Programa del Diploma

Guía de Matemáticas: Análisis y Enfoques

Primera evaluación en 2021

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Programa del Diploma

Guía de Matemáticas: Análisis y Enfoques

Primera evaluación en 2021

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Programa del Diploma
Guía de Matemáticas: Análisis y Enfoques

Versión en español del documento publicado en febrero de 2019 con el título
Mathematics: analysis and approaches guide

Publicada en febrero de 2019
Actualizada en agosto de 2019 y mayo de 2020

Publicada en nombre de la Organización del Bachillerato Internacional, una fundación educativa sin fines de lucro con sede en 15 Route des Morillons, 1218 Le Grand-Saconnex, Ginebra (Suiza), por

International Baccalaureate Organization (UK) Ltd
Peterson House, Malthouse Avenue, Cardiff Gate
Cardiff, Gales CF23 8GL
Reino Unido
Sitio web: ibo.org/es

La Organización del Bachillerato Internacional (conocida como IB) ofrece cuatro programas educativos exigentes y de calidad a una comunidad de colegios de todo el mundo, con el propósito de crear un mundo mejor y más pacífico. Esta publicación forma parte de una gama de materiales producidos con el fin de apoyar dichos programas.

El IB puede utilizar diversas fuentes en su trabajo y comprueba la información para verificar su exactitud y autoría original, en especial al hacer uso de fuentes de conocimiento comunitario, como Wikipedia. El IB respeta la propiedad intelectual, y hace denodados esfuerzos por identificar a los titulares de los derechos y obtener de ellos la debida autorización antes de la publicación de todo material protegido por derechos de autor utilizado. El IB agradece las autorizaciones recibidas para utilizar los materiales incluidos en esta publicación y enmendará cualquier error u omisión lo antes posible.

El uso del género masculino en esta publicación no tiene un propósito discriminatorio y se justifica únicamente como medio para hacer el texto más fluido. Se pretende que el español utilizado sea comprensible para todos los hablantes de esta lengua y no refleje una variante particular o regional.

Declaración de principios del IB

El Bachillerato Internacional tiene como meta formar jóvenes solidarios, informados y ávidos de conocimiento, capaces de contribuir a crear un mundo mejor y más pacífico, en el marco del entendimiento mutuo y el respeto intercultural.

En pos de este objetivo, la organización colabora con establecimientos escolares, gobiernos y organizaciones internacionales para crear y desarrollar programas de educación internacional exigentes y métodos de evaluación rigurosos.

Estos programas alientan a estudiantes del mundo entero a adoptar una actitud activa de aprendizaje durante toda su vida, a ser compasivos y a entender que otras personas, con sus diferencias, también pueden estar en lo cierto.

Perfil de la comunidad de aprendizaje del IB

El objetivo fundamental de los programas del Bachillerato Internacional (IB) es formar personas con mentalidad internacional que, conscientes de la condición que las une como seres humanos y de la responsabilidad que comparten de velar por el planeta, contribuyan a crear un mundo mejor y más pacífico.

Como miembros de la comunidad de aprendizaje del IB, nos esforzamos por ser:

INDAGADORES
Cultivamos nuestra curiosidad, a la vez que desarrollamos habilidades para la indagación y la investigación. Sabemos cómo aprender de manera autónoma y junto con otros. Aprendemos con entusiasmo y mantenemos estas ansias de aprender durante toda la vida.

INFORMADOS E INSTRUIDOS
Desarrollamos y usamos nuestra comprensión conceptual mediante la exploración del conocimiento en una variedad de disciplinas. Nos comprometemos con ideas y cuestiones de importancia local y mundial.

PENSADORES
Utilizamos habilidades de pensamiento crítico y creativo para analizar y proceder de manera responsable ante problemas complejos. Actuamos por propia iniciativa al tomar decisiones razonadas y éticas.

BUENOS COMUNICADORES
Nos expresamos con confianza y creatividad en diversas lenguas, lenguajes y maneras. Colaboramos eficazmente, escuchando atentamente las perspectivas de otras personas y grupos.

ÍNTEGROS
Actuamos con integridad y honradez, con un profundo sentido de la equidad, la justicia y el respeto por la dignidad y los derechos de las personas en todo el mundo. Asumimos la responsabilidad de nuestros propios actos y sus consecuencias.

DE MENTALIDAD ABIERTA
Desarrollamos una apreciación crítica de nuestras propias culturas e historias personales, así como de los valores y tradiciones de los demás. Buscamos y consideramos distintos puntos de vista y estamos dispuestos a aprender de la experiencia.

SOLIDARIOS
Mostramos empatía, sensibilidad y respeto. Nos comprometemos a ayudar a los demás y actuamos con el propósito de influir positivamente en la vida de las personas y el mundo que nos rodea.

AUDACES
Abordamos la incertidumbre con previsión y determinación. Trabajamos de manera autónoma y colaborativa para explorar nuevas ideas y estrategias innovadoras. Mostramos ingenio y resiliencia cuando enfrentamos cambios y desafíos.

EQUILIBRADOS
Entendemos la importancia del equilibrio físico, mental y emocional para lograr el bienestar propio y el de los demás. Reconocemos nuestra interdependencia con respecto a otras personas y al mundo en que vivimos.

REFLEXIVOS
Evaluamos detenidamente el mundo y nuestras propias ideas y experiencias. Nos esforzamos por comprender nuestras fortalezas y debilidades para, de este modo, contribuir a nuestro aprendizaje y desarrollo personal.

El perfil de la comunidad de aprendizaje engloba diez atributos valorados por los Colegios del Mundo del IB. Estamos convencidos de que estos atributos, y otros similares, pueden ayudar a personas y grupos a ser miembros responsables de las comunidades locales, nacionales y mundiales.

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Índice

Propósito de esta publicación

El propósito de esta publicación es servir de guía a los colegios en la planificación, la enseñanza y la evaluación de la asignatura. Si bien está dirigida principalmente a los profesores, se espera que estos la utilicen también para informar sobre la asignatura a padres y alumnos.

Esta guía está disponible en la página de la asignatura del Centro de recursos para los programas (resources.ibo.org), un sitio web del IB protegido por contraseña y concebido para proporcionar apoyo a los profesores del IB. También puede adquirirse en la tienda virtual del IB (store.ibo.org).

Otros recursos

En el Centro de recursos para los programas pueden encontrarse también publicaciones tales como exámenes de muestra, esquemas de calificación, materiales de ayuda al profesor, informes generales de las asignaturas y descriptores de calificaciones finales. En la tienda virtual del IB se pueden adquirir exámenes y esquemas de calificación de convocatorias anteriores.

Se anima a los profesores a que visiten el Centro de recursos para los programas para ver materiales adicionales creados o utilizados por otros docentes. Se les invita también a aportar información sobre materiales que consideren útiles, por ejemplo, sitios web, libros, videos, publicaciones periódicas o ideas pedagógicas.

Agradecimientos

El IB agradece a los educadores y a sus respectivos colegios la generosidad con la que dedicaron tiempo y recursos a la elaboración de la presente guía.

Primera evaluación en 2021

El Programa del Diploma

El Programa del Diploma (PD) es un programa preuniversitario exigente de dos años de duración para jóvenes de 16 a 19 años. Su currículo abarca una amplia gama de áreas de estudio, y aspira a formar alumnos informados y con espíritu indagador, a la vez que solidarios y sensibles a las necesidades de los demás. Se da especial importancia a que los jóvenes desarrollen un entendimiento intercultural y una mentalidad abierta, así como las actitudes necesarias para respetar y evaluar distintos puntos de vista.

El modelo del Programa del Diploma

El programa se representa mediante seis áreas académicas dispuestas en torno a un núcleo (véase la figura 1). Esta estructura favorece el estudio simultáneo de una amplia variedad de áreas académicas. Los alumnos estudian dos lenguas modernas (o una lengua moderna y una clásica), una asignatura de humanidades o ciencias sociales, una ciencia experimental, una asignatura de matemáticas y una de artes. Esta variedad hace del Programa del Diploma un programa exigente y muy eficaz como preparación para el ingreso a la universidad. Además, en cada una de las áreas académicas, los alumnos tienen flexibilidad para elegir las asignaturas en las que estén particularmente interesados y que quizás deseen continuar estudiando en la universidad.

Figura 1

Modelo del Programa del Diploma

La combinación adecuada

Los alumnos deben elegir una asignatura de cada una de las seis áreas académicas, aunque también pueden elegir dos asignaturas de otra área en lugar de una asignatura de Artes. Generalmente tres asignaturas (y no más de cuatro) deben cursarse en el Nivel Superior (NS) y las demás en el Nivel Medio (NM). El IB recomienda dedicar 240 horas lectivas a las asignaturas del NS y 150 a las del NM. Las asignaturas del NS se estudian con mayor amplitud y profundidad que las del NM.

En ambos niveles se desarrollan numerosas habilidades, en especial las de análisis y pensamiento crítico. Dichas habilidades se evalúan externamente al final del curso. En muchas asignaturas los alumnos realizan también trabajos que califica directamente el profesor en el colegio.

El núcleo del modelo del Programa del Diploma

Todos los alumnos del PD deben completar los tres elementos que conforman el núcleo del modelo.

El curso de Teoría del Conocimiento (TdC) se centra fundamentalmente en el pensamiento crítico y la indagación acerca del proceso de aprendizaje, más que en la adquisición de un conjunto de conocimientos específicos. Además, examina la naturaleza del conocimiento y la manera en la que conocemos lo que afirmamos saber. Todo ello se consigue animando a los alumnos a analizar las afirmaciones de conocimiento y a explorar preguntas sobre la construcción del conocimiento. La tarea de TdC es poner énfasis en los vínculos entre las áreas de conocimiento compartido y relacionarlas con el conocimiento personal, de manera que el alumno sea más consciente de sus perspectivas y de cómo estas pueden diferir de las de otras personas.

Creatividad, Actividad y Servicio (CAS) es una parte central del Programa del Diploma. El programa de CAS contribuye a que los alumnos desarrollen su propia identidad, de acuerdo con los fundamentos éticos expresados en la declaración de principios y el perfil de la comunidad de aprendizaje del IB. CAS hace participar a los alumnos en una variedad de actividades simultáneas al estudio de las disciplinas académicas del Programa del Diploma. Las tres áreas que lo componen son la creatividad (artes y otras experiencias que implican pensamiento creativo), la actividad (actividades que implican un esfuerzo físico que contribuye a un estilo de vida sano) y el servicio (un intercambio voluntario y no remunerado que supone un aprendizaje para el alumno). Posiblemente más que ningún otro componente del Programa del Diploma, CAS cumple el principio del IB de contribuir a crear un mundo mejor y más pacífico, en el marco del respeto y el entendimiento intercultural.

La Monografía, incluida la de Estudios del Mundo Contemporáneo, brinda a los alumnos del IB la oportunidad de investigar un tema que les interese especialmente, a través de un trabajo de investigación independiente de 4.000 palabras. El área de investigación estará relacionada con una de las seis asignaturas del Programa del Diploma que el alumno esté cursando, mientras que la monografía interdisciplinaria de Estudios del Mundo Contemporáneo estará relacionada con dos asignaturas. La Monografía familiariza a los alumnos con la investigación independiente y el tipo de redacción académica que se esperará de ellos en la universidad. El resultado es un trabajo escrito estructurado cuya presentación formal se ajusta a pautas predeterminadas y en el cual las ideas y los resultados se comunican de modo razonado y coherente, acorde a la asignatura o a las asignaturas elegidas. Su objetivo es fomentar habilidades de investigación y redacción de alto nivel, así como el descubrimiento intelectual y la creatividad. Como experiencia de aprendizaje auténtico, la Monografía brinda a los alumnos la oportunidad de realizar una investigación personal acerca de un tema de su elección, con la orientación de un supervisor.

Enfoques de la enseñanza y el aprendizaje

El término “enfoques de la enseñanza y el aprendizaje” en el Programa del Diploma se refiere a las estrategias, habilidades y actitudes deliberadas que permean el entorno de enseñanza y aprendizaje. Estos enfoques y herramientas, que están intrínsecamente relacionados con los atributos del perfil de la comunidad de aprendizaje del IB, potencian el aprendizaje de los alumnos, y los ayudan a prepararse para la evaluación del Programa del Diploma y otros desafíos futuros. Los objetivos generales de los enfoques de la enseñanza y el aprendizaje en el Programa del Diploma son los siguientes:

- Brindar herramientas a los docentes no solo para impartir conocimientos, sino también para infundir en los alumnos una actitud activa de aprendizaje
- Brindar herramientas a los docentes para crear estrategias más claras que les permitan ofrecer a los alumnos experiencias de aprendizaje significativas en las que tengan que utilizar una indagación estructurada, y un mayor pensamiento crítico y creativo
- Fomentar los objetivos generales de cada asignatura para que sean algo más que las aspiraciones del curso y establecer conexiones entre conocimientos hasta ahora aislados (simultaneidad del aprendizaje)
- Motivar a los alumnos a desarrollar una variedad definida de habilidades que les permitan continuar aprendiendo activamente después de dejar el colegio, y ayudarlos no solo a acceder a la universidad por tener mejores calificaciones, sino también a prepararse para continuar con éxito la educación superior y la vida posterior
- Potenciar aún más la coherencia y la pertinencia de la experiencia del Programa del Diploma que reciben los alumnos
- Permitir a los colegios reconocer el carácter distintivo de la educación del Programa del Diploma del IB, con su mezcla de idealismo y sentido práctico

Los cinco enfoques del aprendizaje (desarrollar habilidades de pensamiento, habilidades sociales, habilidades de comunicación, habilidades de autogestión y habilidades de investigación) junto con los seis enfoques de la enseñanza (enseñanza basada en la indagación, centrada en conceptos, contextualizada, colaborativa, diferenciada y guiada por la evaluación) abarcan los principales valores en los que se basa la pedagogía del IB.

La declaración de principios del IB y el perfil de la comunidad de aprendizaje del IB

El Programa del Diploma se propone desarrollar en los alumnos los conocimientos, las habilidades y las actitudes que necesitarán para alcanzar las metas del IB, tal como aparecen expresadas en su declaración de principios y en el perfil de la comunidad de aprendizaje de la organización. La enseñanza y el aprendizaje en el Programa del Diploma representan la puesta en práctica de la filosofía educativa del IB.

Probidad académica

En el Programa del Diploma, la probidad académica constituye un conjunto de valores y conductas basadas en el perfil de la comunidad de aprendizaje del IB. En la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación, la probidad académica sirve para promover la integridad personal, generar respeto por la integridad y el trabajo de los demás, y garantizar que todos los alumnos tengan igualdad de oportunidades para demostrar los conocimientos y las habilidades que han adquirido durante sus estudios.

Todos los trabajos de clase —incluidos los que se presentan para evaluación— deben ser originales, estar basados en las ideas propias del alumno y citar debidamente la autoría de las ideas y el trabajo de otras personas. Las tareas de evaluación que requieren que el profesor oriente a los alumnos o que los alumnos trabajen juntos deben llevarse a cabo respetando por completo las directrices detalladas que proporciona el IB para las asignaturas correspondientes.

Para obtener más información sobre la probidad académica en el IB y el Programa del Diploma, consulte las siguientes publicaciones del IB: *La probidad académica en el contexto educativo del IB*, *Uso eficaz de citas y referencias*, *El Programa del Diploma: de los principios a la práctica* y el *Reglamento general del Programa del Diploma*. En esta guía puede encontrar información específica sobre la probidad académica en lo que respecta a los componentes de evaluación externa e interna de esta asignatura del Programa del Diploma.

Cita de las ideas o el trabajo de otras personas

Se recuerda a los coordinadores y profesores que los alumnos deben citar todas las fuentes que utilicen en los trabajos que presenten para su evaluación. A continuación, se ofrece una aclaración de este requisito.

Los alumnos del Programa del Diploma presentan trabajos para evaluación en diversos formatos, como material audiovisual, texto, gráficos, imágenes o datos publicados en medios impresos o electrónicos. Si un alumno utiliza el trabajo o las ideas de otra persona, debe citar la fuente usando un formato de referencia estándar de forma coherente. Si no se citan todas las fuentes, el IB investigará esta falta de citación como una posible infracción del reglamento, que puede conllevar una penalización impuesta por el Comité de la evaluación final del IB.

El IB no prescribe el formato de referencia bibliográfica o citación que deben emplear los alumnos; esta elección se deja a discreción de los miembros pertinentes del profesorado o del personal del colegio. Debido a la amplia variedad de asignaturas, las tres lenguas de respuesta posibles y la diversidad de formatos de referencia existentes, sería restrictivo y poco práctico insistir en el empleo de un determinado formato. En la práctica, ciertos formatos son de uso más común que otros, pero los colegios pueden escoger libremente el más apropiado para la asignatura en cuestión y para la lengua en la que se redacte el trabajo del alumno. Independientemente del formato de referencia adoptado por el colegio para una asignatura, se espera que la información incluya, como mínimo, el nombre del autor, la fecha de publicación, el título de la fuente y los números de página, en caso necesario.

Se espera que los alumnos empleen un formato estándar y que lo usen de forma coherente para citar todas las fuentes utilizadas, incluidas las fuentes cuyo contenido se haya parafraseado o resumido. Al redactar, el alumno debe diferenciar claramente sus propias palabras de las de otros utilizando comillas (u otros métodos, como el sangrado) seguidas de una cita que indique una entrada en la bibliografía. Si se cita una fuente electrónica, es necesario indicar la fecha de consulta. No se espera que los alumnos sean expertos en materia de referencias, pero sí que demuestren que todas las fuentes se han citado. Es necesario recordar a los alumnos que deben citar todo material audiovisual, texto, gráfico, imagen o dato publicado en medios impresos o electrónicos que no sea de su autoría. Como se ha mencionado anteriormente, es necesario emplear un formato de referencia bibliográfica apropiado.

La diversidad en el aprendizaje y las necesidades de apoyo para el aprendizaje

Los colegios deben garantizar que los alumnos con necesidades de apoyo para el aprendizaje cuenten con un acceso equitativo y las disposiciones razonables correspondientes según la política de acceso e inclusión y el documento *La diversidad en el aprendizaje y la inclusión en los programas del IB.*

Los documentos *Respuesta a la diversidad de aprendizaje de los alumnos en el aula* y *Guía del IB sobre educación inclusiva: un recurso para el desarrollo en todo el colegio* están disponibles para ayudar a los colegios en el proceso continuo de aumentar el acceso y la participación mediante la eliminación de barreras para el aprendizaje.

Naturaleza de Matemáticas

Introducción

Se ha descrito a las matemáticas como el estudio de la estructura, el orden y la relación que ha evolucionado a partir de las prácticas de contar, medir y describir objetos. Las matemáticas brindan un lenguaje único con el que describir, explorar y comunicar la naturaleza del mundo en que vivimos, además de ser en sí mismas un conjunto de conocimientos y verdades que no cesa de crecer y que se distingue por su certeza. Estas dos facetas de las matemáticas —una disciplina que se estudia por el disfrute que produce y un medio con el que explorar y comprender el mundo en que vivimos— son independientes, pero están estrechamente relacionadas.

Las matemáticas se basan en conceptos abstractos y en la generalización. Tienen su origen en ideas, y se desarrollan mediante la vinculación de estas y el desarrollo de otras ideas nuevas. Las ideas matemáticas pueden no tener una aplicación práctica inmediata, pues su propósito es indagar en profundidad para aumentar los conocimientos y las verdades matemáticas. Los conocimientos nuevos se presentan en forma de teoremas que se formulan a partir de axiomas y razonamientos matemáticos lógicos. Los teoremas solo se aceptan como verdaderos una vez que han sido probados. El conjunto de conocimientos que conforman las matemáticas no es fijo; ha crecido a lo largo de la historia de la humanidad y continúa aumentando a un ritmo cada vez mayor.

La faceta de las matemáticas cuyo fundamento es describir nuestro mundo y resolver problemas prácticos a menudo se enmarca en el contexto de otras áreas de estudio. Las matemáticas se utilizan en una amplia gama de disciplinas como lenguaje y como herramienta para explorar el universo. Sus aplicaciones incluyen el análisis de tendencias, la elaboración de predicciones, la cuantificación de riesgos y la exploración de relaciones e interdependencias.

Si bien estas dos facetas distintas de las matemáticas pueden parecer independientes, a menudo están profundamente ligadas. Con el desarrollo de las matemáticas, la historia nos ha enseñado que un teorema o un hecho matemático aparentemente extraño y abstracto, con el tiempo puede resultar ser sumamente significativo. Por otro lado, gran cantidad de conocimiento matemático se ha desarrollado para responder a las necesidades de otras disciplinas.

Los dos cursos de Matemáticas que los alumnos del PD pueden estudiar reflejan tanto las distintas facetas de las matemáticas que se han descrito anteriormente como las conexiones entre ellas. Ambos cursos comparten el mismo conjunto de conocimientos matemáticos, y las mismas formas de pensar y encarar los problemas, aunque pueden abordar las matemáticas desde diferentes perspectivas. También puede haber diferencias en los tipos de herramientas (por ejemplo, medios tecnológicos) que se utilizan en cada curso para resolver problemas abstractos o prácticos. En la sección siguiente se describen con más detalle los dos cursos actuales.

Presentación de los cursos

Debido a las diversas necesidades, aspiraciones, intereses y capacidades de los alumnos, existen dos cursos de matemáticas distintos, disponibles ambos en el NM y el NS. Estos cursos están pensados para diferentes grupos de alumnos: aquellos que quieren estudiar matemáticas como una disciplina en sí misma o por su interés en materias afines, y aquellos que desean adquirir comprensión y conocimiento de la relación que tienen las matemáticas con el mundo real y con otras disciplinas. Cada curso está concebido para satisfacer las necesidades de un grupo concreto de alumnos. Tanto Matemáticas: Análisis y Enfoques como Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación están disponibles en el NM y el NS. Así pues, los alumnos deben elegir cuidadosamente el curso y el nivel más adecuados para ellos.

Para tomar esta decisión, se debe aconsejar a cada alumno que tenga en cuenta los siguientes factores:

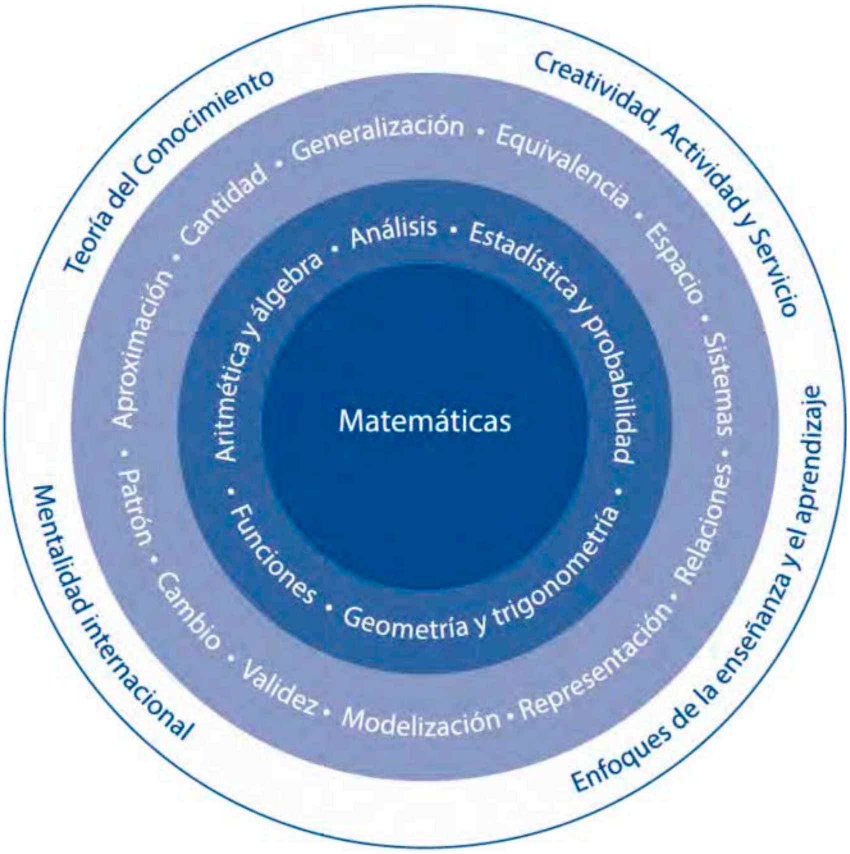
- Las destrezas matemáticas que posee y el área de las matemáticas en la que pueda obtener mejores resultados
- Su interés personal en las matemáticas y las áreas de la asignatura que puedan resultarle más interesantes
- Las otras asignaturas que elegirá en el PD o en el Programa de Orientación Profesional (POP)
- Sus planes académicos para el futuro, en concreto, las disciplinas que desea estudiar
- La profesión que desea desempeñar en el futuro

Se espera que los profesores presten ayuda en este proceso y aconsejen a los alumnos.

Naturaleza de los cursos de Matemáticas del IB

Figura 2

Modelo de Matemáticas



La estructura de los cursos de Matemáticas del PD, con dos itinerarios diferentes para elegir, reconoce las dos facetas distintas de las matemáticas que se han descrito en la introducción.

El curso de Matemáticas: Análisis y Enfoques es para aquellos alumnos que disfrutan ampliando sus conocimientos matemáticos para así poder elaborar razonamientos matemáticos con fluidez y adquirir sólidas habilidades de pensamiento matemático. También para aquellos a los que les fascina explorar las aplicaciones reales y abstractas de estas ideas, tanto utilizando medios tecnológicos como sin ellos. Los alumnos que elijan este curso serán aquellos que disfrutan de los desafíos que plantea la resolución de problemas matemáticos y su posterior generalización.

El curso de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación está destinado a alumnos que quieren desarrollar sus conocimientos matemáticos para poder describir el mundo que los rodea y resolver problemas de carácter práctico. También les interesará sacar el máximo partido de los medios tecnológicos junto con la exploración de modelos matemáticos. Los alumnos que elijan este curso serán aquellos que disfrutan de las matemáticas sobre todo cuando están enmarcadas en un contexto práctico.

Los dos cursos están disponibles en el NM y el NS. Hay numerosos elementos comunes a ambos cursos, aunque los enfoques empleados en cada uno pueden ser diferentes. Los dos cursos proporcionarán a los alumnos los conocimientos matemáticos necesarios para cursar una variedad de estudios superiores relacionados con los dos enfoques matemáticos que se han descrito.

Matemáticas: Análisis y Enfoques

Este curso reconoce la necesidad de contar con conocimientos analíticos en un mundo en el que la innovación depende cada vez más de una profunda comprensión de las matemáticas. Incluye temas que tradicionalmente han formado parte de cursos preuniversitarios de matemáticas (por ejemplo, funciones, trigonometría y análisis), además de temas que se prestan a la investigación, la formulación de conjeturas y la demostración (como el estudio de las progresiones y series en el NM y el NS, y la demostración mediante inducción matemática en el NS).

El curso permite usar medios tecnológicos, pues el dominio de los programas informáticos de matemáticas y la tecnología portátil es importante independientemente del curso que se elija. Sin embargo, Matemáticas: Análisis y Enfoques hace un fuerte hincapié en la capacidad de elaborar, comunicar y justificar argumentos matemáticos correctos.

Diferencias entre el NM y el NS de Matemáticas: Análisis y Enfoques

Los alumnos que elijan Matemáticas: Análisis y Enfoques, ya sea en el NM o el NS, deben sentirse cómodos manipulando expresiones algebraicas, disfrutar reconociendo patrones y comprender la generalización matemática de esos patrones. Los alumnos que deseen cursar Matemáticas: Análisis y Enfoques en el NS contarán con sólidas habilidades algebraicas y la capacidad de entender demostraciones simples. Serán alumnos que disfruten dedicando tiempo a resolver problemas y que encuentren satisfacción en la resolución de problemas difíciles.

Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación

Este curso reconoce la creciente importancia de las matemáticas y la tecnología en una variedad de ámbitos, en un mundo lleno de datos. Como tal, hace hincapié en el significado de las matemáticas en contexto, centrándose en temas que a menudo se usan como aplicaciones o en modelos matemáticos. Para sentar esta comprensión sobre una base firme, el curso también incluye temas que tradicionalmente forman parte de cursos preuniversitarios de matemáticas, como el análisis y la estadística.

El curso hace un amplio uso de medios tecnológicos para que los alumnos exploren y elaboren modelos matemáticos. Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación desarrolla el pensamiento matemático, generalmente en el contexto de un problema práctico y empleando medios tecnológicos para justificar conjeturas.

Diferencias entre el NM y el NS de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación

Los alumnos que elijan Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación, ya sea en el NM o el NS, disfrutarán viendo cómo se usan las matemáticas en contextos reales y en la resolución de problemas reales. Los alumnos que deseen cursar Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación en el NS contarán con buenas habilidades algebraicas y con experiencia resolviendo problemas reales. Serán alumnos que encuentren satisfacción en la exploración de problemas difíciles y que se sientan cómodos empleando medios tecnológicos para realizar esta exploración.

Matemáticas y Teoría del Conocimiento

La relación entre las asignaturas y Teoría del Conocimiento tiene gran importancia y es fundamental en el PD. El curso de Teoría del Conocimiento ofrece a los alumnos la oportunidad de reflexionar acerca de cómo se produce y comparte el conocimiento, tanto en las matemáticas como en otras áreas de conocimiento. Esto anima a los alumnos a reflexionar sobre sus suposiciones y sesgos, les ayuda a adquirir una mayor conciencia de su propia perspectiva y las perspectivas de los demás, y fomenta que se conviertan en "jóvenes solidarios, informados y ávidos de conocimiento" (declaración de principios del IB).

