Grundwissen 9. Klasse Mathematik

1. Die reellen Zahlen

1.1 Die Quadratwurzel

Unter der **Quadratwurzel aus a** (meist kurz „Wurzel aus a“) versteht man die nicht-negative Zahl, deren Quadrat gleich a ist.

Schreibweise: $\sqrt{a}$ mit $a \geq 0$ und $\sqrt{a} \geq 0$

a bezeichnet man als **Radikand**

Beachte:

1) Für $a \geq 0$ gilt: $\sqrt{a^2} = a$ und $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

2) Für $a < 0$ gilt: $\sqrt{a^2} = |a|$ und $\left(\sqrt{a}\right)^2$ existiert nicht

Das Ermitteln des Werts einer Wurzel nennt man **Radizieren** beziehungsweise **Wurzel ziehen**.

1.2 Die irrationale Zahlen

Zahlen, die man nicht als Bruch darstellen kann, bezeichnet man als **irrationale Zahlen**.

z.B. $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \pi; ...$

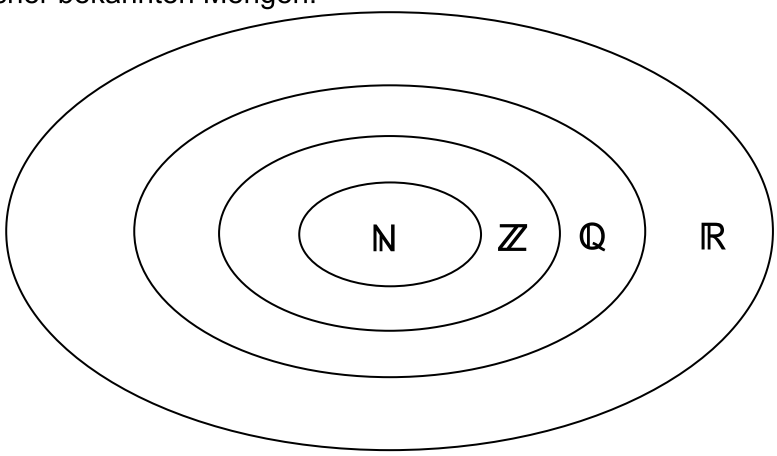
Irrationale Zahlen sind unendliche nicht periodische Dezimalzahlen.

1.3 Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Nachdem z.B. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ist, muss man $\mathbb{Q}$ erweitern:

Die Menge der rationalen Zahlen und die Menge aller irrationalen Zahlen bilden zusammen die **Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen**.

Überblick der bisher bekannten Mengen:



Die rationalen Zahlen liegen zwar sehr dicht beieinander, füllen jedoch den Zahlenstrahl nicht lückenlos aus. Trägt man die reellen Zahlen am Zahlenstrahl an, so gibt es keine Lücken.

1.4 Rechnen mit reellen Zahlen

a) Multiplizieren und Dividieren von reellen Zahlen

Es gilt:

① $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ mit $a,b\in\mathbb{R}_0^+$

② $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ mit $a\in\mathbb{R}_0^+,\ b\in\mathbb{R}^+$

Beispiele: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}=\sqrt{36}=6$

$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{14}{2}}=\sqrt{7}$

Man kann das 1. Rechengesetz auch von rechts nach links anwenden (**teilweises Radizieren**):

Beispiel: $\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 4}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}=\sqrt{3}\cdot 2=2\sqrt{3}$

Merke: Unter dem Vereinfachen einer Wurzel versteht man folgendes:
1) Nenner rational machen und
2) Radikand natürlich machen

b) Addieren und Subtrahieren von reellen Zahlen

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{9+4}=\sqrt{13}\\ \sqrt{9}+\sqrt{4}=3+2=5\end{array}\right\}\quad \sqrt{9+4}\neq\sqrt{9}+\sqrt{4}$$

Allgemein:

$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}\neq\sqrt{a-b}$ mit $a,b\in\mathbb{R}_0^+$

Summen kann man nur vereinfachen, indem man sie faktorisiert:

Beispiel: $4\sqrt{2}-3\sqrt{2}=(4-3)\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}$

AUFGABEN zu Kapitel 1

① Radiziere teilweise ohne Verwendung des Taschenrechners:

a) $\sqrt{40}$ b) $\sqrt{147}$ c) $\sqrt{99}$ d) $\sqrt{1000}$ e) $\sqrt{348\cdot 10^8}$ f) $\sqrt{6{,}25\cdot 10^{-6}}$

② Mache den Nenner rational:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{5}{\sqrt{5}}$ d) $\frac{50}{2\sqrt{50}}$ e) $\frac{4}{\sqrt{20}}$ f) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

③ Vereinfache soweit wie möglich:

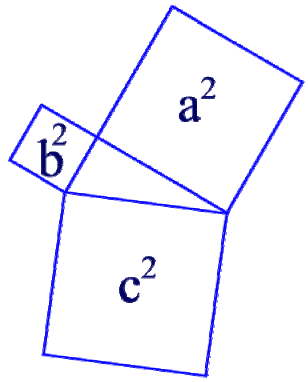
a) $0{,}5\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\left(\frac{\sqrt{7}+1}{2}:\frac{3}{\sqrt{7}-1}\right)^{2008}$ c) $\frac{3+2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$ d) $\sqrt{300}-4\sqrt{28}+3\sqrt{63}-2\sqrt{108}$

④ Vereinfache jeden der folgenden Terme so weit wie möglich: ($a,b \in \mathbb{R}_0^+$)

a) $\sqrt{a^2} : \sqrt{a}$ b) $\sqrt{2ab} : \sqrt{ab}$ c) $\sqrt{0{,}08b^{-4}}$ d) $\sqrt{5\frac{1}{3}b} \cdot \sqrt{12b}$ e) $\sqrt{\frac{3}{8b}} : \sqrt{\frac{32a^2}{27b}}$

2. Die Satzgruppe des Pythagoras

2.1 Der Satz von Pythagoras



In jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Hypotenuse den gleichen Flächeninhalt wie die Quadrate über den beiden Katheten zusammen:

Es gilt: $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

Anwendungsmöglichkeiten:

a) Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks: $A = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$

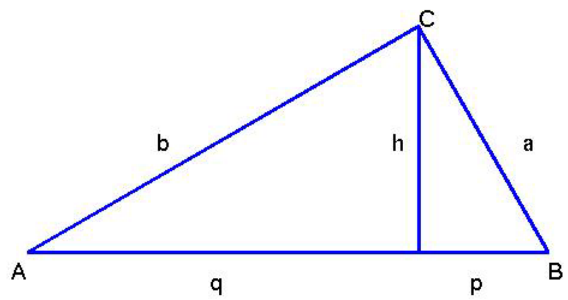
b) Abstand zweier Punkte P($x_p \mid y_P$) und Q($x_Q \mid y_Q$) im Koordinatensystem:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

Umkehrung des Satzes von Pythagoras: Gilt für die drei Seiten eines Dreiecks die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$, so ist das Dreieck rechtwinklig.

