HANDS-OUT

METODE NUMERIK

Oleh :

Drs. Heri Sutarno, M. T.

Dewi Rachmatin, S.Si., M.Si.

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA

DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

2008

Pertemuan ke	:	1
Penyusun	:	Dewi Rachmatin dan Heri Sutarno
Materi	:	1. Pendahuluan
		2. Angka Bena, Pembulatan, dan Galat

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

1. Pendahuluan

Metode numerik merupakan teknik-teknik yang digunakan untuk merumuskan masalah-masalah matematika agar dapat diselesaikan dengan operasi-operasi aritmatika (hitungan) biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi). Ada beberapa alasan mengapa mempelajari metode numerik, yaitu:

1) Metode numerik merupakan alat untuk memecahkan masalah matematika yang sangat handal. Banyak permasalahan teknik yang mustahil dapat diselesaikan secara analitik, karena kita sering dihadapkan pada sistem-sistem persamaan yang besar, tidak linear dan cakupan yang kompleks, dapat diselesaikan dengan metode numerik.
2) Program paket numerik, misalnya MATLAB, MAPLE, dan sebagainya yang digunakan untuk menyelesaikan masalah matematika dengan metode numerik dibuat oleh orang yang mempunyai dasar-dasar teori metode numerik.
3) Banyak masalah matematika yang tidak dapat diselesaikan dengan memakai program paket atau tidak tercakup dalam program paket. Oleh karena itu kita perlu belajar metode numerik untuk dapat membuat program paket (*software*) untuk masalah sendiri.
4) Metode numerik merupakan suatu sarana yang efisien untuk mempelajari penggunaan komputer. Belajar pemrograman secara efektif adalah menulis program komputer. Metode numerik mengandung bagian yang dirancang untuk diterapkan pada komputer, misalnya membuat algoritma.
5) Metode numerik merupakan suatu sarana untuk lebih memahami matematika. Karena fungsi metode numerik adalah menyederhanakan matematika yang lebih tinggi dengan operasi-operasi hitungan dasar.

Tahap-tahap dalam menyelesaikan masalah matematika secara numerik dengan memakai alat bantu komputer secara umum adalah:

1) Pemodelan
2) Pemilihan metode (algoritma) numerik
3) Pemrograman (koding)
4) Dokumentasi
1) Penafsiran hasil.

2. Angka Bena, Pembulatan, dan Galat

Angka bena (*significant figure*) suatu bilangan c adalah sebarang angka yang diberikan oleh c, kecuali untuk nol-nol di kiri angka tak nol pertama yang hanya bertindak untuk mencocokkan posisi titik (koma) desimal.

Kebanyakan komputer digital mempunyai dua cara untuk menyatakan bilangan, yaitu:

1) Sistem titik kambang (*floating point*).

   Bilangan titik kambang a ditulis sebagai

   $$a = \pm\, m \times b^{\pm p}$$

   dengan : m = mantis (riil); b = basis sistem bilangan yang dipakai (2, 8, 10, 16, dan sebagainya); dan p = pangkat (berupa bilangan bulat tak negatif).

   Contoh : $0{,}6238 \times 10^{3}$ dalam sistem titik kambang dengan basis 10.

2) Sistem titik tetap (*fixed-point*).

   Suatu bilangan dinyatakan dengan sejumlah tetap posisi desimal di ujung kanan, tetapi sistem bilangan titik tetap tidak praktis dalam pekerjaan ilmiah karena keterbatasan rentangnya, contoh : 62,358.

Solusi yang diperoleh secara numerik merupakan nilai hampiran dari solusi eksaknya. Ini berarti terdapat galat (*error*) pada solusi hampiran tersebut. **Galat numerik** adalah besaran yang merupakan selisih antara nilai hampiran dengan nilai eksak. Hubungan ini dirumuskan menjadi :

$$\boxed{E_a = x - \bar{x} \quad \text{atau} \quad x = \bar{x} + E_a}$$

dimana E_a adalah **galat absolut (galat mutlak)**, x nilai eksak, dan $\bar{x}$ nilai hampiran.

Galat mutlak dapat didefinisikan sebagai

$$\boxed{|E_a| = |x - \bar{x}|}\ .$$

Galat relatif dinyatakan sebagai

$$\boxed{e_r = \frac{galat\ \ absolut}{nilai\ \ eksak} = \frac{E_a}{x}.}$$

Ada dua jenis galat dalam komputasi, yaitu:

1) **Galat bawaan** (*inherent error*) adalah galat dari data yang diberikan, misalnya karena kesalahan pengukuran atau ketidaktelitian alat ukur.
2) **Galat proses** adalah galat yang terjadi karena proses komputasi, galat ini dibedakan menjadi dua macam,yaitu:
   a) **Galat pembulatan** (*round-off error)*

      Contoh : x = 1/3 = 0,33333 . . . dan $\bar{x}$ = 0,33333.

      Galat pembulatannya E = 0,00000333 . . . .
   b) **Galat pemotongan** (*truncation error)*

      Contoh : Hampiran fungsi sin x dengan bantuan deret Taylor di sekitar x = 0 adalah

      $$y = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

      Jika deret tersebut dipotong sampai suku orde n = 3, galat pemotongannya menjadi E = $\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$.

Pertemuan ke : 2

Penyusun : Dewi Rachmatin dan Heri Sutarno

Materi : 1. Pendahuluan

2. Metode Grafik Tunggal dan Metode Grafik Ganda
3. Aturan Tanda Descartes
4. Metode Tabulasi
5. Metode Tertutup

(Metode Bagidua dan Metode Posisi Palsu)

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

2.1 Pendahuluan

Pada bagian ini akan diuraikan beberapa metode iteratif yang digunakan untuk menentukan solusi dari persamaan $f(x) = 0$, yaitu bilangan-bilangan $x = \alpha$ sedemikian sehingga $f(\alpha) = 0$. Bilangan-bilangan α yang memenuhi persamaan itu disebut akar persamaan atau titik nol fungsi tersebut.

Ada beberapa pertanyaan yang ditanyakan sehubungan dengan metode-metode iteratif untuk menentukan akar persamaan $f(x) = 0$. Pertanyaan-pertanyaan tersebut adalah sebagai berikut :

(i) Bagaimana memilih tebakan awal untuk mendapatkan akar persamaan ?

(ii) Bagaimana memulai proses iterasi dari tebakan awal sampai mendapatkan hampiran akar ?

(iii) Seberapa cepat metode iteratif yang digunakan untuk mendapatkan hampiran akar ini konvergen ke akar persamaan ?

(iv) Seberapa banyak usaha komputasi diperlukan dalam setiap iterasi ?

(v) Kapan kita harus menghentikan siklus iterasi ?

Pertama kali akan dibahas metode iteratif yang disebut sebagai **metode pengurung**, disebut sebagai metode pengurung karena akar yang akan dihampiri dikurung oleh suatu selang yang memuat akar atau selang akar. Metode pengurung ini disebut juga **metode tertutup** karena selalu konvergen.

Metode-metode yang termasuk ke dalam **metode tertutup** diantaranya adalah **metode bagidua** (***bisection method***) dan **metode posisi palsu** (**metode regula falsi/*false position method***).

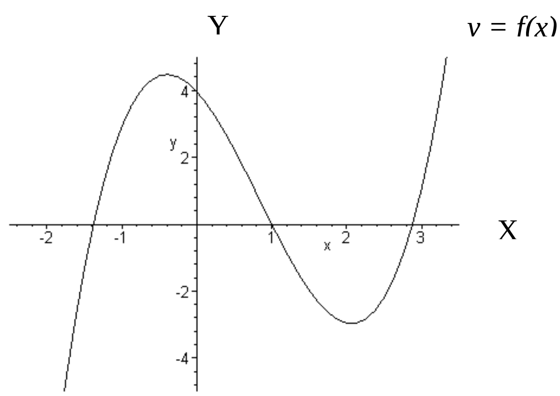
2.2. Metode Grafik Tunggal dan Metode Grafik Ganda

Untuk fungsi-fungsi yang sederhana dimana grafik fungsinya dapat digambarkan dengan mudah, ada dua metode grafik yang dapat dilakukan untuk mendapatkan tebakan awal dari akar persamaan $f(x)=0$, yaitu metode grafik tunggal dan metode grafik ganda. Pada metode grafik tunggal, tebakan awal dipilih yang dekat dengan absis dari titik perpotongan atau akar persamaan $f(x)=0$.

Contoh : Tentukan lokasi akar dan tebakan awal untuk akar persamaan fungsi :

$$f(x) = x^3 - 2{,}5\,x^2 - 2{,}46\,x + 3{,}96 = 0 \qquad .$$

Penyelesaian :



Grafik fungsi $f(x) = x^3 - 2{,}5\,x^2 - 2{,}46\,x + 3{,}96$**.**

Titik potong yang pertama terletak pada selang (-2,-1) sedang titik potong yang kedua adalah (1,0) dan titik potong yang ketiga terletak pada selang (2,3) yaitu mendekati nilai 2,8. Sehingga tebakan awal untuk akar persamaan (2.1) dapat dipilih beberapa titik yang cukup dekat dengan akar persamaan seperti : -2, -1, 0 atau 2.