Como parte del curso de Teoría del Conocimiento, se anima a los alumnos a explorar las discordias relacionadas con el conocimiento en las matemáticas. Como área de conocimiento, las matemáticas parecen proporcionar una certeza que, quizás, es imposible en otras disciplinas y, en muchos casos, nos brindan herramientas con las que debatir estas certezas. Esto puede estar relacionado con la "pureza" de la disciplina, que a veces puede hacer que parezca disociada de la realidad. Sin embargo, las matemáticas también proporcionan un conocimiento importante sobre el mundo, y el uso de las matemáticas en la ciencia y la tecnología ha constituido una de las fuerzas impulsoras de los avances científicos.

A pesar de todo su indudable poder para facilitar el entendimiento y el cambio, las matemáticas son finalmente un fenómeno desconcertante. Un interrogante fundamental para todos los actores del conocimiento es si el conocimiento matemático realmente existe fuera de nuestro pensamiento. ¿Está "esperando ser descubierto" o es una creación del ser humano? De hecho, la filosofía de las matemáticas constituye un área de estudio en sí misma.

Se debe atraer la atención de los alumnos hacia cuestiones que relacionan TdC con las matemáticas, y también se les debe animar a plantear tales cuestiones por sí mismos en las clases de Matemáticas y en las de TdC. En la sección "Conexiones" de las unidades del programa de estudios se proporcionan ejemplos de cuestiones relacionadas con TdC. Para más sugerencias de conexiones con TdC, véase también la sección dedicada a las matemáticas en la *Guía de Teoría del Conocimiento*.

Matemáticas y la mentalidad internacional

La mentalidad internacional es un concepto complejo y multidimensional que se refiere a una forma de pensar, ser y actuar caracterizada por una actitud de apertura al mundo y un reconocimiento de nuestra profunda interrelación con los demás.

A pesar de los recientes avances en el desarrollo de las tecnologías de la información y las comunicaciones, el intercambio global de información e ideas matemáticas no es un fenómeno nuevo y ha sido esencial para el desarrollo de las matemáticas. En efecto, muchos de los fundamentos de las matemáticas modernas fueron establecidos hace muchos siglos por diversas civilizaciones: la árabe, la griega, la india y la china, entre otras.

En cierto modo, las matemáticas pueden considerarse un lenguaje internacional y, aparte de algunas ligeras diferencias en la notación, los matemáticos de todo el mundo se pueden comunicar eficazmente en su campo. Las matemáticas pueden trascender la política, la religión y la nacionalidad, y a través de la historia, grandes civilizaciones han debido su éxito, en parte, a la capacidad de sus matemáticos para crear y mantener estructuras sociales y arquitectónicas complejas. La política ha dominado el avance de las matemáticas con el propósito de desarrollar la balística, la navegación y el comercio, así como la propiedad de la tierra, a menudo bajo la influencia de los Gobiernos y los líderes políticos. Muchos de los primeros matemáticos fueron asesores políticos y militares, y hoy en día los matemáticos son miembros fundamentales de los equipos que asesoran a los Gobiernos en la asignación de financiación y recursos.

La importancia de las ciencias y la tecnología en el mundo actual es considerable. Las matemáticas son el lenguaje de la ciencia y, como tal, constituyen un componente esencial de la mayoría de las innovaciones tecnológicas y sustentan los desarrollos en las ciencias y la tecnología, aunque su contribución no sea siempre visible. Algunos ejemplos de ello son la función del sistema de numeración binario, el álgebra de matrices, la teoría de grafos y la teoría de la probabilidad en la revolución digital, o el uso de simulaciones matemáticas para predecir el cambio climático o la propagación de una enfermedad en el futuro. Estos ejemplos ponen de manifiesto el papel fundamental que pueden desempeñar las matemáticas en la transformación del mundo que nos rodea.

Una manera de fomentar la mentalidad internacional es ofrecer oportunidades a los alumnos para que indaguen sobre una variedad de ideas y cuestiones locales y globales. Ya existen numerosas entidades y organizaciones internacionales para promocionar las matemáticas, y se anima a los alumnos a que consulten los recursos y los sitios web (a menudo bastante amplios) de tales organizaciones. Así podrán apreciar mejor la dimensión internacional de las matemáticas y tendrán la oportunidad de participar en las cuestiones globales en torno a la materia.

En la sección "Conexiones" de las unidades del programa de estudios se proporcionan ejemplos de cuestiones relacionadas con la mentalidad internacional.

Matemáticas y Creatividad, Actividad y Servicio

Las experiencias de Creatividad, Actividad y Servicio (CAS) pueden asociarse con cualquiera de los grupos de asignaturas del PD.

CAS y Matemáticas pueden complementarse de diversas maneras. El conocimiento matemático proporciona una clave importante para la comprensión del mundo en que vivimos, y las habilidades y técnicas matemáticas que los alumnos aprenden en los cursos de Matemáticas les permitirán evaluar el mundo que los rodea. Esto, a su vez, les ayudará a desarrollar, planificar y llevar a cabo experiencias y proyectos de CAS.

Un aspecto importante de los cursos de Matemáticas es que los alumnos desarrollan la capacidad de analizar situaciones de manera sistemática y son capaces de reconocer el efecto que pueden tener las matemáticas en el mundo que los rodea. La comprensión de cómo se pueden usar las matemáticas para representar la verdad permite a los alumnos reflexionar críticamente sobre la información que reciben o generan las sociedades, y sobre la manera en que dicha información influye en la asignación de los recursos y en las decisiones que toman las personas. Este análisis sistemático y esta reflexión crítica a la hora de resolver problemas pueden servir de inspiración para los proyectos de CAS.

Los alumnos también pueden aprovechar sus experiencias de CAS para enriquecer su aprendizaje de las matemáticas tanto dentro como fuera de clase. Los profesores de Matemáticas pueden ayudar a los alumnos a establecer vínculos entre sus asignaturas y sus experiencias de CAS cuando sea adecuado. Los debates centrados en las experiencias y los proyectos de CAS ayudarán a los alumnos a establecer estos vínculos.

El desafío y el disfrute de CAS a menudo influyen profundamente en los alumnos de Matemáticas, que pueden optar por realizar actividades de CAS como las siguientes:

- Planificar, escribir y realizar una actividad de matemáticas en la que alumnos más jóvenes vayan por todo el colegio respondiendo preguntas interesantes de matemáticas como parte de su incorporación a un nuevo colegio.
- Como proyecto de CAS, planificar y realizar una encuesta, crear una base de datos y analizar los resultados, y hacer sugerencias para resolver un problema en su zona. Por ejemplo, los alumnos podrían hacer una encuesta sobre la disponibilidad de fruta y verdura fresca en una comunidad, preparar un plan de acción con sugerencias para aumentar la disponibilidad o el acceso, y presentarlo a una institución benéfica local o un grupo de la comunidad.
- Elegir un elemento de las culturas del mundo que interese a los alumnos y diseñar una Tierra en miniatura (como si la habitaran 100 personas) para expresar las tendencias en números.

Hay que tener en cuenta que una experiencia de CAS puede ser un evento puntual o una serie de eventos. Sin embargo, las experiencias de CAS deben ser distintas de los trabajos que realicen los alumnos en sus asignaturas del PD y no deben utilizarse en dichos trabajos ni formar parte de ellos.

El material de ayuda al profesor de Creatividad, Actividad y Servicio aporta más sugerencias para establecer conexiones entre las asignaturas del PD y CAS.

Conocimientos previos

Se espera que la mayoría de los alumnos que elijan un curso de Matemáticas del PD hayan estudiado matemáticas durante, al menos, 10 años. Los alumnos habrán estudiado una gran variedad de temas, con distintos enfoques de la enseñanza y el aprendizaje. Por lo tanto, contarán con un amplio abanico de habilidades y conocimientos al comenzar el curso de Matemáticas. La mayoría tendrá algunas nociones de aritmética, álgebra, geometría, trigonometría, probabilidad y estadística. Algunos estarán familiarizados con el enfoque de indagación y es probable que hayan tenido ocasión de realizar un trabajo extenso de matemáticas.

Al comienzo de la sección del programa de estudios, hay una lista de temas que, se presume, los alumnos deben ya conocer para los cursos de Matemáticas. Se admite que algunos de ellos pueden ser desconocidos para determinados alumnos, pero se prevé que puede haber otros temas dentro del programa de estudios que los alumnos ya conozcan. Los profesores deben evaluar los conocimientos previos de los alumnos y, en función de esta evaluación, deben planificar la enseñanza de modo que se incorporen los temas mencionados que sean desconocidos para sus alumnos.

Vínculos con el Programa de los Años Intermedios

El marco de Matemáticas del PAI está diseñado a fin de preparar a los alumnos para el estudio de los cursos de Matemáticas del PD. A medida que los alumnos progresan en el PAI y pasan al PD o al POP, continúan desarrollando sus habilidades y conocimientos matemáticos, que más adelante les permitirán estudiar una amplia variedad de temas. El aprendizaje basado en la indagación es una parte fundamental de los cursos de Matemáticas, en el PAI y en el PD, ya que ofrece a los alumnos la oportunidad de investigar, resolver problemas y comunicar sus conocimientos matemáticos de manera tanto independiente como colaborativa, y con un nivel de sofisticación cada vez mayor.

Los cursos de Matemáticas del PAI, basados en conceptos, buscan ayudar al alumno a construir significados mediante la mejora del pensamiento crítico y la transferencia de conocimientos. Los cursos del PAI usan un marco de conceptos clave que son coherentes con los conceptos de los cursos de Matemáticas del PD. Se trata de ideas importantes, amplias y organizadoras que tienen pertinencia dentro de la asignatura, pero que también la trascienden y son pertinentes a otros grupos de asignaturas. Los conceptos fundamentales de Matemáticas del PAI ofrecen una base muy útil a los alumnos que estudian Matemáticas en el PD.

Los objetivos generales de los cursos de Matemáticas del PAI y del PD se corresponden en gran medida. Los temas relacionados con los conocimientos previos de los cursos de Matemáticas del PD se basan en la Guía de Matemáticas del PAI.

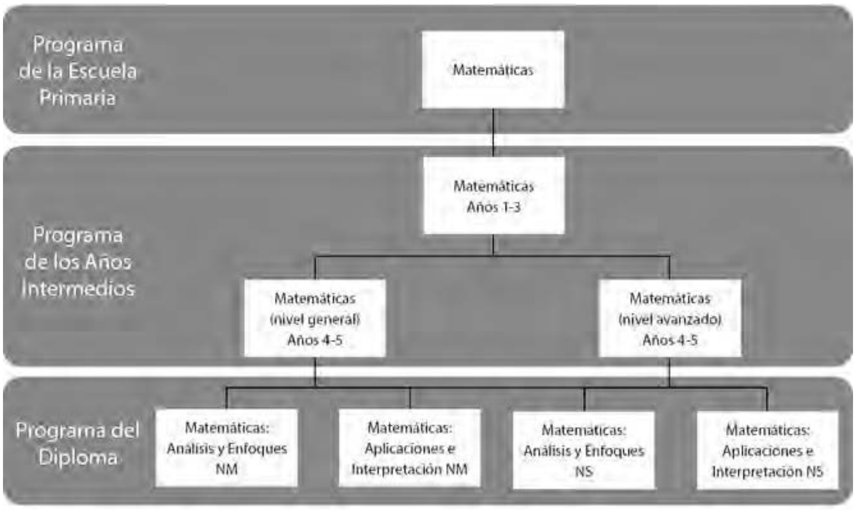
Los objetivos y los criterios de evaluación de Matemáticas del PAI se han desarrollado con los requisitos de la evaluación interna y externa del PD en mente. Los alumnos de Matemáticas del PAI deben practicar y desarrollar sus habilidades de investigación, uno de los cuatro objetivos de evaluación del PAI, lo que constituye una base importante para el componente de evaluación interna de los cursos de Matemáticas del PD. El pensamiento crítico, otro de los objetivos de evaluación del PAI, también se corresponde con los objetivos de evaluación de orden superior de comunicación, interpretación y razonamiento que se esperan de un alumno de Matemáticas del PD.

Los cursos de Matemáticas del PAI y del PD hacen hincapié en el uso de la tecnología como herramienta valiosa para el aprendizaje, la aplicación y la comunicación de las matemáticas.

En el PAI, los alumnos pueden elegir cursar matemáticas de nivel general o nivel avanzado. En el PD, existen dos cursos de matemáticas disponibles en el NM y en el NS. Por lo general, los alumnos que eligen el nivel avanzado de Matemáticas del PAI cursan posteriormente en el PD una de las asignaturas de Matemáticas del NS. Los alumnos que hayan elegido el nivel general de Matemáticas del PAI deberán solicitar a sus profesores que los asesoren sobre qué curso del NM o del NS es más adecuado que estudien en el PD.

Figura 3

Trayectorias del continuo de programas del IB hasta los cursos de Matemáticas del PD



Vínculos con el Programa de Orientación Profesional

En el POP, los alumnos estudian, al menos, dos asignaturas del PD, un tronco común con cuatro componentes y un programa de estudios de formación profesional, cuya composición está determinada por el contexto local y es coherente con las necesidades de los alumnos. El POP se ha concebido para aportar un valor añadido a los estudios de formación profesional de los alumnos y será la base para decidir qué asignaturas del PD elegir. Pueden elegirse asignaturas de cualquier grupo del PD. También se puede estudiar más de una asignatura del mismo grupo (por ejemplo, Artes Visuales y Cine).

Matemáticas puede ser una buena opción para los alumnos del POP que estén pensando en un futuro profesional, por ejemplo, en el ámbito de las finanzas, la planificación, la codificación o los sistemas de atención sanitaria, la industria del turismo, el sector de la tecnología, la informática social o la planificación urbanística. Las matemáticas ayudan a los alumnos a comprender las ventajas de los enfoques sistemáticos, a analizar contextos reales complejos, a expresarse con concisión y precisión, y a entender las implicaciones de las conclusiones.

Los cursos de Matemáticas fomentan el desarrollo de unas sólidas habilidades de comunicación escritas, verbales y gráficas; del pensamiento crítico y complejo, y de consideraciones morales y éticas influidas por las matemáticas que serán de utilidad para los alumnos como preparación para un entorno laboral global. Esto a su vez contribuye a fomentar los atributos del perfil de la comunidad de aprendizaje del IB, que se transfieren a todo el programa como apoyo al aprendizaje de los alumnos y garantía de su pertinencia.

Los alumnos de POP pueden estudiar asignaturas del PD tanto en el NM como en el NS. Los colegios pueden explorar las oportunidades disponibles para integrar a los alumnos del POP con los alumnos del PD.

Enfoques de la enseñanza y el aprendizaje de Matemáticas: Análisis y Enfoques

Comprensión conceptual

Los conceptos son ideas organizadoras amplias e importantes cuya naturaleza trasciende sus orígenes, disciplinas o marcos temporales. Los conceptos constituyen el vehículo para la indagación de los alumnos sobre cuestiones e ideas de importancia personal, local y global, y son también los medios para explorar la esencia de las matemáticas.

Los conceptos desempeñan una función importante en las matemáticas, pues ayudan a los profesores y a los alumnos a pensar con una complejidad cada vez mayor al organizar y relacionar los datos y los temas. Los alumnos utilizan la comprensión conceptual para resolver problemas, analizar cuestiones y evaluar decisiones que pueden tener un impacto en su vida, en su comunidad y en el resto del mundo.

En los cursos de Matemáticas del PD, la comprensión conceptual es clave para favorecer la profundidad del aprendizaje. Este curso cuenta con doce conceptos fundamentales que se relacionan en distinta medida con cada una de las cinco unidades del programa de estudios. Asimismo, los profesores pueden identificar y desarrollar conceptos adicionales para cumplir con los requisitos curriculares nacionales o estatales, y adaptarse a sus circunstancias concretas. Los profesores pueden utilizar estos conceptos para establecer conexiones a lo largo del currículo.

En esta guía, cada unidad comienza enunciando cuáles son sus conocimientos esenciales y señalando los conceptos que son fundamentales. A esto le siguen algunas comprensiones conceptuales pertinentes al contenido de la unidad, aunque no se trata de una lista exhaustiva ni obligatoria.

Los conceptos

Los conceptos favorecen el desarrollo de un currículo amplio, equilibrado, conceptual y cohesivo. Representan ideas importantes que tienen pertinencia y facilitan el establecimiento de conexiones dentro de cada unidad, entre las distintas unidades y también con otras asignaturas del PD.

Los doce conceptos que se enumeran a continuación favorecen la comprensión conceptual y pueden servir para organizar las unidades de trabajo, así como la enseñanza y el aprendizaje. También se proporcionan explicaciones para cada uno de estos conceptos en un contexto matemático.

Aproximación	Este concepto se refiere a una cantidad o una representación que es casi correcta, pero no exacta.
Cambio	Este concepto se refiere a una variación de tamaño, cantidad o comportamiento.
Equivalencia	Este concepto se refiere a la calidad de idéntico o intercambiable, aplicada a enunciados, cantidades o expresiones.
Generalización	Este concepto se refiere a un enunciado general formulado sobre la base de ejemplos específicos.
Modelización	Este concepto se refiere a la manera en que se pueden usar las matemáticas para representar el mundo real.
Patrones	Este concepto se refiere al orden subyacente, la regularidad o la predictibilidad de los elementos de un sistema matemático.
Cantidad	Este concepto se refiere a una cuantía o un número.
Relaciones	Este concepto se refiere a las conexiones existentes entre cantidades, propiedades o conceptos, que pueden expresarse en forma de modelos, reglas o enunciados. Las

	relaciones ofrecen a los alumnos oportunidades de explorar patrones en el mundo que los rodea.
Representación	Este concepto se refiere a la utilización de palabras, fórmulas, diagramas, tablas, gráficos, grafos y modelos para representar información matemática.
Espacio	Este concepto se refiere al marco de dimensiones geométricas que describe una entidad.
Sistemas	Este concepto se refiere a grupos de elementos interrelacionados.
Validez	Este concepto se refiere a la utilización de matemáticas lógicas y bien fundamentadas para llegar a una conclusión cierta y precisa o a una interpretación razonable de resultados.

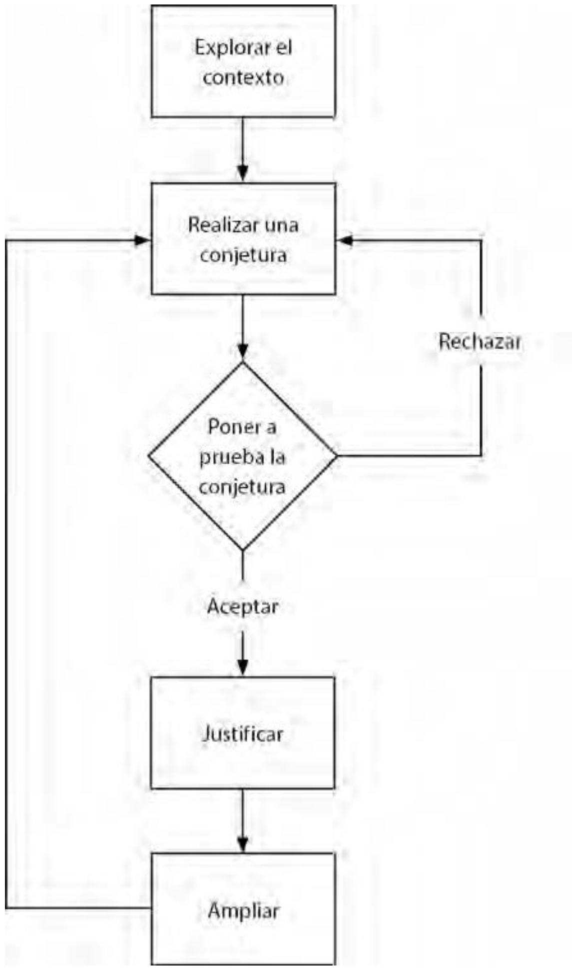
Indagación matemática

En el Programa del Diploma, el término “enfoques de la enseñanza y el aprendizaje” se refiere a las estrategias, habilidades y actitudes deliberadas que permean el entorno de enseñanza y aprendizaje. Estos enfoques y herramientas están intrínsecamente relacionados con el perfil de la comunidad de aprendizaje del IB, que fomenta el aprendizaje a través de la experimentación, el cuestionamiento y el descubrimiento.

En las clases del IB, los alumnos deben aprender matemáticas por medio de la participación activa en actividades de aprendizaje de manera habitual. Los profesores deben pues proporcionar a los alumnos frecuentes oportunidades de aprender a través de la indagación matemática, empleando estrategias que estimulen su pensamiento crítico y sus habilidades de resolución de problemas.

Figura 4

Ciclo de indagación matemática



Modelización matemática

La modelización matemática es una técnica importante para resolver problemas y entender el mundo real. A menudo, se emplea para ayudarnos a entender mejor una situación, para comprobar los efectos de un cambio o para fundamentar la toma de decisiones. Interesar a los alumnos en la modelización matemática será, por lo tanto, muy beneficioso. Es una de las habilidades matemáticas más útiles para que los alumnos tengan éxito en los diversos cursos y carreras profesionales, tanto en el ámbito de las matemáticas como en otros.

El proceso de modelización matemática comienza considerando una situación que existe en el mundo real y que, generalmente, no se ha creado artificialmente. En esta fase inicial, a veces es necesario hacer suposiciones para simplificar la situación con el fin de poder utilizar un modelo. Con frecuencia, se necesita lograr un equilibrio justo entre la simplicidad y la precisión del modelo.

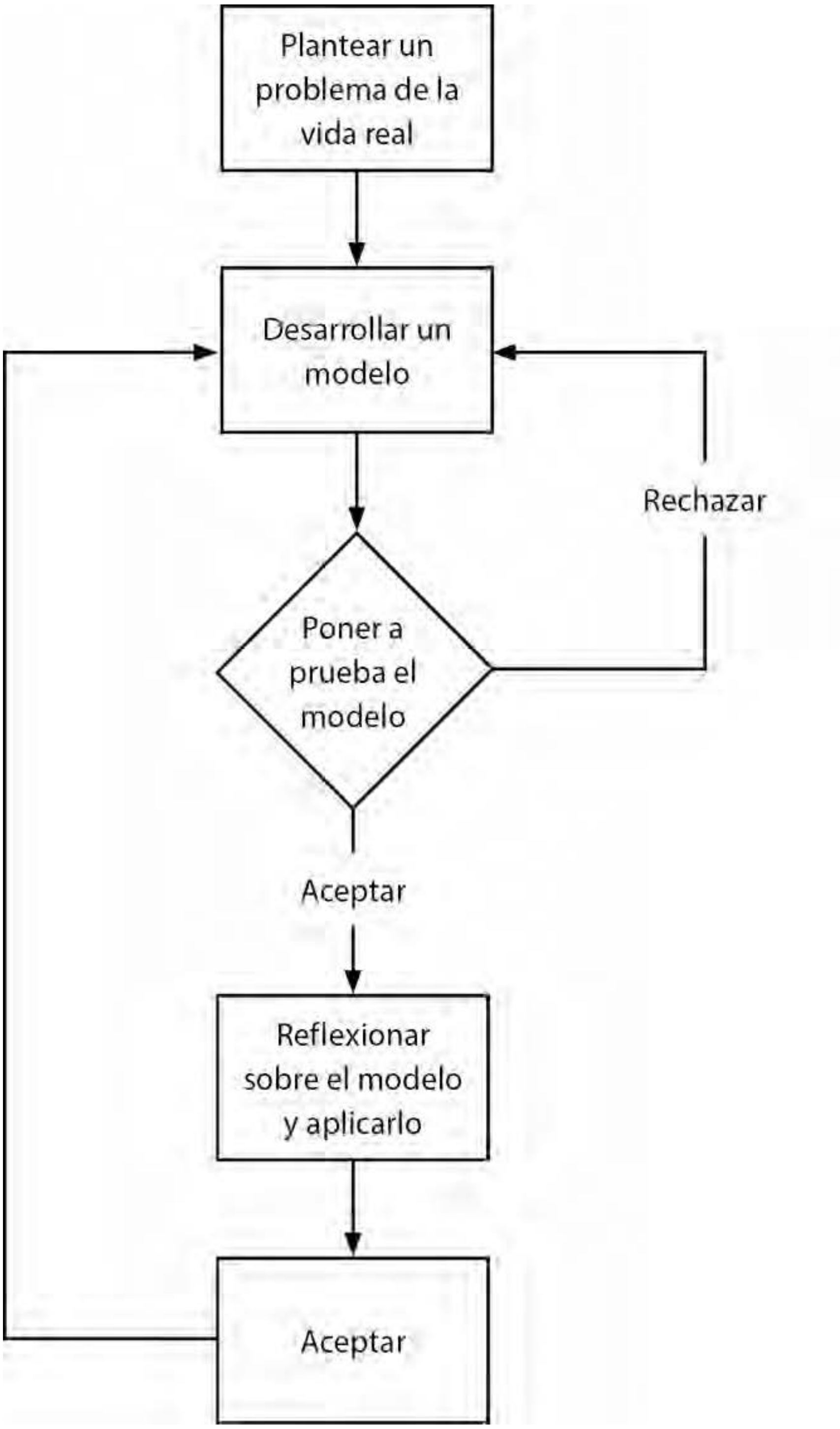
En primer lugar, se elige o se adapta una representación matemática adecuada al contexto. Se prueba esta representación para evaluar si produce los resultados esperados. La fase de prueba permite reflexionar sobre los resultados que produce el modelo y realizar adaptaciones si fuera necesario. Una vez que se llega a un modelo satisfactorio, este puede aplicarse o utilizarse para explicar una situación. Asimismo, se pueden comprobar los efectos de un cambio o fundamentar la toma de decisiones.

Se requiere una reflexión crítica a lo largo de todo el proceso de modelización matemática.

El material de ayuda al profesor ofrece más orientación y asesoramiento acerca del proceso de modelización matemática, cuyo ciclo se ilustra a continuación.

Figura 5

Ciclo de modelización matemática



Demostración

La demostración en las matemáticas es esencial para desarrollar el pensamiento crítico. Interesar a los alumnos en el proceso de demostración de un enunciado les permite profundizar su comprensión de los conceptos matemáticos. En el NM, los alumnos deberán realizar demostraciones deductivas sencillas. En los temas adicionales del Nivel Superior (TANS), los alumnos se concentrarán en la demostración por contradicción y la demostración por inducción, además de usar contraejemplos para mostrar que un enunciado no es cierto.

La demostración de enunciados conlleva múltiples beneficios, pues ayuda a los alumnos a desarrollar las habilidades siguientes:

- Trabajo en equipo
- Habilidades interpersonales
- Razonamiento
- Investigación
- Comunicación oral y escrita
- Pensamiento creativo
- Organización

La redacción de demostraciones permite a los alumnos apreciar las técnicas y los procesos de pensamiento matemático que intervienen en la demostración. Los alumnos aprenden el vocabulario y el formato que se usa para demostrar los enunciados matemáticos. En el NS, deberán además considerar cuál es el mejor método para mostrar si un enunciado matemático es cierto. Las demostraciones animan a los alumnos a reflexionar sobre el rigor, la eficacia y la elegancia con que las matemáticas muestran si un enunciado es cierto.

En esta guía, los términos "informal" y "elemental" hacen referencia a enfoques que no requieren demostración, que se pueden justificar con ejemplos y que no usan axiomas de manera formal.

Uso de medios tecnológicos

El uso de medios tecnológicos es una parte fundamental de los cursos de Matemáticas del PD. Apreciar cómo los avances tecnológicos han influido en los avances en matemáticas, y viceversa, es uno de los objetivos generales de los cursos. Asimismo, utilizar los medios tecnológicos de forma precisa, adecuada y eficaz para explorar nuevas ideas y resolver problemas es uno de los objetivos de evaluación. Aprender a usar diferentes medios tecnológicos es una habilidad importante en matemáticas. En cada una de las unidades del programa de estudios se dedica tiempo para adquirir esta habilidad, que también se desarrolla a través del equipo de herramientas.

La tecnología es una herramienta poderosa en las matemáticas. En los últimos años, el mayor acceso de los alumnos y los profesores a los medios tecnológicos ha favorecido e impulsado la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El uso juicioso de la tecnología puede hacer que las matemáticas atraigan y motiven más a un mayor número de alumnos.

Los profesores pueden usar la tecnología para respaldar y mejorar la comprensión de los alumnos de muchas maneras, como las siguientes:

- Poner de relieve aspectos de la enseñanza
- Abordar ideas falsas
- Facilitar la visualización
- Mejorar la comprensión de conceptos que, de otro modo, se vería limitada por largos cálculos numéricos o manipulaciones algebraicas
- Ayudar a los alumnos a formular conjeturas y comprobar generalizaciones
- Establecer conexiones explícitas entre diferentes representaciones o enfoques matemáticos

Los alumnos también pueden usar la tecnología en el proceso de aprendizaje con numerosos fines, por ejemplo:

- Desarrollar y mejorar su propia comprensión conceptual
- Buscar patrones
- Comprobar conjeturas o generalizaciones
- Justificar interpretaciones
- Colaborar en proyectos
- Ayudar a organizar y analizar datos

En el aula, los profesores y los alumnos pueden utilizar la tecnología, individualmente o en colaboración, para explorar los conceptos matemáticos. La clave para que el aprendizaje con la tecnología sea fructífero es encontrar un justo equilibrio en el uso que el profesor y los alumnos hacen de los medios tecnológicos, decidiendo cuidadosamente cómo emplearlos para favorecer la comprensión y la comunicación de las matemáticas.