2.2 Der Kathetensatz

In jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über einer Kathete dieselbe Fläche wie das Rechteck mit der Hypotenuse und dem dieser Kathete anliegenden Hypotenusenabschnitt als Seiten:



$\boxed{a^2 = c \cdot p}$ und $\boxed{b^2 = c \cdot q}$

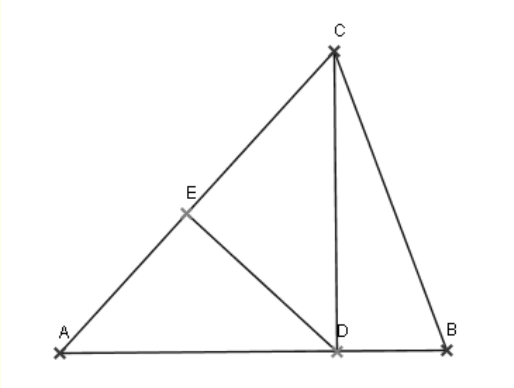
2.3 Der Höhensatz

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenusenhöhe flächengleich dem Rechteck mit den beiden Hypotenusenabschnitten als Seiten:

$\boxed{h^2 = p \cdot q}$

AUFGABEN zu Kapitel 2

① Gegeben ist das nebenstehende *nichtrechtwinklige* Dreieck ABC. Die Höhe h_c schneidet die Seite c im Punkt D und es gilt DE $\perp$ AC.
Weiter sind folgende Streckenlängen bekannt:
$\overline{AD} = 4{,}6cm$, $\overline{BC} = 5cm$, $\overline{AE} = 3cm$ und $\overline{DB} = 1{,}5cm$



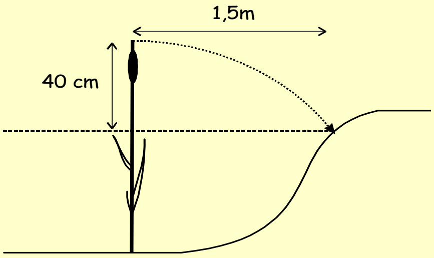
Gib bei den folgenden Teilaufgaben jeweils das betrachtete Dreieck und den verwendeten Lehrsatz an!

a) Berechne h_c !
b) Berechne $\overline{EC}$!
c) Berechne $\overline{ED}$!

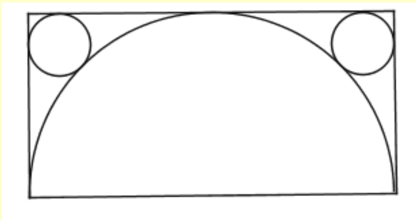
(Runde deine Ergebnisse, falls nötig, auf eine Dezimalstelle!)

② In einem rechtwinkligen Dreieck ABC teilt die Höhe die Hypotenuse im Verhältnis 3:1. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks, wenn die Hypotenuse 40 cm lang ist! Runde dein Ergebnis auf zwei Dezimalstellen!

③ 1,5 Meter vom Ufer eines Teichs entfernt ragt ein Schilfrohr 40 cm über die Wasseroberfläche empor. Zieht man seine Spitze ans Ufer, so berührt sie gerade den Wasserspiegel. Berechne die Tiefe des Teiches in m und gib das Ergebnis mit zwei Dezimalstellen an.



④ Gegeben ist das nebenstehende Kirchenfenster. Berechne den Radius x der kleinen Fenster (1 Dezimalstelle), wenn der Radius r des Halbkreises 4m beträgt!



3. Quadratische Funktionen und Gleichungen

3.1 Die binomischen Formeln

Plusformel:	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Minusformel:	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Plus-Minus-Formel:	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

mit $a,b \in \mathbb{R}$

Beachte: $(a+b)^2 = (-a-b)^2$ und $(a-b)^2 = (b-a)^2$ und $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ $(n \in \mathbb{N})$

Merke: **Faktorisieren** eines Terms bedeutet, diesen in ein Produkt zu verwandeln.
Dafür gibt es folgende Möglichkeiten:
a) Ausklammern
b) Rückwärtsanwenden einer binomischen Formel

Beispiel: $7x^3 - 28x^2 + 28x = 7x(x^2 - 4x + 4) = 7x(x-2)^2$

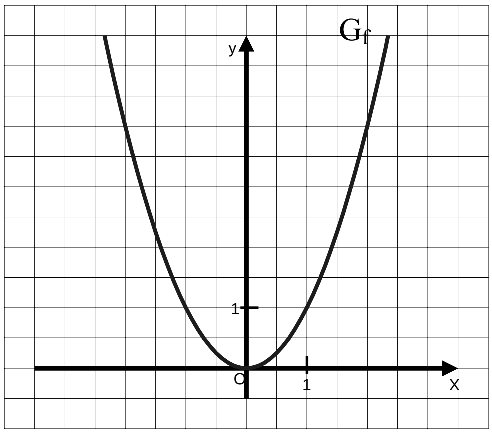
AUFGABEN zu 3.1

① Faktorisiere soweit wie möglich: a) $2x^2 - 4xy + 2y^2$ b) $8h^2 - 242$

② Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen:
a) $f(x) = 36 - x^2$ b) $g(x) = 9x - 6x^2 + x^3$

③ Bestimme die Definitionsmenge:
a) $k(x) = \dfrac{3x}{4x^2 - 9}$ b) $l(x) = \dfrac{3x - 1}{0{,}25x^3 + 3x^2 + 9x}$

3.2 Die Normalparabel



Der Graph der Funktion $f(x) = x^2$ heißt **Normalparabel**.

Es gilt: ① $D_f = \mathbb{R}$; $W_f = \mathbb{R}_0^+$
② Der tiefste Punkt der Normalparabel heißt **Scheitel S**.
③ Die Normalparabel ist achsensymmetrisch zur y- Achse.

3.3 Die allgemeine quadratische Funktion

Die Darstellung $f(x) = a(x - d)^2 + e$ mit $a, d, e \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ nennt man **Scheitelform**.