Metode grafik ganda digunakan untuk persamaan fungsi $f(x)=0$ yang penjabaran fungsi $f(x)$ dapat didekomposisi menjadi pengurangan dua buah fungsi yaitu $f(x)=f_1(x)-f_2(x)=0$. Tebakan awal dipilih cukup dekat dengan absis titik perpotongan kedua fungsi yaitu $f_1(x)$ dan $f_2(x)$.

2.3 Aturan Tanda Descartes

Untuk menentukan lokasi akar polinom yaitu akar dari persamaan berikut :

$$p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

perhatikan uraian berikut. Misalkan u adalah banyaknya pergantian tanda koefisien a_i dari polinom $p(x)$ dan n_p adalah banyaknya akar riil positif, maka berlaku :

(i) $n_p \le u$

(ii) $u - n_p = 0, 2, 4, \ldots$

Sedangkan untuk menentukan komposisi akar riil negatif, misalkan v adalah banyaknya pergantian tanda koefisien a_i dari polinom $p(-x)$ dan n_g adalah banyaknya akar riil negatif, maka berlaku :

(i) $n_g \le v$

(ii) $v - n_g = 0, 2, 4, \ldots$

Penentuan batas selang akar ditentukan oleh aturan berikut :

$$r = 1 + \underset{1\le k\le n}{maks}\left\{\left|\frac{a_k}{a_n}\right|\right\} \quad .$$

Sehingga selang akar yang dicari adalah [-r,r].

2.4 Metode Tabulasi

Misalkan panjang selang tabulasi : Δx, x_{max} dan x_{min} adalah titik-titik ujung selang dimana nilai-nilai fungsi f ditabulasikan, dan n adalah bilangan bulat terdekat untuk $(x_{ax} - x_{min})/\Delta x$, maka prosedur untuk membuat tabulasi nilai-nilai $f(x)$ adalah sebagai berikut :

Masukan : n, $f(x)$, Δx, x_i untuk setiap i=1,2,…,n.

Keluaran : $f(x_i)$ untuk setiap i=1,2,…,n.

Langkah :

Untuk i=1,2,…,n lakukan :

hitung $f(x_i)$

cetak x_i , $f(x_i)$

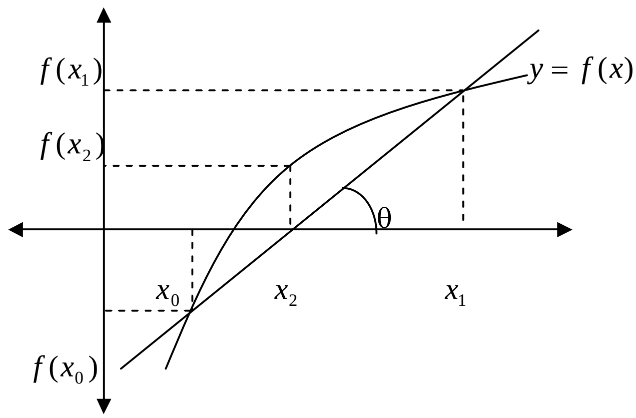
$x_i \leftarrow x_i + \Delta x$.

2.5 Metode Bagidua

Metode bagidua memulai siklus iterasi dengan memilih dua tebakan awal misal x_0 dan x_1 yang cukup dekat dengan akar, dengan nilai $f(x_0)$ dan nilai $f(x_1)$ berlawanan tanda. Kemudian selang (x_0, x_1) dibagi dua dan titik tengahnya dinamakan x_2, sehingga $x_2 = (x_0 + x_1)/2$. Jika $f(x_0).f(x_1) > 0$, maka tebakan awal tidak cocok. Sedangkan jika $f(x_0).f(x_2) < 0$ maka tukar x_1 dengan x_2, jika tidak tukar x_0 dengan x_2. Kemudian jika dari dua iterasi yang berurutan galat relatifnya kurang dari atau sama dengan galat yang ditetapkan berarti sudah diperoleh hampiran akarnya.

2.6 Metode Posisi Palsu

Metode posisi palsu dibuat untuk memperbaiki metode bagidua yaitu untuk mempercepat kekonvergenan metode bagidua. Prosedur metode posisi palsu mulai dengan memilih dua tebakan awal yaitu x_0 dan x_1 dimana nilai fungsinya pada kedua tebakan awal ini berbeda tanda, selanjutnya perhatikan gambar berikut.



Gambaran Metode Posisi Palsu

Hubungkan kedua titik yaitu $(x_0, f(x_0))$ dan $(x_1, f(x_1))$ dengan garis lurus, dan tentukan titik perpotongan garis ini dengan sumbu X. Sebut absis titik perpotongan dengan x_2. Tangen θ merupakan kemiringan garis yang menghubungkan $(x_0, f(x_0))$ dan $(x_1, f(x_1))$ sehingga : $x_2 = \dfrac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$.

Jika $f(x_2)$ dan $f(x_0)$ berlawanan tanda maka gantikan x_1 dengan x_2, sebaliknya gantikan x_0 dengan x_2. Kemudian gambarkan sebuah garis lurus yang menghubungkan titik $(x_0, f(x_0))$ dengan $(x_2, f(x_2))$ untuk menentukan titik perpotongan yang baru. Laju kekonvergenan metode ini akan lebih cepat dibandingkan dengan metode bagidua.

Pertemuan ke : 3

Penyusun : Dewi Rachmatin dan Heri Sutarno

Materi : Metode-metode Terbuka :

1. Metode Newton Raphson
2. Metode Secant
3. Metode Iterasi Titik Tetap

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

Metode-metode yang termasuk ke dalam **metode terbuka** diantaranya adalah **metode Newton-Raphson, metode secant, dan metode iterasi titik tetap.** Disebut metode tebuka karena akarnya tidak selalu konvergen.

3.1 Metode Newton Raphson

Prosedur **metode Newton-Raphson** (metode N-R) mulai dari sebarang titik x_0 yang cukup dekat dengan akar. Pertama tentukan kemiringan dari fungsi $f(x)$ pada $x = x_0$, namakan $f'(x_0)$. Lalu tentukan x_1 dengan rumus

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Untuk setiap iterasi ke $(i+1)$ hitung : $\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$. Hentikan iterasi bila dua hampiran akar yang berurutan cukup dekat. Dibandingkan dengan kedua metode sebelumnya yaitu metode bagidua dan metode posisi palsu ternyata metode N-R lebih cepat konvergen.

3.2 Metode Secant

Dalam setiap iterasi untuk metode N-R dilakukan penghitungan turunan pertama fungsi atau $f'(x)$. Pada beberapa kasus pernyataan untuk $f'(x)$ panjang dan membutuhkan usaha komputasi yang cukup lama untuk menghitungnya. Metode secant menghampiri turunan pertama fungsi atau $f'(x)$ dengan :

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

dimana x_i dan x_{i-1} adalah dua hampiran akar untuk iterasi ke-*i* dan iterasi ke-(*i*-1).

Nilai hampiran akar pada iterasi ke-(*i*+1) diperoleh dari dua nilai hampiran akar sebelumnya yaitu x_{i-1} dan x_i yang diterapkan pada persamaan tersebut :

$$x_{i+1} = \frac{x_{i-1} f(x_i) - x_i f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

dengan x_{i-1} adalah absis titik perpotongan garis lurus yang menghubungkan dua titik yaitu $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ dengan $(x_i, f(x_i))$.

3.3 Metode Iterasi Titik Tetap

Persamaan $f(x) = 0$ secara aljabar dapat ditransformasi ke bentuk $x = g(x)$. Sehingga prosedur iterasi yang berpadanan dengan bentuk tersebut adalah $x_{n+1} = g(x_n)$.

Contoh : Tentukan akar persamaan berikut : $f(x) = x^2 - 2x - 8 = 0$.

Fungsi tersebut dapat ditulis : $x = g_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$. Sehingga $x_{n+1} = g_1(x_n) = \frac{1}{2}x_n^2 - 4$. Persamaan di atas juga dapat ditulis sebagai :

(1) $x = g_2(x) = 2 + \frac{8}{x}$

(2) $x = g_3(x) = \sqrt{2x+8}$

dan (3) $x = g_4(x) = -\sqrt{2x+8}$. Selanjutnya iterasikan 4 buah fungsi ini dan cek kekonvergenannya. Kekonvergenan metode ini bergantung pada kenyataan bahwa di sekitar akar, kurva $g(x)$ kurang curamnya daripada garis lurus $y = x$ atau kondisi $|g'(x)| < 1$ merupakan syarat cukup untuk kekonvergenan.