Muchos temas de los cursos de Matemáticas del PD se prestan al uso de medios tecnológicos. Las calculadoras gráficas, los programas de representación gráfica dinámica, las hojas de cálculo, las simulaciones, las aplicaciones, los programas de geometría dinámica y las pizarras interactivas son solo algunos ejemplos de los muchos medios tecnológicos que pueden utilizarse como apoyo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En esta guía, los términos “tecnología” y “medios tecnológicos” designan cualquier tipo de calculadora, equipo o programa informático disponible en el aula. Los términos “análisis” y “enfoque analítico” se usan generalmente en esta guía para referirse a un enfoque algebraico que puede no requerir el uso de tecnología. Es importante tener en cuenta que existen restricciones sobre los medios tecnológicos que se pueden usar en los exámenes; estas se especificarán en los documentos pertinentes.

Los profesores deben comenzar por proporcionar una orientación sustancial al ligar los temas vinculantes de la **indagación y la modelización matemáticas** y el **uso de medios tecnológicos,** y animar después gradualmente a los alumnos a hacerse más independientes como indagadores y como pensadores. Los alumnos del PD deben aprender a convertirse en sólidos comunicadores en el lenguaje de las matemáticas. Los profesores deben crear un entorno de aprendizaje en el que los alumnos se sientan cómodos al asumir riesgos y en el que la indagación, la comprensión conceptual, la colaboración y el uso de la tecnología ocupen un lugar destacado.

Para obtener más información sobre los enfoques de la enseñanza y el aprendizaje del PD, véase la publicación *El Programa del Diploma: de los principios a la práctica.* El Centro de recursos para los programas ofrece una variedad de recursos para ayudar a los profesores y en el sitio web público hay información detallada sobre los talleres de desarrollo profesional disponibles.

Estructura del programa de estudios

La estructura de la sección del programa de estudios de las guías de Matemáticas es la misma para las dos asignaturas y los dos niveles. Esta estructura destaca y hace hincapié en los aspectos de la enseñanza y el aprendizaje, e incluye la comprensión conceptual, el contenido y las oportunidades de enriquecimiento.

El programa de estudios consta de cinco temas que, a su vez, incluyen subtemas. Los cinco temas son:

- Aritmética y álgebra
- Funciones
- Geometría y trigonometría
- Probabilidad y estadística
- Análisis

Cada tema comienza con una sección sobre la comprensión conceptual. En él, se enumeran cuáles de los doce conceptos clave se podrían utilizar en relación con el tema. En el apartado de conocimientos esenciales se describen los objetivos generales del tema. En el apartado de comprensión conceptual específica del contenido se describen con profundidad los objetivos y propósitos del tema y los subtemas.

Cada tema presenta en primer lugar el contenido del NM que es común para los cursos de Matemáticas: Análisis y Enfoques, y Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación.

Después del contenido del NM, se presenta el contenido de los TANS. Los profesores deben asegurarse de enseñar todo el contenido del NM a los alumnos del NM, y todo el contenido del NM y de los TANS a los alumnos del NS. Los temas están estructurados de manera que una introducción informal del contenido común se pueda abordar de manera formal en el contenido del NM y ampliar después en los TANS. Por ejemplo, el conjunto de números con el que se define algo podría abarcar los números enteros en el contenido común, los números reales positivos en el contenido del NM, y todos los números reales y complejos en los TANS.

Se ha de impartir el contenido de los cinco temas en el nivel que corresponda, aunque no necesariamente en el orden en que aparecen en esta guía. Se espera que los profesores programen el curso de modo que se responda a las necesidades de sus alumnos y se incluyan, cuando sea necesario, los temas señalados en la sección de conocimientos previos. El material de ayuda al profesor ofrece orientación para estructurar el curso.

Cada tema consta de tres secciones:

Contenido: La columna de la izquierda especifica los subtemas que se deben tratar.

Orientación, aclaraciones y vínculos en el programa de estudios: La columna de la derecha contiene información más detallada acerca de los subtemas específicos incluidos en la columna “Contenido”. Esto aclara los contenidos con vistas a los exámenes e identifica los vínculos entre subtemas del programa del estudios.

Conexiones: Cada tema contiene también una breve sección con sugerencias para tratarlo más a fondo, que incluyen ejemplos reales e ideas para seguir investigando.

Estas sugerencias son orientativas, pero no exhaustivas. Existe una versión descargable de estas secciones, para que los profesores puedan añadir otras conexiones además de las que sugiere el IB. Las áreas con las que se pueden establecer conexiones son:

- **Otros contextos:** Ejemplos de la vida real.
- **Enlaces a otras asignaturas:** Conexiones recomendadas a otras asignaturas del PD. Téngase en cuenta que estos vínculos siempre harán referencia a las versiones de las guías que estén vigentes en 2019.
- **Objetivo general:** Vínculos a los objetivos generales del curso.
- **Mentalidad internacional:** Sugerencias para debatir.
- **TdC:** Sugerencias para debatir.
- **Vínculos a los materiales de ayuda al profesor** disponibles en la sección “En la práctica” del sitio web.
- **Examen de muestra:** Vínculos a preguntas específicas que ejemplifican cómo se pueden evaluar los temas en los exámenes.
- **Uso de medios tecnológicos:** Sugerencias de cómo se puede usar la tecnología en el aula para mejorar la comprensión.
- **Sitios web:** Sugerencias de sitios web que se pueden usar en las actividades de enseñanza y aprendizaje.
- **Enriquecimiento:** Sugerencias para debatir más a fondo con miras a reforzar la comprensión.

Planificación del curso

El programa de estudios que se proporciona en esta guía no pretende establecer un orden para la enseñanza, sino detallar lo que debe cubrirse antes del final del curso. Cada colegio debe desarrollar un plan de trabajo que resulte óptimo para sus alumnos. Por ejemplo, el plan de trabajo puede realizarse de tal modo que coincida con los recursos disponibles o tenga en cuenta la experiencia y los conocimientos previos, o puede elaborarse teniendo en cuenta otros requisitos locales.

Los profesores del NS tienen la posibilidad de enseñar el contenido del NM y los TANS al mismo tiempo, o bien impartirlos en espiral, para lo cual enseñarían primero el contenido del NM y lo repasarían después cuando impartiesen los TANS.

Sea como sea la planificación del curso, se debe proporcionar una cantidad adecuada de tiempo para repasar para los exámenes. También se debe conceder tiempo para que los alumnos reflexionen sobre su experiencia y su crecimiento como miembros de la comunidad de aprendizaje.

Distribución del tiempo

Se recomienda dedicar 240 horas lectivas a los cursos del NS y 150 a los del NM. En los cursos de Matemáticas, tanto del NM como del NS, se espera que 30 de esas horas se dediquen a desarrollar las habilidades de indagación, modelización e investigación. De esas 30 horas, un máximo de 15 se deben destinar a trabajar en el componente de evaluación interna: la exploración. La distribución del tiempo establecida en esta guía es aproximada y tiene por finalidad sugerir cómo podrían repartirse las restantes horas de enseñanza del programa de estudios (210 horas en el NS y 120 horas en el NM). El tiempo exacto dedicado a cada unidad dependerá de diversos factores, como los conocimientos previos y el nivel de preparación de cada alumno. Los profesores deben pues ajustar esta distribución a las necesidades de sus alumnos.

El equipo de herramientas

Las horas lectivas incluyen tiempo para que los alumnos realicen los tipos de actividades que los matemáticos llevan a cabo en el mundo real y para que adquieran la capacidad de pensar como un matemático. De este modo, desarrollarán herramientas matemáticas que les permitirán abordar cualquier tipo de problema matemático. Los seis enfoques de la enseñanza y los cinco enfoques del aprendizaje utilizados en todos los programas del IB son primordiales en este proceso. Este tiempo brinda oportunidades en el aula para que los alumnos adopten un enfoque basado en la indagación, se centren en la comprensión conceptual del contenido del programa de estudios y sepan reconocer las matemáticas en contextos locales y globales. Asimismo, les ofrece oportunidades de trabajar en equipo y colaborar, y les proporciona tiempo para reflexionar sobre su propio aprendizaje matemático.

Se debe animar a los alumnos a que identifiquen activamente qué habilidades podrían añadir a su equipo de herramientas matemáticas. Se recomienda a los profesores que indiquen explícitamente cómo podrían transferirse estas habilidades a distintas áreas de las matemáticas para permitir a los alumnos reflexionar sobre cómo transferir a otras asignaturas lo que estén estudiando.

El material de ayuda al profesor incluye una sección dedicada al equipo de herramientas con ideas y recursos que los profesores pueden usar con sus alumnos para favorecer el desarrollo de las habilidades de pensamiento matemático. Estos recursos han sido elaborados por otros profesores para usarlos en sus propias clases y no son exhaustivos.

Fórmulas y el cuadernillo de fórmulas

En la presente guía solo se incluyen fórmulas cuando pueda existir alguna ambigüedad. Todas las fórmulas que se requieren para el curso se encuentran en el cuadernillo de fórmulas de Matemáticas.

Se recomienda a los profesores asegurarse de que los alumnos estén familiarizados con el contenido del cuadernillo de fórmulas desde el principio del curso, ya sea proporcionándoles una copia impresa o acceso a una copia electrónica.

Es necesario que cada alumno disponga de un ejemplar sin anotaciones del cuadernillo de fórmulas durante el examen. Para cada examen, el colegio será el responsable de descargarlo desde IBIS o el Centro de recursos para los programas, comprobar que no contenga errores de impresión y asegurarse de contar con un número suficiente de copias disponibles para todos los alumnos.

Términos de instrucción y notación

Los profesores y los alumnos deberán conocer la notación y los términos de instrucción del IB, ya que se emplean sin explicación en las pruebas de examen. El glosario de términos de instrucción y la notación aparecen como apéndices en esta guía.

Objetivos generales

Los objetivos generales de todos los cursos de Matemáticas del PD tienen como meta permitir a los alumnos:

1. Desarrollar su curiosidad por las matemáticas, disfrutarlas, y apreciar su elegancia y las posibilidades que ofrecen
2. Desarrollar una comprensión de los conceptos, los principios y la naturaleza de las matemáticas
3. Comunicar las matemáticas con claridad, concisión y confianza en diversos contextos
4. Desarrollar el pensamiento lógico y creativo, así como la paciencia y la constancia en la resolución de problemas, para adquirir confianza en el empleo de las matemáticas
5. Emplear y perfeccionar sus capacidades de abstracción y generalización
6. Dar los pasos necesarios para aplicar y transferir habilidades a distintas situaciones, a otras áreas del conocimiento y a avances futuros en sus comunidades locales y globales
7. Apreciar cómo los avances tecnológicos influyen en los avances en matemáticas y viceversa
8. Apreciar las cuestiones morales, sociales y éticas del trabajo de los matemáticos y las aplicaciones de las matemáticas
9. Apreciar la universalidad de las matemáticas y sus perspectivas multiculturales, internacionales e históricas
10. Valorar la contribución de las matemáticas a otras disciplinas y como área de conocimiento específica en el curso de TdC
11. Desarrollar la capacidad de reflexionar de manera crítica sobre su propio trabajo y el de los demás
12. Ampliar su comprensión de las matemáticas de manera independiente y en colaboración

Objetivos de evaluación

La resolución de problemas es fundamental en el aprendizaje de matemáticas, e implica la adquisición de habilidades y conceptos matemáticos en una amplia variedad de situaciones, incluidos los problemas que no son de rutina, los problemas abiertos y los problemas de la vida real. Al finalizar el curso de Matemáticas del PD, se espera que los alumnos demuestren lo que se expone a continuación.

1. **Conocimiento y comprensión:** recordar, seleccionar y utilizar su conocimiento de las técnicas, los hechos y los conceptos matemáticos en una diversidad de contextos conocidos y desconocidos
2. **Resolución de problemas:** recordar, seleccionar y utilizar su conocimiento de las habilidades, los resultados y los modelos matemáticos, tanto en contextos abstractos como reales, para resolver problemas
3. **Comunicación e interpretación:** transformar en matemáticas contextos realistas comunes; hacer comentarios sobre el contexto; dibujar aproximadamente o con precisión diagramas, construcciones o gráficos matemáticos, tanto en papel como utilizando medios tecnológicos; registrar métodos, soluciones y conclusiones utilizando notación estandarizada; utilizar notación y terminología apropiada
4. **Tecnología:** utilizar los medios tecnológicos de forma precisa, adecuada y eficaz para explorar nuevas ideas y resolver problemas
5. **Razonamiento:** elaborar argumentos matemáticos mediante el uso de enunciados precisos, deducciones lógicas e inferencia, y mediante la manipulación de expresiones matemáticas
6. **Enfoques basados en la indagación:** investigar situaciones desconocidas, tanto abstractas como reales, que conllevan la organización y el análisis de información, la formulación de conjeturas, la extracción de conclusiones y la comprobación de su validez

Los objetivos de evaluación en la práctica

Objetivos de evaluación	Prueba 1 %	Prueba 2 %	Prueba 3 % Solo NS	Exploración %
Conocimiento y comprensión	20-30	15-25	10-20	5-15
Resolución de problemas	20-30	15-25	20-30	5-20
Comunicación e interpretación	20-30	15-25	15-25	15-25
Tecnología	0	25-35	10-30	10-20
Razonamiento	5-15	5-10	10-20	5-25
Enfoques basados en la indagación	10-20	5-10	15-30	25-35

Resumen del programa de estudios

Componente del programa de estudios	Horas lectivas recomendadas	
	NM	NS
Tema 1: Aritmética y álgebra	19	39
Tema 2: Funciones	21	32
Tema 3: Geometría y trigonometría	25	51
Tema 4: Estadística y probabilidad	27	33
Tema 5: Análisis	28	55
El equipo de herramientas y la exploración matemática Desarrollo de habilidades de investigación, resolución de problemas y modelización como preparación para realizar una exploración individual. La exploración es un trabajo escrito basado en la investigación de un área de las matemáticas.	30	30
Total de horas lectivas	**150**	**240**

Todos los temas son obligatorios. Los alumnos deberán estudiar todos los subtemas de cada uno de los temas del programa de estudios que se especifican en esta guía. Los alumnos también deben estar familiarizados con los temas que se mencionan en la sección de conocimientos previos.

Temas relacionados con los conocimientos previos

Se supone que los alumnos que van a cursar una asignatura de Matemáticas del PD ya poseen conocimientos matemáticos previos, aunque estos variarán de un alumno a otro. Más concretamente, se espera que los alumnos de Matemáticas ya estén familiarizados con los siguientes temas antes de presentarse a los exámenes, porque en las preguntas se dará por supuesto que los conocen. Por consiguiente, los profesores deberán asegurarse de que cualquier tema de la siguiente lista que sus alumnos no dominen al principio del curso se imparta en las primeras etapas de este. Los profesores también deberán tener en cuenta los conocimientos matemáticos que sus alumnos ya poseen a la hora de diseñar un programa de estudios de matemáticas adecuado. En la siguiente lista se incluyen aquellos conocimientos que —junto con el contenido del programa de estudios— resultan imprescindibles para que los alumnos puedan completar satisfactoriamente el curso de Matemáticas.

Aritmética y álgebra

- Conjuntos de números: números naturales $\mathbb{N}$; números enteros $\mathbb{Z}$; números racionales $\mathbb{Q}$ e irracionales; y números reales $\mathbb{R}$.
- Sistema internacional de unidades de medida de masa, tiempo y longitud, así como de sus magnitudes derivadas (p. ej., velocidad, área y volumen).
- Redondeo, aproximaciones decimales y cifras significativas, incluida la estimación de errores.
- Definición y uso elemental del valor absoluto (módulo) $|a|$.
- Suma, resta, multiplicación y división con números enteros, decimales y fracciones, incluido el orden de las operaciones.
- Números primos, factores (divisores) y múltiplos.
- Máximo común divisor (factor) y mínimo común múltiplo (solo NS).
- Aplicaciones sencillas de razones, porcentajes y proporciones.
- Manejo de expresiones algebraicas que incluyan factorización y desarrollo.
- Transformación de fórmulas en otras equivalentes.
- Cálculo del valor numérico de una expresión mediante sustitución.
- Cálculo de potencias sencillas con exponente positivo.
- Cálculo de potencias con exponente racional (solo NS).
- Uso de inecuaciones ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$), intervalos de la recta real.
- Simplificación de expresiones sencillas con radicales (irracionales o no).
- Racionalización de denominadores (solo NS).
- Expresión de números en forma $a \times 10^k$, $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Familiarización con las divisas que se suelen reconocer en todo el mundo.
- Resolución de ecuaciones e inecuaciones lineales.
- Resolución de ecuaciones e inecuaciones cuadráticas con coeficientes racionales (solo NS).
- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Conceptos y notación básica de conjuntos. Operaciones con conjuntos: unión e intersección.
- Suma y resta de fracciones algebraicas (solo NS).

Funciones

- Representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas empleando medios tecnológicos.
- Aplicaciones entre conjuntos. Ejemplos concretos utilizando pares ordenados, tablas, diagramas y gráficos.

Geometría y trigonometría

- El teorema de Pitágoras y su recíproco.
- Punto medio de un segmento de recta y distancia entre dos puntos en el plano cartesiano.
- Conceptos geométricos: punto, recta, plano y ángulo.
- Medición de ángulos en grados; rumbos.
- Teorema de la suma de los ángulos de un triángulo.
- Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, incluidas las aplicaciones sencillas para la resolución de triángulos.
- Demora (ángulo medido en el sentido de las agujas del reloj partiendo de la dirección norte y expresado siempre con tres cifras).
- Transformaciones geométricas sencillas: traslación, simetría, rotación y homotecia.
- El círculo: centro, radio, área y circunferencia. Los términos diámetro, arco, sector circular, cuerda, tangente y segmento circular.
- Perímetro y área de figuras planas. Propiedades de triángulos y cuadriláteros, incluidos los paralelogramos, rombos, rectángulos, cuadrados, cometas y trapezoides; figuras compuestas o combinadas.
- Familiarización con las figuras tridimensionales (prismas, pirámides, esferas, cilindros y conos).
- Volumen y área de la superficie de ortoedros, prismas, cilindros y figuras tridimensionales compuestas.

Estadística y probabilidad

- Recopilación de datos y su representación mediante gráficos de barras, gráficos de sectores, pictogramas y gráficos de líneas.
- Obtención de datos estadísticos sencillos a partir de datos discretos (incluidos la media, la mediana, la moda y el rango).
- Cálculo de probabilidades de sucesos simples.
- Diagramas de Venn para ordenar datos.
- Diagramas de árbol.

Análisis

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

Contenidos del programa de estudios

Tema 1: Aritmética y álgebra

Conceptos

Conocimientos esenciales

La aritmética y el álgebra sirven para representar patrones, mostrar equivalencias y hacer generalizaciones, lo que nos permite modelizar situaciones del mundo real. El álgebra constituye una abstracción de los conceptos numéricos y emplea variables que posibilitan la resolución de problemas matemáticos.

Conceptos recomendados para impartir en este tema

Generalización, representación, modelización, equivalencia, patrones, cantidad

TANS: validez, sistemas

Comprensión conceptual específica del contenido

- La modelización de situaciones de la vida real mediante progresiones y series geométricas o aritméticas permite realizar predicciones, analizar datos e interpretarlos.
- Las diferentes representaciones que hay de los números nos permiten comparar cantidades equivalentes y utilizarlas con facilidad en cálculos, hasta obtener el resultado con el grado de precisión apropiado.
- Los números y las fórmulas pueden aparecer bajo formas o representaciones distintas —aunque equivalentes—, lo que nos puede resultar útil a la hora de establecer identidades.
- Las fórmulas constituyen una generalización hecha sobre la base de ejemplos concretos, los cuales se pueden luego ampliar a otros ejemplos nuevos.
- Las propiedades de los logaritmos permiten hallar la inversa de funciones exponenciales que modelizan situaciones de la vida real.
- Los patrones que se observan en los números sirven de guía para el desarrollo de herramientas algebraicas que se pueden luego aplicar para hallar incógnitas.
- El teorema del binomio es una generalización que proporciona un método eficaz para expandir las expresiones binomiales.

TANS

- La demostración sirve para validar las fórmulas matemáticas y la equivalencia de las identidades.
- La utilización de las diferentes formas de representación de fracciones parciales y de números complejos nos permite realizar con facilidad cálculos que en apariencia son complicados.
- La resolución de los sistemas de ecuaciones se puede llevar a cabo utilizando diversos métodos algebraicos y gráficos equivalentes.

Contenidos para NM

N.º de horas lectivas recomendadas: 19

El objetivo de los contenidos de NM del tema de aritmética y álgebra es presentarles a los alumnos una serie de técnicas y conceptos numéricos que, combinados con una introducción a las progresiones y series aritméticas y geométricas, se puedan aplicar (entre otros) en el ámbito financiero. A los alumnos también se les presentará el concepto formal de demostración.

Las secciones de NM, desde 1.1 a 1.5, son comunes a Matemáticas: Análisis y Enfoques, y Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación.

NM 1.1

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Operaciones con números en forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y k son números enteros.	La notación de calculadora o de computadora **no** es aceptable. Por ejemplo, 5.2E30 **no** resulta aceptable; este número se ha de escribir así: $5{,}2 \times 10^{30}$.

Conexiones

Otros contextos: Números muy grandes o muy pequeños, por ejemplo, distancias astronómicas, partículas subatómicas en el ámbito de la física o valores utilizados en economía global.

Enlaces a otras asignaturas: Química (número de Avogadro); Física (orden de magnitud); Biología (mediciones microscópicas); asignaturas de Ciencias (incertidumbre y precisión de una medición).

Mentalidad internacional: La historia de los números desde los sumerios y su evolución hasta el sistema numérico árabe que utilizamos en la actualidad.

TdC: Los nombres que les damos a las cosas, ¿afectan a la manera en que las comprendemos? Por ejemplo, ¿qué repercusiones tiene el hecho de que algunos números grandes tengan un nombre asignado —como el gúgol y el gúgolplex— mientras que hay otros que se representan en forma a x 10^k?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 1.2

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Progresiones y series aritméticas. Uso de las fórmulas que permiten calcular el término n-ésimo y la suma de los n primeros términos de la progresión. Uso de la notación de sumatoria para referirse a las sumas de progresiones aritméticas.	Las hojas de cálculo, la calculadora de pantalla gráfica y el programa de representación gráfica se pueden utilizar para generar progresiones y mostrarlas en pantalla de distintas maneras. Si en el examen está permitido utilizar medios tecnológicos, cabe esperar que los alumnos identifiquen correctamente el primer término y la diferencia común.
Aplicaciones.	Entre los posibles ejemplos están el tipo de interés simple aplicado a lo largo de varios años.
Análisis, interpretación y predicción en aquellas situaciones en las que un modelo no tenga un equivalente perfectamente aritmético en la vida real.	Los alumnos tendrán que hallar el valor aproximado de la diferencia común.

Conexiones

Mentalidad internacional: A Aryabhata se le considera en ocasiones "el padre del álgebra", comparándole con Al-Juarismi; el uso de varios alfabetos en la notación matemática (por ejemplo, el uso de la letra griega sigma mayúscula para indicar sumatoria o suma).

TdC: ¿Todo el conocimiento gira en torno a la identificación y el uso de patrones? Considere, por ejemplo, los números de Fibonacci y las conexiones que existen con la razón áurea.

Descargar la plantilla de conexiones

NM 1.3

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Progresiones y series geométricas. Uso de las fórmulas que permiten calcular el término n-ésimo y la suma de los n primeros términos de la progresión. Uso de la notación de sumatoria para referirse a las sumas de progresiones geométricas.	Las hojas de cálculo, la calculadora de pantalla gráfica y el programa de representación gráfica se pueden utilizar para generar progresiones y mostrarlas en pantalla de distintas maneras. Si en el examen está permitido utilizar medios tecnológicos, cabe esperar que los alumnos identifiquen el primer término y la razón. **Enlace** a modelos o funciones que aparecen en el tema 2 y a la regresión del tema 4.
Aplicaciones.	Entre los posibles ejemplos están la propagación de una enfermedad, los aumentos y las bajadas de sueldos, y el crecimiento de la población.

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Desintegración radioactiva, física nuclear, condensadores en fase de carga y de descarga (Física).

Mentalidad internacional: La leyenda del ajedrez (Sisa ibn Dahir).

TdC: ¿Cómo explican los matemáticos el hecho de que algunas de las conclusiones alcanzadas parezcan entrar en conflicto con nuestra intuición? Considere, por ejemplo, el caso de un área finita, que puede estar delimitada por un perímetro infinito.

Descargar la plantilla de conexiones

NM 1.4

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Aplicaciones de las progresiones y series geométricas al ámbito financiero: • Interés compuesto • Depreciación anual	En las preguntas de los exámenes es posible que haya que utilizar medios tecnológicos, incluidos paquetes de aplicaciones financieras integrados. El concepto de interés simple se puede utilizar como introducción al tema del interés compuesto. Calcular el valor real de una inversión sabiendo cuál es el tipo de interés aplicado y la tasa de inflación. En los exámenes no se incluirán preguntas donde se les pida a los alumnos que deriven la fórmula. El interés compuesto se puede calcular anualmente, semestralmente, trimestralmente o mensualmente. **Enlace** a los modelos y funciones exponenciales que aparecen en el tema 2.

Conexiones

Otros contextos: Préstamos.

Enlaces a otras asignaturas: Préstamos y reembolsos (Economía y Gestión Empresarial).

Objetivo general 8: Percepción ética del acto de prestar dinero y pedir prestado dinero.

Mentalidad internacional: ¿Todas las sociedades perciben la inversión y la aplicación de intereses de la misma manera?

TdC: ¿Cómo han afectado los avances tecnológicos a la naturaleza y práctica de las matemáticas? Considere, por ejemplo, el uso de paquetes financieros.

Enriquecimiento: El concepto de e se puede introducir a través del concepto de interés compuesto continuo $(1+\frac{1}{n})^n \to \mathrm{e}$, como $n \to \infty$, sin embargo, esto no entrará en el examen.

Descargar la plantilla de conexiones

NM 1.5

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Propiedades de las potencias que tienen exponentes enteros.	**Ejemplos:** $5^3 \times 5^{-6} = 5^{-3}$, $6^4 \div 6^3 = 6$, $(2^3)^{-4} = 2^{-12}$, $(2x)^4 = 16x^4$, $2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$.
Introducción a los logaritmos en base 10 y en base e. Evaluación numérica de logaritmos empleando medios tecnológicos.	Saber que la expresión $a^x = b$ es equivalente a $\log_a b = x$, que $b > 0$ y que $\log_{\mathrm{e}} x = \ln x$.

Conexiones

Otros contextos: Escala de Richter y escala de decibelios.

Enlaces a otras asignaturas: Cálculo del pH y soluciones tampón (Química).

TdC: ¿Las matemáticas se inventaron o se descubrieron? Por ejemplo, consideremos el número e o los logaritmos: ¿existían ya antes de que el hombre los definiera por primera vez? Esta unidad es una buena oportunidad para que los profesores inciten a la reflexión sobre "la naturaleza de las matemáticas".

Descargar la plantilla de conexiones

NM 1.6

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Demostración sencilla mediante deducción, y por métodos numéricos y algebraicos; cómo plantear una demostración "de izquierda a derecha". Los símbolos y la notación para representar una igualdad y una identidad.	**Ejemplo:** Mostrar que $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$. Mostrar que la generalización algebraica de esta expresión es $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m^2+m} \equiv \frac{1}{m}$. Para hacer una demostración "de izquierda a derecha" los alumnos tienen que empezar por la expresión de la izquierda y, empleando métodos algebraicos conocidos, irla transformando hasta llegar a la expresión del lado derecho (o viceversa).

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
	Ejemplo: Mostrar que $(x-3)^2+5 \equiv x^2-6x+14$. Lo que se espera de los alumnos es que muestren cómo se puede verificar un resultado dado, incluida la comprobación de sus propios resultados.

Conexiones

TdC: ¿El razonamiento matemático difiere del razonamiento científico o del tipo de razonamiento que se requiere en otras áreas de conocimiento?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 1.7

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Propiedades de las potencias que tienen exponentes racionales.	$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$, si m es par es que se están refiriendo a la raíz positiva. Por ejemplo: $16^{\frac{3}{4}} = 8$.
Propiedades de los logaritmos. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ $\log_a x^m = m\log_a x$ para $a, \quad x, \quad y > 0$	$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$; $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$, $a, \quad y \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{Z}$ **Enlace** a la introducción a los logaritmos (NM 1.5) **Ejemplos:** $\frac{3}{4} = \log_{16} 8$, $\log 32 = 5\log 2$ $\log 24 = \log 8 + \log 3$ $\log_3 \frac{10}{4} = \log_3 10 - \log_3 4$ $\log_4 3^5 = 5\log_4 3$ **Enlace** a los gráficos de funciones logarítmicas y exponenciales (NM 2.9)
Cambio de base en un logaritmo. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ para $a, \quad b, \quad x > 0$	**Ejemplos:** $\log_4 7 = \frac{\ln 7}{\ln 4}$ $\log_{25} 125 = \frac{\log_5 125}{\log_5 25} \quad (= \frac{3}{2})$
Resolución de ecuaciones exponenciales, incluido el uso de logaritmos.	**Ejemplos:** $(\frac{1}{3})^x = 9^{x+1}$, $2^{x-1} = 10$. **Enlace** al empleo de gráficos de funciones logarítmicas y exponenciales (NM 2.9).

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Cálculo del pH; cálculos con soluciones tampón; hallar la energía de activación a partir de datos experimentales (Química).

TdC: Los avances cruciales, por ejemplo, el desarrollo de los logaritmos, ¿cómo han modificado la manera en la que los matemáticos entienden el mundo y la naturaleza de las matemáticas?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 1.8

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
La suma de progresiones geométricas convergentes infinitas.	Uso de $\lvert r \rvert < 1$ y de la notación de módulo. **Enlace** a las progresiones y series geométricas (NM 1.3).