Es gilt:

① Der Scheitel der zugehörigen Parabel liegt bei S($d|e$).

② Für $a > 0$ ($a < 0$) ist die Parabel nach oben (unten) geöffnet, der Scheitel ist der tiefste (höchste) Punkt.

③ Für $|a| > 1$, d.h. für $a > 1$ oder $a < -1$ ist die Parabel enger als die Normalparabel.
Für $|a| < 1$, d.h. für $-1 < a < 1$ ist die Parabel weiter als die Normalparabel.

④ $D_f = \mathbb{R}$; $W_f = [e;\infty[$ für $a > 0$ beziehungsweise $W_f =]-\infty;e]$ für $a < 0$

⑤ Der Graph G_f ist achsensymmetrisch zur Geraden $x = d$.

Ist eine quadratische Funktion in der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ gegeben, so bestimmt man den Scheitel mit Hilfe der **quadratischen Ergänzung**.

Beispiel: $f(x) = -2x^2 + 6x - 9$

1. Schritt: Ausklammern $y = -2(x^2 - 3x + 4{,}5)$

2. Schritt: geeignetes Ergänzen $y = -2(x^2 - 3x + 1{,}5^2 - 1{,}5^2 + 4{,}5)$

3. Schritt: Vereinfachen $y = -2\left[(x-1{,}5)^2 - 2{,}25 + 4{,}5\right]$

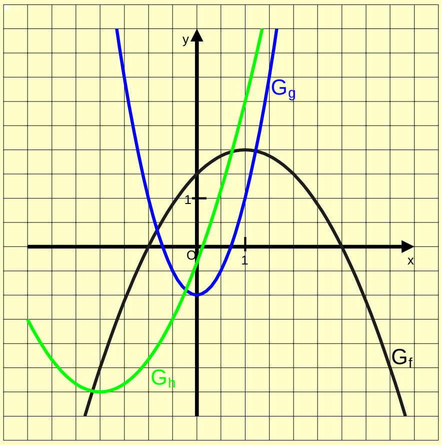
$y = -2\left[(x-1{,}5)^2 + 2{,}25\right]$

$y = -2(x-1{,}5)^2 - 4{,}5$

4. Schritt: Scheitel ablesen $S(1{,}5/-4{,}5)$

AUFGABEN zu 3.2 und 3.3

① Gib die Funktionsgleichungen der im nebenstehenden Koordinatensystem dargestellten Funktionsgraphen an:



② Bestimme jeweils die Scheitel der Funktionen:

a) $f(x) = -0{,}5x - 2x^2$ b) $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4$

c) $h(x) = 7 + 2x^2 - x$ d) $k(x) = 3 - x$

Merke: Ist eine quadratische Funktion in der faktorisierten Darstellung $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ mit $a, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ angegeben, so kann man direkt die Nullstellen $N_1(x_1|0)$ und $N_2(x_2|0)$ ablesen.

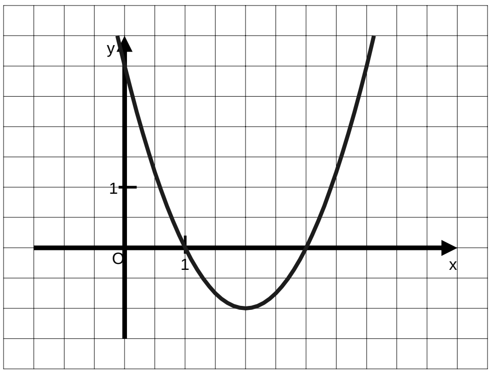
Für die x- Koordinate des Scheitels S($d|e$) gilt dann: $d = \frac{x_1 + x_2}{2}$

3.4 Quadratische Gleichungen

Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, nennt man **quadratische Gleichungen**. Im Gegensatz zu linearen Gleichungen ($mx + t = 0$) sind quadratische Gleichungen **NICHT** mit Äquivalenzumformungen lösbar.

Graphisches Lösen einer quadratischen Gleichung:

Beispiel: $x^2 - 4x + 3 = 0$



Um diese Gleichung graphisch zu lösen, muss man die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ermitteln.

quadratische Ergänzung => Scheitel S(2/-1)

Ablesen $\Rightarrow$ $N_1(1/0)$ und $N_2(3/0)$

Rechnerisches Lösen einer quadratischen Gleichung:

a) mit dem Satz von Vieta

Sind x_1 und x_2 (mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$) Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ (d.h. $a = 1$), so gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -b \\ x_1 \cdot x_2 &= c \end{aligned}}$$

Beispiel: $x^2 - 4x + 3 = 0$ Es gilt: $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= +4 \\ x_1 \cdot x_2 &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = 1$ und $x_2 = 3$

b) mit der Lösungsformel

Sind x_1 und x_2 (mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$) Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, so gilt:

$$\boxed{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Beispiel: $2x^2 - 8x + 6 = 0$ Es gilt: $x_{1/2} = \frac{+8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{4} = \frac{8 \pm 4}{4} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

Beachte:
Den Ausdruck $b^2 - 4ac$ bezeichnet man als **Diskriminante D**.

Mithilfe von D lässt sich bestimmen, ob eine quadratische Gleichung überhaupt lösbar ist:

① D = $b^2 - 4ac > 0$ $\Rightarrow$ es gibt 2 Lösungen
② D = $b^2 - 4ac = 0$ $\Rightarrow$ es gibt 1 Lösung
③ D = $b^2 - 4ac < 0$ $\Rightarrow$ es gibt keine Lösung

AUFGABEN zu 3.4

① Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen mit dem Satz von Vieta!

a) $x^2 - 2x - 24$ b) $x^2 + 5x + 6$

② Ermittle die Lösungen mithilfe der Lösungsformel!

a) $256x^2 - 32x + 1 = 0$ b) $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = 0$

c) $6y^2 + 7 = \frac{29}{2}y$ d) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ (Achtung: Substitution, d.h. ersetze zuerst x² durch z)

e) $\frac{x}{1+x} = \frac{4-x}{1-x^2}$ f) $4x^2 - 20 = 0$ (Achtung: manchmal geht es ohne Lösungsformel schneller!)

③ Finde jeweils heraus, für welchen Wert / welche Werte des Parameters m ($m \in \mathbb{R}$) die Gleichung $x^2 + 2x + m = 0$

a) genau eine Lösung hat b) zwei Lösungen hat
c) keine Lösung hat d) als eine ihrer Lösungen $x_1 = 2$ besitzt.

