nabla}U$  dérivant du potentiel gravitationnel newtonien  $U$ . Ainsi, dans la limite newtonienne, le mouvement géodésique d'une particule en chute libre se réduit à la seconde loi de Newton en présence d'un champ gravitationnel, l'égalité de la masse inerte et de la masse grave étant réalisée par construction.

### 4.3 Formulation lagrangienne





## CHAPITRE 5

# CHAMP À SYMÉTRIE SPHÉRIQUE

### 5.1 Métrique de Schwarzschild

*Dérivation*

*Propriétés*

*Théorème de Birkhoff*

*Paramètre de compacité*

*Coordonnées isotropes*

### 5.2 Décalage spectral gravitationnel

*Effet Einstein*

*Dilatation des temps*

*Mise en évidence expérimentale*

### 5.3 Orbites des corps matériels

*Quantités conservées*

*Potentiel effectif*

*Orbites circulaires*

*Dernière orbite circulaire stable*

*Avance relativiste du périastre*

## 5.4 Trajectoires des photons

*Potentiel effectif*

*Déviation de la lumière*

*Lentille gravitationnelle*

*Retard gravitationnel de la lumière*

## 5.5 Précession des gyroscopes

*Définition d'un gyroscope*

*Effet de précession géodétique*

*Mise en évidence expérimentale*

## 5.6 Étoiles relativistes

*Équations de Tolman-Oppenheimer-Volkoff*

*Comparaison avec les étoiles newtoniennes*

*Étoiles relativistes de densité constante*

## CHAPITRE 6

# TROUS NOIRS

### 6.1 Effondrement gravitationnel

*Modèle d'Oppenheimer-Snyder*

*Géodésiques lumière radiales*

### 6.2 Nature des singularités

*Singularité au rayon de Schwarzschild*

*Singularité centrale*

### 6.3 Horizon des événements

*Définition*

*Genre lumière*

### 6.4 Trous noirs en rotation

*Solution de Kerr*

*Théorème d'unicité*

*Horizon des événements*

*Ergosphère*

*Processus de Penrose*

## 6.5 Mouvement géodésique

*Quantités conservées*

*Effet Lense-Thirring*

*Orbites circulaires*



## CHAPITRE 7

# ONDES GRAVITATIONNELLES

### 7.1 Équation d'Einstein linéarisée

*Approximation de champ faible*

*Équation d'Einstein linéarisée*

### 7.2 Jauge de Lorenz et jauge TT

*Transformation de jauge*

*Jauge de Lorenz*

*Jauge transverse et sans trace*

*États de polarisation*

### 7.3 Génération d'ondes gravitationnelles

*Formule du quadrupôle d'Einstein*

*Luminosité gravitationnelle*

*Ordres de grandeur*

### 7.4 Sources astrophysiques et cosmologiques

*Systèmes binaires compacts coalescents*

*Systèmes binaires de trous noirs supermassifs*

*Binaires à rapport de masse extrême*

*Effondrements gravitationnels et supernovæ*

*Étoiles à neutrons en rotation*

*Fonds stochastiques cosmologiques*

## 7.5 Détection d'ondes gravitationnelles

*Effet d'une onde gravitationnelle sur la matière*

*Détecteurs interférométriques terrestres*

*Antenne gravitationnelle dans l'espace*

*Chronométrie d'un réseau de pulsars*

*Empreinte dans le fond diffus micro-onde*





## CHAPITRE 8

# COSMOLOGIE

### 8.1 Univers homogène et isotrope

*Principe cosmologique*

*Espace maximalement symétrique*

*Métrique de Robertson-Walker*

### 8.2 Décalage spectral et distances

*Décalage spectral cosmologique*

*Distance de diamètre angulaire*

*Distance de luminosité*

### 8.3 Équations de Friedmann-Lemaître

*Constante cosmologique*

*Dérivation*

*Interprétation*

*Solutions*



## ANNEXE A

# UNITÉS GÉOMÉTRIQUES

En physique, le choix d'un système d'unités est une simple commodité. Naturellement, les unités de masse (M), de longueur (L) et de temps (T) du système international d'unités, à savoir le kilogramme (kg), le mètre (m) et la seconde (s), sont définies à l'échelle humaine. Dans ce système d'unités, la constante universelle de gravitation  $G$  et la vitesse de la lumière dans le vide  $c$  prennent les valeurs

$$G \simeq 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, \quad (\text{A.1a})$$

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (\text{A.1b})$$

Rappelons que la valeur (A.1b) de la vitesse de la lumière est exacte, par définition du mètre. Au contraire, la valeur (A.1a) de la constante universelle de gravitation n'est qu'approximative, car le kilogramme n'est toujours pas défini en utilisant la nature *a priori* fondamentale de cette constante physique<sup>1</sup>.