Conexiones
TdC: ¿Es posible saber de cosas que no podemos experimentar, como el infinito?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 1.9

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
El teorema del binomio: desarrollo de $(a+b)^n, n \in \mathbb{N}$.	Se pueden utilizar las reglas de conteo a la hora de plantear y explicar el teorema.
Uso del triángulo de Pascal y de ${}^n\mathrm{C}_r$.	${}^n\mathrm{C}_r$ se debería hallar empleando **los dos** enfoques: la fórmula y los medios tecnológicos. **Ejemplo:** Hallar r cuando ${}^6\mathrm{C}_r = 20$, utilizando una tabla de valores generada con medios tecnológicos.

Conexiones
Objetivo general 8: La ética en las matemáticas (el triángulo de Pascal). La atribución de un descubrimiento matemático al matemático equivocado.

Mentalidad internacional: Las propiedades del triángulo de Pascal ya se conocían en diversas culturas mucho antes de los tiempos de Pascal (por ejemplo, el matemático chino Yang Hui).

TdC: ¿De qué modo los matemáticos destacados y conocidos han conformado y han influenciado el desarrollo de las matemáticas en tanto que área del conocimiento? Consideración de Pascal y de "su" triángulo.

Descargar la plantilla de conexiones

Contenidos para TANS

N.º de horas lectivas recomendadas: 20

El objetivo general de los TANS incluidos en el tema de aritmética y álgebra es ampliar y consolidar los objetivos generales, los conceptos y las destrezas adquiridas con los contenidos de NM. Se introducen una serie de técnicas importantes para el desarrollo, la simplificación y la resolución de ecuaciones. Se introducen los números complejos; además, los alumnos amplían sus conocimientos en el ámbito de las demostraciones formales añadiendo la demostración mediante inducción matemática, la demostración por contradicción y la demostración mediante contraejemplo.

TANS 1.10

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Reglas de conteo, incluidas las permutaciones y las combinaciones.	**No es necesario incluir** las permutaciones donde algunos objetos sean idénticos. Permutaciones circulares.
Ampliación del teorema del binomio a casos con índices fraccionarios y negativos; es decir $(a+b)^n, \quad n \in \mathbb{Q}$.	$(a+b)^n = \quad (a(1+\frac{b}{a}))^n \quad = \quad a^n(1+\frac{b}{a})^n, n \in \mathbb{Q}$ **Enlace** a los desarrollos en serie de potencias (TANS 5.19) **No es necesario incluir** la demostración del teorema del binomio.

Conexiones

Otros contextos: Hallar aproximaciones a $\sqrt{2}$

Objetivo general 8: ¿Cuántas papeletas distintas puede haber en un sorteo de lotería? Y este número, ¿qué nos está diciendo sobre la ética de vender billetes de lotería a personas que no entienden las implicaciones de estos valores tan grandes?

Mentalidad internacional: Las propiedades del triángulo de Pascal ya se conocían en diversas culturas mucho antes de los tiempos de Pascal (por ejemplo, el matemático chino Yang Hui).

TdC: ¿Qué se considera "comprensión" en el ámbito de las matemáticas? ¿Es algo más que limitarse a hallar la respuesta correcta?

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 1.11

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Fracciones parciales.	Un máximo de dos términos lineales distintos en el denominador, siendo el grado del numerador menor que el grado del denominador. **Ejemplo:** $\frac{2x+1}{x^2+x-2} \equiv \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)}$. **Enlace** al uso de fracciones parciales para reorganizar el integrando (TANS 5.15).

Conexiones

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 1.12

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Números complejos: el número i, donde $\mathrm{i}^2 = -1$. Forma cartesiana $z = a + bi$; los términos parte real, parte imaginaria, conjugado, módulo y argumento.	

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
El plano complejo.	Al plano complejo también se le conoce como diagrama de Argand. **Enlace** a los vectores (TANS 3.12).

Conexiones

Otros contextos: Conceptos de ingeniería eléctrica (impedancia como combinación de resistencia y reactancia, o potencia aparente como combinación de potencia real y potencia reactiva). Estas combinaciones se expresan con la forma $a + b\mathrm{i}$.

TdC: El lenguaje, ¿de qué modo conforma el conocimiento? Por ejemplo, ¿las palabras "imaginario" y "complejo" hacen que estos conceptos sean más difíciles de lo que serían si se les hubiese dado un nombre distinto?

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 1.13

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
La forma módulo-argumental (polar): $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\theta) = r\mathrm{cis}\theta$ La forma de Euler: $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ Sumas, productos y cocientes en forma cartesiana, polar o de Euler, y su interpretación geométrica.	Se espera que los alumnos sean capaces de realizar conversiones entre las formas cartesiana, módulo-argumental (polar) y de Euler.

Conexiones

Otros contextos: Conceptos de ingeniería eléctrica (ángulo y diferencia de fase, factor de potencia y potencia aparente como magnitud compleja expresada en forma polar).

TdC: ¿Por qué cabría decir que la expresión $e^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$ es bella? ¿Qué lugar ocupa la belleza y la elegancia en el ámbito de las matemáticas? ¿Y la creatividad, qué lugar ocupa?

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 1.14

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Raíces complejas conjugadas de ecuaciones cuadráticas y polinómicas que tienen coeficientes reales.	Las raíces complejas van de dos en dos, formando pares conjugados.
Teorema de De Moivre y su ampliación al caso de exponentes racionales. Potencias y raíces de números complejos.	Incluye la demostración por inducción para el caso en el que $n \in \mathbb{Z}^+$. **Enlace** a la suma y el producto de las raíces de una ecuación polinómica (TANS 2.12), fórmulas de la suma y la diferencia de dos ángulos (TANS 3.10).

Conexiones
Otros contextos:

TdC: ¿Llegará un momento en el que ya se sepa todo lo que es importante desde un punto de vista matemático? Reflexionar sobre la creación de los números complejos antes de que se conociesen sus aplicaciones.

Enriquecimiento: ¿Se puede ampliar el teorema de De Moivre a cualquier valor de n?

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 1.15

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Demostración por inducción matemática.	Se debe ir utilizando la demostración durante toda la asignatura, allí donde resulte pertinente. Concretamente, la inducción matemática está conectada con una amplia variedad de temas; por ejemplo, los números complejos, la derivación, la suma de progresiones y la divisibilidad.
Demostración por contradicción.	**Ejemplos:** La irracionalidad de $\sqrt{3}$; la irracionalidad de la raíz cúbica de 5; demostración de Euclides de un número infinito de números primos; si a es un número racional y b es un número irracional, entonces $a + b$ es un número irracional.
Uso de un contraejemplo para mostrar que una afirmación dada no siempre es cierta.	**Ejemplo:** Considerar el conjunto P de números de la forma $n^2 + 41n + 41, \ \ n \in \mathbb{N}$, muestran que no todos los elementos de P son primos. **Ejemplo:** Mostrar que la siguiente afirmación no siempre es cierta: “no existe ninguna solución formada por números enteros positivos para la ecuación $x^2 + y^2 = 10$”. No basta con limitarse a dar un contraejemplo; los alumnos tienen que explicar también por qué su ejemplo constituye un contraejemplo.

Conexiones
Otros contextos: El teorema de los cuatro colores.

Mentalidad internacional: ¿Cómo se dieron cuenta los pitagóricos de que $\sqrt{2}$ es un número irracional?

TdC: ¿Qué papel desempeña la comunidad matemática a la hora de determinar la validez de una demostración matemática? ¿Las demostraciones nos proporcionan un conocimiento completamente cierto? ¿Qué diferencia existe entre el método inductivo que se aplica en ciencia y la demostración por inducción que se emplea en matemáticas?

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 1.16

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Resolución de sistemas de ecuaciones lineales (hasta un máximo de tres ecuaciones con tres incógnitas), incluidos los casos en los que hay una única solución o un número infinito de soluciones, y aquellos para los que no existe ninguna solución.	Estos sistemas se deberían resolver utilizando tanto métodos algebraicos como métodos tecnológicos, por ejemplo, reducción por filas o matrices. Los sistemas que no tienen solución se denominan incompatibles. Hallar la solución general de un sistema que tenga infinitas soluciones. **Enlace** a la intersección de rectas y planos (TANS 3.18).

Conexiones

TdC: Matemáticas, sentido, percepción y razón: si somos capaces de hallar soluciones en dimensiones superiores, ¿podemos concluir que estos espacios existen más allá de nuestra propia percepción?

Descargar la plantilla de conexiones

Tema 2: Funciones

Conceptos

Conocimientos esenciales

Los modelos son representaciones de sucesos de la vida real; en dichos modelos se emplean expresiones, ecuaciones o gráficos, mientras que una función se define como una relación o expresión donde intervienen una o más variables. El crear distintas representaciones de una función para modelizar la relación que existe entre las variables —visualmente y también mediante símbolos tales como gráficos, ecuaciones y tablas— representa diferentes maneras de transmitir ideas matemáticas.

Conceptos recomendados para impartir en este tema

Representación, relaciones, espacio, cantidad, equivalencia.

TANS: sistemas, patrones.

Comprensión conceptual específica del contenido

- Distintas representaciones de una función —mediante símbolos y también visualmente, utilizando gráficos, ecuaciones y tablas— ofrecen diferentes maneras de transmitir las relaciones matemáticas.
- En una función o en una ecuación, los parámetros reflejan características geométricas del correspondiente gráfico y pueden representar magnitudes físicas en dimensiones espaciales.
- Saber pasar de una forma de representación de funciones a otra posibilita una comprensión más profunda y ofrece distintos enfoques a la resolución de problemas.
- Nuestro marco de referencia espacial define cuál será la parte visible de una función. Modificando esta “ventana” se puede mostrar una fracción mayor o menor del gráfico de la función, dependiendo de nuestras necesidades.
- Representaciones equivalentes de una función cuadrática dada pueden poner de manifiesto distintas características de una misma relación.
- Las funciones son aplicaciones entre conjuntos; a cada valor de la variable independiente (entrada) se le asigna un valor (y solo uno) de la variable dependiente (salida).

TANS

- El ampliar los resultados, partiendo de un caso particular y concreto hasta dar con una generalización, nos puede permitir aplicar dichos resultados a sistemas de mayor tamaño.
- Se pueden identificar patrones de comportamiento que nos proporcionen más información sobre cuáles son las estrategias más adecuadas para modelizarlos o resolverlos.
- La intersección de un sistema de ecuaciones se puede representar gráficamente o empleando métodos algebraicos; dicha intersección constituye la solución que satisface todas las ecuaciones del sistema.

Contenidos para NM

N.º de horas lectivas recomendadas: 21

El objetivo general de los contenidos de NM que hay en el tema de funciones es introducirles a los alumnos el área vertebradora de las funciones en matemáticas y aplicar métodos funcionales a diversas situaciones matemáticas.

A lo largo de todo este tema, los alumnos deberían tener ocasión de utilizar medios tecnológicos —como programas informáticos de representación gráfica o calculadoras de pantalla gráfica— para ampliar y aplicar sus conocimientos de funciones, en lugar de utilizar técnicas analíticas demasiado elaboradas.

En las pruebas de examen:

- Es posible que en alguna pregunta haya que representar gráficamente alguna función que no aparece explícitamente en el programa de estudios.
- El dominio de definición de una función será el más amplio posible, a menos que se indique lo contrario. Se tratará por lo general del conjunto de números reales.

Las secciones de NM 2.1 a NM 2.4 son comunes a Matemáticas: Análisis y Enfoques, y Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación.

NM 2.1

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Diferentes formas de expresar la ecuación de una recta. Pendiente, intersecciones. Rectas de pendiente m_1 y m_2. Rectas paralelas $m_1 = m_2$. Rectas perpendiculares $m_1 \times m_2 = -1$.	$y = mx + c$ (forma pendiente-intersección). $ax + by + d = 0$ (forma general). $y - y_1 = m(x - x_1)$ (forma punto-pendiente). Calcular la pendiente de zonas inclinadas tales como carreteras de montaña, puentes, etc.

Conexiones

Otros contextos: Pendiente de una carretera de montaña, pendiente de una rampa de acceso.

Enlaces a otras asignaturas: Tipos de cambio y elasticidad de precios e ingresos, curvas de oferta y demanda (Economía); análisis gráfico en el marco de un trabajo experimental (asignaturas de Ciencias).

TdC: Descartes mostró que los problemas geométricos se pueden resolver por métodos algebraicos y viceversa. ¿Qué nos dice este hecho sobre la representación matemática y el conocimiento matemático?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 2.2

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Concepto de función, dominio, recorrido y gráfico. Notación de funciones; por ejemplo $f(x), \quad v(t), \quad C(n)$. Concepto de función como modelo matemático.	**Ejemplo:** $f(x) = \sqrt{2-x}$, el dominio es $x \leq 2$, el recorrido es $f(x) \geq 0$. Un gráfico resulta útil para visualizar el recorrido.
El concepto informal de que la función inversa revierte o deshace el efecto de la función. Función inversa como simetría respecto a la recta $y = x$ y la notación $f^{-1}(x)$.	**Ejemplo:** Resolver $f(x) = 10$ es equivalente a hallar $f^{-1}(10)$. Los alumnos deben tener presente que la función inversa existe solo para las funciones inyectivas; el dominio de $f^{-1}(x)$ es igual al recorrido de $f(x)$.

Conexiones

Otros contextos: Conversión de temperaturas y de divisas**.**

Enlaces a otras asignaturas: Conversión de divisas y funciones de coste (Economía y Gestión Empresarial); movimiento de un proyectil (Física).

Objetivo general 8: ¿Qué relación existe entre los problemas del mundo real y los modelos matemáticos?

Mentalidad internacional: El desarrollo de funciones por parte de René Descartes (Francia), Gottfried Wilhelm Leibnitz (Alemania) y Leonhard Euler (Suiza); la notación de función la fueron desarrollando diversos matemáticos de los siglos XVII y XVIII. ¿Cómo se acabó aceptando internacionalmente la notación que utilizamos hoy en día?

TdC: ¿Cree que las matemáticas o la lógica se deberían considerar un lenguaje?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 2.3

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
El gráfico de una función; su ecuación $y = f(x)$.	Los alumnos deben conocer la diferencia que existe entre los términos de instrucción “dibujar con precisión” y “dibujar aproximadamente”.
Crear un bosquejo (dibujo aproximado) a partir de la información dada o de un contexto; esto incluye el transferir un gráfico de la pantalla al papel. Uso de medios tecnológicos para representar gráficamente funciones, incluida la suma y la diferencia de funciones.	Todos los ejes y las características más importantes del gráfico tienen que estar marcados. Aquí se pueden incluir funciones que no aparezcan mencionadas explícitamente en el tema 2.

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Bosquejo (dibujo aproximado) e interpretación de gráficos (asignaturas de Ciencias, Geografía, Economía).

TdC: ¿Estudiar el gráfico de una función entraña el mismo grado de rigor matemático que estudiar la función mediante métodos algebraicos? ¿Cuáles son las ventajas y las desventajas de disponer de distintas formas y distintos lenguajes simbólicos en matemáticas?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 2.4

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Determinar las características más importantes de un gráfico.	Máximos y mínimos; intersecciones; simetría; vértice; ceros de funciones o raíces de ecuaciones; asíntotas horizontales y verticales utilizando medios tecnológicos para la representación gráfica.
Hallar el punto de intersección de dos curvas o rectas utilizando medios tecnológicos.	

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Identificación e interpretación de las características más importantes de un gráfico (asignaturas de Ciencias, Geografía, Economía); modelo basado en la curva de posibilidades de producción, equilibrio de mercados (Economía).

Mentalidad internacional: Enfoque analítico del grupo de Bourbaki comparado con el enfoque visual de Mandelbrot.

Uso de medios tecnológicos: Programas de representación gráfica dotados de barras de desplazamiento que permitan comprobar qué sucede cuando se modifican determinados parámetros o variables.

Descargar la plantilla de conexiones

NM 2.5

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Funciones compuestas.	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
Función identidad. Hallar la función inversa $f^{-1}(x)$.	$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$ La existencia de una función inversa en el caso de funciones inyectivas. **Enlace** al concepto de función inversa como simetría respecto a la recta $y = x$ (NM 2.2).

Conexiones

TdC: ¿Cree que las matemáticas o la lógica se deberían considerar un lenguaje?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 2.6

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$: su gráfico, intersección con el eje y $(0, c)$. Eje de simetría. La forma $f(x) = a(x - p)(x - q)$, intersecciones con el eje x $(p, 0)$ y $(q, 0)$.	El gráfico de una función cuadrática también se denomina “parábola”. **Enlace** a las transformaciones (NM 2.11).

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
La forma $f(x) = a\,(x - h)^2 + k$, vértice (h, k).	Se espera que los alumnos sean capaces de pasar de una forma a otra.

Conexiones
Enlaces a otras asignaturas: Cinemática, movimiento de un proyectil y movimiento armónico simple (Física).

TdC: ¿Existe alguna diferencia fundamental entre las matemáticas y otras áreas del conocimiento? En caso afirmativo, ¿esas diferencias son algo más que diferencias puramente metodológicas?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 2.7

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Resolución de ecuaciones e inecuaciones cuadráticas. La fórmula cuadrática.	Utilizar la descomposición en factores, completar el cuadrado (forma del vértice) y la fórmula cuadrática. Las soluciones se denominan raíces o ceros (ambos términos son válidos).
El discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ y la naturaleza de las raíces, es decir, dos raíces reales distintas, dos raíces reales iguales o ninguna raíz real.	**Ejemplo:** Para la ecuación $3kx^2 + 2x + k = 0$, hallar para qué valores de k la ecuación tiene dos raíces reales distintas, dos raíces reales iguales o ninguna raíz real.

Conexiones
Enlaces a otras asignaturas: Trayectoria de un proyectil y cambios de energía en el movimiento armónico simple (Física); ecuaciones de equilibrio (Química).

Mentalidad internacional: El método babilónico para la multiplicación $ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$. Sulba Sutras en la antigua India y el manuscrito Bakhshali ya mencionaron una fórmula algebraica para la resolución de ecuaciones cuadráticas.

TdC: ¿Qué conceptos clave constituyen los pilares del conocimiento matemático?

Uso de medios tecnológicos: Programa de representación gráfica dotado de una barra deslizante.

Enriquecimiento: Derivar la fórmula cuadrática completando el cuadrado.

Descargar la plantilla de conexiones

NM 2.8

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
La función recíproca $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$: su gráfico y la propiedad de coincidir con su inversa.	
Funciones racionales que son de la forma $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ y sus gráficos correspondientes.	Los bosquejos (dibujos aproximados) han de incluir todas las asíntotas que haya (verticales y horizontales) y las intersecciones con los ejes.

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Ecuación de las asíntotas verticales y horizontales.	**Enlace** a las transformaciones (NM 2.11). Asíntota vertical: $x = -\frac{d}{c}$. Asíntota horizontal: $y = \frac{a}{c}$.

Conexiones

Mentalidad internacional: El desarrollo de funciones, René Descartes (Francia), Gottfried Wilhelm Leibnitz (Alemania) y Leonhard Euler (Suiza).

TdC: ¿Cuáles son las implicaciones de aceptar que el conocimiento matemático va cambiando con el tiempo?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 2.9

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Funciones exponenciales y sus gráficos: $f(x) = a^x, a > 0, f(x) = \mathrm{e}^x$ Funciones logarítmicas y sus gráficos: $f(x) = \log_a x, x > 0, f(x) = \ln x, x > 0.$	**Enlace** a las aplicaciones de las progresiones y series geométricas al ámbito financiero (NM 1.4). Relaciones que existen entre estas funciones: $a^x = e^{x\ln a}; \log_a a^x = x, a, \quad x > 0, \quad a \neq 1$ Funciones exponenciales y logarítmicas: unas son las inversas de las otras.

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Desintegración radioactiva, condensadores en fase de carga y de descarga (Física); reacciones de primer orden y energía de activación (Química); curvas de crecimiento (Biología).

Objetivo general 8: La expresión “crecimiento exponencial” se usa popularmente para describir diversos fenómenos de distinta naturaleza. ¿Se trata de un uso inapropiado o erróneo de este concepto matemático?

TdC: ¿Qué papel desempeñan los modelos en el ámbito de las matemáticas? ¿El papel de los modelos en matemáticas es distinto del que desempeñan en otras áreas del conocimiento?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 2.10

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Resolución de ecuaciones, tanto gráficamente como con métodos analíticos.	**Ejemplo:** $\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^x + 4 = 0$. **Enlace** a las destrezas para la representación gráfica de funciones (NM 2.3).
Uso de medios tecnológicos para la resolución de diversos tipos de ecuaciones, incluidos aquellos	**Ejemplos:** $\begin{matrix} \mathrm{e}^x = \operatorname{sen} x \\ x^4 + 5x - 6 = 0 \end{matrix}$.

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
para los que no existe ningún enfoque analítico apropiado.	
Aplicación de las habilidades de representación gráfica y resolución de ecuaciones que ilustran situaciones de la vida real.	**Enlace** al crecimiento exponencial (NM 2.9)

Conexiones

Otros contextos: Desintegración radioactiva, crecimiento y disminución de la población, interés compuesto, movimiento de un proyectil, distancia de frenado.

Enlaces a otras asignaturas: Desintegración radioactiva (Física); modelización (asignaturas de Ciencias); modelo basado en la curva de posibilidades de producción (Economía).

TdC: ¿Qué suposiciones hacen los matemáticos cuando aplican las matemáticas a situaciones de la vida real?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 2.11

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Transformaciones de gráficos. Traslaciones: $y = f(x) + b$; $y = f(x - a)$. Simetrías respecto a ambos ejes: $y = -f(x)$; $y = f(-x)$. Estiramiento vertical de razón p: $y = pf(x)$. Estiramiento horizontal de razón $\frac{1}{q}$: $y = f(qx)$.	Los alumnos tienen que tener presente la importancia del orden en el que se realizan las diversas transformaciones. Se podrían utilizar paquetes de representación gráfica dinámica para investigar estas transformaciones.
Transformaciones compuestas.	**Ejemplo:** Utilizar $y = x^2$ para hacer un bosquejo (dibujo aproximado) de $y = 3x^2 + 2$ **Enlace** a las funciones compuestas (NM 2.5). **No es necesario incluir en el NM** las transformaciones de la forma $f(ax + b)$.

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Variaciones en las curvas de oferta y demanda (Economía); campo electromagnético inducido y movimiento armónico simple (Física).

Descargar la plantilla de conexiones

Contenidos para TANS

N.º de horas lectivas recomendadas: 11

El objetivo general de los TANS incluidos en el tema de funciones es ampliar y consolidar los objetivos generales, los conceptos y las destrezas adquiridas con los contenidos de NM. Se introducirán una serie de técnicas útiles para hallar y utilizar las raíces de un polinomio, y para representar gráficamente e interpretar funciones racionales; se presentarán otras maneras de clasificar funciones, y se ofrecerá una introducción a la resolución de inecuaciones y de ecuaciones donde aparezca la notación de módulo.

Es posible que los alumnos de NS tengan que utilizar medios tecnológicos para resolver ecuaciones cuando no exista ningún enfoque analítico adecuado para su resolución.

TANS 2.12

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Funciones polinómicas y sus gráficos y ecuaciones correspondientes; ceros, raíces y factores. El teorema del factor y el teorema del resto.	
Suma y producto de las raíces de una ecuación polinómica.	Para la ecuación polinómica $\sum_{r=0}^{n} a_r x^r = 0$, la suma es igual a $\frac{-a_{n-1}}{a_n}$ el producto es igual a $\frac{(-1)^n a_0}{a_n}$ **Enlace** a las raíces complejas de una ecuación cuadrática y de una ecuación polinómica (TANS 1.14).

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Modelización (asignaturas de Ciencias).

TdC: ¿Es una simplificación excesiva el decir que algunas áreas del conocimiento nos proporcionan hechos mientras que otras áreas del conocimiento nos ofrecen interpretaciones?

Enriquecimiento: Teorema de Vieta en su totalidad, "la ecuación que no se podía resolver", fórmula cuadrática para reducir una ecuación cuadrática a una lineal, Cardano y Bombelli.

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 2.13

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Funciones racionales que son de la forma $f(x) = \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}$ y $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$	La función recíproca es un caso particular. En los gráficos se han de incluir todas las asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas) y todas las intersecciones con los ejes. Se podrían utilizar paquetes de representación gráfica dinámica para investigar estas funciones. **Enlace** a las funciones racionales (NM 2.8).

Conexiones

Mentalidad internacional: Enfoque analítico del grupo de Bourbaki comparado con el enfoque visual de Mandelbrot.

TdC: ¿Estudiar el gráfico de una función entraña el mismo grado de rigor matemático que estudiar la función mediante métodos algebraicos? ¿Cuáles son las ventajas y las desventajas de disponer de distintas formas y distintos lenguajes simbólicos en matemáticas?

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 2.14

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Funciones pares e impares.	Pares: $f(-x) = f(x)$ Impares: $f(-x) = -f(x)$ Aquí se incluyen las funciones periódicas.
Hallar la función inversa $f^{-1}(x)$ incluida la restricción del dominio.	
Funciones que coinciden con su inversa.	

Conexiones

Mentalidad internacional: La notación de funciones la fueron desarrollando diversos matemáticos de los siglos XVII y XVIII. ¿Cómo se acabó aceptando internacionalmente la notación que utilizamos hoy en día?

TdC: Si los sistemas de notación y de medida provienen cada uno de un contexto histórico y cultural concreto, ¿significa esto que las matemáticas no se pueden considerar como algo independiente de la cultura?

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 2.15

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Soluciones de $g(x) \geq f(x)$, tanto gráficamente como mediante métodos analíticos.	Métodos gráficos o algebraicos aplicables a polinomios simples de grado 3 (o menor). Uso de medios tecnológicos para estas y otras funciones.

Conexiones

TdC: ¿Existen diferencias en lo que respecta al valor que cada cultura le concede a las matemáticas o al valor relativo que dicha cultura atribuye a distintas áreas del conocimiento?

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 2.16

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Los gráficos de las funciones $y = \lvert f(x) \rvert$ y $y = f(\lvert x \rvert), \quad y = \dfrac{1}{f(x)}, \quad y = f(ax+b), \quad y = [f(x)]^2.$	Se podrían utilizar paquetes de representación gráfica dinámica para investigar estas transformaciones.
Resolución de ecuaciones e inecuaciones con módulos.	**Ejemplo:** $\lvert 3x \arccos(x) \rvert > 1$.

Conexiones

Mentalidad internacional: Enfoque analítico del grupo de Bourbaki comparado con el enfoque visual de Mandelbrot.

Descargar la plantilla de conexiones

Tema 3: Geometría y trigonometría

Conceptos

Conocimientos esenciales

La geometría y la trigonometría nos permiten cuantificar el mundo físico, potenciando así nuestra percepción espacial en dos y en tres dimensiones. Este tema proporciona las herramientas necesarias para el análisis, la medición y la transformación de cantidades, movimientos y relaciones.

Conceptos recomendados para impartir en este tema

Generalización, espacio, relaciones, equivalencia y representación.

TANS: cantidad, modelización.

Comprensión conceptual específica del contenido

- Las propiedades de las formas dependen de la dimensión que estén ocupando en el espacio.
- El volumen y la superficie de las formas geométricas vienen determinadas por fórmulas, o por relaciones o reglas matemáticas generales que se expresan mediante símbolos o variables.
- Las relaciones que existen entre la longitud de los lados y el tamaño de los ángulos de un triángulo se pueden utilizar para resolver muchos problemas donde intervienen posición, distancia, ángulos y área.
- Hay sistemas de medición equivalentes —por ejemplo, grados y radianes— que se pueden utilizar para cuantificar ángulos y simplificar así los cálculos.
- Es posible que distintas representaciones del valor de una razón trigonométrica (p. ej., exacta o aproximada) no sean equivalentes entre sí.
- Las funciones trigonométricas de un ángulo se pueden definir sobre el círculo de radio unidad; de ese modo se ilustra visual y algebraicamente el carácter periódico o simétrico de los valores que adoptan dichas funciones.

TANS

- La posición y el movimiento de un objeto se pueden modelizar en el espacio tridimensional utilizando vectores.
- La relación que existe entre los métodos algebraicos, geométricos y vectoriales nos puede ayudar a resolver problemas y a cuantificar la posición y el movimiento de dicho objeto.

Contenidos para NM

N.º de horas lectivas recomendadas: 25

El objetivo general de los contenidos de NM que hay en el tema de geometría y trigonometría es ofrecerles a los alumnos una introducción a la geometría en tres dimensiones y a la trigonometría de triángulos no rectángulos. Los alumnos explorarán las funciones trigonométricas, y utilizarán las propiedades y fórmulas relacionadas para resolver problemas, en contextos tanto abstractos como de la vida real.

A lo largo de todo este tema, los alumnos deberían tener ocasión de utilizar medios tecnológicos —como paquetes para representación gráfica, una calculadora de pantalla gráfica o un programa informático de geometría dinámica— para que amplíen y apliquen sus conocimientos de geometría y trigonometría.

En las prueba de examen siempre se debe suponer que los ángulos se dan en radianes, a menos que se indique explícitamente lo contrario.

Las secciones de NM comprendidas entre 3.1 y 3.3 son comunes a Matemáticas: Análisis y Enfoques, y a Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación.

NM 3.1

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
La distancia que hay entre dos puntos del espacio tridimensional y el punto medio entre ambos. Volumen y área de la superficie de sólidos tridimensionales, incluida la pirámide recta, el cono recto, la esfera, la semiesfera y las combinaciones de estos sólidos. Tamaño del ángulo que forman dos rectas que se cortan o del ángulo que forma una recta con un plano.	En los exámenes de NM, en el contexto de las formas tridimensionales, solo se harán preguntas de trigonometría de triángulos rectángulos. En los problemas relativos a estos temas, los alumnos deberían ser capaces de analizar los objetos tridimensionales, identificar los triángulos rectángulos pertinentes, y utilizarlos para hallar longitudes y ángulos no conocidos.