3.5 Lineare Gleichungssysteme mit 3 Unbekannten

Beispiel:
I. $6x + y - 3z = 9$
II. $2x + 2y - z = 3$
III. $5x - 4y - 4z = 0$

Analog zu den linearen Gleichungssystemen mit 2 Unbekannten gibt es auch hier die drei bekannten Lösungsverfahren:

1. **Einsetzungsverfahren**
2. **Gleichsetzungsverfahren** und
3. **Additionsverfahren**

[vgl. Grundwissen Mathematik 8. Klasse]

3.6 Gemeinsame Punkte von Funktionsgraphen

Gemeinsame Punkte zweier Funktionsgraphen G_f und G_g sind alle Punkte P(x/y) mit $f(x) = g(x)$.
Diese bestimmt man wie folgt:

① Gleichsetzen der Funktionsterme

② Lösen der dadurch entstandenen Gleichung

Beispiel: $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ und $g(x) = x^2 - 4$

Gleichsetzen der Funktionsterme: $-\frac{1}{4}x^2 + 1 = x^2 - 4$

Lösen der entstandenen Gleichung:
$-\frac{1}{4}x^2 = x^2 - 5$
$-1\frac{1}{4}x^2 = -5$
$x^2 = +4$ => $x_{1/2} = \pm 2$

AUFGABEN zu 3.5 und 3.6

① Bestimme die Funktionsgleichung der Parabel, die durch folgende Punkte verläuft:
A(2/3), B(0/4) und C(-1/2)

② Bestimme die Funktionsgleichung einer Parabel, deren Scheitel bei S(–2/3) liegt und die durch A(1/1) verläuft.

③ Gib die Funktionsgleichung einer Parabel an, deren Nullstellen bei N_1(2/0) und N_2(-4/0) liegen und die durch den Punkt P(-4/20) verläuft.

④ Ermittle die gemeinsamen Punkte der Graphen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2x^2 - 4$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 1$ und $g(x) = x - 5{,}75$

c) $f(x) = 7x + 3$ und $g(x) = -x + 5$

d) $f(x) = \dfrac{5}{x-2}$ und $g(x) = x + 2$

4 Erweiterung des Potenzbegriffs

4.1 Die allgemeine Wurzel

Unter $\sqrt[n]{a}$ (lies: **n-te Wurzel aus a**) versteht man für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ diejenige nicht-negative reelle Zahl, deren n-te Potenz den Wert a hat.

d.h. $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$

Bezeichnungen: n heißt **Wurzelexponent**, a heißt **Radikand**

Lösung von Gleichungen mit der n-ten Wurzel

Die Gleichung $x^n = a$ (mit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$) hat entweder zwei, eine oder keine Lösung:

① n gerade
- a) $a > 0$ $\Rightarrow$ es gibt zwei Lösungen: $x_{1/2} = \pm\sqrt[n]{a}$
- b) $a < 0$ $\Rightarrow$ es gibt keine Lösung
- c) $a = 0$ $\Rightarrow$ es gibt eine Lösung: $x_1 = 0$

② n ungerade
- a) $a > 0$ $\Rightarrow$ es gibt eine Lösung: $x_1 = \sqrt[n]{a}$
- b) $a < 0$ $\Rightarrow$ es gibt eine Lösung: $x_1 = -\sqrt[n]{|a|}$
- c) $a = 0$ $\Rightarrow$ es gibt eine Lösung: $x_1 = 0$

Beispiele:
- a) $x^4 = 16$ $\Rightarrow$ $x_{1/2} = \pm 2$
- b) $x^4 = -81$ $\Rightarrow$ keine Lösung
- c) $x^3 = 8$ $\Rightarrow$ $x_1 = 2$
- d) $x^3 = -8$ $\Rightarrow$ $x_1 = -2$

4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten

Es gilt: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ und $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (für $a \geq 0$)

Rechengesetze für Potenzen mit rationalen Exponenten

($a, b \in \mathbb{R}^+$, $p, q, r, s \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$)

① $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$

② $a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$

③ $a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = (ab)^{\frac{p}{q}}$

④ $a^{\frac{p}{q}} : b^{\frac{p}{q}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}}$

⑤ $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}$

AUFGABEN zu 4

① Vereinfache soweit wie möglich und schreibe in der Potenzschreibweise:

a) $\sqrt[4]{32}$ b) $\sqrt[6]{27}$ c) $\sqrt[4]{7776}$ d) $\sqrt[5]{480}$ e) $\sqrt[9]{0{,}008}$

② Vereinfache soweit wie möglich und gib dein Ergebnis in der Wurzelschreibweise an:

a) $\sqrt[9]{10^{18}}$ b) $\sqrt[5]{10^{-20}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ d) $\sqrt{\sqrt[3]{10^{12}}}$

③ Vereinfache folgende Terme so weit wie möglich (alle verwendeten Variablen sind dabei größer 0)

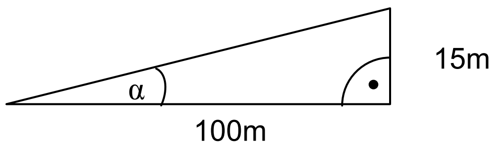
a) $\sqrt[12]{c^4}$ b) $z^{-\frac{1}{2}} \cdot z^{-0{,}75} \cdot z^{\frac{5}{4}}$ c) $(a^2b)^{\frac{1}{3}} \cdot (ab^2)^{\frac{1}{3}}$ d) $\left(\frac{x}{y^2}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{x^2}{y}\right)^{-\frac{2}{3}}$

e) $\left(\frac{5a}{3x}\right)^{-\frac{1}{4}} : \left(\frac{5x}{3a}\right)^{-\frac{1}{4}}$ f) $\left(\frac{\sqrt[12]{x^5}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x}}\right) : \sqrt[12]{x}$

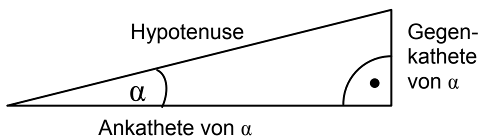
5 Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck

5.1 Steigung und Gefälle – der Tangens

Beispiel: Eine Steigung von 15 % bedeutet, dass der Höhenunterschied auf 100m 15m beträgt.