Pertemuan ke : 4

Penyusun : Dewi Rachmatin dan Heri Sutarno

Materi : 1. Pendahuluan

2. Beda Hingga
3. Interpolasi Linier
4. Interpolasi Kuadrat

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

4.1 Pendahuluan

Para ahli ilmu alam sering bekerja dengan sejumlah data diskrit dalam bentuk tabel. Data tabel tersebut mungkin diperoleh dari hasil pengamatan di lapangan, hasil pengukuran di laboratorium, dan lain-lain. Tabel tersebut berupa kumpulan suatu peubah bebas yang diskrit misalnya $x_1, x_2, ..., x_n$ yang mempunyai hubungan dengan suatu kumpulan nilai-nilai fungsi $g(x_1)$, $g(x_2)$, $g(x_3)$, ..., $g(x_n)$. Nilai x_i (i = 1, 2, … , n) disebut argumen dari fungsi.

Misalkan diberikan suatu tabel nilai-nilai numeris $f_j = f(x_j)$ dari suatu fungsi f pada argument atau titik - titik yang berjarak sama: x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, $x_3 = x_0 + 3h$, ..., dengan h > 0 tetap. Serta $f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \ldots$, adalah nilai-nilai dari $f(x_j)$ masing-masing untuk $x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots$.

4.2 Beda Hingga

4.2.1 Beda - beda Maju (*Forward Difference*)

Notasi yang dipakai dalam beda-beda maju adalah sebagai berikut:

$\Delta f_0 = f_1 - f_0$; $\Delta f_1 = f_2 - f_1$ dan seterusnya, disebut beda-beda maju pertama.

Secara umum ditulis: $\boxed{\Delta f_m = f_{m+1} - f_m}$.

Dengan cara yang sama dapat dinotasikan beda-beda maju ketiga, keempat, dan seterusnya. Bentuk umumnya: $\boxed{\Delta^{n+1} f_m = \Delta^n f_{m+1} - \Delta^n f_m}$ untuk n = 0,1,2,...

Tabel berikut menunjukkan beda-beda maju dari semua tingkat yang dapat dibentuk.

X	f	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
x_{-2}	f_{-2}				
		Δf_{-2}			
x_{-1}	f_{-1}		$\Delta^2 f_{-2}$		
		Δf_{-1}		$\Delta^3 f_{-2}$	
x_0	f_0		$\Delta^2 f_{-1}$		$\Delta^4 f_{-2}$
		Δf_0		$\Delta^3 f_{-1}$	
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$		
		Δf_1			
x_2	f_2				

4.2.2 Beda - beda Mundur (*Backward Difference*)

Bentuk umum beda-beda mundur adalah sebagai berikut:

$$\boxed{\nabla^{n+1} f_m = \nabla^n f_m - \nabla^n f_{m-1}} \quad \text{untuk } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Tabel berikut menunjukkan beda-beda mundur dari semua tingkat yang dapat dibentuk:

x	f	∇	∇^2	∇^3	∇^4
X_{-2}	f_{-2}				
		∇f_{-1}			
x_{-1}	f_{-1}		$\nabla^2 f_0$		
		∇f_0		$\nabla^3 f_1$	
x_0	f_0		$\nabla^2 f_1$		$\nabla^4 f_2$
		∇f_1		$\nabla^3 f_2$	
x_1	f_1		$\nabla^2 f_2$		
		∇f_2			
x_2	f_2				

4.2.3 Beda - beda Pusat

Bentuk umum beda-beda pusat adalah sebagai berikut:

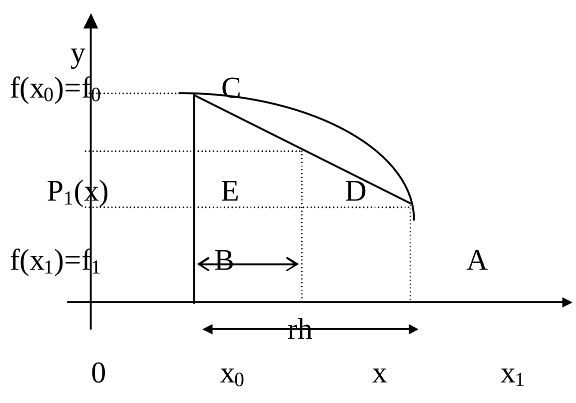
$$\boxed{\delta^2 f_m = \delta f_{\frac{2m+1}{2}} - \delta f_{\frac{2m-1}{2}}} \; .$$

Tabel Beda-Beda Pusat

x	F	δ	δ^2	δ^3	δ^4
X_{-2}	f_{-2}				
		$\delta f_{-3/2}$			
x_{-1}	f_{-1}		$\delta^2 f_{-1}$		
		$\delta f_{-1/2}$		$\delta^3 f_{-1/2}$	
x_0	f_0		$\delta^2 f_0$		$\delta^4 f_0$
		$\delta f_{1/2}$		$\delta^3 f_{1/2}$	
x_1	f_1		$\delta^2 f_1$		
		$\delta f_{3/2}$			
x_2	f_2				

4.3 Interpolasi Linear

Bentuk interpolasi yang paling sederhana adalah menghubungkan dua titik data dengan garis lurus, lihat gambar berikut.



Karena segitiga DEC sebangun dengan segitiga ABC, maka berlaku:

$$\frac{f(x_0) - p_1(x)}{x - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_1 - x_0} \quad .$$

Akibatnya : $P_1(x) = f_0 + r.\,\Delta f_0$.

4.4 Interpolasi Kuadrat

Misalkan tersedia tiga titik data (x_0,f_0), (x_1,f_1), dan (x_2,f_2), interpolasi dapat dilaksanakan dengan polinom orde kedua (polinom kuadrat). Bentuk secara khas yang cocok untuk maksud ini adalah:

$$p_2(x) = b_0 + b_1 (x - x_0) + b_2 (x - x_0)(x - x_1).$$

Atau

$$\boxed{p_2(x) = f_0 + r \cdot \Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2} \Delta^2 f_0}$$

dengan $0 \le r \le n$.

Pertemuan ke : 5

Penyusun : Dewi Rachmatin dan Heri Sutarno

Materi : 1. Interpolasi Beda-Maju dan Beda-Mundur Newton
2. Polinom Interpolasi Beda Terbagi Newton
3. Polinom Interpolasi Lagrange

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

5.1 Interpolasi Beda-Maju dan Beda-Mundur Newton

Polinom interpolasi derajat n diberikan dalam rumus **interpolasi beda-maju Newton :**

$$
\boxed{\begin{aligned}
f(x) \approx P_n(x) &= \sum_{s=0}^{n} \binom{r}{s} \Delta^s f_0 \\
&= f_0 + r\,.\,\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\,\Delta^2 f_0 \\
&\quad + \ldots + \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}\,\Delta^n f_0
\end{aligned}}
$$

dengan $x = x_0 + rh$, $r = \dfrac{x - x_0}{h}$, $0 \le r \le n$.

Suatu rumus yang serupa dengan rumus tadi tetapi melibatkan beda-mundur adalah rumus **interpolasi beda-mundur Newton** :

$$
\boxed{\begin{aligned}
f(x) \approx P_n(x) = f_0 + r.\ \nabla f_0 + \frac{r\ (r+1)}{2\ !}\ \nabla^2 f_0 + \ldots \\
+ \frac{r\ (r+1)\ldots(r+n-1)}{n\,!}\ \nabla^n f_0
\end{aligned}}
$$

dengan $x = x_0 + rh$, $r = (x - x_0)/h$, $0 \le r \le n$.

5.2 Polinom Interpolasi Beda Terbagi Newton

Sebelum sampai kepada formula interpolasinya, didefinisikan terlebih dahulu **beda-beda terbagi**, yang secara iteratif dinyatakan oleh hubungan:

$$f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0} \quad . \; . \; .$$

Tabel Beda-Beda Terbagi

x_k	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$	f[. . . , . . . , . .]	f[... , ... , ..., ..]
x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_0,x_1]$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f(x_3)$			

Formula Interpolasi Ordo 1 adalah

$$P_1(x) = f_0 + (x - x_0).\, f[x_0,x_1] \quad .$$

Formula Interpolasi Ordo 2 adalah

$$P_2(x) = f_0 + (x - x_0)\,.\, f[x_0,x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\,.\, f[x_0,x_1,x_2].$$

Secara umum sampai dengan ordo n akan diperoleh rumus sebagai berikut:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = P_n(x) = f_0 &+ (x - x_0)\,.\, f[x_0,x_1] \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)\,.\, f[x_0,x_1,x_2] + \ldots + \\ &(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\,.\, f[x_0,x_1,\ldots,x_n] \end{aligned}} \quad .$$

Formula interpolasi beda terbagi Newton tersebut di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$f(x) = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right) . f[x_0, ..., x_i] \quad .$$

5.3 Polinom Interpolasi Lagrange

Polinom interpolasi Lagrange dapat diturunkan langsung dari polinom interpolasi Newton.