Conexiones

Otros contextos: Arquitectura y diseño.

Enlaces a otras asignaturas: Tecnología del diseño; volumen de las estrellas y ley de la inversa del cuadrado (Física).

TdC: ¿Qué es un sistema axiomático? ¿Los axiomas son algo que le resulta evidente a todo el mundo?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 3.2

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Uso de las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) para hallar los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo.	En todas las áreas de esta unidad habría que alentar a los alumnos a que hagan bosquejos (dibujos aproximados) convenientemente rotulados con los que respaldar la solución dada. **Enlace** a las funciones inversas (NM 2.2) a la hora de hallar ángulos.
El teorema del seno: $\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C}$. El teorema del coseno: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$; $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Área de un triángulo mediante la fórmula $\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}C$.	Este apartado no incluye el caso ambiguo del teorema del seno.

Conexiones

Otros contextos: Triangulación, elaboración de mapas.

Enlaces a otras asignaturas: Vectores (Física).

Mentalidad internacional: En antiguos manuscritos de China y de la India ya se encontraron diagramas del teorema de Pitágoras. La referencia más antigua a la trigonometría se halla en las matemáticas indias; el uso de la triangulación para hallar la curvatura de la Tierra y así resolver una disputa surgida entre Inglaterra y Francia sobre la gravedad de Newton.

TdC: ¿Resulta ético que Pitágoras diera su nombre a un teorema que quizá no haya sido el fruto de su propia creación? ¿Qué criterios podríamos utilizar para emitir un juicio así?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 3.3

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Aplicaciones de la trigonometría de triángulos rectángulos y no rectángulos, incluido el teorema de Pitágoras. Ángulo de elevación y ángulo de depresión. Elaboración de diagramas rotulados partiendo de enunciados escritos.	El contexto puede incluir el uso de demoras.

Conexiones

Otros contextos: Triangulación, elaboración de mapas, navegación y transmisiones por radio. Uso del paralaje para la navegación.

Enlaces a otras asignaturas: Vectores, magnitudes escalares, fuerzas y dinámica (Física); estudios de campo (asignaturas de Ciencias).

Objetivo general 8: ¿Quién inventó realmente el teorema de Pitágoras?

Objetivo general 9: ¿De cuántas maneras distintas se puede probar el teorema de Pitágoras?

Mentalidad internacional: El uso de la triangulación para hallar la curvatura de la Tierra y así resolver una disputa surgida entre Inglaterra y Francia sobre la gravedad de Newton.

TdC: Si la suma de los ángulos de un triángulo puede ser inferior a 180°, igual a 180° o superior a 180°, ¿qué nos dice este hecho acerca de la naturaleza del conocimiento matemático?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 3.4

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
El círculo: medida de ángulos en radianes; longitud de un arco; área de un sector.	La medida de un ángulo en radianes se puede expresar como un múltiplo exacto de π o como un valor decimal.

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Patrones de difracción y movimiento circular (Física).

Mentalidad internacional: Cálculo de Seki Takakazu del número π con diez cifras decimales; Hiparco, Menelao y Ptolomeo; ¿por qué una vuelta completa consta de 360 grados? Enlaces a las matemáticas babilónicas.

TdC: ¿Qué unidad es mejor para medir ángulos: los radianes o los grados? ¿Qué criterios utilizan o pueden/deberían utilizar los matemáticos para tomar tales decisiones?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 3.5

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Definición de $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$ utilizando como referencia el círculo de radio unidad.	Hay que incluir la relación que existe entre ángulos de distintos cuadrantes. $\cos x = \cos(-x)$ **Ejemplos:** $\tan(3\pi - x) = -\tan x$ $\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x$
Definición de $\tan\theta$ como $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$.	La ecuación de una recta que pasa por el origen es $y = x\tan\theta$, donde θ es el ángulo que forma la recta y el eje positivo x.
Valor exacto de las razones trigonométricas: 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ y sus múltiplos.	$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan\ 210° = \frac{\sqrt{3}}{3}$
Ampliación del teorema del seno al caso ambiguo.	

Conexiones

Mentalidad internacional: El primer trabajo donde se mencionó explícitamente el seno como una función de un ángulo fue el Aryabhatiya, del matemático Aryabhata (aprox. 510 d. C.).

TdC: La trigonometría la fueron desarrollando sucesivas civilizaciones y culturas. ¿En qué medida está el conocimiento matemático integrado en determinadas tradiciones o vinculado a culturas concretas? Los sucesos clave de la historia de las matemáticas, ¿de qué manera han conformado su forma actual y los métodos que se utilizan a día de hoy?

Enriquecimiento: La demostración del teorema de Pitágoras en tres dimensiones**.**

Descargar la plantilla de conexiones

NM 3.6

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
La relación fundamental $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$. Las fórmulas del seno y el coseno del ángulo doble.	Para ilustrar las fórmulas del seno y el coseno del ángulo doble (y otras relaciones trigonométricas) se pueden utilizar diagramas geométricos sencillos y paquetes de representación gráfica dinámica.
La relación que existe entre las diversas razones trigonométricas.	**Ejemplos:** Sabiendo que $\operatorname{sen}\ \theta$, hallar los posibles valores de $\tan\theta$, (sin hallar θ). Sabiendo que $\cos x = \frac{3}{4}$ y x es agudo, hallar $\operatorname{sen} 2x$, (sin hallar x).

Conexiones

Descargar la plantilla de conexiones

NM 3.7

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}x$, $\cos x$ y $\tan x$; amplitud, su carácter periódico, y sus gráficos correspondientes. Funciones compuestas que son de la forma $f(x) = a\operatorname{sen}(b(x+c)) + d$.	El dominio de las funciones trigonométricas puede darse en grados o en radianes. **Ejemplos:** $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{4})$, $f(x) = 2\cos(3(x-4)) + 1$.
Transformaciones.	**Ejemplo:** $y = \sin x$ se utiliza para obtener $y = 3\sin 2x$ mediante un estiramiento de razón 3 en dirección y, y un estiramiento de razón $\frac{1}{2}$ en dirección x. **Enlace** a las transformaciones de gráficos (NM 2.11).
Contextos de la vida real.	**Ejemplos:**Altura de las mareas, movimiento de una noria. Los alumnos deben tener presente que no toda la tecnología de regresión genera funciones trigonométricas del tipo $f(x) = a\operatorname{sen}(b(x+c)) + d$.

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Movimiento armónico simple (Física).

TdC: La música se puede expresar utilizando las matemáticas. Este hecho, ¿qué nos dice sobre la relación que existe entre la música y las matemáticas?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 3.8

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Resolución de ecuaciones trigonométricas dentro de un intervalo finito, tanto gráficamente como mediante métodos analíticos.	**Ejemplos:** $2\operatorname{sen}x = 1, \quad 0 \le x \le 2\pi$, $2\operatorname{sen}2x = 3\cos x, \quad 0° \le x \le 180°$ $2\tan(3(x-4)) = 1, \quad -\pi \le x \le 3\pi$
Ecuaciones que conducen a una ecuación cuadrática en $\operatorname{sen}x$, $\cos x$ o bien $\tan x$.	**Ejemplos:** $2\operatorname{sen}^2 x + 5\cos x + 1 = 0$ para $0 \le x \le 4\pi$, $2\operatorname{sen}x = \cos 2x, \quad -\pi \le x \le \pi$. **No es necesario incluir** la solución general de las ecuaciones trigonométricas.

Conexiones

Descargar la plantilla de conexiones

Contenidos para TANS

N.º de horas lectivas recomendadas: 26

El objetivo general de los TANS incluidos en el tema de geometría y trigonometría es ampliar y consolidar los objetivos generales, los conceptos y las destrezas adquiridas con los contenidos de NM. Profundiza en el tema de las funciones trigonométricas, agrega una serie de relaciones trigonométricas importantes e introduce los vectores en dos y en tres dimensiones. Todo esto facilitará la resolución de problemas donde intervengan puntos, rectas y planos.

En las pruebas de examen, siempre se debe suponer que los ángulos se miden en radianes, a menos que se indique explícitamente lo contrario.

TANS 3.9

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Definición de las razones trigonométricas recíprocas $\sec\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ y $\cot\theta$. Relaciones trigonométricas fundamentales: $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$ Las funciones inversas $f(x)=\operatorname{arcsen}x$, $f(x)=\arccos x$, $f(x)=\arctan x$; su dominio y su recorrido; su gráfico.	

Conexiones

Mentalidad internacional: El origen de los grados en el ámbito matemático de Mesopotamia; por qué utilizamos minutos y segundos para describir el tiempo; el origen de la palabra “seno”.

TdC: ¿Qué relación existe entre conceptos y hechos? ¿En qué medida los conceptos que utilizamos conforman las conclusiones a las que llegamos?

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 3.10

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Fórmulas de la suma y la diferencia de dos ángulos. Fórmula del ángulo doble para la tangente.	Deducción de las fórmulas del seno y el coseno del ángulo doble a partir de las fórmulas de la suma y la diferencia de dos ángulos. **Enlace** al teorema de De Moivre (TANS 1.14).

Conexiones

Otros contextos: La triangulación que utilizan los dispositivos GPS (sistemas de posicionamiento global); conceptos de ingeniería eléctrica, incluida la generación de un voltaje sinusoidal.

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 3.11

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Relaciones que existen entre las distintas funciones trigonométricas y propiedades de simetría de sus gráficos.	$\operatorname{sen}(\pi-\theta)=\operatorname{sen}\theta$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
	Enlace al círculo de radio unidad (NM 3.5), las funciones pares e impares (TANS 2.14), la suma y diferencia de dos ángulos (TANS 3.10).

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Gráficos del movimiento armónico simple (Física).

TdC: Matemáticas y afirmaciones de conocimiento: ¿cómo es posible que una ecuación tenga un número infinito de soluciones discretas?

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 3.12

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Concepto de vector; vectores de posición; vectores de desplazamiento. Representación de vectores utilizando segmentos de recta orientados. Los vectores de la base $\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{k}$. Componentes de un vector: $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$.	
Enfoques algebraicos y geométricos a los siguientes conceptos: • Suma y resta de dos vectores • El vector nulo $\boldsymbol{0}$, el vector $-\boldsymbol{v}$ • Multiplicación por un escalar $k\boldsymbol{v}$, vectores paralelos • Módulo de un vector $\|\boldsymbol{v}\|$; vectores unitarios $\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$ • Vectores de posición $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$ • Vector de desplazamiento $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ Demostración de propiedades geométricas utilizando vectores.	La distancia entre los puntos A y B es igual al módulo de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Vectores, magnitudes escalares, fuerzas y dinámica (Física).

Objetivo general 8: Los vectores se utilizan para resolver numerosos problemas en los que es necesario determinar la posición. Por ejemplo, se pueden utilizar para salvar a un marinero que se ha perdido o para destruir un edificio mediante una bomba guiada por láser.

TdC: Los vectores se utilizan para resolver numerosos problemas en los que es necesario determinar la posición. Por ejemplo, se pueden utilizar para salvar a un marinero que se ha perdido o para destruir un edificio mediante una bomba guiada por láser. La posesión de conocimientos, ¿en qué medida conlleva una obligación ética?

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 3.13

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Definición de producto escalar de dos vectores. El ángulo que forman dos vectores. Vectores perpendiculares; vectores paralelos.	Aplicaciones de las propiedades del producto escalar $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}$; $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$; $(k\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = k(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})$; $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = \lvert\boldsymbol{v}\rvert^2$. $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \lvert\boldsymbol{v}\rvert\lvert\boldsymbol{w}\rvert\cos\theta$, donde θ es el ángulo que forman $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$. Para vectores distintos de cero, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$ es equivalente a decir que los vectores son perpendiculares; para vectores paralelos se cumple que $\lvert\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}\rvert = \lvert\boldsymbol{v}\rvert\lvert\boldsymbol{w}\rvert$.

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Fuerzas y dinámica (Física).

TdC: La naturaleza de las matemáticas: ¿por qué precisamente esta definición del producto escalar?

Enriquecimiento: Demostración del teorema del coseno utilizando el producto escalar.

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 3.14

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Ecuación vectorial de una recta en dos y en tres dimensiones: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$.	Importancia de $\boldsymbol{a}$ (posición) y $\boldsymbol{b}$ (dirección). Conocimiento de las siguientes formas de representar la ecuación de una recta: - Forma paramétrica $x = x_0 + \lambda l, y = y_0 + \lambda m, z = z_0 + \lambda n$. - Forma cartesiana $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$.
El ángulo que forman dos rectas.	Utilización del producto escalar de los dos vectores directores.
Aplicación a problemas sencillos de cinemática.	Interpretación de λ como el tiempo y $\boldsymbol{b}$ como la velocidad, donde $\lvert\boldsymbol{b}\rvert$ representa la rapidez.

Conexiones

Otros contextos: Modelización del movimiento en línea recta en tres dimensiones; dispositivos para navegación (por ejemplo, el GPS).

TdC: ¿Por qué motivos se podría alegar que una forma de representación es superior a otra? ¿Qué criterios podría utilizar un matemático a la hora de hacer tal afirmación?

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 3.15

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Rectas coincidentes, rectas paralelas, rectas que se cortan y rectas alabeadas; cómo distinguir un caso de otro. Puntos de intersección.	Las rectas alabeadas son rectas en el espacio tridimensional que no son paralelas pero que tampoco se cortan.

Conexiones

TdC: ¿Cómo es posible que una ecuación tenga un número infinito de soluciones discretas? ¿Qué sugiere este hecho sobre la naturaleza del conocimiento matemático, y sobre las diferencias y similitudes que hay con el conocimiento en otras disciplinas?

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 3.16

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
La definición del producto vectorial de dos vectores.	Al producto vectorial también se lo conoce como "producto cruz". $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \lvert \boldsymbol{v} \rvert \lvert \boldsymbol{w} \rvert \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{n}$, donde θ es el ángulo que forman $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{n}$ es el vector normal unitario cuya dirección viene dada por la regla del pulgar de la mano derecha (o del sacacorchos).
Propiedades del producto vectorial.	$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = -\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v}$; $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}$; $(k\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = k(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$; $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Para vectores distintos de cero $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ es equivalente a decir que los vectores son paralelos.
Interpretación geométrica de $\lvert \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \rvert$	Uso de $\lvert \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \rvert$ para hallar el área de un paralelogramo (y, a partir de ese valor, el área de un triángulo).

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Fuerzas y campos magnéticos (Física).

TdC: ¿Hasta qué punto es posible lograr la certeza en matemáticas? Y esta certeza, ¿se puede conseguir o es deseable lograrla en otras áreas del conocimiento?

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 3.17

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Ecuaciones vectoriales de un plano: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c}$, donde $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son vectores no paralelos contenidos en el plano. $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}$, donde $\boldsymbol{n}$ es un vector normal al plano y $\boldsymbol{a}$ es el vector de posición de un punto perteneciente al plano. Ecuación cartesiana de un plano $ax + by + cz = d$.	

Conexiones

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 3.18

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Intersección de: una recta y un plano, dos planos, tres planos. Ángulo que forman: una recta y un plano; dos planos.	Hallar intersecciones resolviendo ecuaciones; interpretación geométrica de las soluciones. **Enlace** a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (TANS 1.16).

Conexiones

TdC: Las matemáticas y el actor de conocimiento: ¿las representaciones simbólicas de objetos tridimensionales resultan más fáciles de manejar que las representaciones visuales? ¿Qué nos dice este hecho sobre nuestros conocimientos de matemáticas en otras dimensiones?

Descargar la plantilla de conexiones

Tema 4: Estadística y probabilidad

Conceptos

Conocimientos esenciales

La estadística se ocupa de la recogida de datos y su posterior análisis e interpretación; la teoría de la probabilidad se puede utilizar para estimar parámetros, descubrir leyes empíricas, comprobar hipótesis y predecir la ocurrencia de sucesos. Las representaciones y las medidas estadísticas nos permiten representar los datos de muchas maneras distintas para facilitar su interpretación.

La probabilidad nos permite cuantificar lo probable que es que se produzca un suceso dado y, de ese modo, poder evaluar los riesgos asociados. Tanto la estadística como la probabilidad ponen a nuestra disposición una serie de importantes representaciones que nos permiten hacer predicciones, realizar comparaciones válidas y tomar decisiones fundamentadas. Estos campos ofrecen muchas posibilidades, pero también tienen sus limitaciones; por ello, se deben aplicar con atención y se han de cuestionar con espíritu crítico para diferenciar entre lo teórico y lo empírico/observado. La teoría de la probabilidad nos permite tomar decisiones fundamentadas, evaluar los riesgos asociados y hacer predicciones sobre sucesos aparentemente aleatorios.

Conceptos recomendados para impartir en este tema

Cantidad, validez, aproximación, generalización

TANS: cambio, sistemas.

Comprensión conceptual específica del contenido

- Organizar, representar, analizar e interpretar los datos, y utilizar diversas herramientas estadísticas sirve de gran ayuda a la hora de hacer predicciones y extraer conclusiones.
- Hay que justificar el porqué de la técnica estadística elegida, e identificar las limitaciones y el ámbito de validez de dicha técnica.
- A la hora de manejar datos, una aproximación puede acercarse a la verdad, pero también cabe la posibilidad de que no siempre la alcance.
- Algunas técnicas de análisis estadístico —como la regresión, la estandarización o las fórmulas— se pueden aplicar a un contexto práctico y, posteriormente, a casos generales.
- La modelización mediante el uso de la estadística puede ser un método fiable, pero también puede estar sujeto a ciertas limitaciones.

TANS

- Las propiedades de las funciones de densidad de probabilidad se pueden utilizar para identificar medidas de tendencia central tales como la media, la moda y la mediana.
- Los métodos probabilísticos como el teorema de Bayes se pueden aplicar a sistemas del mundo real —p. ej., en el ámbito de los estudios clínicos o la economía— para fundamentar la toma de decisiones y para entender mejor los resultados.

Contenidos para NM

N.º de horas lectivas recomendadas: 27

El objetivo general de los contenidos de NM que hay en el tema de estadística y probabilidad es introducir una serie de importantes conceptos, técnicas y representaciones que se usan en estadística y probabilidad. Se debería dar a los alumnos la oportunidad de abordar el contenido de este tema de forma práctica, para que entiendan por qué se utilizan determinadas técnicas y aprendan a interpretar los resultados. El uso de medios tecnológicos —simulaciones, hojas de cálculo, programas informáticos y aplicaciones de estadística — puede hacer que se le saque mucho más partido a este tema.

Se espera que los alumnos utilicen medios tecnológicos para hacer la mayoría de los cálculos requeridos, pero el añadir a mano una explicación sobre dichos cálculos puede hacer que mejore la comprensión. Hay que poner el énfasis en la comprensión y en la interpretación de los resultados obtenidos dentro del contexto en el que se plantea el ejercicio.

En los exámenes, los alumnos deben saber utilizar las funciones de estadística del dispositivo tecnológico que tengan permitido usar.

En el NM, se considerará que el conjunto de datos es la población a menos que se indique lo contrario.

Las secciones de NM entre 4.1 y 4.9 son comunes a Matemáticas: Análisis y Enfoques, y a Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación.

NM 4.1

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Concepto de población, muestra, muestra aleatoria, datos discretos y continuos.	Esta sección está diseñada para cubrir las preguntas más importantes que los alumnos deberían hacer

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
	cuando se enfrentan a un conjunto o un análisis de datos.
Fiabilidad de las fuentes de datos y sesgo en el muestreo.	Qué hacer cuando faltan datos; errores en el registro de datos.
Interpretación de los valores atípicos.	Un valor atípico se define como aquel dato que se encuentra a una distancia del cuartil más próximo superior a 1,5 × rango intercuartil (RIC). Hay que tener presente que, en contexto, algunos valores atípicos son una parte válida de la muestra, mientras que otros valores atípicos pueden constituir un error dentro de la muestra. **Enlace** a los diagramas de caja y bigotes (NM 4.2) y medidas de dispersión (NM 4.3).
Técnicas de muestreo y su eficacia.	Métodos de muestreo: aleatorio simple, por conveniencia, sistemático, por cuotas y estratificado.

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Estadística descriptiva y muestras aleatorias (Biología, Psicología, Ciencias del Deporte, el Ejercicio y la Salud, Sistemas Ambientales y Sociedades, Geografía, Economía, Gestión Empresarial); metodologías para la investigación (Psicología).

Objetivo general 8: Estadísticas engañosas; ejemplos de problemas acaecidos por la ausencia de muestras representativas, por ejemplo, el sistema de Google para predecir epidemias de gripe, las elecciones presidenciales de 1936 en EE. UU. (predicciones del Literary Digest frente a las de George Gallup); la aplicación para registrar los baches encontrados en las calles de Boston.

Mentalidad internacional: El informe Kinsey: técnicas de muestreo famosas.

TdC: ¿Por qué a veces se tratan las matemáticas y la estadística como si fueran temas distintos? ¿Hasta qué punto es fácil que la estadística nos engañe? ¿En alguna ocasión está justificado utilizar la estadística con el propósito deliberado de engañar al prójimo?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 4.2

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Presentación de datos (discretos y continuos): distribuciones de frecuencia (tablas).	Los intervalos de clase se darán en forma de desigualdades, sin huecos entre medias.
Histogramas. Frecuencia acumulada; gráficos de frecuencia acumulada; su uso para hallar la mediana, los cuartiles, los percentiles, el rango y el rango intercuartil (RIC).	Histogramas de frecuencia con intervalos de clase de la misma amplitud. **No es necesario incluir** histogramas de densidad de frecuencia.
Elaboración y comprensión de los diagramas de caja y bigote.	Uso de los diagramas de caja y bigotes para comparar dos distribuciones, usando la simetría, la mediana, el rango intercuartil o el rango. Los valores atípicos se deben indicar mediante una cruz (X).

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
	Determinar si los datos siguen o no una distribución normal analizando la simetría de la caja y de los bigotes del diagrama.

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Presentación de datos (Ciencias, Individuos y Sociedades).

Mentalidad internacional: Discusión de las distintas fórmulas que existen para una misma medida estadística (por ejemplo, la varianza).

TdC: ¿Qué diferencia hay entre información y datos? ¿El término “datos” significa lo mismo en todas las áreas del conocimiento?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 4.3

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Medidas de tendencia central (media, mediana y moda). Estimación de la media a partir de datos agrupados.	Cálculo de la media utilizando la fórmula y medios tecnológicos. Los alumnos deberían partir de valores centrales del intervalo para estimar la media de los datos agrupados.
Clase modal.	Únicamente para intervalos de clase de la misma amplitud.
Medidas de dispersión (rango intercuartil, desviación típica y varianza).	Cálculo de la desviación típica y de la varianza de la muestra utilizando únicamente medios tecnológicos; no obstante, los cálculos hechos a mano pueden ayudar a mejorar la comprensión. La varianza es el cuadrado de la desviación típica.
Efecto que tienen los cambios constantes sobre los datos originales.	**Ejemplos:** Si a cada uno de los datos le restamos tres, en ese caso la media disminuye en tres unidades pero, por el contrario, la desviación típica no varía. Sin embargo, si multiplicamos por dos cada uno de los datos, la media se duplica y la desviación típica también se duplica.
Cuartiles de datos discretos.	Uso de medios tecnológicos. Hay que ser conscientes de que existen diversos métodos para hallar los cuartiles y que, por consiguiente, los valores que se obtenga con medios tecnológicos o haciendo los cálculos a mano podrían ser distintos.

Conexiones

Otros contextos: Comparar variación y dispersión en una población (humana o de otros ámbitos de la naturaleza), por ejemplo, datos de cosechas, indicadores sociales, fiabilidad y mantenimiento.

Enlaces a otras asignaturas: Estadística descriptiva (Ciencias, Individuos y Sociedades); índice de precios al consumidor (Economía).

Mentalidad internacional: Las ventajas de compartir y analizar datos procedentes de diversos países; discusión sobre las distintas fórmulas que hay para calcular la varianza.

TdC: ¿Puede las matemáticas plantear fórmulas alternativas que sean igualmente ciertas? ¿Qué nos dice este hecho acerca de las verdades matemáticas? ¿El uso de la estadística hace que pongamos un énfasis exagerado en parámetros que se pueden medir fácilmente, en detrimento de aquellos que no resultan tan fáciles de medir?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 4.4

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Correlación lineal de variables bidimensionales. Coeficiente de correlación momento-producto de Pearson r.	Para calcular r se deberían utilizar medios tecnológicos. No obstante, los cálculos de r hechos a mano pueden ayudar a mejorar la comprensión. Se darán los valores críticos de r allí donde resulte pertinente. Los alumnos deben tener presente que el coeficiente de correlación momento-producto de Pearson (r) solo tiene sentido en el contexto de relaciones lineales.
Diagrama de dispersión; recta de ajuste óptimo (dibujada a ojo) que pasa por el punto correspondiente a la media.	Positiva, cero, negativa; fuerte, débil, ninguna correlación. Los alumnos deberán ser capaces de distinguir entre correlación y causa, y han de saber que correlación no implica causalidad.
Ecuación de la recta de regresión de y sobre x. Uso de la ecuación de la recta de regresión para hacer predicciones. Interpretar el significado de los parámetros a y b en una regresión lineal $y = ax + b$.	Para hallar la ecuación se deberían utilizar medios tecnológicos. Los alumnos deben tener presente lo siguiente: • Los peligros de la extrapolación • Que no siempre se pueden hacer predicciones fiables de x a partir de un valor de y cuando se utilice una recta de y sobre x.

Conexiones

Otros contextos: Regresión lineal cuando existe una correlación entre dos variables. Explorar las causas y la dependencia en el caso de variables categóricas, por ejemplo, ¿de qué factores depende la persuasión política?

Enlaces a otras asignaturas: Curvas de ajuste óptimo, correlación y causa (asignaturas de Ciencias); diagramas de dispersión (Geografía).

Objetivo general 8: La correlación que existe entre el fumar y el cáncer de pulmón se "descubrió" haciendo uso de las matemáticas. La ciencia tiene que justificar la causa.

TdC: Correlación y causa: ¿podemos llegar a conocer la relación causa-efecto, teniendo en cuenta que solo podemos observar la correlación que hay entre ambas? ¿Qué factores afectan a la fiabilidad y a la validez de los modelos matemáticos cuando se emplean para describir fenómenos de la vida real?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 4.5

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Concepto de ensayo, resultado, resultados equiprobables, frecuencia relativa, espacio muestral (U) y suceso. La probabilidad de un suceso A es $\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$. Los sucesos complementarios A y A' (no A).	Los espacios muestrales se pueden representar de muchas maneras; por ejemplo, mediante una tabla o una lista. Haciendo experimentos con monedas, dados, cartas, etc., se puede conseguir que los alumnos entiendan mejor la diferencia que existe entre probabilidad experimental (frecuencia relativa) y teórica. Las simulaciones pueden resultar útiles para complementar este tema.
Número esperado de ocurrencias.	**Ejemplo:** Si en una clase hay 128 alumnos y la probabilidad de que falten a clase es igual a 0,1, el número esperado de alumnos que faltarán a clase en un día dado es 12,8.

Conexiones

Otros contextos: Estudios actuariales y la vinculación que existe entre la esperanza de vida y las primas de seguros; planificación del gobierno basada en las cifras previstas más probables; métodos de Montecarlo.

Enlaces a otras asignaturas: Genética teórica y los cuadros de Punnet (Biología); la posición de una partícula (Física).

Objetivo general 8: Los aspectos éticos de los juegos de azar.

Mentalidad internacional: La paradoja de San Petersburgo; Chebyshev y Pavlovsky (rusos).

TdC: ¿Hasta qué punto están ligadas la probabilidad teórica y la probabilidad experimental? ¿Qué papel desempeña la emoción en nuestra percepción del riesgo, por ejemplo, en el ámbito de la seguridad en los negocios, la medicina y los viajes?

Uso de medios tecnológicos: Las simulaciones por computadora pueden resultar útiles para complementar este tema.

Descargar la plantilla de conexiones

NM 4.6

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Uso de diagramas de Venn, diagramas de árbol, diagramas de espacio muestral y tablas de resultados para el cálculo de probabilidades.	
Sucesos compuestos: $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$. Sucesos incompatibles: $\mathrm{P}(A \cap B) = 0$.	La no exclusividad del “o”.
Probabilidad condicionada $\mathrm{P}(A\vert B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$.	Una manera alternativa de expresar esto: $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A\vert B)$. Los problemas se pueden resolver con la ayuda de diagramas de Venn, diagramas de árbol, diagramas de espacio muestral o con una tabla de resultados, sin que sea necesario el uso explícito de fórmulas.

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
	Probabilidades con o sin reposición.
Sucesos independientes: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.	

Conexiones

Objetivo general 8: El tema de los juegos de azar: uso de las leyes de la probabilidad en los casinos. ¿Las matemáticas podrían o deberían ayudar a aumentar los ingresos en los juegos de azar?

TdC: ¿El cálculo de probabilidades en el contexto de los juegos de azar se puede considerar una aplicación ética de las matemáticas? ¿A los matemáticos hay que considerarlos responsables cuando su trabajo se utilice para aplicaciones poco éticas?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 4.7

<table>
<tr><th>Contenidos</th><th>Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios</th></tr>
<tr><td>Concepto de variable aleatoria discreta y su correspondiente distribución de probabilidad.
Esperanza matemática (media) para datos discretos.
Aplicaciones.</td><td>Las distribuciones de probabilidad se darán de las siguientes maneras:
<table><tr><td>X</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>$P(X = x)$</td><td>$0,1$</td><td>$0,2$</td><td>$0,15$</td><td>$0,05$</td><td>$0,5$</td></tr></table>$P(X = x) = \frac{1}{18}(4 + x)$ para $x \in \{1, 2, 3\}$
$E(X) = 0$ indica que se trata de un juego justo, donde X representa la ganancia de un jugador.</td></tr>
</table>

Conexiones

Otros contextos: Juegos de azar.