Definition: Das Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete eines Winkels α bezeichnet man als **Tangens von** α (kurz: $\tan\alpha$)



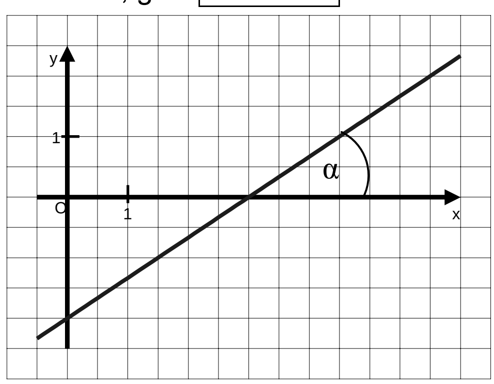
<u>Zusammenhang zwischen dem Tangens und der Steigung einer linearen Funktion</u>

Gegeben ist die lineare Funktion $f(x) = mx + t$.

Für den Winkel α , den die zugehörige Gerade mit der x- Achse einschließt, gilt: $\boxed{\tan\alpha = m}$

Beispiel: $f(x) = \frac{2}{3}x - 2$

$\tan\alpha = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 33{,}69°$



Beachte: Schließt eine Gerade mit der x- Achse einen negativen Winkel ein, so ist sie fallend. Negativer Winkel bedeutet dabei, dass der Winkel **im Uhrzeigersinn** verläuft, also gegen den positiven Drehsinn!

Mithilfe des Tangens kann man dann auch den **Schnittwinkel** zweier Geraden berechnen. Dieser ist definiert als der nichtstumpfe Winkel φ (d.h. $0 \leq \varphi \leq 90°$), den die Geraden miteinander einschließen.

AUFGABEN zu 5.1

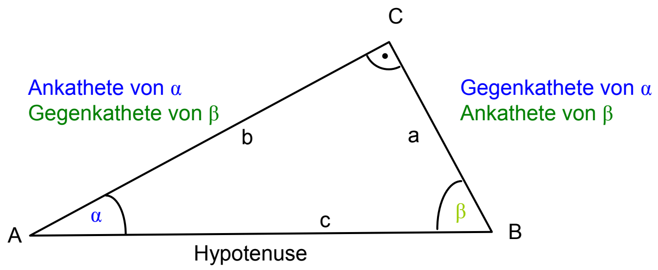
① Ermittle jeweils mit Hilfe deines Taschenrechners die Größe des zugehörigen Steigungswinkels!
a) Steigung: 10% b) Steigung: 77%

② Wo und unter welchem Winkel schneiden sich die Graphen der folgenden Funktionen:
a) $f(x) = 3x - 2$ und $g(x) = x$ b) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 4$ und $g(x) = 7x - 1$

5.2 Sinus und Kosinus

Es gilt: $\sin\alpha = \dfrac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Hypotenuse}}$;

$\cos\alpha = \dfrac{\text{Länge der Ankathete}}{\text{Länge der Hypotenuse}}$;



5.3 Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis

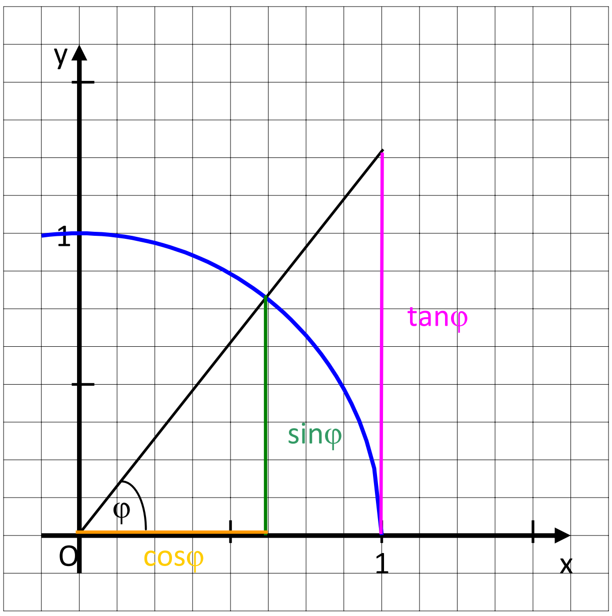
Es gilt: $\tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$

$(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$

$\sin\varphi = \cos(90° - \varphi)$

$\cos\varphi = \sin(90° - \varphi)$

$(0 \leq \varphi \leq 90°)$

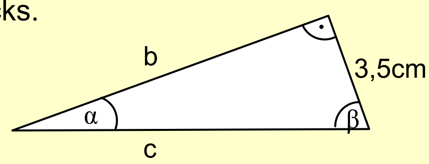


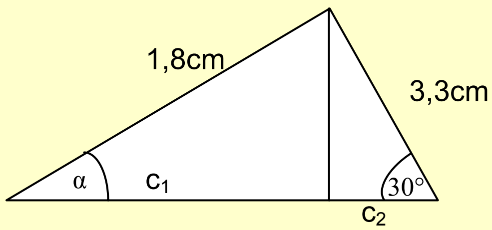
Besondere Werte:

φ	0°	30°	45°	60°	90°
sin φ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos φ	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan φ	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Nicht definiert

AUFGABEN zu 5.2 und 5.3

① Ermittle jeweils die gesuchten Größen sowie die Umfangslänge und den Flächeninhalt des Dreiecks.





② Begründe, dass in jedem Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ gilt:

$\tan\alpha \cdot \tan\beta = 1$ und $\tan\alpha = \cos\beta \cdot \sqrt{1 + (\tan\alpha)^2}$

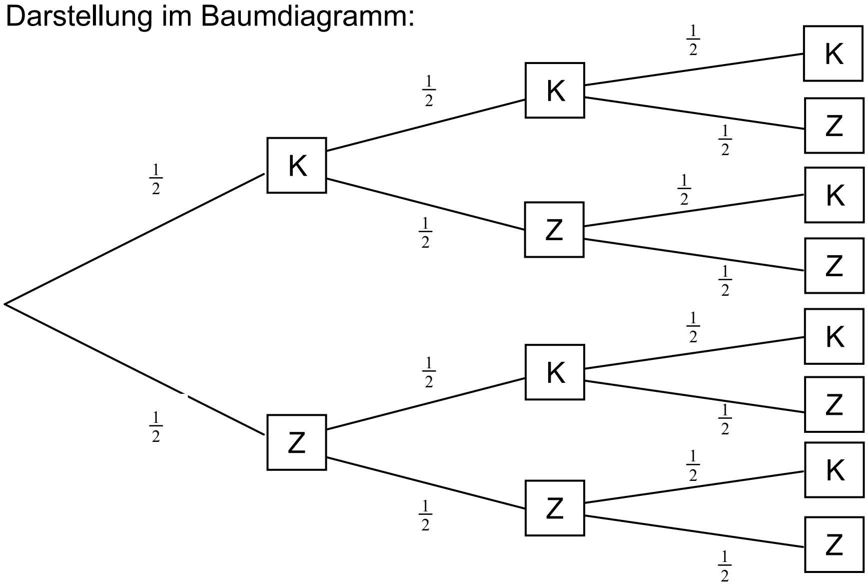
6 Zusammengesetzte Zufallsexperimente

6.1 Pfadregeln

Zufallsexperimente, die in mehreren Schritten durchgeführt werden, nennt man **mehrstufig** oder **zusammengesetzt**.