Untuk menurunkan bentuk Lagrange, beda-beda terbagi dirumuskan ulang sebagai berikut : $f[x_0,x_1] = \dfrac{f_1}{x_1 - x_0} + \dfrac{f_0}{x_0 - x_1}$. Dari terakhir ini disubstitusikan sehingga diperoleh rumus interpolasi Lagrange ordo 1 :

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} . f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} . f_1 = \sum_{i=0}^{1} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) . f_i \quad .$$

Rumus interpolasi Lagrange ordo 2 adalah :

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) . f_i \quad .$$

Secara umum sampai dengan ordo n, diperoleh formula **interpolasi Lagrange** sebagai berikut :

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) . f_i = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) . f_i \quad .}$$

Pertemuan ke : 6

Penyusun : Dewi Rachmatin dan Heri Sutarno

Materi : 1. Pendahuluan

2. Sistem Persamaan Linear Segitiga Atas
3. Sistem Persamaan Linear Segitiga Bawah

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

6.1 Pendahuluan

Perhatikanlah sistem n persamaan linear tidak homogen dalam n peubah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ berikut ini.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Sistem persamaan linear tersebut dapat ditulis sebagai perkalian matriks berikut :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

atau disimbolkan sebagai persamaan matriks $AX = B$ dengan:

$A = a_{ij}$ adalah matriks dari koefisien yang mempunyai i baris dan j kolom; $X = x_i$ adalah matriks dari peubah yang tak diketahui; dan $B = b_i$ adalah matriks dari bilangan tetapnya.

Matriks lengkap dari persamaan matriks $AX = B$ tersebut ialah:

$$[A,B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}.$$

6.2 Sistem Persamaan Linear Segitiga Atas

Sistem persamaan linear yang mempunyai matriks koefisien berupa matriks segitiga atas, disebut sistem persamaan linear segitiga atas. Sistem persamaan linear seperti itu dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &=& c_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &=& c_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots && \vdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n &=& c_{n-1} \\ a_{nn}x_n &=& c_n \end{array}$$

Dengan asumsi elemen-elemen diagonal tak nol, $a_{kk} \neq 0$ untuk k = 1, 2, ... , n, maka terdapat suatu solusi tunggal dari sistem persamaan linear di atas. Kondisi $a_{kk} \neq 0$ ini sangat penting karena persamaan tersebut melibatkan pembagian oleh a_{kk}. Jika persyaratan ini tidak terpenuhi maka solusinya tidak ada atau terdapat takhingga banyaknya solusi.

Penyelesaian sistem persamaan linear segitiga atas mudah dicari dengan mempergunakan **substitusi mundur** (***backward substitution***). Persamaan yang terakhir hanya melibatkan x_n, dan inilah yang pertama dicari sehingga diperoleh:

$$x_n = \frac{c_n}{a_{nn}}.$$

Setelah x_n ada, dipakai untuk mencari x_{n-1} pada persamaan sebelumnya sebagai berikut:

$$x_{n-1} = \frac{c_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

Sekarang x_n dan x_{n-1} dipakai untuk mencari x_{n-2} sebagai berikut:

$$x_{n-2} = \frac{c_{n-2} - a_{n-2,n-1}x_{n-1} - a_{n-2,n}x_n}{a_{n-2,n-2}}.$$

Proses ini diteruskan untuk mencari nilai peubah yang lainnya. Langkah umum dari proses tersebut adalah:

$$\boxed{x_k = \frac{c_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j}{a_{kk}}} \quad \text{untuk } k = n-1, n-2, ..., 1.$$

6.3 Sistem Persamaan Linear Segitiga Bawah

Sistem persamaan linear yang mempunyai matriks koefisien berupa matriks segitiga bawah disebut sistem persamaan linear segitiga bawah. Sistem persamaan linear seperti itu dapat dituliskan dalam bentuk:

$$
\begin{array}{lllllll}
a_{11}x_1 & & & & & = c_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & & & = c_2 \\
\vdots & & & & & \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \cdots + & a_{nn}x_n & = c_n
\end{array}
$$

Penyelesaian sistem persamaan linear ini dicari dengan substitusi maju. Persamaan pertama hanya melibatkan x_1, dan inilah yang pertama dicari baru kemudian x_2 . Proses ini diteruskan sehingga dari persamaan terakhir diperoleh nilai x_n . Langkah umum dari proses tersebut ialah:

$$\boxed{x_k = \frac{c_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki}x_i}{a_{kk}}}$$

Untuk setiap k = 2, 3, ... , n.

Pertemuan ke	:	7
Penyusun	:	Dewi Rachmatin dan Heri Sutarno
Materi	:	1. Metode Eliminasi Gauss dan Pivoting
		2. Metode Dekomposisi/Faktorisasi Segitiga
		3. Metode Iterasi Jacobi dan Iterasi Gauss-Seidel

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

7.1 Metode Eliminasi Gauss dan Pivoting

Pada bagian ini dikembangkan cara yang efisien untuk menyelesaikan sistem persamaan linear AX = C dengan n persamaan dan n peubah. Intinya adalah membangun suatu sistem persamaan segitiga atas UX = Y yang setara kemudian solusi X diselesaikan memakai metode substitusi mundur.

Sistem AX = C dengan matriks lengkap [A, C] dapat diselesaikan dengan melakukan operasi-operasi baris elementer (OBE). Dengan OBE itulah dihasilkan sistem yang setara yang berbentuk sistem persamaan linear segitiga atas. Bentuk terakhir ini diselesaikan dengan substitusi mundur (*backward substitution*). Proses inilah yang disebut **eliminasi Gauss**. Pada eliminasi Gauss, bilangan a_{kk} pada posisi (k,k) yang dipakai untuk mengeliminasi x_k dalam baris-baris k+1, k+2, ..., n dinamakan **elemen tumpuan** (***pivot***) ke-k, dan k disebut **baris tumpuan**. Pada sub bab berikut akan dibahas tiga macam metode Eliminasi Gauss.

7.1.1 Metode Eliminasi Gauss Naif

Metode berikut ini disebut metode eliminasi Gauss naif karena metode ini tidak menghindari kemungkinan pembagian oleh nol. Eliminasi Gauss naif termasuk hitungan langsung sehingga galatnya tidak dapat diatur (perambatan galat sulit dihindari). Selain itu juga, elemen tumpuan yang nol sulit dihindari. Untuk itulah diperbaiki dengan strategi pivoting, yaitu : jika $a_{kk} = 0$, perlu mencari baris r, dengan $a_{rk} \neq 0$ dan $r > k$, kemudian mempertukarkan baris k dengan baris r sehingga diperoleh elemen tumpuan tak nol.

7.1.2 Metode Eliminasi Gauss Pivoting Parsial

Pivoting parsial disarankan untuk memeriksa besarnya semua elemen di kolom k yang terletak pada atau di bawah diagonal, dan melokasikan baris r yang mempunyai elemen dengan nilai mutlak terbesar, yakni:

$$|a_{rk}| = maks \ \{|a_{kk}|, |a_{k+1,k}|, \ldots, |a_{n-1,k}|, |a_{nk}|\}$$

dan kemudian menukarkan baris r dan baris k jika r > k. Dengan diambilnya elemen dengan nilai mutlak terbesar sebagai elemen tumpuan, akan menghasilkan perambatan galat yang kecil.

7.1.3 Eliminasi Gauss Pivoting Parsial Terskala

Langkah-langkah yang diperlukan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan eliminasi Gauss pivoting parsial terskala ialah:

a) Tentukan "ukuran" masing-masing baris matriks koefisien, yaitu:

$$d_i = \underset{1 \le j \le n}{\text{maksimum}} \{ \, |a_{ij}| \, \}$$

b) Tentukan elemen tumpuannya, yaitu:

$$a_{ij} = \underset{\substack{1 \le j \le n-1 \\ j \le i \le n}}{\text{maksimum}} \left\{ \left| \frac{a_{ij}}{d_i} \right| \right\} .$$

7.2 Metode Dekomposisi/Faktorisasi Segitiga

Suatu matriks A taksingular dapat difaktorkan menjadi hasilkali suatu matriks segitiga bawah L dan matriks segitiga atas U. Metode ini dikenal dengan nama metode dekomposisi LU atau metode faktorisasi segitiga.