Objetivo general 8: ¿Por qué se ha alegado que las teorías que se usan en los casinos y que están basadas en probabilidades calculables resultan perniciosas cuando se aplican a la vida cotidiana (por ejemplo, a la economía)?

TdC: ¿A qué nos referimos con la expresión juego "justo"? ¿Es justo que los casinos tengan que tener beneficios?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 4.8

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Distribución binomial. Media y varianza de la distribución binomial.	Situaciones en las que la distribución binomial constituye un modelo adecuado. En los exámenes, los valores de probabilidad binomial se deberían hallar empleando medios tecnológicos. **No es necesario incluir** la demostración formal de la media y la varianza.

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
	Enlace al número esperado de ocurrencias (NM 4.5).

Conexiones

Objetivo general 8: El triángulo de Pascal, la atribución de un descubrimiento matemático al matemático equivocado.

Mentalidad internacional: El denominado “triángulo de Pascal” ya lo conocía el matemático chino Yang Hui mucho antes que Pascal.

TdC: ¿Qué criterios podemos utilizar para decantarnos por un modelo determinado, cuando disponemos de varios para elegir?

Enriquecimiento: Contraste de hipótesis utilizando la distribución binomial.

Descargar la plantilla de conexiones

NM 4.9

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
La distribución normal y su curva correspondiente. Propiedades de la distribución normal. Representación mediante diagramas.	Los alumnos han de ser conscientes de que la distribución normal sucede de manera natural en nuestro entorno. Los alumnos deben tener presente que el 68 % de los datos se encuentran entre $\mu \pm \sigma$, un 95 % se encuentra entre $\mu \pm 2\sigma$ y un 99,7 % de los datos se encuentran entre $\mu \pm 3\sigma$.
Cálculo de probabilidades asociadas a la distribución normal.	Las probabilidades y el valor de las variables se han de hallar empleando medios tecnológicos.
Proceso inverso del cálculo de probabilidades asociadas a una distribución normal.	En los cálculos que impliquen el proceso inverso con la distribución normal, los valores de la media y la desviación típica serán dados. Esto no implica la transformación de la variable normal estandarizada z.

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Mediciones de la vida real que siguen una distribución normal y estadística descriptiva (asignaturas de Ciencias, Psicología, Sistemas Ambientales y Sociedades).

Objetivo general 8: El uso incorrecto de la distribución normal, ¿por qué motivos podría conducirnos a deducciones y conclusiones peligrosas?

Mentalidad internacional: Deducción de De Moivre de la distribución normal y cómo utilizó Quetelet este concepto para describir “el hombre promedio”.

TdC: ¿Hasta qué punto nos podemos fiar de los modelos matemáticos, p. ej., de la distribución normal? ¿Cómo podemos saber qué cosas hay que incluir en un modelo y cuáles hay que excluir?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 4.10

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Ecuación de la recta de regresión de x sobre y.	
Uso de esta ecuación para hacer predicciones.	Los alumnos deben tener presente que no siempre pueden hacer predicciones fiables de y a partir de un valor de x, cuando estén utilizando una recta de x sobre y.

Conexiones

TdC: ¿Es posible conocer el futuro?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 4.11

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Definición formal y uso de las fórmulas: $\mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$ para casos de probabilidad condicionada y $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B')$ para sucesos independientes.	Una manera alternativa de expresar esto: $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A \mid B)$. Evaluar la independencia.

Conexiones

Otros contextos: Uso de métodos probabilísticos en estudios clínicos para evaluar los factores de riesgo asociados a determinadas enfermedades.

TdC: Teniendo en cuenta el carácter interdisciplinario de muchas de las aplicaciones de la probabilidad en el mundo real, la división del conocimiento en disciplinas o áreas del conocimiento discretas, ¿es algo artificial o resulta útil?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 4.12

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Tipificación de la variable en una distribución normal (valores z).	Las probabilidades y el valor de las variables se han de hallar empleando medios tecnológicos. La variable tipificada (z) da el número de unidades de desviación típica que dista de la media.
Proceso inverso de cálculos de probabilidades asociadas a una distribución normal cuando se desconoce el valor de la media y el de la desviación típica.	Uso de valores z para calcular medias y desviaciones típicas no conocidas.

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: La distribución normal (Biología); estadística descriptiva (Psicología).

Descargar la plantilla de conexiones

Contenidos para TANS

N.º de horas lectivas recomendadas: 6

El objetivo general de los TANS incluidos en el tema de estadística y probabilidad es ampliar y consolidar los objetivos generales, los conceptos y las destrezas adquiridas con los contenidos de NM. Se introduce la teoría avanzada de probabilidad condicionada en forma del teorema de Bayes; además, se exploran en más profundidad las propiedades de las variables aleatorias discretas y continuas.

TANS 4.13

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Uso del teorema de Bayes para un máximo de tres sucesos.	**Enlace** a los sucesos independientes (NM 4.6).

Conexiones

Otros contextos: Uso de métodos probabilísticos en estudios clínicos para evaluar los factores de riesgo asociados a determinadas enfermedades.

TdC: La aplicabilidad de los conocimientos adquiridos, ¿varía de un área del conocimiento a otra? ¿Qué pasaría si el valor de cualquier conocimiento se midiera únicamente en función de su grado de aplicabilidad?

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 4.14

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Varianza de una variable aleatoria discreta.	**Enlace** a variables aleatorias discretas (NM 4.7)
Variables aleatorias continuas y sus correspondientes funciones de densidad de probabilidad.	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$ incluidas las funciones definidas por tramos.
La moda y la mediana de una variable aleatoria continua.	Para una variable aleatoria continua, el valor para el cual la función de densidad de probabilidad alcanza un máximo se denomina moda y para la mediana: $\int_{-\infty}^{m} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.
La media, la varianza y la desviación típica de variables aleatorias tanto discretas como continuas.	Uso de la notación $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(X^2)$, $\mathrm{Var}(X)$, donde $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$ y fórmulas relacionadas. Uso de $\mathrm{E}(X)$ para juegos “justos”.
El efecto de las transformaciones lineales de X.	$\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$, $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$

Conexiones

Otros contextos: Es posible que haya otras distribuciones discretas (por ejemplo, la de Poisson) que resulten apropiadas para la evaluación interna o el equipo de herramientas y la investigación avanzada; la esperanza matemática utilizada en la toma de decisiones en el ámbito empresarial, de la economía y en la vida cotidiana en general; ganancia esperada para las compañías aseguradoras.

TdC: A la hora de resolver un problema, ¿las matemáticas resultan más útiles o menos útiles que otras áreas del conocimiento?

Enriquecimiento: Para un conjunto de datos que siguen una distribución normal, ¿existe alguna relación entre el rango intercuartil y la desviación típica?

Descargar la plantilla de conexiones

Tema 5: Análisis

Conceptos

Conocimientos esenciales

El análisis describe razones de cambio entre dos variables y la acumulación de áreas infinitesimales. El entender estas razones de cambio y estas acumulaciones nos permite modelizar, interpretar y analizar problemas y situaciones de la vida real. El análisis nos ayuda a comprender el comportamiento de las funciones y nos permite interpretar las características de sus gráficos correspondientes.

Conceptos recomendados para impartir en este tema

Cambio, patrones, relaciones, aproximación, generalización, espacio, modelización.

TANS: sistemas, cantidad.

Comprensión conceptual específica del contenido

- En física, la derivada puede ser interpretada como una tasa de cambio, mientras que en geometría como la función pendiente.
- El área bajo la curva se puede aproximar por la suma de las áreas de una serie de rectángulos; dicha área se puede calcular de manera aún más exacta utilizando la integración.
- El examinar las razones de cambio en regiones cercanas a los puntos de inflexión resulta útil para identificar aquellos intervalos donde la función es creciente o decreciente, y ayuda a determinar la concavidad de la función.
- La integración numérica se puede utilizar para aproximar áreas en el mundo real.
- La modelización matemática puede ofrecer soluciones eficaces a problemas de la vida real sobre optimización: para ello, es necesario maximizar o minimizar una variable, como el coste o el beneficio.
- Las derivadas y las integrales describen problemas de cinemática del mundo real en el espacio bidimensional y tridimensional mediante el análisis del desplazamiento, la velocidad y la aceleración.

TANS

- Hay funciones que son continuas en todos sus puntos, pero que no son derivables en todos sus puntos.
- Un número finito de términos de una serie infinita puede constituir una aproximación general a una función dentro de un dominio restringido.
- Los límites describen los valores que va adoptando una función a medida que la variable independiente se acerca a un determinado valor; dicho límite puede revelar la convergencia o la divergencia de la función en ese punto.
- Examinar el límite de una función en un punto puede servir de ayuda para determinar si existe continuidad y derivabilidad en ese punto.

Contenidos para NM

N.º de horas lectivas recomendadas: 28

El objetivo general de los contenidos de NM que hay en el tema de análisis es introducir una serie de conceptos y técnicas propias del cálculo diferencial e integral, y mostrar sus aplicaciones correspondientes.

A lo largo de todo este tema se deber brindar a los alumnos la oportunidad de utilizar medios tecnológicos —como paquetes para representación gráfica o una calculadora de pantalla gráfica— para que amplíen y apliquen sus conocimientos de análisis.

Las secciones de NM entre 5.1 y 5.5 son comunes a Matemáticas: Análisis y Enfoques, y a Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación.

NM 5.1

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Introducción al concepto de límite.	Estimación del valor de un límite a partir de una tabla o de un gráfico. **No es necesario incluir** métodos analíticos formales para el cálculo de límites.
La derivada interpretada como función pendiente y como razón de cambio.	Formas de notación: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ o bien $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ para la derivada primera. Comprensión (de manera informal) de la pendiente de una curva como un límite.

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Coste marginal, ingreso marginal, beneficio marginal, estructuras de mercado (Economía); cinemática, campo electromagnético inducido y movimiento armónico simple (Física); interpretación de la pendiente de una curva (Química).

Objetivo general 8: El debate de si fue Newton o Leibnitz quien descubrió determinados conceptos de análisis; cómo la desconfianza que sentían los griegos hacia el cero hizo que el trabajo de Arquímedes no condujera al desarrollo del análisis.

Mentalidad internacional: Intentos por parte de matemáticos indios (500-1000 d. C.) de explicar la división entre cero.

TdC: ¿Qué valor aporta el conocimiento de los límites? El comportamiento infinitesimal, ¿resulta aplicable a la vida real? La intuición, ¿es una forma válida de conocimiento en el ámbito de las matemáticas?

Uso de medios tecnológicos: Se deben utilizar hojas de cálculo, programas informáticos de representación gráfica dinámica y calculadora de pantalla gráfica para explorar el concepto de límite (tanto numéricamente como utilizando métodos gráficos). Las hipótesis se pueden formular y, a continuación, se pueden contrastar haciendo uso de medios tecnológicos.

Descargar la plantilla de conexiones

NM 5.2

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Funciones crecientes y decrecientes. Interpretación gráfica de $f'(x) > 0, f'(x) = 0, f'(x) < 0$.	Identificar en qué intervalos la función es creciente ($f'(x) > 0$) o decreciente ($f'(x) < 0$).

Conexiones

Descargar la plantilla de conexiones

NM 5.3

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
La derivada de $f(x) = ax^n$ es $f'(x) = anx^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$. La derivada de funciones que son de la forma $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ . \ . \ .$ donde todos los exponentes son números enteros.	

Conexiones

TdC: El concepto aparentemente abstracto que encierra el análisis permite elaborar modelos matemáticos que, a su vez, posibilitan proezas tales como que el hombre haya llegado a la Luna. ¿Qué nos dice este hecho sobre los vínculos que existen entre los modelos matemáticos y la realidad?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 5.4

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Recta tangente y recta normal a la curva en un punto dado; ecuación de dichas rectas.	Empleo de enfoques analíticos y de medios tecnológicos.

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Velocidad instantánea y óptica, superficies equipotenciales (Física); elasticidad de los precios (Economía).

TdC: Los medios tecnológicos, ¿de qué manera han influido en la forma en la que se genera y se comparte el conocimiento en matemáticas? ¿Los medios tecnológicos simplemente nos permiten organizar conocimientos ya existentes de una forma nueva o distinta, o se debería considerar que esta reorganización es también en sí misma conocimiento?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 5.5

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Introducción a la integración como primitiva de funciones que son de la forma $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + ...,$ donde $n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq -1$.	Los alumnos deben tener presente la relación que existe entre primitivas, integrales definidas y área bajo la curva.
Integración con una restricción para determinar el término constante.	**Ejemplo:** Si $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 + x$ e $y = 10$ cuando $x = 1$, entonces $y = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 8,5$.

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Integrales definidas utilizando medios tecnológicos. Área de una región delimitada por una curva $y = f(x)$ y el eje x, donde $f(x) > 0$.	Se espera que los alumnos primero escriban una expresión correcta, antes de, por ejemplo, calcular el área $\int_2^6 (3x^2 + 4)\mathrm{d}x$. Se recomienda utilizar programas de geometría o de representaciones gráficas dinámicas durante la enseñanza de este concepto.

Conexiones

Otros contextos: Gráficos de velocidad-tiempo.

Enlaces a otras asignaturas: Gráficos velocidad-tiempo y aceleración-tiempo (Física y Ciencias del Deporte, el Ejercicio y la Salud).

TdC: ¿Es posible que un área del conocimiento consiga describir el mundo sin transformarlo?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 5.6

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Derivada de x^n $(n \in \mathbb{Q})$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x y $\ln x$. Derivada de una suma y de un múltiplo de estas funciones.	
La regla de la cadena para funciones compuestas. La regla del producto y la regla del cociente.	**Ejemplo:** $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2+2)}$, $f(x) = \operatorname{sen}(3x - 1)$. **Enlace** a las funciones compuestas (NM 2.5).

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Movimiento circular uniforme y campo electromagnético inducido (Física).

TdC: ¿Qué papel desempeña la convención en matemáticas? ¿Este papel es parecido o es distinto del que desempeña la convención en otras áreas del conocimiento?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 5.7

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
La derivada segunda. Comportamiento gráfico de funciones, incluida la relación que existe entre los gráficos de f, f' y f''.	Uso de ambas formas de notación, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ y $f''(x)$. Los medios tecnológicos se pueden utilizar para explorar gráficos y para calcular la derivada de funciones. **Enlace** a las habilidades de representación gráfica (NM 2.3).

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Movimiento armónico simple (Física).

Descargar la plantilla de conexiones

NM 5.8

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Puntos máximos y mínimos locales. Comprobación para saber si se trata de un máximo o un mínimo.	Utilizar el cambio de signo de la derivada primera o el signo de la derivada segunda, cuando $f''(x) > 0$ indica que se trata de un mínimo y $f''(x) < 0$ implica que hay un máximo.
Optimización.	Ejemplos de problemas de optimización: beneficios económicos, área y volumen.
Puntos de inflexión con pendiente cero y con pendiente distinta de cero.	En un punto de inflexión, $f''(x) = 0$ **y** hay un cambio de signo (cambio de concavidad); por ejemplo $f''(x) = 0$ no es una condición suficiente para que haya un punto de inflexión en la curva $y = x^4$ en el punto $(0, 0)$. Uso de las expresiones "cóncava hacia arriba" para el caso $f''(x) > 0$ y "cóncava hacia abajo" para $f''(x) < 0$.

Conexiones

Otros contextos: Beneficios económicos, área, volumen.

Enlaces a otras asignaturas: Gráficos de velocidad-tiempo, gráficos del movimiento armónico simple y cinemática (Física); eficiencia de asignación (Economía).

TdC: Cuando un matemático y un historiador dicen que han explicado algo, ¿están utilizando la palabra "explicar" del mismo modo los dos?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 5.9

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Problemas de cinemática donde interviene el desplazamiento s, velocidad v, aceleración a y la distancia total recorrida.	$v = \frac{ds}{dt}$; $\quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$. El desplazamiento desde t_1 a t_2 viene dado por $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$. La distancia entre t_1 a t_2 viene dada por $\int_{t_1}^{t_2} \lvert v(t)\rvert dt$. La rapidez es el módulo de la velocidad.

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Cinemática (Física).

Mentalidad internacional: La inclusión de la cinemática en el tronco común de matemáticas, ¿es un reflejo de un patrimonio cultural concreto? ¿Quién decide lo que son las matemáticas?

TdC: ¿Las matemáticas son una entidad independiente de la cultura? ¿En qué medida somos conscientes de la influencia que tiene la cultura sobre nuestras creencias y sobre nuestros conocimientos?

Descargar la plantilla de conexiones

NM 5.10

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Integral indefinida de $x^n \ (n \in \mathbb{Q}), \ \operatorname{sen} x, \ \cos x, \ \frac{1}{x}$ y e^x.	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$.
La composición de alguna de estas funciones con la función lineal $ax + b$.	**Ejemplo:** $f'(x) = \cos(2x+3) \Rightarrow \ f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x+3) + C$.
Integración por comparación (regla de la cadena inversa) o por sustitución para expresiones que sean de la forma: $\int kg'(x)f(g(x))dx$.	**Ejemplos:** $\int 2x(x^2+1)^4 dx, \ \int 4x\operatorname{sen} x^2 dx, \ \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$.

Conexiones

Descargar la plantilla de conexiones

NM 5.11

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Integrales definidas, incluido un enfoque analítico a este tema.	$\int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a)$. Hay algunas integrales definidas cuyo valor solo se puede hallar recurriendo a medios tecnológicos. **Enlace** a las integrales definidas utilizando medios tecnológicos (NM 5.5).
Áreas de una región delimitada por una curva $y = f(x)$ y el eje x, donde $f(x)$ puede tener valores positivos o negativos, sin recurrir al uso de medios tecnológicos. Área entre curvas	Se espera que los alumnos escriban primero una expresión correcta antes de calcular el área. Los medios tecnológicos se pueden utilizar para que el alumno comprenda mejor la relación que existe entre las integrales y las áreas.

Conexiones

Mentalidad internacional: El matemático chino Liu Hui y su cálculo exacto del volumen de un cilindro; Ibn Al Haytham, el primer matemático que calculó la integral de una función, pues quería hallar el volumen de un paraboloide.

TdC: Consideremos $f(x) = \frac{1}{x}$, $1 \leq x$. Un área infinita define, en su rotación, un volumen finito. ¿Puede ser esto compatible con nuestra intuición? ¿La emoción y la intuición desempeñan alguna función en el ámbito de las matemáticas?

Enriquecimiento: Explorar diversas técnicas de integración numérica, como la regla de Simpson o la regla del trapecio.

Descargar la plantilla de conexiones

Contenidos para TANS

N.º de horas lectivas recomendadas: 27

El objetivo general de los TANS incluidos en el tema de análisis es ampliar y consolidar los objetivos generales, los conceptos y las destrezas adquiridas con los contenidos de NM. Se introducen aquí otras técnicas eficientes y aplicaciones útiles del cálculo diferencial e integral.

TANS 5.12

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Comprensión informal de la continuidad y la derivabilidad de una función en un punto.	En los exámenes, a los alumnos no se les pedirá que pongan a prueba la continuidad y la derivabilidad.
Entender el concepto de límite (convergencia y divergencia). Definición formal de la derivada $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.	**Enlace** a las progresiones geométricas infinitas (NM 1.8). Uso de esta definición únicamente para polinomios.
Derivadas de orden superior.	Estar familiarizados con la notación $\frac{d^n y}{dx^n}$, $f^{(n)}(x)$. **Enlace** a la demostración por inducción matemática (TANS 1.15).

Conexiones

Enlaces a otras asignaturas: Teoría de la empresa (Economía).

Mentalidad internacional: Cómo la desconfianza que sentían los griegos hacia el cero hizo que el trabajo de Arquímedes no condujera al desarrollo del análisis; investigar los intentos que hicieron matemáticos indios (500-1000 d. C.) de explicar la división entre cero.

TdC: El hecho de que tanto Leibniz como Newton se toparan con el análisis casi al mismo tiempo, ¿respalda el argumento de los seguidores de Platón, frente a los seguidores del constructivismo?

Enriquecimiento: Teorema fundamental del cálculo.

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 5.13

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
La evaluación de límites que son de la forma $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ utilizando la regla de L'Hôpital o la serie de Maclaurin.	Las indeterminaciones $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$. Por ejemplo: $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$. **Enlace** a las asíntotas horizontales (NM 2.8).
Uso reiterado de la regla de L'Hôpital	

Conexiones

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 5.14

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Derivación implícita. Razones de cambio relacionadas. Problemas de optimización.	Uso apropiado de la regla de la cadena o de la derivación implícita, incluidos aquellos casos en los que la solución óptima se encuentra en el extremo.

Conexiones

Otros contextos: Vínculos que existen entre los modelos matemáticos y físicos.

TdC: Euler fue capaz de lograr importantes avances en el campo del análisis matemático antes de que Cauchy y otros hubieran sentado unas bases teóricas sólidas en esta disciplina. No obstante, hubo una parte del trabajo que no se pudo abordar hasta que no hubo completado Cauchy su trabajo. ¿Qué sugiere este hecho acerca de la naturaleza del progreso y del desarrollo en el ámbito de las matemáticas? ¿En que se podría diferenciar y parecer esto a la naturaleza del progreso y del desarrollo en otras áreas del conocimiento?

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 5.15

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Derivadas de $\tan x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\cot x$, a^x, $\log_a x$, $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$, $\arctan x$.	
Integral indefinida de la derivada de alguna de las funciones anteriores. La composición de alguna de estas funciones con una función lineal.	La integral indefinida interpretada como una familia de curvas. **Ejemplos:** $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \arctan \frac{(x+1)}{2} + C$ $\int \sec^2(2x+5) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \tan(2x+5) + C$.
Uso de fracciones parciales para reorganizar el integrando.	$\int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} \mathrm{d}x = \ln\left\vert\frac{x+1}{x+2}\right\vert + C$.

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
	Enlace a las fracciones parciales (TANS 1.11)

Conexiones

TdC: ¿Puede un enunciado matemático ser cierto antes de haber sido demostrado?

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 5.16

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Integración por sustitución.	En las pruebas de examen a los alumnos se les dará la sustitución que se ha de hacer si la integral no es de la forma $\int kg'(x)f(g(x))\mathrm{d}x$. **Enlace** a la integración por sustitución (NM 5.10).
Integración por partes.	**Ejemplos:** $\int x\operatorname{sen}x\mathrm{d}x$, $\int \ln x\mathrm{d}x$, $\int \operatorname{arcsen}x\mathrm{d}x$.
Integración por partes reiterada.	**Ejemplos:** $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ y $\int \mathrm{e}^x\operatorname{sen}x\mathrm{d}x$.

Conexiones

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 5.17

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Área de la región que está delimitada por una curva y por el eje y en un intervalo dado. Volúmenes de revolución alrededor del eje x o del eje y.	

Conexiones

Otros contextos: Diseño industrial.

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 5.18

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Ecuaciones diferenciales de primer orden. Resolución numérica de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ empleando el método de Euler.	$x_{n+1} = x_n + h$, donde h es una constante.

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Variables separables.	**Ejemplo:** La ecuación logística $\frac{dn}{dt} = kn(a - n), \quad a, \quad k \in \mathbb{R}$. **Enlace** a las fracciones parciales (TANS 1.11) y empleo de fracciones parciales para reorganizar el integrando (TANS 5.15).
Ecuación diferencial homogénea $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ utilizando la sustitución $y = vx$.	
Resolución de $y' + P(x)y = Q(x)$, utilizando el factor integrante.	

Conexiones

Otros contextos: Ley del enfriamiento de Newton, crecimiento de la población, datación con carbono.

Enlaces a otras asignaturas: Curvas de desintegración (Física); reacciones de primer orden (Química)

TdC: ¿La experiencia personal desempeña algún papel en la formación de afirmaciones de conocimiento en el ámbito de las matemáticas? ¿Y desempeña en matemáticas un papel diferente, si la comparamos con otras áreas del conocimiento?

Descargar la plantilla de conexiones

TANS 5.19

Contenidos	Orientación, aclaraciones y enlaces al programa de estudios
Serie de Maclaurin para obtener el desarrollo de $e^x, \quad \operatorname{sen} x, \quad \cos x, \quad \ln(1+x), \quad (1+x)^p,$ $p \in \mathbb{Q}$.	
Obtención de nuevas series mediante sustitución simple, multiplicación, integración y derivación.	**Ejemplo:** Sustitución (reemplazar x por x^2 para obtener el desarrollo en serie de Maclaurin correspondiente a e^{x^2}). **Ejemplo:** El desarrollo de $e^x \operatorname{sen} x$.
Series de Maclaurin partiendo de una ecuación diferencial.	

Conexiones

Mentalidad internacional: Comparación del grupo de Bourbaki con el colegio Kerala.

TdC: ¿La exactitud siempre se contrapone a la simplicidad (es decir, si se potencia una la otra se resiente y viceversa)?

Descargar la plantilla de conexiones

La evaluación en el Programa del Diploma

Información general

La evaluación es una parte fundamental de la enseñanza y el aprendizaje. Los objetivos más importantes de la evaluación en el PD son los de apoyar los objetivos del currículo y fomentar un aprendizaje adecuado por parte de los alumnos. En el PD, la evaluación es tanto interna como externa. Los trabajos preparados para la evaluación externa los corrigen examinadores del IB, mientras que los trabajos presentados para la evaluación interna los corrigen los profesores y los modera externamente el IB.

El IB reconoce dos tipos de evaluación.

La evaluación formativa orienta la enseñanza y el aprendizaje. Proporciona a los alumnos y profesores información útil y precisa sobre el tipo de aprendizaje que se está produciendo y sobre los puntos fuertes y débiles de los alumnos, lo que permite ayudarlos a desarrollar su comprensión y aptitudes. La evaluación formativa también ayuda a mejorar la calidad de la enseñanza, pues proporciona información que permite hacer un seguimiento del progreso del alumno hacia el logro de los objetivos generales y los objetivos de evaluación del curso.

La evaluación sumativa ofrece una perspectiva general del aprendizaje que se ha producido hasta un momento dado y se emplea para determinar los logros de los alumnos.

En el PD se utiliza principalmente una evaluación sumativa concebida para identificar los logros de los alumnos al final o cerca del final del curso. Sin embargo, muchos de los instrumentos de evaluación se pueden utilizar también con propósitos formativos durante la enseñanza y el aprendizaje, y se anima a los profesores a que los utilicen de este modo. Un plan de evaluación exhaustivo debe ser una parte fundamental de la enseñanza, el aprendizaje y la organización del curso. Para obtener más información, consulte el documento del IB *Normas para la implementación de los programas y aplicaciones concretas.*

El enfoque adoptado por el IB es el de la evaluación por criterios, en vez de la evaluación normativa. Es decir, se evalúa el trabajo de los alumnos en relación con niveles de logro determinados y no en relación con el trabajo de otros alumnos. Para obtener más información sobre la evaluación en el PD, consulte la publicación titulada *Principios y prácticas de evaluación del IB: evaluaciones de calidad en la era digital.*

Para ayudar a los profesores en la planificación, implementación y evaluación de los cursos del PD, hay una variedad de recursos que se pueden consultar en el Centro de recursos para los programas o adquirir en la tienda virtual del IB (store.ibo.org). En el Centro de recursos para los programas pueden encontrarse también publicaciones tales como exámenes de muestra, esquemas de calificación, materiales de ayuda al profesor, informes generales de las asignaturas y descriptores de calificaciones finales. En la tienda virtual del IB se pueden adquirir exámenes y esquemas de calificación de convocatorias anteriores.

Métodos de evaluación

El IB emplea diversos métodos para evaluar el trabajo de los alumnos.

Criterios de evaluación

Cuando la tarea de evaluación es abierta (es decir, se plantea de tal manera que fomenta una variedad de respuestas), se utilizan criterios de evaluación. Cada criterio se concentra en una habilidad específica que se espera que demuestren los alumnos. Los objetivos de evaluación describen lo que los alumnos deben ser capaces de hacer y los criterios de evaluación describen qué nivel deben demostrar al hacerlo. Los criterios de evaluación permiten evaluar del mismo modo respuestas que pueden ser muy diferentes. Cada criterio está compuesto por una serie de descriptores de nivel ordenados jerárquicamente. Cada descriptor de nivel equivale a uno o varios puntos. Se aplica cada criterio de evaluación por separado y se localiza el descriptor que refleja más adecuadamente el nivel conseguido por el alumno. Distintos criterios de evaluación pueden tener puntuaciones máximas diferentes en función de su importancia. Los puntos obtenidos en cada criterio se suman para obtener la puntuación total del trabajo en cuestión.

Bandas de puntuación

Las bandas de puntuación describen de forma integral el desempeño esperado y se utilizan para evaluar las respuestas de los alumnos. Constituyen un único criterio holístico, dividido en descriptores de nivel. A cada descriptor de nivel le corresponde un rango de puntos, lo que permite diferenciar el desempeño de los alumnos. Del rango de puntos de cada descriptor de nivel se elige la puntuación que mejor corresponda al nivel logrado por el alumno.

Esquemas de calificación analíticos

Estos esquemas se preparan para aquellas preguntas de examen que se espera que los alumnos contesten con un tipo concreto de respuesta o una respuesta final determinada. Indican a los examinadores cómo desglosar la puntuación total disponible para cada pregunta con respecto a las diferentes partes de la respuesta.

Notas para la corrección

Para algunos componentes de evaluación que se corrigen usando criterios de evaluación se proporcionan notas para la corrección. En ellas se asesora a los correctores sobre cómo aplicar los criterios de evaluación a los requisitos específicos de la pregunta en cuestión.