Beispiel: Eine Münze wird dreimal nacheinander geworfen.

Darstellung im Baumdiagramm:



Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten gelten die Pfadregeln:

1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines *Ergebnisses* erhält man, in dem man die Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm multipliziert.

2. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines *Ereignisses* erhält man, in dem man die Wahrscheinlichkeiten der Pfade, die zu dem Ereignis gehören, addiert.

Beispiele:

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint keinmal Zahl?
P(„keinmal Zahl") = P(KKK) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint genau zweimal Kopf?
P(„zweimal Kopf") = P(KKZ) + P(KZK) + P(ZKK) = $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

6.2 Simulation von Zufallsexperimenten

Viele Zufallsexperimente lassen sich durch so genannte **Urnenmodelle** nachahmen. Dabei verwendet man verschiedenfarbige, aber sonst nicht unterscheidbare Kugeln. Das Experiment besteht dann darin, dass man einige Male nacheinander zieht und die Farbe der Kugel notiert.

Man unterscheidet zwei Möglichkeiten:
- Ziehen mit Zurücklegen ⇨ Dabei ändert sich der Urneninhalt nicht
- Ziehen ohne Zurücklegen ⇨ Dabei ändert sich der Urneninhalt bei jedem Zug.

AUFGABEN zu 6.1 und 6.2

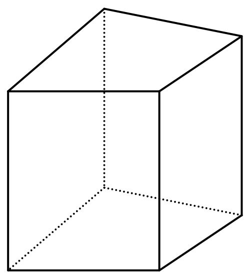
① Mit einem Laplace-Spielwürfel wird fünfmal geworfen und aus den Augenanzahlen als Ziffern in der Reihenfolge des Werfens eine fünfstellige natürliche Zahl gebildet. Berechne mithilfe der Pfadregeln die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
a) E_1: „Die Zahl lautet 12345". b) E_2: „Die Zahl enthält die Ziffern 1,2,3,4 und 5 genau einmal."
c) E_3: „Die Zahl enthält die Ziffer 5 nicht." d) E_4: „Die Zahl enthält die Ziffer 6 mindestens einmal."
e) E_5: „Die Zahl enthält die Ziffer 3 genau zweimal und zwar an 1. und an 2. Stelle."

② Eine Untersuchung hat ergeben, dass etwa 14% aller Deutschen Linkshänder sind. Man wählt zufällig zehn Personen aus.
a) Simuliere das Zufallsexperiment durch ein Urnenmodell.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist unter den zehn ausgewählten Personen mindestens ein Linkshänder?

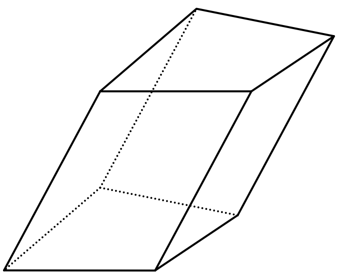
7 Fortführung der Raumgeometrie

7.1 Das gerade Prisma

Verschiebt man ein Vieleck im Raum, so entsteht ein Prisma.



gerades fünfseitiges Prisma



schiefes fünfseitiges Prisma

Beachte:

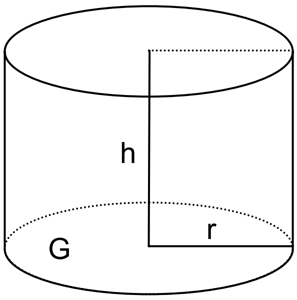
- Alle Seitenflächen des geraden Prismas sind Rechtecke.
- Der Abstand der Deckfläche von der **Grundfläche** heißt **Höhe h** des Prismas.
- Jedes Prisma hat genauso viele Seitenflächen wie die Grundseite Ecken hat.
- Alle Seitenflächen zusammen bilden die **Mantelfläche** eines Prismas.
- Die **Oberfläche** eines Prismas setzt sich aus der Mantelfläche, sowie der Grund- und der Deckfläche zusammen.

Für Berechnungen am geraden Prisma gelten folgende Formeln:

Oberflächeninhalt:	$O_{\text{Prisma}} = 2G + M = 2G + U \cdot h$ (U: Umfangslänge der Grundfläche)
Volumen:	$V_{\text{Prisma}} = G \cdot h$

7.2 Der gerade Kreiszylinder

Wird als Grundfläche kein Vieleck, sondern ein Kreis verwendet, so entsteht ein **gerader Kreiszylinder**.



Ist r der Grundkreisradius, h die Höhe und G der Grundflächeninhalt eines geraden Zylinders, so gilt:

Volumen:	$V_{\text{Zylinder}} = G \cdot h = r^2\pi h$
Mantelfläche:	$M_{\text{Zylinder}} = 2\pi rh$
Oberflächeninhalt:	$O_{\text{Zylinder}} = 2G + M = 2r^2\pi + 2r\pi h$

7.3 Die Pyramide

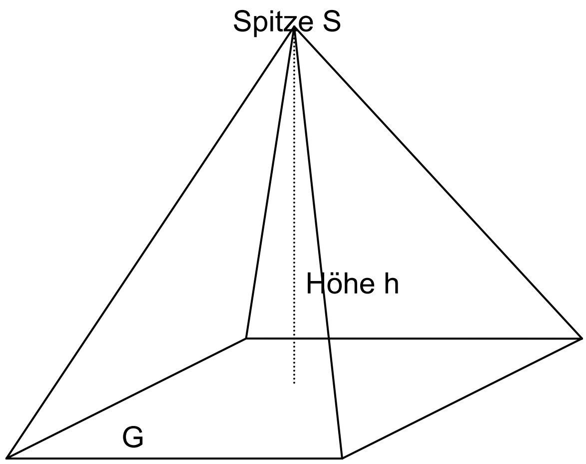
Verbindet man alle Ecken eines Vielecks mit einem beliebigen Punkt außerhalb des Vielecks, so entsteht eine **Pyramide**.

Die Seitenflächen einer Pyramide sind Dreiecke.