En relativité générale, par contre, il est particulièrement commode d'utiliser un système d'unités dites « géométriques », adaptées aux lois de la physique gravitationnelle relativiste, telles que  $G = 1$  et  $c = 1$ . En unités géométriques, la grandeur de référence est la *longueur*, toute quantité pouvant être mesurée à l'aide de la seule unité de longueur. Par exemple, une masse  $M$  est mesurée en unité de longueur selon

$$M \text{ (en m)} = \frac{G}{c^2} \times M \text{ (en kg)} = 7,42 \times 10^{-28} \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1} \times M \text{ (en kg)}. \quad (\text{A.2})$$

Ainsi, en unités géométriques la masse du Soleil vaut  $M_{\odot} = 1,47 \text{ km}$ , celle de la Terre vaut  $M_{\oplus} = 4,43 \text{ mm}$ , et celle de la Lune vaut  $M_{\zeta} = 54,5 \text{ } \mu\text{m}$ . Puisque le rayon de Schwarzschild d'un corps sphérique de masse  $M$  vaut  $2M$ , cela signifie qu'un trou noir d'une masse solaire a une taille typique (mesurée en coordonnée radiale de Schwarzschild) de environ 3 km.

Dans la pratique, afin de restaurer les facteurs de  $G$  et de  $c$  dans une équation exprimée en unités géométriques, on multipliera l'un des deux membres de l'équation par la puissance adéquate de  $G$ , de façon à obtenir la même dimension de masse dans les deux membres de l'équation. On multipliera ensuite ce même membre de l'équation par la puissance adéquate de  $c$ , de façon à avoir la même dimension de longueur dans les deux membres de l'équation. En principe, l'équation résultante devrait également être homogène en temps.

---

<sup>1</sup>Pour de plus amples détails sur les liens entre unités et constantes fondamentales, nous recommandons chaudement la lecture de l'ouvrage [L5].

Le tableau ci-dessous liste quelques grandeurs fréquemment rencontrées, leurs symboles typiques, ainsi que leurs dimensions en unités du système international et en unités géométriques :

Grandeur	Symbole	Unités SI	Unités géom.
Masse	$m$	M	L
Longueur	$l$	L	L
Temps	$t$	T	L
Intervalle	$s$	L	L
Temps propre	$\tau$	T	L
Énergie	$E$	$M(L/T)^2$	L
Impulsion	$P$	$ML/T$	L
Moment cinétique	$L$	$ML^2/T$	$L^2$
Luminosité	$\mathcal{L}$	$ML^2/T^3$	$L^0$
Densité d'énergie	$\epsilon$	$M/(LT^2)$	$L^{-2}$
Pression isotrope	$p$	$M/(LT^2)$	$L^{-2}$

## ANNEXE B

### CALCUL DES VARIATIONS

Cette annexe contient un bref rappel du principe de moindre action, suivi de son application aux géodésiques du genre temps, où l'on vérifie que ces courbes extrémisent le temps propre écoulé entre deux événements donnés.

#### *Principe de moindre action*

Considérons un système physique décrit par une variable  $q(t)$ , de dérivée  $\dot{q} \equiv dq/dt$ , et dont la dynamique dérive d'un lagrangien  $L(q, \dot{q})$ . L'un des principes fondamentaux de la physique, le *principe de moindre action*, stipule qu'étant donnés deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , la trajectoire effectivement suivie par le système entre deux points donnés est celle qui conduit à une valeur stationnaire de l'action

$$S[q(t)] \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt. \quad (\text{B.1})$$

Lorsque la trajectoire reliant ces deux points est suffisamment courte, cet extremum est un minimum, d'où le nom donné au principe.