7.2.1 Pemfaktoran Doolittle, mensyaratkan elemen diagonal L semuanya 1 dan elemen diagonal U taknol.

Misalkan untuk matriks A(3x3) dapat ditulis sebagai

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} .$$

7.2.2 Pemfaktoran Crout, mensyaratkan elemen diagonal L taknol dan semua elemen diagonal U bernilai 1.

Misalkan untuk matriks A(3x3) dapat ditulis sebagai

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a23 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Untuk menyusun algoritma pemfaktoran Doolittle digunakan hubungan berikut ini.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} \quad .$$

7.3 Metode Iterasi Jacobi dan Gauss-Seidel

Sistem Persamaan Linnier AX = C dapat diselesaikan dengan metode iterasi Jacobi dan metode iterasi Gauss-Seidel sehingga konvergen, apabila matriks koefisien A memenuhi <u>syarat cukup</u> yaitu *dominan secara diagonal:*

$$|a_{ii}| \; > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{, untuk setiap i = 1, 2, 3, . . . , n.}$$

Pandang Sistem Persamaan Linear berikut :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

dengan matriks koefisiennya dominan secara diagonal.

Misalkan diberikan nilai awal ($x_1°, x_2°, \ldots, x_n°$), persamaan iterasi Jacobi adalah sebagai berikut. Pada iterasi 1 :

$$x_1^1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{\circ} + a_{13}x_3^{\circ} + \ldots + a_{1n}x_n^{\circ})}{a_{11}}$$

$$x_2^1 = \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{\circ} + a_{23}x_3^{\circ} + \ldots + a_{2n}x_n^{\circ})}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_n^1 = \frac{b_n - (a_{n1}x_1^{\circ} + a_{n2}x_2^{\circ} + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{\circ})}{a_{nn}}$$

Kemudian lanjutkan dengan iterasi kedua dan ketiga. Secara umum proses iteratif ke (k+1) adalah :

$$x_1^{k+1} = \frac{b_1 - (a_{12}x_2^k + a_{13}x_3^k + \ldots + a_{1n}x_n^k)}{a_{11}}$$

$$x_2^{k+1} = \frac{b_2 - (a_{21}x_1^k + a_{23}x_3^k + \ldots + a_{2n}x_n^k)}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{k+1} = \frac{b_n - (a_{n1}x_1^k + a_{n2}x_2^k + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{\ k})}{a_{nn}}$$

Jadi bentuk umum proses iteratif Jacobi adalah ;

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}x_j^k}{a_{ii}} \quad untuk \quad i = 1,2,\ldots,n \ \ dan \ \ k = 0,1,2,\ldots.\max it \, .$$

Kekonvergenan metode iterasi Jacobi agak lambat. Kekonvergenan ini dapat dipercepat bila setiap harga x_i yang baru dihasilkan segera dipakai pada persamaan berikutnya untuk menentukan harga x_{i+1} yang lainnya. Teknik inilah yang dipakai pada metode iterasi Gauss-Seidel. Secara umum proses iteratif Gauss-Seidel adalah

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k}{a_{ii}}$$

untuk setiap i = 1, 2, . . ., n   dan k = 0, 1, 2, . . .maxit (maksimum iterasi).

Pertemuan ke : 8

Penyusun : Dewi Rachmatin dan Heri Sutarno

Materi : UTS (Materi pertemuan 1 sampai dengan 7)

Pertemuan ke : 9

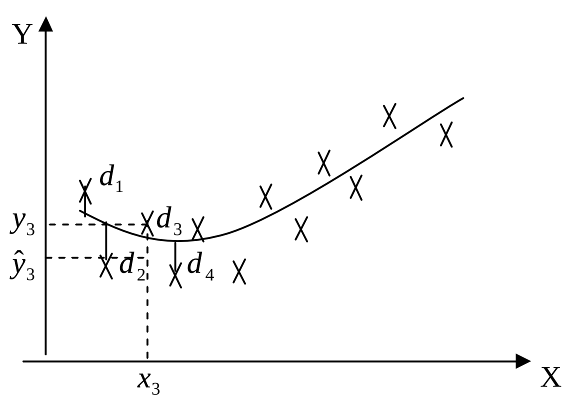
Penyusun : Dewi Rachmatin dan Heri Sutarno

Materi : Penghampiran Fungsi dengan Metode Kuadrat Terkecil (Regresi Linier dan Polinom)

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

9.1 Penghampiran Fungsi dengan Metode Kuadrat Terkecil

Misalkan $x_1,\ x_2,\dots,x_n$ adalah nilai-nilai dari sebuah peubah bebas X dan $y_1,\ y_2,\dots,y_n$ adalah nilai-nilai dari peubah tak bebas (terikat) Y yang bersesuaian dengan X. Misalkan pula $\hat{y}=\hat{f}(x)$ adalah nilai hampiran atau taksiran untuk sebuah fungsi f. Galat antara $\hat{y}$ nilai-nilai hampiran untuk fungsi f dengan y nilai-nilai sebenarnya yang ditabulasikan adalah $d_i = y_i - \hat{y}_i$. Fungsi $f(x)$ dipilih dengan suatu cara agar $d_1, d_2,..., d_n$ kecil.



Gambaran pencocokan kurva

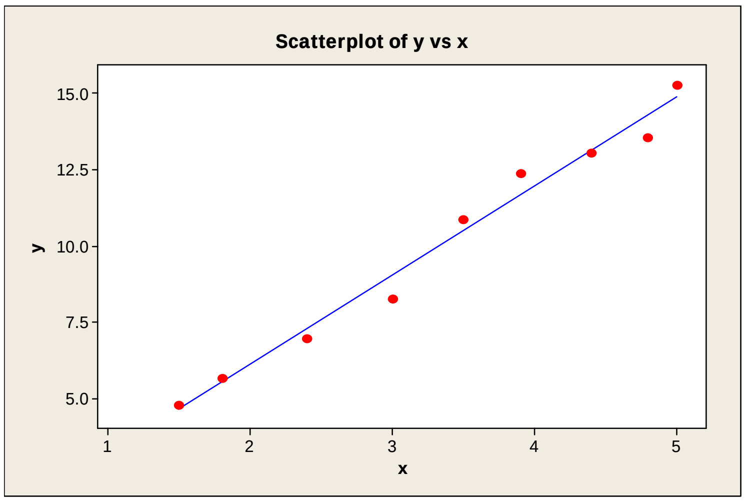
Akan dipelajari pada pertemuan kesembilan ini, masalah mencocokkan sebuah fungsi $\hat{f}(x)$ pada nilai-nilai yang ditabulasikan dengan meminimumkan jumlah kuadrat simpangan. Metode ini disebut pencocokkan kuadrat terkecil atau ***least squares fit***.

9.1.1 Regresi Linier

Diberikan data sebagai berikut :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	1,5	1,8	2,4	3,0	3,5	3,9	4,4	4,8	5,0
y_i	4,8	5,7	7,0	8,3	10,9	12,4	13,1	13,6	15,3

Plot data tersebut :



Dilihat dari titik-titik data yang diplot pada tabel di atas, jika x bertambah besar maka y bertambah besar. Oleh karena data yang diplot mengumpul di sekitar sebuah garis lurus sehingga dapat dikatakan bahwa sebuah garis lurus menggambarkan situasi yang cukup masuk akal. Sehingga dapat dinyatakan

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x$$

sebagai persamaan yang menggambarkan sebuah garis lurus.

Selanjutnya diminimumkan S (jumlah kuadrat galat) yang diberikan oleh :

$$\text{Min S} = \text{Min } \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \text{Min } \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x)]^2$$

S adalah fungsi dari dua peubah yang tidak diketahui yaitu a_0 dan a_1. Maka untuk meminimumkan S diambil turunan parsial dari S terhadap a_0 dan a_1 kemudian samakan dengan nol. Maka :

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a_1 x_i - a_0)(-1) = 0 \qquad (*)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a_1 x_i - a_0)(-x_i) = 0 \qquad (**)$$

Sehingga persamaan (*) menjadi :

$$\sum y_i - a_1 \sum x_i - n a_0 = 0 \quad .$$

Persamaan (**) menjadi :

$$-\sum x_i y_i + a_1 \sum x_i^2 + a_0 \sum x_i = 0 \ .$$

Dengan pengaturan kembali kedua persamaan tersebut diperoleh persamaan simultan linier untuk a_0 dan a_1 berikut yang disebut **persamaan normal** :

$$\boxed{\begin{array}{l} n a_0 + \left(\sum x_i\right).a_1 = \sum y_i \\ \left(\sum x_i\right).a_0 + \left(\sum x_i^2\right).a_1 = \sum x_i y_i \end{array}} \quad .$$

Penyelesaiannya adalah :

$$\boxed{a_0 = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}}$$

$$\boxed{a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}} \quad .$$

Koefisien-koefisien dari garis regresi linier metode kuadrat terkecil pada kedua persamaan tersebut disebut koefisien regresi.