Sie bilden zusammen den **Mantel**, die Grundfläche und der Mantel zusammen die **Oberfläche** der Pyramide.

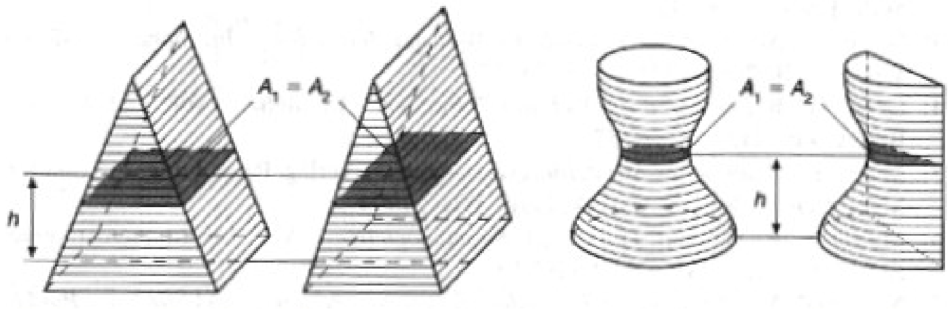
Die Seiten der Grundfläche bezeichnet man als **Grundkanten**, die Dreiecksseiten als **Seitenkanten**.

Sind alle Seitenkanten gleich lang, so spricht man von einer **geraden Pyramide**.



Zur Bestimmung des Rauminhalts einer Pyramide benötigt man das **Prinzip von Cavalieri**:

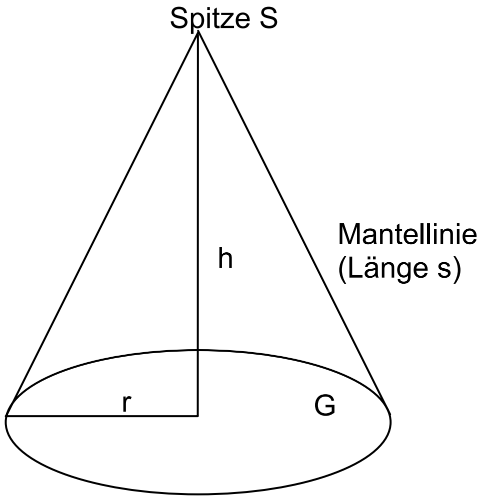
Körper, die auf jeder Höhe h flächengleiche Querschnitte besitzen, haben dasselbe Volumen.



Damit ergibt sich folgende Formel für die Berechnung des Volumens einer Pyramide: $\boxed{V_{Pyramide} = \frac{1}{3} G \cdot h}$

7.4 Der gerade Kreiskegel

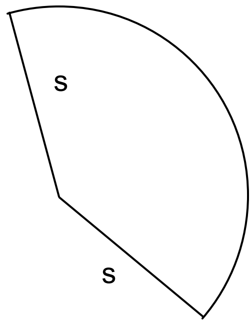
Wird als Grundfläche kein Vieleck, sondern ein Kreis verwendet, so entsteht ein **Kreiskegel.**
Bildet die Verbindungsstrecke zwischen der Spitze S und dem Mittelpunkt des Grundkreises ein Lot auf die Grundfläche, so nennt man den Kegel **gerade**.



Schneidet man bei einem geraden Kreiskegel den Mantel längs einer Mantellinie auf, so lässt er sich zu einem Kreissektor abrollen.

Es gilt:

Volumen: $V_{Kegel} = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h$
Mantelflächeninhalt: $M = \pi r \cdot s$
Oberflächeninhalt: $O = G + M = \pi r^2 + \pi r \cdot s$



AUFGABEN zu Kapitel 7

① Berechne das Volumen und die Oberfläche eines geraden Prismas mit einer Höhe von 12 cm, wenn die Grundfläche
a) ein gleichseitiges Dreieck mit 6 cm Seitenlänge ist.
b) ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 4 cm und 3 cm ist.
c) ein symmetrisches Trapez mit den Grundseitenlängen 4,6cm und 3,5cm und der Höhe 4,0cm ist.

② Litfasssäulen, die zu Werbezwecken verwendet werden, haben die Form eines Zylinders. Wie viel m² Fläche kann beklebt werden, wenn die Säule 2,60 m hoch ist und einen Außendurchmesser von 1,20 m besitzt?

③ Eine quadratische Pyramide hat die Grundkante 3 cm, und die Seitenkanten 4cm.
a) Zeichne ein Schrägbild der Pyramide.
b) Berechne den Neigungswinkel φ der Seitenflächen gegen die Grundkante.
c) Berechne den Neigungswinkel ψ der Seitenkante gegen die Grundfläche.
d) Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen.

④ Ein kegelförmiges Sektglas hat den Randdurchmesser 6cm und eine Höhe von 15cm. Es wird bis zur halben Höhe gefüllt. Finde heraus, welcher Bruchteil des gesamten Volumens dann gefüllt ist.

LÖSUNGEN ZU DEN AUFGABEN

Kapitel 1:

1a) $2\sqrt{10}$ 1b) $7\sqrt{3}$ 1c) $3\sqrt{11}$ 1d) $10\sqrt{10}$ 1e) $20000\sqrt{87}$ 1f) $2,5\cdot 10^{-3}$

2a) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 2b) $2\sqrt{3}$ 2c) $\sqrt{5}$ 2d) $\frac{1}{2}\sqrt{50}$ 2e) $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ 2f) $\frac{3}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

3a) 0 3b) 1 3c) $2,5+1,5\sqrt{3}$ 3d) $\sqrt{7}-2\sqrt{3}$

4a) $\sqrt{a}$ 4b) $\sqrt{2}$ 4c) $\frac{1}{5b^2}\sqrt{2}$ 4d) $8b$ 4e) $\frac{9}{16a}$

Kapitel 2:

1) $h_c = 4{,}8$cm; $\overline{EC} = 3{,}6cm$; $\overline{ED} = 3{,}3cm$

2) A = 346,41cm² 3) Der Teich ist 2,61m tief.