Considérons une petite variation  $\delta q$  de la variable  $q(t)$ , telle que  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ . Celle-ci induit alors une variation  $\delta L = (\partial L/\partial q) \delta q + (\partial L/\partial \dot{q}) \delta \dot{q}$  du lagrangien  $L(q, \dot{q})$ . En utilisant le fait que  $\delta \dot{q} = d(\delta q)/dt$ , la variation de l'action est donnée par

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right\} \delta q, \quad (\text{B.2})$$

où nous avons intégré par parties le deuxième terme, le terme tout intégré étant nul à cause des conditions aux limites. Puisque la condition de stationnarité de l'action  $\delta S = 0$  doit être valable pour toute variation  $\delta q(t)$ , l'Éq. (B.2) implique que la dynamique du système obéit à l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}. \quad (\text{B.3})$$

Ce résultat se généralise aisément au cas d'un lagrangien  $L(q_n, \dot{q}_n)$  qui dépend de  $n$  variables  $q_n(t)$  et de leurs dérivées  $\dot{q}_n = dq_n/dt$ . On obtient alors  $n$  équations d'Euler-Lagrange de la forme (B.3), une pour chaque couple de variables  $(q_n, \dot{q}_n)$ .

### Application aux géodésiques du genre temps

Appliquons ce résultat général au cas d'une particule en chute libre, dont la ligne d'univers  $\mathcal{L}$  est une géodésique du genre temps. Soit  $\mathcal{P}(\lambda)$  une paramétrisation de  $\mathcal{L}$  et  $v^a$  le vecteur tangent associé. Étant donné un système de coordonnées  $(x^\alpha)$ , si  $\mathcal{L}$  a pour équation paramétrique  $x^\alpha = X^\alpha(\lambda)$ , alors les composantes du vecteur  $v^a$  par rapport à la base naturelle  $(\partial_\alpha)^a$  valent  $v^\alpha = dX^\alpha/d\lambda \equiv \dot{X}^\alpha$ . Le temps propre (3.5) écoulé entre deux événements  $p = \mathcal{P}(\lambda)$  et  $q = \mathcal{P}(\lambda')$  le long de  $\mathcal{L}$  peut donc s'écrire sous la forme

$$\tau(p, q) = \int_\lambda^{\lambda'} (-g_{\alpha\beta} \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta)^{1/2} d\lambda. \quad (\text{B.4})$$

Au cours du § 3.3, nous avons affirmé que le temps propre écoulé entre deux événements donnés le long de la ligne d'univers d'un observateur est extrémal (en l'occurrence maximal) si, et seulement si, cette courbe est une géodésique. Afin de vérifier cette affirmation, il nous suffit d'appliquer le principe de moindre action à la quantité (B.4), avec le « lagrangien »

$$L(X^\alpha, \dot{X}^\alpha) \equiv (-g_{\alpha\beta}(X^\gamma) \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta)^{1/2}, \quad (\text{B.5})$$

et de nous assurer que les équations d'Euler-Lagrange résultantes reproduisent bien l'équation des géodésiques sous la forme (2.66). Or, d'après l'expression (B.5) du lagrangien,

$$\frac{\partial L}{\partial X^\gamma} = -\frac{1}{2L} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta, \quad (\text{B.6a})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\gamma} = -\frac{1}{L} g_{\gamma\beta} \dot{X}^\beta. \quad (\text{B.6b})$$

Avant de continuer le calcul, il est particulièrement commode de paramétrer la courbe  $\mathcal{L}$  à l'aide du temps propre lui-même. En posant  $\lambda = \tau$  dans l'Éq. (B.5) il vient  $L = 1$ , de sorte que les équations d'Euler-Lagrange (B.3), avec  $(t, q, \dot{q}) \rightarrow (\tau, X^\gamma, \dot{X}^\gamma)$ , prennent la forme

$$\frac{d}{d\tau} (g_{\gamma\beta} \dot{X}^\beta) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta. \quad (\text{B.7})$$

Notons que si toutes les composantes  $g_{\alpha\beta}$  de la métrique sont indépendantes de l'une des coordonnées, disons  $x^{\bar{\alpha}}$ , alors la quantité  $g_{\bar{\alpha}\beta} \dot{X}^\beta$  est conservée le long de la géodésique  $\mathcal{L}$ . Il s'agit précisément de la quantité conservée discutée dans le § 3.5 [revoir l'Éq. (3.59)]. En développant le membre de gauche de la relation (B.7), on obtient

$$g_{\gamma\beta} \ddot{X}^\beta + \left( \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \right) \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta = 0. \quad (\text{B.8})$$

En tenant compte de la symétrie par échange des indices  $\alpha$  et  $\beta$  dans le deuxième terme, et en multipliant matriciellement l'Éq. (B.8) par la métrique inverse  $g^{\sigma\gamma}$ , avec  $g^{\sigma\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta^\sigma_\beta$ , on trouve enfin

$$\ddot{X}^\sigma + \frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} \left( \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \right) \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta = 0. \quad (\text{B.9})$$

On reconnaît bien l'équation des géodésiques (2.65) sous la forme (2.66), avec  $\lambda = \tau$  et le symbole de Christoffel  $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$  dans le second terme du membre de gauche.