9.1.2 Regresi Polinom

Misalkan n pasangan koordinat (x_i, y_i) yang diberikan akan dihampiri oleh sebuah fungsi kuadrat yang dinyatakan oleh :

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ .$$

Sehingga jumlah kuadrat galat diberikan oleh :

$$S = \sum \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2 = \sum \left(y_i - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 \right)^2 \ .$$

Turunkan S terhadap a_0, a_1, a_2 dan samakan masing-masing turunan terhadap koefisien-koefisien ini dengan nol, maka akan diperoleh :

$$\boxed{\begin{array}{l} na_0 + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 = \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 = \sum x_i y_i \\ a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i \end{array}} \ .$$

Pertemuan ke : 10

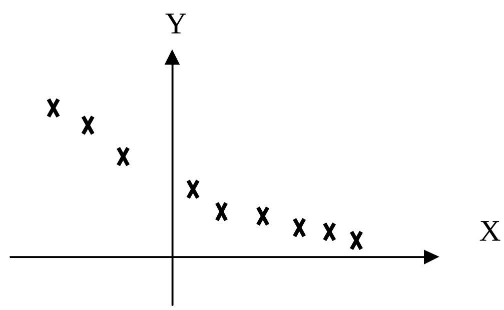
Penyusun : Dewi Rachmatin dan Heri Sutarno

Materi : Penghampiran Fungsi dengan Metode Kuadrat Terkecil (Fungsi Eksponensial, Hiperbol, Trigonometri, dan Geometri)

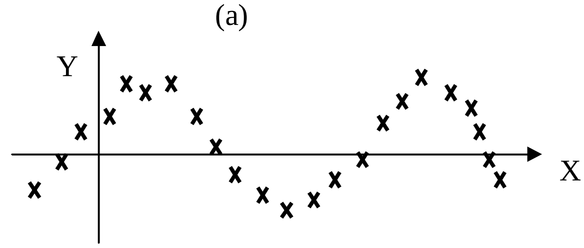
URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

10.1 Pencocokan Fungsi Eksponensial dan Fungsi Trigonometri

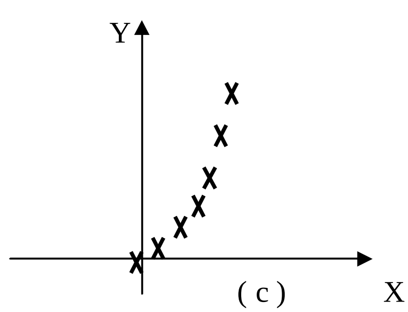
Perhatikan beberapa tipe dari distribusi titik-titik percobaan yang ditunjukkan pada gambar berikut : (a) menyerupai sebuah kurva eksponensial yang menurun, sedang gambar (b) menyerupai sebuah kurva sinus dan gambar (c) menyerupai sebuah kurva geometri.



(a)



(b)



(c)

10.1.1 Pencocokan Sebuah Kurva Eksponensial

Misalkan $\hat{y} = a\ e^{-bx}$ adalah kurva yang akan dicocokkan. Transformasi yang digunakan adalah $\hat{z} = \log \hat{y}$. Gunakan transformasi ini pada persamaan sebelumnya sehingga diperoleh :

$$\hat{z} = \log \hat{y} = \log a\, e^{-bx} = \log a + (-bx) \quad .$$

Misalkan $a_0 = \log a$ dan $a_1 = -b$. Akibatnya : $\hat{z} = a_0 + a_1 x$.

Persamaan tersebut merupakan persamaan linier dan dapat menggunakan persamaan normal untuk regresi linier sehingga diperoleh :

$$\boxed{\begin{aligned} &n a_0 + \left(\sum x_i\right) a_1 = \sum z_i \\ &\left(\sum x_i\right) a_0 + \left(\sum x_i^2\right) a_1 = \sum x_i z_i \end{aligned}} \quad .$$

Dari a_0 dan a_1 diperoleh nilai a dan b : $a = e^{a_0}$ dan $b = -a_1$.

10.1.2 Pencocokan Sebuah Kurva Hiperbol

Asumsikan persamaan pada kasus ini adalah $\hat{y} = \dfrac{1}{a + bx}$. Jika ditulis $\hat{z} = \dfrac{1}{\hat{y}}$ maka diperoleh $\hat{z} = a + bx$ yang merupakan persamaan linier.

10.1.3 Pencocokan Sebuah Fungsi Trigonometri

Asumsikan persamaan kurva : $\hat{y} = A \sin(\omega\ x + \varphi)$.

Persamaan ini mempunyai tiga parameter yang tidak diketahui yaitu A, ω dan φ. Diakan mengasumsikan bahwa ω diketahui. Perluas persamaan tersebut sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \hat{y} &= A(\sin \omega x \cos \varphi + \cos \omega x \sin \varphi) \\ &= A \cos \varphi \sin \omega x + A \sin \varphi \cos \omega x = a_1 \sin \omega x + a_2 \cos \omega x \ . \end{aligned}$$

Minimumkan jumlah kuadrat galat berikut :

$$S = \sum \left(y_i - a_1 \sin \omega x_i - a_2 \cos \omega x_i\right)^2 .$$

Samakan dengan nol turunan parsial dari S terhadap a_1 dan a_2 agar diperoleh

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 \sum \sin^2 \omega x_i + a_2 \sum \sin \omega x_i \cos \omega x_i &= \sum y_i \sin \omega x_i \\ a_1 \sum \sin \omega x_i \cos \omega x_i + a_2 \sum \cos^2 \omega x_i &= \sum y_i \cos \omega x_i \end{aligned}}.$$

Selesaikan dua persamaan linier simultan untuk a_1 dan a_2 di atas agar diperoleh

$$\boxed{A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{dan} \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right).}$$

10.1.4 Kurva Geometri

Misalkan kurva yang dicocokkan dinyatakan oleh persamaan :

$$\hat{y} = a\, x^b + c \quad .$$

Asumsikan parameter a dan b tidak diketahui sedangkan c diketahui sehingga

$$(\hat{y} - c) = a\, x^b \ .$$

Ambil logaritma pada kedua ruas persamaan tersebut sehingga diperoleh :

$$\hat{z} = \log(\hat{y} - c) = \log a x^b = \log a + b \log x$$

$$\hat{z} = a_0 + a_1 t$$

dengan $a_0 = \log a$, $a_1 = b$ dan $t = \log x$.

Akibatnya :

$$\boxed{\begin{aligned} & n \log a + \left(\sum \log x_i\right) b = \sum \log(\hat{y}_i - c) \\ & \left(\sum \log x_i\right) \log a + \sum (\log x_i)^2 b = \sum \log x_i \log(\hat{y}_i - c). \end{aligned}}$$

Pertemuan ke : 11

Penyusun : Dewi Rachmatin dan Heri Sutarno

Materi : 1. Penghampiran Fungsi dengan Deret Taylor

2. Penghampiran Fungsi dengan Deret Chebyshev

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

11.1 Penghampiran Fungsi dengan Deret Taylor

Teorema 11.1 :

Jika suatu fungsi $f(x)$ mempunyai turunan sampai turunan ke($n+1$) dalam selang [a, b] maka fungsi tersebut dapat dinyatakan di sekitar $x = x_0$ pada selang [a, b] sebagai :

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} \\ &+ \ldots + f^{n}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + f^{n+1}(s)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad . \end{aligned}}$$

Pada persamaan di atas $f'(x_0)$ dan $f''(x_0)$ adalah turunan pertama dan kedua dari $f(x)$ yang dievaluasi pada $x = x_0$. Suku $f^{n+1}(s)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ disebut **suku sisa** dengan s adalah bilangan yang terletak antara *x* dan x_0. Suku sisa memberikan galat pemotongan jika hanya n buah suku pertama pada deret Taylor yang digunakan untuk menyatakan fungsi. Galat pemotongannya adalah :

Galat pemotongan = $\dfrac{\left|f^{n+1}(s)\right| \left|(x-x_0)^{n+1}\right|}{(n+1)!}$ atau

$$T_E \le \frac{\left|(x-x_0)^{n+1}\right|}{(n+1)!}.M \; ;$$

dimana $M = \max\left|f^{n+1}(s)\right|$ untuk *x* pada selang [*a*, *b*].

11.2 Deret Chebyshev

Polinom Chebyshev yang didefinisikan oleh .

$T_n(x) = \text{Cos}\, n\, \theta$ dimana $x = \text{Cos}\, \theta$.

Maka $\boxed{T_n(x) = \text{Cos}\,(n \text{ arc cos } x)}$

Polinom-polinom tersebut adalah :

$T_0(x) = \text{Cos}\, 0 = 1$

$T_1(x) = \text{Cos}\, \theta = x$

$T_2(x) = \text{Cos}\, 2\theta = \text{Cos}^2\theta - \text{Sin}^2\theta$

$= x^2 - (1-x^2) = (2x^2 - 1)$.

Selain pembentukan suku-suku menggunakan relasi trigonometri seperti di atas, dapat dibentuk relasi yang mendefinisikan T_{n+1} dalam T_n dan T_{n-1}.