Adecuaciones inclusivas de evaluación

Existen adecuaciones inclusivas de evaluación disponibles para alumnos con necesidades específicas de acceso a la evaluación. Estas adecuaciones permiten que los alumnos con todo tipo de necesidades accedan a los exámenes y demuestren su conocimiento y comprensión de los constructos que se están evaluando.

La política de acceso e inclusión del IB contiene especificaciones sobre las adecuaciones inclusivas de evaluación que están disponibles para los alumnos con necesidades de apoyo para el aprendizaje. El documento *La diversidad en el aprendizaje y la inclusión en los programas del IB* describe la postura del IB con respecto a los alumnos con diversas necesidades de aprendizaje que cursan los programas del IB. Para los alumnos afectados por circunstancias adversas, los documentos *Reglamento general del Programa del Diploma* y *Procedimientos de evaluación del Programa del Diploma* incluyen información detallada sobre los casos de consideración para el acceso a la evaluación.

Responsabilidades del colegio

Los colegios deben garantizar que los alumnos con necesidades de apoyo para el aprendizaje cuenten con un acceso equitativo y las disposiciones razonables correspondientes según la *política de acceso e inclusión* y el documento *La diversidad en el aprendizaje y la inclusión en los programas del IB.*

Resumen de la evaluación: NM

Primera evaluación en 2021

Componente de evaluación	Porcentaje del total de la evaluación
Evaluación externa (3 horas) **Prueba 1 (90 minutos)** No está permitido usar medios tecnológicos. (80 puntos) *Sección A* La sección consta de preguntas obligatorias de respuesta corta en relación con el programa de estudios. *Sección B* La sección consta de preguntas obligatorias de respuesta larga en relación con el programa de estudios.	**80 %** **40 %**
Prueba 2 (90 minutos) Es necesario usar medios tecnológicos. (80 puntos) *Sección A* La sección consta de preguntas obligatorias de respuesta corta en relación con el programa de estudios. *Sección B* La sección consta de preguntas obligatorias de respuesta larga en relación con el programa de estudios.	**40 %**
Evaluación interna Este componente lo evalúa internamente el profesor y lo modera externamente el IB al final del curso. **Exploración matemática** En Matemáticas, la evaluación interna es una exploración individual. Consiste en un trabajo escrito basado en la investigación de un área de las matemáticas. (20 puntos)	**20 %**

Resumen de la evaluación: NS

Primera evaluación en 2021

Componente de evaluación	Porcentaje del total de la evaluación
Evaluación externa (5 horas) **Prueba 1 (120 minutos)** No está permitido usar medios tecnológicos. (110 puntos) *Sección A* La sección consta de preguntas obligatorias de respuesta corta en relación con el programa de estudios. *Sección B* La sección consta de preguntas obligatorias de respuesta larga en relación con el programa de estudios.	**80 %** **30 %**
Prueba 2 (120 minutos) Es necesario usar medios tecnológicos. (110 puntos) *Sección A* La sección consta de preguntas obligatorias de respuesta corta en relación con el programa de estudios. *Sección B* La sección consta de preguntas obligatorias de respuesta larga en relación con el programa de estudios.	**30 %**
Prueba 3 (60 minutos) Es necesario usar medios tecnológicos. (55 puntos) La prueba consta de dos preguntas obligatorias de respuesta larga que requieren la resolución de problemas.	**20 %**
Evaluación interna Este componente lo evalúa internamente el profesor y lo modera externamente el IB al final del curso. **Exploración matemática** En Matemáticas, la evaluación interna es una exploración individual. Consiste en un trabajo escrito basado en la investigación de un área de las matemáticas. (20 puntos)	**20 %**

Evaluación externa

Información general

Se utilizan esquemas de calificación para evaluar a los alumnos en todas las pruebas. Los esquemas de calificación son específicos para cada prueba de examen.

Descripción detallada de la evaluación externa: NM

Información general

Pruebas 1 y 2

Estas pruebas son elaboradas y evaluadas externamente. En total, representan el 80 % de la nota final del curso. Están diseñadas para que los alumnos puedan demostrar lo que saben y son capaces de hacer.

Las pruebas 1 y 2 contendrán algunas preguntas, o apartados de algunas preguntas, que son comunes con el NS.

Calculadoras

Prueba 1

No se permite a los alumnos utilizar ninguna calculadora. En las preguntas principalmente se necesitará adoptar un enfoque analítico para llegar a las soluciones, en lugar de usar calculadoras de pantalla gráfica. La prueba no requerirá cálculos complicados que puedan llevar a cometer errores por descuido. No obstante, las preguntas implicarán realizar algunas operaciones aritméticas cuando estas sean esenciales para su desarrollo.

Prueba 2

Los alumnos deben disponer de una calculadora de pantalla gráfica en todo momento. No obstante, no todas las preguntas requerirán necesariamente el uso de calculadoras de pantalla gráfica. En el documento *Procedimientos de evaluación* del PD se proporciona información sobre los tipos de calculadoras de pantalla gráfica permitidos.

Cuadernillo de fórmulas

Es necesario que cada alumno disponga de un ejemplar sin anotaciones del cuadernillo de fórmulas durante el examen. El colegio será el encargado de descargarlo desde IBIS o el Centro de recursos para los programas, y asegurarse de contar con un número suficiente de copias disponibles para todos los alumnos.

Asignación de puntuaciones

Se conceden puntos por método, precisión, respuestas y razonamiento, lo cual incluye interpretación.

En las pruebas 1 y 2, las respuestas correctas que no presentan por escrito el procedimiento seguido no siempre reciben la puntuación máxima. Las respuestas se deben justificar mediante el procedimiento seguido o las explicaciones correspondientes (por ejemplo, en forma de diagramas, gráficos o cálculos). Aun cuando una respuesta sea incorrecta, se pueden conceder algunos puntos si se ha presentado por escrito el método empleado y este es correcto. Por lo tanto, se debe recomendar a los alumnos que muestren todos los procedimientos seguidos.

Prueba 1

Duración: 1 hora 30 minutos

Porcentaje del total de la evaluación: 40 %

- Esta prueba consta de una sección A con preguntas de respuesta corta y una sección B con preguntas de respuesta larga.
- No se permite a los alumnos utilizar ninguna calculadora en esta prueba.

Parte del programa de estudios que cubre la prueba

- Para esta prueba se requiere el conocimiento de **todos** los temas del programa de estudios. Sin embargo, esto no significa que todos los temas se vayan a evaluar en cada convocatoria de examen.

Puntuación

- Esta prueba se califica con un máximo de **80** puntos y representa el **40 %** de la nota final.
- Las preguntas de esta prueba varían en cuanto a su extensión y nivel de dificultad. Así pues, cada una de ellas no necesariamente se califica con la misma puntuación. La puntuación máxima de las preguntas se indica al principio de cada una de ellas.

Sección A

- Esta sección consta de preguntas obligatorias de respuesta corta relacionadas con la totalidad del programa de estudios. La puntuación máxima es de 40 puntos aproximadamente.
- La finalidad de esta sección es comprobar la amplitud de los conocimientos de los alumnos sobre el programa de estudios. No obstante, no se debe suponer que se vaya a dar la misma importancia a todos los temas.

Tipos de preguntas

- Para resolver cada pregunta será necesario un pequeño número de pasos.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de estos.

Sección B

- Esta sección consta de un pequeño número de preguntas obligatorias de respuesta larga relacionadas con la totalidad del programa de estudios. La puntuación máxima es de 40 puntos aproximadamente.
- Una misma pregunta puede implicar conocimientos de más de un tema.
- La finalidad de esta sección es comprobar la profundidad de los conocimientos de los alumnos sobre los temas del programa de estudios. Esta sección puede abarcar menos temas del programa de estudios que la sección A.

Tipos de preguntas

- Las preguntas requieren respuestas largas que implican razonamientos sólidos.
- Cada pregunta desarrolla una sola área temática.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de estos.
- En general, cada pregunta presenta una escala de dificultad que va de cuestiones relativamente fáciles al principio a otras relativamente difíciles al final. Se pone especial énfasis en los razonamientos sólidos.

Prueba 2

Duración: 1 hora 30 minutos

Porcentaje del total de la evaluación: 40 %

- Esta prueba consta de una sección A con preguntas de respuesta corta y una sección B con preguntas de respuesta larga.
- Para esta prueba se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no todas las preguntas requerirán necesariamente su uso.

Parte del programa de estudios que cubre la prueba

- Para esta prueba se requiere el conocimiento de **todos** los temas del programa de estudios. Sin embargo, esto no significa que todos los temas se vayan a evaluar en cada convocatoria de examen.

Puntuación

- Esta prueba se califica con un máximo de **80** puntos y representa el **40 %** de la nota final.
- Las preguntas de esta prueba varían en cuanto a su extensión y nivel de dificultad. Así pues, cada una de ellas no necesariamente se califica con la misma puntuación. La puntuación máxima de las preguntas se indica al principio de cada una de ellas.

Sección A

- Esta sección consta de preguntas obligatorias de respuesta corta relacionadas con la totalidad del programa de estudios. La puntuación máxima es de 40 puntos aproximadamente.
- La finalidad de esta sección es comprobar la amplitud de los conocimientos de los alumnos sobre el programa de estudios. No obstante, no se debe suponer que se vaya a dar la misma importancia a todos los temas.

Tipos de preguntas

- Para resolver cada pregunta será necesario un pequeño número de pasos.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de estos.

Sección B

- Esta sección consta de un pequeño número de preguntas obligatorias de respuesta larga relacionadas con la totalidad del programa de estudios. La puntuación máxima es de 40 puntos aproximadamente.
- Una misma pregunta puede implicar conocimientos de más de un tema.
- La finalidad de esta sección es comprobar la profundidad de los conocimientos de los alumnos sobre los temas del programa de estudios. Esta sección puede abarcar menos temas del programa de estudios que la sección A.

Tipos de preguntas

- Las preguntas requieren respuestas largas que implican razonamientos sólidos.
- Cada pregunta desarrolla una sola área temática.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de estos.
- En general, cada pregunta presenta una escala de dificultad que va de cuestiones relativamente fáciles al principio a otras relativamente difíciles al final. Se pone especial énfasis en los razonamientos sólidos.

Información general

Se utilizan esquemas de calificación para evaluar a los alumnos en todas las pruebas. Los esquemas de calificación son específicos para cada prueba de examen.

Descripción detallada de la evaluación externa: NS

Información general

Pruebas 1, 2 y 3

Estas pruebas son elaboradas y evaluadas externamente. En total, representan el 80 % de la nota final del curso. Están diseñadas para que los alumnos puedan demostrar lo que saben y son capaces de hacer.

Las pruebas 1 y 2 contendrán algunas preguntas, o apartados de algunas preguntas, que son comunes con el NM.

Calculadoras

Prueba 1

No se permite a los alumnos utilizar ninguna calculadora. En las preguntas principalmente se necesitará adoptar un enfoque analítico para llegar a las soluciones, en lugar de usar calculadoras de pantalla gráfica. La prueba no requerirá cálculos complicados que puedan llevar a cometer errores por descuido. No obstante, las preguntas implicarán realizar algunas operaciones aritméticas cuando estas sean esenciales para su desarrollo.

Prueba 2

Los alumnos deben disponer de una calculadora de pantalla gráfica en todo momento. No obstante, no todas las preguntas requerirán necesariamente el uso de calculadoras de pantalla gráfica. En el documento *Procedimientos de evaluación* del PD se proporciona información sobre los tipos de calculadoras de pantalla gráfica permitidos.

Prueba 3

Los alumnos deben disponer de una calculadora de pantalla gráfica en todo momento. No obstante, no todas las preguntas requerirán necesariamente el uso de calculadoras de pantalla gráfica. En el documento *Procedimientos de evaluación* del PD se proporciona información sobre los tipos de calculadoras de pantalla gráfica permitidos.

Cuadernillo de fórmulas

Es necesario que cada alumno disponga de un ejemplar sin anotaciones del cuadernillo de fórmulas durante el examen. El colegio será el encargado de descargarlo desde IBIS o el Centro de recursos para los programas, y asegurarse de contar con un número suficiente de copias disponibles para todos los alumnos.

Asignación de puntuaciones

Se conceden puntos por método, precisión, respuestas y razonamiento, lo cual incluye interpretación.

En las pruebas 1, 2 y 3, las respuestas correctas que no presenten por escrito el procedimiento seguido no siempre recibirán la puntuación máxima. Las respuestas se deben justificar mediante el procedimiento seguido o las explicaciones correspondientes (por ejemplo, en forma de diagramas, gráficos o cálculos). Aun cuando una respuesta sea incorrecta, se pueden conceder algunos puntos si se ha presentado por escrito el método empleado y este es correcto. Por lo tanto, se debe recomendar a los alumnos que muestren todos los procedimientos seguidos.

Prueba 1

Duración: 2 horas

Porcentaje del total de la evaluación: 30 %

- Esta prueba consta de una sección A con preguntas de respuesta corta y una sección B con preguntas de respuesta larga.
- No se permite a los alumnos utilizar ninguna calculadora en esta prueba.

Parte del programa de estudios que cubre la prueba

- Para esta prueba se requiere el conocimiento de **todos** los temas del programa de estudios. Sin embargo, esto no significa que todos los temas se vayan a evaluar en cada convocatoria de examen.

Puntuación

- Esta prueba se califica con un máximo de **110** puntos y representa el **30 %** de la nota final.
- Las preguntas de esta prueba varían en cuanto a su extensión y nivel de dificultad. Así pues, cada una de ellas no necesariamente se califica con la misma puntuación. La puntuación máxima de las preguntas se indica al principio de cada una de ellas.

Sección A

- Esta sección consta de preguntas obligatorias de respuesta corta relacionadas con la totalidad del programa de estudios. La puntuación máxima es de 55 puntos aproximadamente.
- La finalidad de esta sección es comprobar la amplitud de los conocimientos de los alumnos sobre el programa de estudios. No obstante, no se debe suponer que se vaya a dar la misma importancia a todos los temas.

Tipos de preguntas

- Para resolver cada pregunta será necesario un pequeño número de pasos.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de estos.

Sección B

Esta sección consta de un pequeño número de preguntas obligatorias de respuesta larga relacionadas con la totalidad del programa de estudios. La puntuación máxima es de 55 puntos aproximadamente.

Una misma pregunta puede implicar conocimientos de más de un tema.

La finalidad de esta sección es comprobar la profundidad de los conocimientos de los alumnos sobre los temas del programa de estudios. Esta sección puede abarcar menos temas del programa de estudios que la sección A.

Tipos de preguntas

- Las preguntas requieren respuestas largas.
- Cada pregunta desarrolla una sola área temática.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de estos.
- En general, cada pregunta presenta una escala de dificultad que va de cuestiones relativamente fáciles al principio a otras relativamente difíciles al final. Se pone especial énfasis en los razonamientos sólidos.

Prueba 2

Duración: 2 horas

Porcentaje del total de la evaluación: 30 %

- Esta prueba consta de una sección A con preguntas de respuesta corta y una sección B con preguntas de respuesta larga.
- Para esta prueba se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no todas las preguntas requerirán necesariamente su uso.

Parte del programa de estudios que cubre la prueba

- Para esta prueba se requiere el conocimiento de **todos** los temas del programa de estudios. Sin embargo, esto no significa que todos los temas se vayan a evaluar en cada convocatoria de examen.

Puntuación

- Esta prueba se califica con un máximo de **110** puntos y representa el **30 %** de la nota final.
- Las preguntas de esta prueba varían en cuanto a su extensión y nivel de dificultad. Así pues, cada una de ellas no necesariamente se califica con la misma puntuación. La puntuación máxima de las preguntas se indica al principio de cada una de ellas.

Sección A

- Esta sección consta de preguntas obligatorias de respuesta corta relacionadas con la totalidad del programa de estudios. La puntuación máxima es de 55 puntos aproximadamente.
- La finalidad de esta sección es comprobar la amplitud de los conocimientos de los alumnos sobre el programa de estudios. No obstante, no se debe suponer que se vaya a dar la misma importancia a todos los temas.

Tipos de preguntas

- Para resolver cada pregunta será necesario un pequeño número de pasos.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de estos.

Sección B

- Esta sección consta de un pequeño número de preguntas obligatorias de respuesta larga relacionadas con la totalidad del programa de estudios. La puntuación máxima es de 55 puntos aproximadamente.
- Una misma pregunta puede implicar conocimientos de más de un tema.
- La finalidad de esta sección es comprobar la profundidad de los conocimientos de los alumnos sobre los temas del programa de estudios. Esta sección puede abarcar menos temas del programa de estudios que la sección A.

Tipos de preguntas

- Las preguntas requieren respuestas largas.
- Cada pregunta desarrolla una sola área temática.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de estos.
- En general, cada pregunta presenta una escala de dificultad que va de cuestiones relativamente fáciles al principio a otras relativamente difíciles al final. Se pone especial énfasis en los razonamientos sólidos.

Prueba 3

Duración: 1 hora

Porcentaje del total de la evaluación: 20 %

- Esta prueba consta de dos preguntas obligatorias de respuesta larga que requieren la resolución de problemas.
- Para esta prueba se necesita una calculadora de pantalla gráfica, pero no todos los apartados de las preguntas requerirán necesariamente su uso.

Parte del programa de estudios que cubre la prueba

- Siempre que sea posible, el primer apartado de cada pregunta se referirá a los contenidos del programa de estudios que se relacionen con el contexto en el que se tiene que resolver el problema. Por lo tanto, para esta prueba se requiere el conocimiento de todos los temas del programa de estudios.

Puntuación

- Esta prueba se califica con un máximo de **55** puntos y representa el **20 %** de la nota final.

- Las preguntas de esta prueba pueden variar en cuanto a su extensión y nivel de dificultad. Así pues, es posible que se les asigne una distribución de puntos diferente. La puntuación máxima de las preguntas se indica al principio de cada una de ellas.

Tipos de preguntas

- Las preguntas requieren respuestas largas que implican razonamientos sólidos.
- Cada pregunta puede desarrollarse a partir de una única unidad temática, poniendo especial énfasis en la resolución de problemas para culminar en una generalización o en la interpretación de un contexto.
- Las preguntas pueden formularse mediante palabras, símbolos, tablas, diagramas o una combinación de estos.
- En general, cada pregunta presenta una escala de dificultad que va de cuestiones relativamente fáciles al principio a otras relativamente difíciles al final. Se pone especial énfasis en la resolución de problemas.

Evaluación interna

Propósito de la evaluación interna

La evaluación interna es una parte fundamental del curso y es obligatoria tanto en el NM como en el NS. Permite a los alumnos demostrar la aplicación de sus habilidades y conocimientos, y dedicarse a aquellas áreas que despierten su interés sin limitación de tiempo ni otro tipo de restricciones asociadas a los exámenes escritos. La evaluación interna debe, en la medida de lo posible, integrarse en la enseñanza normal de clase, y no ser una actividad aparte que tiene lugar una vez que se han impartido todos los contenidos del curso.

La evaluación interna en el NM y el NS es una exploración individual. Consiste en un trabajo escrito de investigación en un área de las matemáticas y se corrige de acuerdo con cinco criterios de evaluación.

Orientación y autoría original

La exploración presentada para la evaluación interna debe ser trabajo original del alumno. Sin embargo, no se pretende que los alumnos decidan el título o el tema y que se les deje trabajar en el componente de evaluación interna sin ningún tipo de ayuda por parte del profesor. El profesor debe desempeñar un papel importante en las etapas de planificación y desarrollo de la exploración.

Es responsabilidad del profesor asegurarse de que los alumnos estén familiarizados con:

- Los requisitos del tipo de trabajo que se va a evaluar internamente.
- La política de probidad académica del IB, disponible en el Centro de recursos para los programas.
- Los criterios de evaluación; los alumnos deben entender que el trabajo que presenten para evaluación ha de abordar estos criterios eficazmente.

Los profesores y los alumnos deben discutir la exploración. Se debe animar a los alumnos a dirigirse al profesor en busca de consejos e información, y no se les debe penalizar por solicitar orientación. Como parte del proceso de aprendizaje, los profesores deben leer un borrador del trabajo y asesorar a los alumnos al respecto. El profesor debe aconsejar al alumno de manera oral o escrita sobre cómo mejorar su trabajo, pero no debe modificar el borrador. La siguiente versión que llegue a manos del profesor debe ser la versión definitiva lista para entregar.

Los profesores tienen la responsabilidad de asegurarse de que todos los alumnos entiendan el significado y la importancia de los conceptos relacionados con la probidad académica, especialmente los de autoría original y propiedad intelectual. Los profesores deben verificar que todos los trabajos que los alumnos entreguen para evaluación hayan sido preparados conforme a los requisitos y explicar claramente a los alumnos que el trabajo que se evalúe internamente debe ser original en su totalidad.

Los profesores deben verificar la autoría original de todo trabajo que se envíe al IB para su moderación o evaluación y no deben enviar ningún trabajo que constituya (o sospechen que constituye) un caso de conducta improcedente. Cada alumno debe confirmar que el trabajo que presenta para la evaluación es original y que es la versión final. Una vez que el alumno ha entregado oficialmente la versión final de su trabajo, no puede pedir que se lo devuelvan para modificarlo. El requisito de confirmar la originalidad del trabajo se aplica al trabajo de todos los alumnos, no solo de aquellos que formen parte de la muestra que se enviará al IB para moderación. Para más información, consulte las siguientes publicaciones del IB: *La probidad académica en el contexto educativo del IB*, *El Programa del Diploma: de los principios a la práctica* y los artículos pertinentes del *Reglamento general del Programa del Diploma*.

La autoría de los trabajos se puede comprobar debatiendo su contenido con el alumno y analizando con detalle uno o más de los aspectos siguientes:

- La propuesta inicial del alumno
- El primer borrador del trabajo escrito
- Las referencias bibliográficas citadas
- El estilo de redacción, comparado con trabajos que se sabe que ha realizado el alumno
- El análisis del trabajo con un servicio en línea de detección de plagio como, por ejemplo, www.turnitin.com

No se permite presentar un mismo trabajo para la evaluación interna y la Monografía.

Colaboración y trabajo en equipo

La colaboración y el trabajo en equipo son elementos clave en los que se centran los enfoques de la enseñanza en el PD. Se recomienda a los profesores que utilicen el tiempo de clase disponible para gestionar la colaboración entre los alumnos. Mientras trabajan en la exploración, se debe animar a los alumnos a colaborar con sus compañeros en las distintas etapas del proceso para, por ejemplo:

- Generar ideas
- Elegir el tema de la exploración
- Compartir fuentes de investigación
- Adquirir los conocimientos y las habilidades necesarios
- Obtener comentarios de sus compañeros sobre su trabajo escrito

El sitio web de los enfoques de la enseñanza y el aprendizaje, disponible en el Centro de recursos para los programas, es un recurso excelente para desarrollar las habilidades de colaboración de los alumnos.

Si bien se debe animar a los alumnos a discutir sus ideas con sus compañeros, no es apropiado que trabajen juntos en una misma exploración. Es importante que los alumnos demuestren cómo han incorporado en su trabajo las fuentes consultadas y las ideas discutidas con otros, y que muestren siempre sus conocimientos y su compromiso con el trabajo de la manera que se describe en los criterios de evaluación. Se califica el desarrollo de la exploración por parte del alumno y su contribución a esta, no el trabajo procedente de otras fuentes o realizado por otras personas, ya sea individualmente o en colaboración.

Es imprescindible que los alumnos entiendan que la redacción y los cálculos que presenten en su exploración deben ser siempre su propio trabajo. Esto significa que los razonamientos que hagan y las ideas en las que se basen esos razonamientos deben ser suyos propios; de lo contrario, deben citar la fuente de dichas ideas. Todas las fuentes utilizadas deben citarse debidamente, lo cual incluye imágenes, diagramas, gráficos, fórmulas, etc.

En los casos específicos en los que se necesite recabar información, datos o mediciones, es imprescindible que cada alumno obtenga sus propios datos aun cuando procedan de un experimento en grupo. Los datos o las mediciones en grupo se pueden combinar para que haya suficiente información como para realizar un análisis individual. En este caso, cada alumno deberá describir claramente qué datos son los suyos en el informe escrito de la exploración.

Distribución del tiempo

La evaluación interna es una parte fundamental de los cursos de Matemáticas y representa un 20 % de la evaluación final en el NM y el NS. Este porcentaje debe verse reflejado en el tiempo que se dedica a enseñar los conocimientos y las habilidades necesarios para llevar a cabo el trabajo de evaluación interna, así como en el tiempo total dedicado a realizar el trabajo.

Se recomienda asignar un total de aproximadamente 10-15 horas lectivas para el trabajo de evaluación interna. En estas horas se deberá incluir:

- El tiempo que necesita el profesor para explicar a los alumnos los requisitos de la exploración
- El tiempo de clase para que los alumnos trabajen en la exploración y planteen preguntas
- El tiempo para consultas entre el profesor y cada alumno

- El tiempo para revisar el trabajo y evaluar cómo progresa, y para comprobar que es original

Requisitos y recomendaciones

Los alumnos pueden elegir entre una amplia variedad de actividades, como la modelización, las investigaciones y las aplicaciones de las matemáticas. Para ayudar a profesores y alumnos en la elección del tema, en el material de ayuda al profesor hay disponible una lista de sugerencias. Sin embargo, los alumnos no están obligados a elegir una opción de esta lista.

La exploración debe tener una extensión aproximada de entre 12 y 20 páginas con interlineado doble, incluidos los diagramas y los gráficos, pero sin contar la bibliografía. No obstante, lo importante es la calidad del trabajo matemático y no la extensión.

El profesor ha de ofrecer una orientación adecuada en cada una de las etapas de la exploración como, por ejemplo, dirigir a los alumnos hacia líneas de indagación más fructíferas, hacer sugerencias sobre fuentes de información apropiadas, y dar consejos sobre el contenido y la claridad de la exploración en su fase de redacción.

Los profesores deben advertir a los alumnos sobre la existencia de errores, pero sin corregirlos de manera explícita. Es necesario insistir en que los alumnos deben consultar con el profesor a lo largo de todo el proceso.

Todos los alumnos han de estar familiarizados con los requisitos y con los criterios de evaluación de la exploración. Los alumnos han de comenzar a planificar sus exploraciones lo más pronto posible una vez comenzado el curso. Los plazos de entrega se deben establecer y cumplir de modo estricto. Debe fijarse una fecha para la entrega del tema de la exploración y una breve descripción de él, otra para la entrega del primer borrador y, por supuesto, la fecha para la finalización de la exploración.

Para desarrollar las exploraciones, los alumnos deben tratar de hacer uso de los conocimientos matemáticos adquiridos durante el curso. El nivel de complejidad debe ser acorde con el del curso, es decir, debe ser similar al establecido en el programa de estudios. No se espera que los alumnos elaboren un trabajo sobre temas no incluidos en el programa de estudios (no obstante, ello no será objeto de sanción).

Las pautas éticas deben cumplirse a lo largo de la planificación y la realización de la exploración. Para obtener más información, véase el póster *Conducta ética en el Programa del Diploma* disponible en el Centro de recursos para los programas.

Presentación

En la portada de la exploración, se debe indicar la siguiente información:

- El título de la exploración
- El número de páginas

Las referencias bibliográficas no se evalúan, pero, si no se incluyen en el informe final, es posible que se cuestione la exploración por razones de probidad académica.

Uso de los criterios de evaluación en la evaluación interna

Para la evaluación interna, se ha establecido una serie de criterios de evaluación. Cada criterio de evaluación cuenta con descriptores que describen un nivel de logro específico y equivalen a un determinado rango de puntos. Los descriptores se centran en aspectos positivos aunque, en los niveles más bajos, la descripción puede mencionar la falta de logros.

Los profesores deben valorar los trabajos de evaluación interna del NM y del NS utilizando los descriptores de nivel de los criterios.

Se utilizan los mismos criterios A, B, C y D para el NM y el NS. El criterio E (uso de las matemáticas) es diferente para el NM y el NS.

El propósito es encontrar, para cada criterio, el descriptor que exprese de la forma más adecuada el nivel de logro alcanzado por el alumno. Esto implica que, cuando un trabajo demuestre niveles de logro distintos para los diferentes aspectos de un criterio, será necesario compensar dichos niveles. La puntuación asignada debe ser aquella que refleje más justamente el logro general de los aspectos del criterio. No es necesario cumplir todos los aspectos de un descriptor de nivel para obtener dicha puntuación.

Al evaluar el trabajo de un alumno, los profesores deben leer los descriptores de cada criterio hasta llegar al descriptor que describa de manera más apropiada el nivel del trabajo que se está evaluando. Si un trabajo parece estar entre dos descriptores, se deben leer de nuevo ambos descriptores y elegir el que mejor describa el trabajo del alumno.

En los casos en que un descriptor de nivel comprenda dos o más puntuaciones, los profesores deben conceder las puntuaciones más altas si el trabajo del alumno demuestra en gran medida las cualidades descritas; el trabajo puede estar cerca de alcanzar las puntuaciones del descriptor de nivel superior. Los profesores deben conceder las puntuaciones más bajas si el trabajo del alumno demuestra en menor medida las cualidades descritas; el trabajo puede estar cerca de alcanzar las puntuaciones del descriptor de nivel inferior.

Solamente deben utilizarse números enteros y no notas parciales, como fracciones o decimales.

Los profesores no deben pensar en términos de aprobado o no aprobado, sino que deben concentrarse en identificar el descriptor apropiado para cada criterio de evaluación.

Los descriptores de nivel más altos no implican un trabajo perfecto: están al alcance de los alumnos. Los profesores no deben dudar en conceder los niveles extremos si corresponden a descriptores apropiados del trabajo que se está evaluando.

Un alumno que alcance un nivel de logro alto en un criterio no necesariamente alcanzará niveles altos en los demás criterios. Igualmente, un alumno que alcance un nivel de logro bajo en un criterio no necesariamente alcanzará niveles bajos en los demás criterios. Los profesores no deben suponer que la evaluación general de los alumnos debe dar como resultado una distribución determinada de puntuaciones.