4) $(4-x)^2+(4-x)^2=(4+x)^2 \Rightarrow$ x = 0,7 [m]

Kapitel 3.1:

1a) 2(x – y)² 1b) 8(h – 5,5)(h + 5,5)

2a) $x_1 = 6$; $x_2 = -6$ 2b) $x_1 = 0$; $x_{2/3} = 3$

3a) $D_k = \mathbb{R}\backslash\{1{,}5; -1{,}5\}$ 3b) $D_l = \mathbb{R}\backslash\{0; -6\}$

Kapitel 3.2/ 3.3:

1) f(x) = $\frac{1}{2}(x-1)^2+2$ g(x) = 2x² – 1 h(x) = $\frac{2}{3}(x+2)^2-3$

2a) $S(-\frac{1}{8}\,|\,-\frac{1}{32})$ 2b) $S(0\,|\,4)$ 2c) $S(\frac{1}{4}\,|\,6\frac{7}{8})$ 2d) es gibt keinen Scheitel

Kapitel 3.4:

1a) -4; 6 1b) -2; -3

2a) $\frac{1}{16}$ 2b) keine Lösung 2c) $\frac{2}{3};\frac{7}{4}$ 2d) 3; -3; 4; -4

2e) keine Lösung 2f) $\pm\sqrt{5}$

3a) m = 1 3b) m < 1 3c) m > 1 3d) m = –8

Kapitel 3.5/3.6:

1) $y=-\frac{5}{6}x^2+\frac{7}{6}x+4$

2) $y=-\frac{2}{9}(x+2)^2+3$

3) unmöglich

4a) 2; -2 4b) 4,5 4c) 0,25 4d) 3; -3

Kapitel 4:

1a) $2^{\frac{5}{4}}$ 1b) $3^{\frac{1}{2}}$ 1c) $6^{\frac{5}{4}}$ 1d) $2\cdot 15^{\frac{1}{5}}$ 1e) $0,2^{\frac{1}{3}}$

2a) 100 2b) 0,0001 2c) 2 2d) 100

3a) $c^{\frac{1}{3}}$ 3b) 1 3c) ab 3d) $\frac{y^2}{x^2}$ 3e) $\sqrt{\frac{x}{a}}$ 3f) 2

Kapitel 5.1:

1a) 5,7° 1b) 37,6° 2a) S(1/1); 26,6° 2b) $S(\frac{15}{22}\,|\,3\frac{17}{22})$; 79,7°

Kapitel 5.2:

1) Dreieck 1: zu wenig Angaben Dreieck 2: $c_2 = 2{,}9$ cm; $c_1 = 0{,}71$cm; $\alpha = 66{,}4°$

2) $\tan\alpha\cdot\tan\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$

$$\cos\beta\sqrt{1+(\tan\alpha)^2} = \sin\alpha\sqrt{1+\frac{(\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2}} =$$

$$= \sin\alpha\sqrt{\frac{(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2}} = \sin\alpha\sqrt{\frac{1}{(\cos\alpha)^2}} = \tan\alpha$$

Kapitel 6.1./ 6.2:

1a) $\left(\frac{1}{6}\right)^5 \approx 0{,}013\%$ 1b) $\frac{5!}{6^5} \approx 1{,}54\%$ 1c) $\left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 40{,}2\%$

1d) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 59{,}8\%$ 1e) $\frac{1\cdot 1\cdot 5\cdot 5\cdot 5}{6^5} \approx 1{,}61\%$

2a) In einer Urne befinden sich 100 Kugeln, 14 davon sind weiß, 86 schwarz. Man zieht 10mal mit Zurücklegen.

2b) $1-0{,}86^{10} \approx 77{,}87\%$

Kapitel 7:

1a) $V = G\cdot h = \frac{1}{2}(6cm)^2 \sin 60° \cdot 12cm \approx 187cm^3$;

$O = U\cdot h + 2G = 3\cdot 6cm\cdot 12cm + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(6cm)^2 \sin 60° \approx 247cm^2$

1b) $V = G\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 3cm\cdot 4cm\cdot 12cm = 72cm^3$;

$O = U\cdot h + 2G = (3cm + 4cm + 5cm)\cdot 12cm + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3cm\cdot 4cm \approx 156cm^2$

1c) $V = G\cdot h = \frac{4{,}6cm + 3{,}5cm}{2}\cdot 4cm\cdot 12cm = 194{,}4cm^3$;

Berechnen des Umfangs: $b = d = \sqrt{(4{,}0cm)^2 + (0{,}55cm)^2} \approx 4{,}04cm$

$U = 4{,}6cm + 3{,}5cm + 4{,}04cm + 4{,}04cm = 16{,}18cm$

$O = U\cdot h + 2G = 16{,}18cm\cdot 12cm + 2\cdot\frac{4{,}6cm + 3{,}5cm}{2}\cdot 4cm = 226{,}56\ cm^2$

2) $M = 2r\pi h = 1{,}20m\cdot\pi\cdot 2{,}60m \approx 9{,}80m^2$

3b) $h_{Seitenfläche} = \sqrt{(4cm)^2 - (1{,}5cm)^2} \approx 3{,}7cm$; $h_{Pyramide} = \sqrt{(3{,}7cm)^2 - (1{,}5cm)^2} \approx 3{,}4cm$

$\tan\varphi = \frac{3{,}4cm}{1{,}5cm} \Rightarrow \varphi \approx 66{,}2°$

3c) $d = \sqrt{(3cm)^2 + (3cm)^2} \approx 4{,}2cm$

$\tan\psi = \frac{3{,}4\ cm}{2{,}1\ cm} \Rightarrow \psi \approx 58{,}3°$

3d) $A_{Seitenfläche} = \frac{1}{2}\cdot 3{,}7cm\cdot 3cm = 5{,}55cm$

$\Rightarrow O = 4\cdot A_{Seitenfläche} + G = 4\cdot 5{,}55cm + 3cm\cdot 3cm = 31{,}2cm^2$

$V = \frac{1}{3}G\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 9cm^2\cdot 3{,}4cm = 10{,}2cm^3$

4) $V_{gesamt} = \frac{1}{3}\cdot r^2\pi\cdot h = \frac{1}{3}\cdot(3cm)^2\pi\cdot 15cm \approx 141{,}4cm^3$

Berechnung des neuen Radius mit dem Strahlensatz:

$\frac{h_{halbe\,Höhe}}{h} = \frac{r_{halbe\,Höhe}}{r} \Rightarrow r_{halbe\,Höhe} = \frac{h_{halbe\,Höhe}}{h}\cdot r = \frac{1}{2}r$

$V_{halbe\,Höhe} = \frac{1}{3}\cdot r_{halbe\,Höhe}^2\pi\cdot\frac{h}{2} = \frac{1}{3}\cdot(1{,}5cm)^2\pi\cdot 7{,}5cm \approx 17{,}7m^3 = \frac{1}{8}\cdot V_{gesamt}$

$\Rightarrow$ 12,5% des gesamten Volumens befinden sich im Sektglas.