$T_{n+1}(\text{x}) = \text{Cos}(n + 1)\, \theta = \text{Cos}\, n\, \theta\, \text{Cos}\, \theta - \text{Sin}\, n\, \theta\ \text{Sin}\, \theta$

$T_{n-1}(x) = \text{Cos}\,(n - 1)\, \theta = \text{Cos}\, n\, \theta\, \text{Cos}\, \theta + \text{Sin}\, n\, \theta\ \text{Sin}\, \theta$.

Dengan menambahkan dua persamaan di atas diperoleh :

$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\, \text{Cos}\, n\, \theta\, \text{Cos}\, \theta = 2\, x\, T_n(x)$

Maka $T_{n+1}(x) = 2\, x\, T_n(x) - T_{n-1}(x)$.

Sehingga diperoleh :

$T_3(\text{x}) = 4\, x^3 - 3\, x$

$T_4(\text{x}) = 8\, x^4 - 8\, x^2 + 1$

$T_5(x) = 16\, x^5 - 20\, x^3 + 5\, x$.

Fungsi e^{-x} dinyatakan dalam polinom Chebyshev sebagai berikut :

$e^{-x} = 1{,}266066\, T_0 - 1{,}130318\, T_1 + 0{,}271495\, T_2 - 0{,}044337\, T_3$

$+ 0{,}005474\, T_4 - 0{,}000543\, T_5$.

Jika pernyataan untuk T_0 , T_1 , T_2 , T_3 , T_4 , dan T_5 digantikan ke dalam persamaan tersebut diperoleh :

$e^{-x} = 1{,}000045 - 1{,}000022\, x + 0{,}499199\, x^2 - 0{,}166488\, x^3 + 0{,}043794\, x^4 - 0{,}008687\, x^5$.

Pertemuan ke : 12

Penyusun : Dewi Rachmatin dan Heri Sutarno

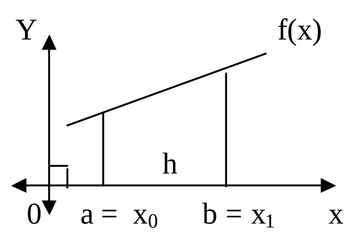
Materi : Integral Numerik (Aturan Trapesium, Aturan Komposisi Trapesium)

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

12.1 Aturan Trapesium

Mengevaluasi suatu integral tertentu $I = \int_a^b f(x)dx$ untuk f(x) sebarang fungsi yang kontinu pada selang [a,b], dengan metode analitik biasanya sulit bahkan ada yang tak dapat dievaluasi. Mengatasi persoalan ini dan persoalan integrasi yang lebih umum yang hanya mempunyai beberapa nilai dari f(x) (dengan argumen $x = x_i$, i = 0, 1, 2, ..., n) dibutuhkan beberapa pendekatan. Pilihannya adalah mencari sebuah fungsi, misalnya g(x) yang sesuai untuk mengatasi kedua persoalan yaitu merupakan pendekatan dari f(x) yang mudah untuk diintegralkan secara analitik.

Diberikan dua buah titik data $(x_0,f(x_0))$ dan $(x_1,f(x_1))$. Karena f(x) melalui dua buah titik $(x_0,f(x_0))$ dan $(x_1,f(x_1))$, maka dipakai interpolasi berorde satu $f(x) \approx P_1(x)$.



Integral dengan Aturan Trapesium, h = b - a

Menurut interpolasi beda terbagi Newton orde satu :

$$P_1(x) = f_0 + f[x_0,x_1]\,(x-x_0).$$

Dengan memakai $f(x) \approx P_1(x)$ tersebut diperoleh :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx \approx \int_a^b [\,f_0 + f[x_0,x_1](x-x_0)]dx$$

$$\approx f_o x\Big]_a^b + \int_a^b \frac{f_1 - f_o}{x_1 - x_o}(x - x_o)dx .$$

Dapat ditunjukkan bahwa bentuk terakhir ini sama dengan

$$\frac{b-a}{2}\left(f_o + f_1\right) \text{ atau } \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right).$$

Jadi aturan trapesium adalah

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right) \text{ dengan } h = b - a.}$$

.

12.2 Aturan Komposisi Trapesium

Selang [a,b] dibagi menjadi n selang bagian dengan lebar selang :

h = $\frac{b-a}{n}$. Berdasarkan aturan trapesium diperoleh

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{2}\left(f(x) + f(x_1)\right) + \frac{h}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right) + \cdots + \frac{h}{2}\left(f(x_{n-1}) + f(b)\right)$$

$$\approx \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1})).$$

Jadi, $\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) .}$

.

Pertemuan ke : 13

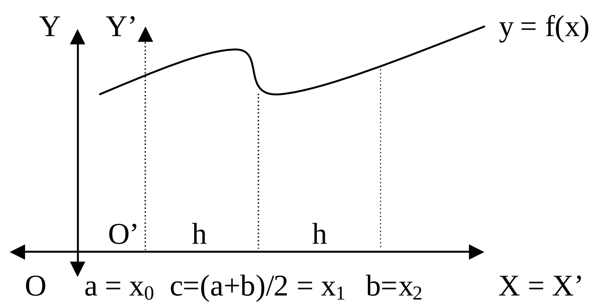
Penyusun : Dewi Rachmatin dan Heri Sutarno

Materi : Integral Numerik (Aturan Simpson, Aturan Komposisi Simpson, dan Kuadratur Gauss-Legendre)

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

13.1 Aturan Simpson ($\frac{1}{3}$)

Aturan Simpson mirip dengan aturan trapesium yaitu keduanya membagi daerah yang akan diintegralkan dalam interval bagian yang kecil dan kemudian menjumlahkan semua integral dari daerah yang dibatasi oleh sumbu yang kecil tersebut. Hanya dalam aturan Simpson pendekatan fungsi f(x) diperoleh dari interpolasi polinomial derajat dua (parabola) yang melalui tiga ordinat dari dua selang yang berdampingan. Jadi aturan Simpson akan tepat untuk fungsi derajat dua atau lebih kecil. Perhatikan gambar berikut.



Aturan Simpson (1/3)

Dengan polinomial Lagrange yang melalui titik-titik (a,f(a)), (c,f(c)), dan (b,f(b)) diperoleh:

$$P_2(x) \approx \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} f(a) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} f(b) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c).$$

Substitusikan ke dalam $I = \int_a^b f(x)dx$ akan diperoleh

$$I = \int_a^b \left[\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} f(a) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} f(b) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c) \right] dx$$

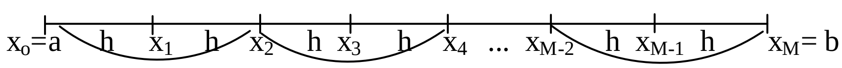
Jika sumbu y ditranslasikan sehingga berimpit dengan titik a, maka dapat ditunjukkan :

$$I = \int_o^{2h} \left[\frac{(x-2h)(x-h)}{(o-2h)(o-h)} f(a) + \frac{(x-o)(x-h)}{(2h-o)(2h-h)} f(b) + \frac{(x-o)(x-2h)}{(h-o)(h-2h)} f(c) \right] dx$$

$$= \ldots = \frac{1}{3} h \left[f(a) + 4f(c) + f(b) \right]. \quad \text{Jadi,} \quad \boxed{I = \frac{1}{3} h \left[f_o + 4f_1 + f_2 \right]} \quad .$$

13.2 Aturan Komposisi Simpson $\left(\frac{1}{3} \right)$

Selang [a,b] dipartisi menjadi (M+1) titik dengan M genap, dengan lebar selang bagiannya h = $\left(\frac{b-a}{M} \right)$.



Berdasarkan aturan Simpson diperoleh

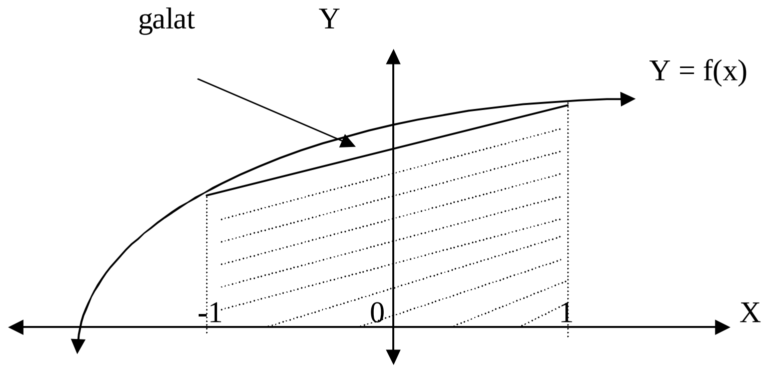
$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{M-2}}^{b} fx)dx$$

$$= \frac{4}{3}\left[f(a) + 4f_1 + f_2 \right] + \frac{4}{3}\left[f_2 + 4f_3 + f_4 \right] + \cdots + \frac{4}{3}\left[f_{M-2} + 4f_{M-1} + f_b \right].$$

$$\boxed{I = \frac{4}{3} \left[f(a) + f(b) + 4\sum_{\substack{i=1 \\ \Delta i=2}}^{M-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2 \\ \Delta i=2}}^{M-2} f(x_i) \right]} \quad .$$

13.3 Kuadratur Gauss - Legendre

Kita ingin menghitung luas daerah di bawah kurva Y = f(x) pada $-1 \le x \le 1$ yaitu $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ dengan aturan trapesium.