Se recomienda que los alumnos tengan acceso a los criterios de evaluación.

Descripción detallada de la evaluación interna

Exploración matemática

Duración: 10 a 15 horas

Porcentaje del total de la evaluación: 20 %

Introducción

El componente de evaluación interna en este curso es una exploración matemática. Consiste en un breve informe escrito por el alumno, basado en un tema elegido por este, y que debe centrarse en las matemáticas de esa área determinada. Se hace hincapié en la comunicación matemática (incluidos diagramas, fórmulas, gráficos, tablas, etc.) con el enfoque propio del alumno, y el profesor debe proporcionar comentarios sobre el trabajo a través de, por ejemplo, debates y entrevistas. De este modo, los alumnos pueden desarrollar un área de su interés sin las limitaciones de tiempo de los exámenes y experimentar una sensación de éxito.

El informe final debe tener una extensión aproximada de entre 12 y 20 páginas, con interlineado doble. Puede estar escrito a mano o con procesador de textos. Los alumnos han de ser capaces de explicar todas las etapas de su trabajo de manera que demuestren una comprensión clara. Aunque no se pretende que los alumnos hagan una presentación de su trabajo en clase, este ha de estar escrito de modo que sus compañeros puedan seguirlo con relativa facilidad. El informe debe incluir una bibliografía detallada y es necesario que se incluyan referencias a las fuentes según la política de probidad académica del IB. Las citas textuales deben mencionar la fuente.

Propósito de la exploración

Los objetivos generales de Matemáticas: Análisis y Enfoques y de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación, tanto en el NM como en el NS, se logran a través de los objetivos de evaluación que se evalúan formalmente como parte del curso, sea en los exámenes escritos, en la exploración, o en ambos. Se pretende que la exploración, además de evaluar los objetivos de evaluación del curso, proporcione a los alumnos oportunidades para aumentar su comprensión de los conceptos y procesos matemáticos, y para desarrollar una noción más amplia de las matemáticas. Esto se recoge en los objetivos generales del curso. Se espera que, realizando la exploración, los alumnos saquen provecho de las actividades matemáticas llevadas a cabo, y que estas les resulten motivadoras y gratificantes. Ello les permitirá desarrollar los atributos del perfil de la comunidad de aprendizaje del IB.

Con la exploración se pretende:

- Que los alumnos desarrollen una perspectiva propia acerca de la naturaleza de las matemáticas, así como la capacidad para plantearse sus propias preguntas sobre la disciplina
- Proporcionar a los alumnos oportunidades para realizar un trabajo matemático durante un período de tiempo prolongado
- Que los alumnos puedan experimentar la satisfacción de aplicar procesos matemáticos de forma independiente
- Proporcionar a los alumnos la oportunidad de experimentar la belleza, las posibilidades y la utilidad de las matemáticas
- Motivar a los alumnos, cuando proceda, a descubrir, utilizar y apreciar el poder de la tecnología como herramienta matemática
- Que los alumnos sean capaces de desarrollar cualidades tales como la paciencia y la perseverancia, así como de reflexionar sobre el significado de los resultados que obtienen
- Proporcionar a los alumnos oportunidades para exponer con confianza el alcance de su evolución en matemáticas

Organización y desarrollo de la exploración

El trabajo relacionado con la exploración debe realizarse como parte del curso, de modo que los alumnos tengan la oportunidad de adquirir las habilidades necesarias. El tiempo de clase dedicado a la exploración puede, por tanto, utilizarse para realizar discusiones generales sobre temas de estudio, así como para que los alumnos se familiaricen con los criterios. En el material de ayuda al profesor se incluye más información sobre el desarrollo de la exploración.

Criterios de evaluación interna: NM y NS

La exploración es evaluada internamente por el profesor y moderada externamente por el IB utilizando criterios de evaluación que están relacionados con los objetivos de evaluación de la asignatura.

La exploración se evalúa de acuerdo con los cinco criterios siguientes. La nota final de la exploración es la suma de los puntos obtenidos en cada criterio. La nota final máxima es 20.

Los alumnos que no presenten una exploración no recibirán una calificación final para el curso de Matemáticas.

Criterio A	Presentación
Criterio B	Comunicación matemática
Criterio C	Compromiso personal
Criterio D	Reflexión
Criterio E	Uso de las matemáticas

Criterio A: presentación

Nivel de logro	Descriptor
0	La exploración no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación.
1	La exploración tiene cierta coherencia o cierta organización.
2	La exploración tiene cierta coherencia y muestra cierta organización.
3	La exploración es coherente y está bien organizada.
4	La exploración es coherente, está bien organizada y es concisa.

El criterio sobre presentación evalúa la organización y la coherencia de la exploración.

Una exploración **coherente** está desarrollada de modo lógico, es fácil de seguir y cumple su objetivo. La coherencia hace referencia a la estructura o el marco general de la exploración, que incluye la introducción, el cuerpo principal y la conclusión, y a lo bien enlazadas que están las distintas partes.

Una exploración **bien organizada** consta de una introducción, una descripción del objetivo general de la exploración y una conclusión. Se deben incluir los gráficos, las tablas y los diagramas pertinentes donde corresponda en el trabajo y no adjuntarlos como anexos al final del documento. Los anexos deben utilizarse para incluir información sobre grandes conjuntos de datos, así como gráficos, tablas y diagramas adicionales.

Una exploración **concisa** no contiene descripciones, gráficos o cálculos repetitivos que sean irrelevantes o innecesarios.

El uso de medios tecnológicos no es obligatorio, pero sí recomendable en aquellos casos en los que resulte apropiado. No obstante, el empleo de enfoques analíticos (en lugar de enfoques tecnológicos) no implica necesariamente una falta de concisión y no debe penalizarse. Esto no significa que se tengan que aceptar los cálculos repetitivos.

Criterio B: comunicación matemática

Nivel de logro	Descriptor
0	La exploración no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación.
1	La exploración contiene cierta comunicación matemática pertinente y, en parte, adecuada.
2	La exploración contiene cierta comunicación matemática pertinente y adecuada.
3	La comunicación matemática es pertinente, adecuada y, en su mayor parte, coherente.
4	La comunicación matemática es pertinente, adecuada y coherente en su totalidad.

El criterio sobre comunicación matemática evalúa en qué medida el alumno:

- Ha utilizado el lenguaje matemático apropiado (por ejemplo, **notación, símbolos y terminología**). El uso de notación de calculadora o de computadora solo es aceptable si la ha generado un programa informático. Se espera que los alumnos utilicen la notación matemática adecuada en su trabajo.
- Ha definido los **términos clave** y las variables, cuando sea necesario.
- Ha utilizado **múltiples formas de representación matemática**, tales como fórmulas, diagramas, tablas, gráficos y modelos, donde resulte apropiado.
- Ha empleado un **método deductivo** y ha expuesto sus demostraciones de manera lógica, donde resulte apropiado.

En el nivel 1, por ejemplo, las exploraciones pueden incluir gráficos que no se hayan rotulado o el uso sistemático de notación de computadora, pero ninguna otra forma de comunicación matemática correcta.

Se puede alcanzar el nivel 4 aunque se haya utilizado únicamente una forma de representación matemática, siempre y cuando esta resulte adecuada para el tema que se está explorando. En el nivel 4, no se deben penalizar los errores *menores* que no impidan una comunicación clara.

Criterio C: compromiso personal

Nivel de logro	Descriptor
0	La exploración no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación.
1	Hay indicios de cierto compromiso personal.
2	Hay indicios de un importante compromiso personal.
3	Hay indicios de un excelente compromiso personal.

El criterio sobre compromiso personal evalúa la medida en que el alumno se compromete con el tema, explorando las matemáticas y haciéndolo propio. No mide el esfuerzo del alumno.

El compromiso personal se puede reconocer de distintas maneras, como puede ser el pensamiento independiente o creativo, la presentación de ideas matemáticas a su manera, la exploración del tema desde diferentes perspectivas, o la realización y comprobación de predicciones. El material de ayuda al profesor brinda más ejemplos de compromiso personal (aunque no son los únicos) que se corresponden con los distintos niveles de logro.

El trabajo del alumno tiene que demostrar que ha habido compromiso personal. No basta con que el profesor comente que el alumno ha mostrado un gran compromiso.

Es poco probable que alcancen niveles altos aquellas exploraciones que parezcan de libro de texto o que reproduzcan matemáticas que se pueden encontrar fácilmente, sin que el alumno aporte su propia perspectiva.

Importante: El alumno demuestra un verdadero compromiso personal en algunas partes de la exploración, y es evidente que estas impulsan la exploración y ayudan al lector a entender mejor las intenciones del alumno.

Excelente: El alumno demuestra un verdadero compromiso personal en numerosas partes de la exploración. Estas están bien desarrolladas y es evidente que impulsan la exploración de manera creativa. Da la impresión de que el alumno, con su propio enfoque, ha desarrollado una comprensión completa del contexto del tema de la exploración y el lector entiende mejor sus intenciones.

Criterio D: reflexión

Nivel de logro	Descriptor
0	La exploración no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación.
1	Hay indicios de una reflexión limitada.
2	Hay indicios de una reflexión significativa.
3	Hay indicios contundentes de una reflexión crítica.

El criterio sobre reflexión evalúa en qué medida el alumno revisa, analiza y evalúa la exploración. Aunque la reflexión se puede ver en las conclusiones de la exploración, también se puede encontrar a lo largo del trabajo.

Describir simplemente los resultados constituye una **reflexión limitada.** Para alcanzar niveles de logro más altos es necesario un análisis más profundo.

Entre las posibles formas de demostrar que ha habido una **reflexión significativa** están: hacer referencia a los objetivos de la exploración, comentar qué es lo que se ha aprendido, considerar alguna limitación o comparar distintos enfoques matemáticos.

Una **reflexión crítica** es una reflexión crucial, decisiva o sumamente perspicaz que, a menudo, desarrollará la exploración al considerar los resultados matemáticos y su efecto en la comprensión que el alumno tiene del tema. Entre las posibles formas de demostrar que ha habido una reflexión crítica están: plantearse lo que podría hacerse a continuación, discutir qué implicaciones tienen los resultados, discutir los puntos fuertes y débiles de cada enfoque, y considerar diferentes perspectivas.

Indicios contundentes quiere decir que la reflexión crítica está presente a lo largo de toda la exploración. Si solo se aprecia al final de la exploración, deberá ser de muy buena calidad y demostrar cómo ha desarrollado la exploración para que el alumno pueda lograr un nivel 3.

El material de ayuda al profesor brinda más ejemplos de reflexión (aunque no son los únicos) que se corresponden con los distintos niveles de logro.

Criterio E: uso de las matemáticas (NM)

Nivel de logro	Descriptor
0	La exploración no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación.
1	Se utilizan unas matemáticas algo pertinentes.
2	Se utilizan unas matemáticas algo pertinentes. Se demuestra una comprensión limitada.
3	Se utilizan unas matemáticas pertinentes y acordes con el nivel del curso. Se demuestra una comprensión limitada.
4	Se utilizan unas matemáticas pertinentes y acordes con el nivel del curso. Los aspectos matemáticos explorados son parcialmente correctos. Se demuestran cierto conocimiento y cierta comprensión.
5	Se utilizan unas matemáticas pertinentes y acordes con el nivel del curso. Los aspectos matemáticos explorados son, en su mayor parte, correctos. Se demuestran un conocimiento y una comprensión buenos.
6	Se utilizan unas matemáticas pertinentes y acordes con el nivel del curso. Los aspectos matemáticos explorados son correctos. Se demuestran un conocimiento y una comprensión sólidos.

El criterio sobre el uso de las matemáticas del NM evalúa en qué medida los alumnos utilizan matemáticas pertinentes en la exploración.

Se consideran **pertinentes** las matemáticas que permiten desarrollar la exploración de manera que esta pueda lograr su objetivo. El uso de matemáticas excesivamente complicadas, cuando habrían bastado otras más sencillas, no es pertinente.

Se espera de los alumnos que elaboren un trabajo que sea **acorde con el nivel** del curso, lo cual significa que no debe estar basado únicamente en los temas de matemáticas incluidos en los conocimientos previos. Los aspectos matemáticos explorados deben ser parte del programa de estudios, o bien de un nivel similar.

Una palabra clave en los descriptores es **"demostrar".** Este término de instrucción se define como "aclarar mediante razonamientos o datos, ilustrando con ejemplos o aplicaciones prácticas". Obtener la respuesta correcta no es suficiente para demostrar comprensión (ni siquiera cierta comprensión) y poder lograr un nivel 2 o superior en este criterio.

Para que el conocimiento y la comprensión puedan considerarse **sólidos,** deben demostrarse a lo largo de todo el trabajo.

Las matemáticas se pueden considerar que son **correctas** incluso si existen errores esporádicos y de poca importancia, siempre y cuando no desvirtúen el razonamiento matemático ni lleven a resultados poco razonables.

Se anima a los alumnos a que utilicen medios tecnológicos para obtener resultados cuando resulte apropiado, pero **deben demostrar comprensión** para poder obtener un nivel superior a 1; por ejemplo, la mera sustitución de valores en una fórmula no necesariamente demuestra una comprensión de los resultados.

Basta con utilizar las matemáticas necesarias para desarrollar la exploración: pueden ser simplemente unos pocos elementos breves de matemáticas o incluso un único tema (o subtema) del programa de estudios. Es mejor hacer pocas cosas, pero hacerlas bien, que hacer muchas cosas no tan bien. Si las matemáticas utilizadas resultan pertinentes para el tema que se está explorando, son acordes con el nivel del curso y el alumno las ha comprendido bien, se puede otorgar un nivel de logro alto en este criterio.

Criterio E: uso de las matemáticas (NS)

Nivel de logro	Descriptor
0	La exploración no alcanza ninguno de los niveles especificados por los descriptores que figuran a continuación.
1	Se utilizan unas matemáticas algo pertinentes. Se demuestra una comprensión limitada.
2	Se utilizan unas matemáticas algo pertinentes. Los aspectos matemáticos explorados son parcialmente correctos. Se demuestran cierto conocimiento y cierta comprensión.
3	Se utilizan unas matemáticas pertinentes y acordes con el nivel del curso. Los aspectos matemáticos explorados son correctos. Se demuestran cierto conocimiento y cierta comprensión.
4	Se utilizan unas matemáticas pertinentes y acordes con el nivel del curso. Los aspectos matemáticos explorados son correctos. Se demuestran un conocimiento y una comprensión buenos.
5	Se utilizan unas matemáticas pertinentes y acordes con el nivel del curso. Los aspectos matemáticos explorados son correctos y demuestran complejidad o rigor. Se demuestran un conocimiento y una comprensión sólidos.
6	Se utilizan unas matemáticas pertinentes y acordes con el nivel del curso. Los aspectos matemáticos explorados demuestran precisión, complejidad y rigor. Se demuestran un conocimiento y una comprensión sólidos.

El criterio sobre el uso de las matemáticas del NS evalúa en qué medida los alumnos utilizan matemáticas pertinentes en la exploración.

Se espera de los alumnos que elaboren un trabajo que sea **acorde con el nivel** del curso, lo cual significa que no debe estar basado únicamente en los temas de matemáticas incluidos en los conocimientos previos. Los aspectos matemáticos explorados deben ser parte del programa de estudios, o bien de un nivel similar o un poco superior. Sin embargo, **no** es necesario que sean de un nivel superior al del programa de estudios para obtener los niveles más altos en este criterio.

Una palabra clave en los descriptores es **"demostrar".** Este término de instrucción se define como "aclarar mediante razonamientos o datos, ilustrando con ejemplos o aplicaciones prácticas". Obtener la respuesta correcta no es suficiente para demostrar comprensión (ni siquiera cierta comprensión) y poder lograr un nivel 2 o superior en este criterio.

Para que el conocimiento y la comprensión puedan considerarse **sólidos,** deben demostrarse a lo largo de todo el trabajo. Los pasos seguidos en el desarrollo matemático de la exploración se deben justificar con razonamientos.

Se consideran **pertinentes** las matemáticas que permiten desarrollar la exploración de manera que esta pueda lograr su objetivo. El uso de matemáticas excesivamente complicadas, cuando habrían bastado otras más sencillas, no es pertinente.

Las matemáticas se pueden considerar que son **correctas** incluso si existen errores esporádicos y de poca importancia, siempre y cuando no desvirtúen el razonamiento matemático ni lleven a resultados poco razonables. La **precisión** matemática implica la ausencia de errores y un nivel de aproximación adecuado en todo momento.

Complejidad: Para que se consideren complejas, las matemáticas utilizadas deben ser acordes con el programa de estudios del NS o, si forman parte del programa de estudios del NM, deben usarse con una complejidad que supere lo que cabría esperar razonablemente de un alumno del NM. La complejidad en matemáticas puede incluir la comprensión y el uso de conceptos matemáticos de mayor dificultad, afrontar un problema desde perspectivas distintas y percibir estructuras subyacentes que vinculen áreas distintas de las matemáticas.

El **rigor** implica claridad de lógica y lenguaje al hacer razonamientos y cálculos matemáticos. Las afirmaciones matemáticas que sean pertinentes para el desarrollo de la exploración deben justificarse o probarse.

Se anima a los alumnos a que utilicen medios tecnológicos para obtener resultados cuando resulte apropiado, pero **deben demostrar comprensión** para poder llegar, como mínimo, al nivel 1; por ejemplo, la mera sustitución de valores en una fórmula no necesariamente demuestra una comprensión de los resultados.

Basta con utilizar las matemáticas necesarias para desarrollar la exploración: pueden ser simplemente unos pocos elementos breves de matemáticas o incluso un único tema (o subtema) del programa de estudios. Es mejor hacer pocas cosas, pero hacerlas bien, que hacer muchas cosas no tan bien. Si las matemáticas utilizadas resultan pertinentes para el tema que se está explorando, son acordes con el nivel del curso y el alumno las ha comprendido bien, se puede otorgar un nivel de logro alto en este criterio.

Glosario de términos de instrucción

Términos de instrucción para Matemáticas: Análisis y Enfoques

Los alumnos deberán familiarizarse con los siguientes términos y expresiones utilizados en las preguntas de examen. Los términos se deberán interpretar tal y como se describe a continuación. Aunque estos términos se usarán frecuentemente en las preguntas de examen, también podrán usarse otros términos con el fin de guiar a los alumnos para que presenten un argumento de una manera específica.

Término de instrucción	Definición
A partir de lo anterior	Utilizar los resultados obtenidos anteriormente para responder a la pregunta.
A partir de lo anterior o de cualquier otro modo	La expresión sugiere que se utilicen los resultados obtenidos anteriormente, pero también pueden considerarse válidos otros métodos.
Calcular	Obtener una respuesta numérica y mostrar las operaciones pertinentes.
Comentar	Emitir un juicio basado en un enunciado determinado o en el resultado de un cálculo.
Comparar	Exponer las semejanzas entre dos (o más) elementos o situaciones refiriéndose constantemente a ambos (o a todos).
Comparar y contrastar	Exponer las semejanzas y diferencias entre dos (o más) elementos o situaciones refiriéndose constantemente a ambos (o a todos).
Contrastar	Exponer las diferencias entre dos (o más) elementos o situaciones refiriéndose constantemente a ambos (o a todos).
Deducir	Establecer una conclusión a partir de la información suministrada.
Demostrar	Aclarar mediante razonamientos o datos, ilustrando con ejemplos o aplicaciones prácticas.
Derivar	Obtener la derivada de una función.
Describir	Exponer detalladamente.
Determinar	Obtener la única respuesta posible.
Dibujar aproximadamente	Representar por medio de un diagrama o gráfico (rotulados si fuese necesario). Estos deberán dar una idea general de la figura o relación que se pide y deberá incluir las características pertinentes.
Dibujar con precisión	Representar a lápiz por medio de un diagrama o un gráfico precisos y rotulados. Se debe utilizar una regla para las líneas rectas. Los diagramas se deben dibujar a escala. En los gráficos, cuando el caso lo requiera, los puntos deben aparecer correctamente marcados y unidos, bien por una línea recta o por una curva suave.
Distinguir	Indicar de forma clara las diferencias entre dos o más conceptos o elementos.
Elaborar	Mostrar información de forma lógica o con un gráfico.

Término de instrucción	Definición
Enumerar	Proporcionar una lista de respuestas cortas sin ningún tipo de explicación.
Escribir	Obtener la respuesta (o respuestas), por lo general, a partir de la información que se puede extraer. Se requieren pocos cálculos o ninguno, y no es necesario mostrar los pasos que se han seguido.
Estimar	Obtener un valor aproximado.
Explicar	Exponer detalladamente las razones o causas de algo.
Hallar	Obtener una respuesta mostrando los pasos pertinentes.
Identificar	Dar una respuesta entre un número de posibilidades.
Indicar	Especificar un nombre, un valor o cualquier otro tipo de respuesta corta sin aportar explicaciones ni cálculos.
Integrar	Obtener la integral de una función.
Interpretar	Utilizar los conocimientos y la comprensión para reconocer tendencias y extraer conclusiones a partir de información determinada.
Investigar	Observar, estudiar o realizar un examen detallado y sistemático para probar hechos y llegar a nuevas conclusiones.
Justificar	Proporcionar razones o pruebas válidas que respalden una respuesta o conclusión.
Mostrar	Indicar los pasos realizados en un cálculo o deducción.
Mostrar que	Obtener el resultado requerido (posiblemente, utilizando la información dada) sin necesidad de una prueba. En este tipo de preguntas, por lo general, no es necesario el uso de la calculadora.
Predecir	Dar un resultado esperado.
Probar	Utilizar una secuencia de pasos lógicos para obtener el resultado requerido de un modo formal.
Resolver	Obtener la respuesta por medio de métodos algebraicos, numéricos o gráficos.
Rotular	Añadir rótulos o encabezamientos a un diagrama.
Situar	Marcar la posición de puntos en un diagrama.
Sugerir	Proponer una solución, una hipótesis u otra posible respuesta.
Verificar	Proporcionar pruebas que validen el resultado.

Notación

Entre los diversos tipos de notación de uso habitual, el IB ha decidido adoptar un sistema que sigue las recomendaciones de la Organización Internacional de Normalización (ISO). Esta notación se utiliza en las pruebas de examen de esta asignatura sin explicaciones adicionales. Si en una prueba de examen dada se utilizase alguna otra forma de notación distinta de la que aparece en esta guía, se incluirá explícitamente la definición de dicha notación dentro de la pregunta donde aparezca.

Puesto que los alumnos deben reconocer, aunque no necesariamente utilizar, la notación que el IB emplea en los exámenes, se recomienda que los profesores la introduzcan lo antes posible. Durante los exámenes los alumnos **no** podrán consultar ningún documento donde se explique el significado de esta notación.

Los alumnos deben utilizar siempre la notación matemática correcta; en ningún caso está permitido usar notación de calculadora.

NM y NS

$\mathbb{N}$	Conjunto de los números enteros positivos y el cero $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\}$
$\mathbb{Z}$	Conjunto de los números enteros $\{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ ...\}$
$\mathbb{Z}^+$	Conjunto de los números enteros positivos $\{1,\ 2,\ 3,\ ...\}$
$\mathbb{Q}$	Conjunto de los números racionales
$\mathbb{Q}^+$	Conjunto de los números racionales positivos $\{x \mid x \in \mathbb{Q},\ x > 0\}$
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^+$	Conjunto de los números reales positivos $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$
$\{x_1,\ \ x_2,\ \ \ldots\}$	Conjunto formado por los elementos $x_1,\ x_2,\ ...$
$n(A)$	Número de elementos que hay en el conjunto finito A
$\{x \mid \quad \}$	Conjunto formado por todos los x tales como
$\in$	Es un elemento de
$\notin$	No es un elemento de
$\varnothing$	Conjunto vacío
U	Conjunto universal
$\cup$	Unión
$\cap$	Intersección
A'	El complemento del conjunto A
$a^{\frac{1}{2}}, \sqrt{a}$	a elevado a $\frac{1}{2}$, raíz cuadrada de a (si $a \geq 0$, entonces $\sqrt{a} \geq 0$)
$a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a}$	a elevada a $\frac{1}{n}$, raíz de $n-$ésimo a (si $a \geq 0$, entonces $\sqrt[n]{a} \geq 0$)
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	a elevado a $-n$, la recíproca de a^n

$\lvert x \rvert$	El módulo o valor absoluto de x, que es $\begin{cases} x & \text{para } x \geq 0,\ x \in \mathbb{R} \\ -x & \text{para } x < 0,\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$
$\equiv$	Identidad
$\approx$	Es aproximadamente igual a
$>$	Es mayor que
$\geq$	Es mayor o igual que
$<$	Es menor que
$\leq$	Es menor o igual que
$\not>$	No es mayor que
$\not<$	No es menor que
$\Rightarrow$	Implica
$\Leftrightarrow$	Si y solo si
u_n	Término n-ésimo de una progresión o de una serie
d	Diferencia común de una progresión aritmética
r	Razón común de una progresión geométrica
S_n	Suma de los primeros n términos de una progresión, $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$
S_∞	Suma de los infinitos términos de una progresión $u_1 + u_2 + \ldots$
$\sum_{i=1}^{n} u_i$	$u_1 + u_2 + \ldots + u_n$
$n!$	$n(n-1)(n-2)\ldots 3 \times 2 \times 1$
${}^n\mathrm{C}_r$	$\frac{n!}{r!(n-r)!}$
Δ	Discriminante de una ecuación cuadrática $\Delta = b^2 - 4ac$
$f(x)$	Imagen de x al aplicar la función f
f^{-1}	Función inversa de la función f
$f \circ g$	Función compuesta de f y g
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	Derivada de y con respecto a x
$f'(x)$	Derivada de $f(x)$ con respecto a x
$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$	Derivada segunda de y con respecto a x
$f''(x)$	Derivada segunda de $f(x)$ con respecto a x
$\int y\,\mathrm{d}x$	Integral indefinida de y con respecto a x
$\int_a^b y\,\mathrm{d}x$	Integral definida de y con respecto a x entre los límites $x = a$ y $x = b$
e^x	Función exponencial de x
$\log_a x$	Logaritmo en base a de x

$\ln x$	Logaritmo natural de x, $\log_e x$
sen, cos, tan	Funciones trigonométricas
$A(x, y)$	Punto A del plano cuyas coordenadas cartesianas son x e y
[AB]	Segmento de recta cuyos extremos son los puntos A y B
AB	Longitud de [AB]
(AB)	Recta a la que pertenecen los puntos A y B
$\hat{A}$	Ángulo de vértice A
$C\hat{A}B$	Ángulo que forman [CA] y [AB]
Δ ABC	Triángulo cuyos vértices son A, B y C
$P(A)$	Probabilidad del suceso A
$P(A')$	Probabilidad del suceso “no A”
$P(A \mid B)$	Probabilidad del suceso A sabiendo que ocurrió B
$x_1, x_2, \ldots$	Valores observados
$f_1, f_2, \ldots$	Frecuencias con las que ocurren los valores observados $x_1, x_2, \ldots$.
$E(X)$	Valor esperado de la variable aleatoria X
μ	Media de la población
σ^2	Varianza de la población
σ	Desviación típica de la población
$\bar{x}$	Media aritmética de un conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de valores observados
$P(X = x)$	Probabilidad de que la variable aleatoria X tenga el valor x
$B(n, p)$	Distribución binomial de parámetros n y p
$N(\mu, \sigma^2)$	Distribución normal de media μ y varianza σ^2
$X \sim B(n, p)$	La variable aleatoria X sigue una distribución binomial de parámetros n y p.
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media μ y varianza σ^2.
r	Coeficiente de correlación momento-producto de Pearson

Únicamente para TANS

$\mathbb{C}$	Conjunto de números complejos $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
i	$\sqrt{-1}$ donde $i^2 = -1$
z	Número complejo
z^*	Número complejo conjugado de z
$\lvert z \rvert$	Módulo de z
$\arg z$	Argumento de z
$\mathrm{Re}\, z$	Parte real de z

Imz	Parte imaginaria de z
cisθ	$\cos\theta + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\ \theta$
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$	Forma de Euler/exponencial de un número complejo
${}^{n}\mathrm{P}_{r}$	$\dfrac{n!}{(n-r)!}$
$\Leftarrow$	Está implicado por
$[a, \quad b]$	Intervalo cerrado $a \leq x \leq b$
$]a, b[$	Intervalo abierto $a < x < b$
$f : A \to B$	f es una función que asigna a cada elemento del conjunto A una imagen en el conjunto B.
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	El límite de $f(x)$ como x tiende a a.
$\dfrac{d^{n}y}{\mathrm{d}x^{n}}$	Derivada $n -$ ésima de y con respecto a x.
$f^{(n)}(x)$	Derivada $n -$ ésima de $f(x)$ con respecto a x
$\mathrm{arcsen}, \quad \mathrm{sen}^{-1}$ $\arccos, \quad \cos^{-1}\}$ $\arctan, \quad \tan^{-1}$	Funciones trigonométricas inversas
cosec, sec, cotan	Funciones trigonométricas recíprocas
$\boldsymbol{v}$	Vector $\boldsymbol{v}$
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$	Vector definido en módulo, dirección y sentido por el segmento de recta orientado que va de A a B
$\boldsymbol{a}$	Vector de posición $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$
$\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{k}$	Vectores unitarios en las direcciones de los ejes de coordenadas cartesianos
$\lvert\boldsymbol{a}\rvert$	Módulo de $\boldsymbol{a}$
$\left\lvert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\rvert$	Módulo de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$	Producto escalar de v y $\boldsymbol{w}$
$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$	Producto vectorial de v y w
$f(x)$	Función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua X
$\mathrm{Var}(X)$	Varianza de la variable aleatoria X