ANNEXE C

# INTÉGRATION

*Volume propre*

*Théorème de Stokes*





# LISTE DES SYMBOLES

$\mathcal{E}$	Variété d'espace-temps
$g_{ab}$	Tenseur métrique
$ds^2$	Intervalle d'espace-temps
$\nabla_a$	Dérivée covariante
$\Gamma_{ab}^c$	Symbole de Christoffel
$\mathcal{L}$	Ligne d'univers
$p^a$	Quadri-impulsion
$m$	Masse au repos
$\tau$	Temps propre
$u^a$	Quadrivitesse
$E$	Énergie
$P^a$	Impulsion
$L$	Moment cinétique
$T_{ab}$	Tenseur énergie-impulsion
$\rho$	Densité d'énergie de masse
$\epsilon$	Densité d'énergie
$p$	Pression isotrope
$k^a$	Vecteur de Killing
$R_{abcd}$	Tenseur de Riemann
$R_{ab}$	Tenseur de Ricci
$R$	Courbure scalaire
$G_{ab}$	Tenseur d'Einstein
$\Lambda$	Constante cosmologique



# BIBLIOGRAPHIE

## Articles

- [A1] A. EINSTEIN – “Feldgleichungen der gravitation”, *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.* (1915), p. 844.
- [A2] — , “Kosmologische betrachtungen zur allgemeinen relativitätstheorie”, *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.* (1917), p. 142.
- [A3] R. V. EÖTVÖS, D. PEKÁR et E. FEKETE – “Beiträge zum gesetze der proportionalität von trägheit und gravität”, *Ann. Phys.* **373** (1922), p. 11.
- [A4] D. LOVELOCK – “The uniqueness of the Einstein field equations in a four-dimensional space”, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **33** (1969), p. 54.
- [A5] J. MÜLLER, F. HOFMANN et L. BISKUPEK – “Testing various facets of the equivalence principle using lunar laser ranging”, *Class. Quant. Grav.* **29** (2012), p. 184006.
- [A6] S. SCHLAMMINGER, K.-Y. CHOI, T. A. WAGNER, J. H. GUNDLACH et E. G. ADELBERGER – “Test of the equivalence principle using a rotating torsion balance”, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008), p. 041101, [arXiv:0712.0607](https://arxiv.org/abs/0712.0607) [gr-qc].
- [A7] P. TOUBOUL, G. MÉTRIS, V. LEBAT et A. ROBERT – “The Microscope experiment, ready for the in-orbit test of the equivalence principle”, *Class. Quant. Grav.* **29** (2012), p. 184010.
- [A8] C. M. WILL – “The confrontation between general relativity and experiment”, *Living Rev. Relativity* **9** (2006), p. 3, [arXiv :gr-qc/0510072](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0510072).

## Livres

- [L1] R. GEROCH – *Differential geometry*, Minkowski Institute Press, Montreal, 2013.
- [L2] — , *General relativity*, Minkowski Institute Press, Montreal, 2013.
- [L3] J. B. HARTLE – *Gravity*, Addison Wesley, San Fransisco, 2003.

- [L4] C. W. MISNER, K. S. THORNE et J. A. WHEELER – *Gravitation*, Freeman, New York, 1973.
- [L5] J.-P. UZAN et R. LEHOUCQ – *Les constantes fondamentales*, Belin, Paris, 2005.
- [L6] R. M. WALD – *General relativity*, University of Chicago Press, Chicago, 1984.

## Cours en ligne

- [C1] L. BLANCHET – “Introduction à la relativité générale”, [www.iap.fr](http://www.iap.fr), 2009.
- [C2] T. DAMOUR – “Gravitation relativiste et expérience”, [www.ihes.fr](http://www.ihes.fr), 2013.
- [C3] É. GOURGOULHON – “Relativité générale”, [luth.obspm.fr](http://luth.obspm.fr), 2014.
- [C4] K. KRANE – “Discrete differential geometry”, [brickisland.net](http://brickisland.net), 2012.