$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(1) + f(-1)] \approx f(1) + f(-1)$ dengan h = (1-(-1)) = 2.

Persamaan $I \approx f(1) + f(-1)$ dapat ditulis sebagai $I \approx W_1 f(a) + W_2 f(b)$ dengan a = -1, b = 1, $W_1 = W_2 = \frac{h}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Dengan cara koefisien tak tentu, dan diuji dengan monomial 1, x, x^2, dan x^3, karena $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ eksak untuk empat fungsi tersebut, diperoleh:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx W_1 f(x_1) + W_2 f(x_2) \approx 1.f(-\sqrt{\frac{1}{3}}) + 1.f(\sqrt{\frac{1}{3}}) \approx f(-\sqrt{\frac{1}{3}}) + f(\sqrt{\frac{1}{3}})$$

Jadi $\boxed{I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\sqrt{\frac{1}{3}}) + f(\sqrt{\frac{1}{3}})}$.

Persamaan ini dinamakan **metode Gauss-Legendre 2 titik**. Dengan metode ini, menghitung integral f(x) dalam selang [-1, 1] cukup hanya dengan mengevaluasi fungsi f di $x = 1/\sqrt{3}$ dan di $x = -1\sqrt{3}$.

Metode Gauss-Legendre 3 titik dapat ditulis sebagai

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx W_1 f(x_1) + W_2 f(x_2) + W_3 f(x_3)$$

Parameter x_1, x_2, x_3, W_1,W_2, dan W_3 dapat dicari dengan fungsi $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, dan $f(x) = x^5$, karena kuadratur Gauss bernilai eksak untuk fungsi-fungsi tersebut. Dengan cara yang sama seperti untuk metode Gauss-Legendre 2 titik akan diperoleh :

$$\boxed{I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{5}{9}.f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}.f(0) + \frac{5}{9}.f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)} \quad .$$

Aturan Gauss-Legendre umum n-titik eksak untuk polinom berderajat kurang dari atau sama dengan (2n-1). Penurunan metode Gauss-Legendre 2-titik dan 3-titik dapat dijadikan pola untuk menghasilkan metode Gauss-Legendre n-titik

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx W_1 f(x_1) + W_2 f(x_2) + \cdots + W_n f(x_n) \quad .$$

Tabel Nilai-nilai w_n , x_n dan galat pemotongan untuk Kuadratur Gauss-Legendre 6 titik

N	Bobot W_n	Absis x_n	Galat pemotongan
2	1,00000000 1,00000000	-0,57735027 0,57735027	$\approx f^{(4)}(c)$
3	0,55555556 0,88888889 0,55555556	-0,77459667 0 0,77459667	$\approx f^{(6)}(c)$
4	0,34785485 0,65214515 0,65214515 0,34785485	-0,86113631 -0,33998104 0,33998104 0,86113631	$\approx f^{(8)}(c)$
5	0,23692689 0,47862867 0,56888889 0,47862867 0,23692689	-0,90617985 -0,53846931 0 0,53846931 0,90617985	$\approx f^{(10)}(c)$
6	0,17132449 0,36076157 0,46791393 0,46791393 0,36076157 0,17132449	-0,93246951 -0,66120939 -0,23861919 0,23861919 0,66120939 0,93246951	$\approx f^{(12)}(c)$

Untuk menghitung integrasi $I = \int_a^b f(x)dx$ harus dilakukan transformasi:

a) selang [a,b] ke dalam [-1,1]
b) peubah x ke dalam peubah z
c) diferensial dx ke dalam dz .

Dari transformasi z = px+q atau z = $\frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}$ akan diperoleh :

x = $\frac{b-a}{2}z + \frac{b+a}{2}$ sehingga dx = $\frac{b-a}{2}dz$.

Substitusikan x dan dx ke $I = \int_a^b f(x)dx$, maka akan diperoleh

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}z + \frac{b+a}{2}\right)dz} .$$

Pertemuan ke	:	14
Penyusun	:	Dewi Rachmatin dan Heri Sutarno
Materi	:	1. Solusi Persamaan Diferensial Biasa 2. Metode Euler

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

14.1 Solusi Persamaan Diferensial Biasa

Bentuk baku PDB orde satu dengan nilai awal ditulis sebagai

$$\boxed{\begin{array}{l} y' = f(x.y) \\ \text{dengan nilai awal } y(x_0) = y_0 \end{array}} \quad .$$

PDB orde satu yang tidak mengikuti bentuk baku tersebut harus ditulis ulang menjadi bentuk persamaan seperti di atas, agar ia dapat diselesaikan secara numerik.

Penyelesaian PDB secara numerik berarti menghitung nilai fungsi di $x_{r+1} = x_r + h$ dengan h adalah ukuran langkah setiap iterasi. Pada metode analitik, nilai awal berfungsi untuk memperoleh solusi yang unik, sedangkan pada metode numerik nilai awal berfungsi untuk memulai iterasi.

14.2 Metode Euler

Diberikan PDB orde satu, $y' = dy/dx = f(x,y)$ dan $y(x_0) = y_0$. Misalkan $y_r = y(x_r)$ adalah hampiran nilai y di x_r yang dihitung dengan metode Euler. Dalam hal ini $x_r = x_0 + rh$, dengan r = 0,1,2,...n. Metoda Euler diturunkan dengan menguraikan $y(x_{r+1})$ di sekitar x_r ke dalam deret Taylor :

$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)}{1!} \,.\, y'(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2!} \,.\, y''(x_r) + \ldots$$

Dua suku pertama persamaan tersebut adalah

$$\boxed{y(x_{r+1}) \approx y(x_r) + hf(x_r, y_r)} \quad ; \quad r = 0,1,2,\ldots,n$$

menyatakan persamaan **metode Euler** atau **metode Euler-Cauchy**. Metode Euler disebut juga **metode orde-pertama.**

Metode Euler memberikan hampiran solusi yang buruk, sehingga dalam masalah praktek metode ini kurang disukai, namun metode ini membantu untuk memahami gagasan dasar metode penyelesaian PDB dengan orde yang lebih tinggi.

Pertemuan ke : 15

Penyusun : Dewi Rachmatin dan Heri Sutarno

Materi : 1. Solusi PDB dengan Metode Heun

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

15.1 Metode Heun

Metode Euler mempunyai ketelitian yang rendah karena galatnya besar (sebanding dengan h). Buruknya galat ini dapat dikurangi dengan menggunakan metode Heun, yang merupakan perbaikan metode Euler (*modified Euler's method*). Pada metode Heun, solusi dari metode Euler dijadikan sebagai solusi perkiraan awal (*predictor*).

Metode Heun adalah sebagai berikut :

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{2}\,[f(x_r, y_r) + f(x_{r+1}, y_{r+1})]\ .$$

yang merupakan **metode Heun**, atau **metode Euler-Cauchy yang diperbaiki.**

Metode Heun dapat diterapkan untuk mencari solusi PDB berikut :

$$dy/dx = x + y\ ;\ y(0) = 1$$

Hitung y(0.10) dengan metode Heun (h = 0.02).

Pertemuan ke : 16

Penyusun : Dewi Rachmatin dan Heri Sutarno

Materi : UAS (Materi pertemuan 9 sampai dengan 15)

Daftar Pustaka :

Atkinson, K. (1985). *Elementary Numerical Analysis.* New York : John Wiley & Sons.

Chapra, S. & Canale. (1991). *Numerical Methods for Engineers with Personal Computer Applications.* MacGraw-Hill Book Company.

Conte, S. & Boor. (1992). *Elementary Numerical Analysis, An Algorithmic Approach. 3rd Edition.* MacGraw-Hills. Inc.

Epperson, J. (2002). *Introduction to Numerical Methods and Analysis.* New York John Wiley & Sons.

Mathews, J. (1993). *Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering. 2nd Edition.* London : Prentice-Hall Int.

Munir, R. (1997). *Metode Numerik untuk Teknik Informatika.* Institut Teknologi Bandung.

Nakamura. S. (1991). *Applied Numerical Methods with Software.* London: Prentice-Hall Int.

Rajaraman, V. (1981). *Computer Oriented Numerical Methods.* New Delhi : Prentice-Hall of India.

Ralston, A. (1965). *A First Course in Numerical Analysis.* McGraw-Hill.

Susila, Nyoman. (1994). *Dasar-dasar Metode Numerik.* Jakarta : DIKTI.

Walpole, R. & Myers. (1986). *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan.* Bandung : Penerbit ITB.