Herramientas de álgebra lineal para la ingeniería. Problemas resueltos

María Isabel García Planas
Sonia Tarragona Romero

Primera edición: Septiembre 2014

Editora: M. Isabel García Planas

ISBN: 978-84-617-1260-1

La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles.

René Descartes (Francia, 1596-1650)

Índice general

Presentación

Este libro recoge el material de ejercicios preparado para los estudiantes de la asignatura de álgebra lineal de las titulaciones de Grado en Ingeniería de Materiales, Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales y Grado en Ingeniería Química, del Plan 2010, que se imparten en la ETSEIB y en la que el álgebra es una unidad docente obligatoria. Se trata de un libro de ejercicios básicos de esta materia, si bien se presentan algunos ejercicios con elementos más específicos de interés para los estudios a seguir.

Este libro está distribuido por temas que son los clàsicos en un libro de álgebra lineal: espacios vectoriales, aplicaciones lineales entre espacios vectoriales, reducción de endomorfismos así como la resolución de ejercicios básicos sobre endomorfismos ortogonales y simétricos. Junto a estos temas centrales aparecen aquellos que son herramienta para el estudio de los anteriormente citados: números complejos, polinomios, matrices, sistemas de ecuaciones lineales y determinantes.

Al inicio de cada tema hay una reseña histórica. La información para la elaboración de dichas notas ha sido extraída de los siguientes textos sobre historia de las matemáticas: [2], [3], [4], [13], [16], [17], [18] y [19].

La intención de las autoras es ofrecer a los estudiantes un texto completo de ejercicios básicos de álgebra lineal que les permita conseguir agilidad en la resolución de problemas más complejos que le puedan surgir en los que se aplique el álgebra lineal.

Las autoras

Barcelona, 15 de Septiembre de 2014.

Capítulo 1

Preliminares: números complejos, polinomios

La matemática apareció originariamente como parte de la vida diaria del hombre. La llamada "supervivencia de los mejores adapatados"está estrechamente relacionada con el desarrollo de los sucesivos conceptos matemáticos. Una gran parte de lo que hoy conocemos como matemática es el resultado de un pensamiento que originalmente se centró en los conceptos de número, magnitud y forma como consecuencia de la creciente necesidad e inquietud del ser humano por contar, medir y determinar la forma de todo aquello que le rodeaba, para su subsistencia, ya sea en agricultura o en las transacciones comerciales; ya sea en las guerras o en los repartos de poder de unos sobre otros. Es así como los números irán constituyéndose como el alfabeto universal del lenguaje de las matemáticas.

Sin embargo, el concepto de número tal cual lo conocemos hoy y, más aún, su extensión a utilizarlo por la inmensa mayoría de los individuos dentro de un sistema decimal es algo que no ocurrió ni en un día ni por obra de un sólo individuo, sino que viene a ser el resultado de un largo y lento proceso que se inició hace millones de años. Una muestra de ello, y que podemos denominarla como una primera evidencia arqueológica, la encontramos en el hueso de Lebombo, hallado en Suazilandia y datado en 35.000 años de antigüedad. Este objeto es un peroné de babuino con un total de 29 hendiduras que, según las excavaciones arqueológicas que se llevaron a cabo en 1973, fueron usadas por las mujeres de la época para mantener la cuenta de sus ciclos menstruales, ya que otros huesos y piedras se han encontrado con entre 28 y 30 hendiduras, existiendo siempre una marca significativa en la última.

Las diferentes culturas han ido utilizando este alfabeto según se iban descubriendo nuevos números.Y, hoy en día, con tan sólo diez símbolos podemos expresar todos los números que existen. ¿No os parece algo realmente maravilloso?

Gracias a la representación numérica, las matemáticas han podido desarrollarse mediante el juego con operaciones numéricas. Podemos afirmar que la única operación matemática que existe es la operación de "contar". Contar cada vez más deprisa, más rápidamente. Y es así como nacieron la suma o adición, la multiplicación, la potenciación. Y si contamos hacia atrás o negativamente obtenemos la resta o sustración, la división y la radicación que no es más que dividir rápidamente. Para que todas estas operaciones fueran haciéndose posibles, el concepto de número se fue generalizando para adapatarse a los nuevos requerimientos. En primera instancia se representaron los números naturales ($\mathbb{N}$) con los que el recuento de bienes poseídos quedaba perfectamente simbolizado. Sin embargo, no así los bienes perdidos o sustraídos, dando lugar a la necesidad de representar los enteros negativos completando el anillo de los enteros ($\mathbb{Z}$). En cuanto a la repartición, no siempre resultaba posible la división exacta dando lugar a la aparición de los números racionales($\mathbb{Q}$). Y, por último, para representar aquellos números que no eran solución de fracción alguna se constituyó el conjunto de los irracionales complementando así el cuerpo de los números reales ($\mathbb{R}$). Más, tampoco con los números reales es posible la radicación pues, por ejemplo, la raíz cuadrada de un número negativo queda sin solución y, por tanto, a los números ya existente hubo que añadir un conjunto de números imaginarios hoy conocido como el cuerpo de los números complejos ($\mathbb{C}$).

Esta representación numérica, que hoy es ampliamente admitida por todos los individuos, con cada nueva ampliación, "tuvo que luchar mucho tiempo contra la resistencia inerte de la costumbre"(Rey Pastor, *Análisis matemático*).

El matemático, gracias al simbolismo de la numeración, de las operaciones y de las relaciones entre los números, dispone de una lengua sumamente sencilla con la cual realizar los descubrimientos más asombrosos. Laplace, gran matemático y astrónomo francés, dice: "Es a la India que debemos el ingeniosos método para expresar todos los números por medio de diez símbolos, cada uno de los cuales, además de tener un valor absoluto (representado por su figura) tiene un valor por la posición que ocupa; es una idea profunda e importante que de tan sencilla como nos parece ahora, hace que no nos demos cuenta de su valor real; pero su gran sencillez y la enorme facilidad que da para todos los cálculos sitúa nuestra aritmética en la primera fila de los grandes inventos útiles. Y apreciaremos todavía mejor la importancia de esta idea capital si tenemos presente que se escapó a los genios de Arquímedes y Apolonio, dos de los hombres más eminentes que nos dio la Antigüedad".

Ejercicios

1. Expresar en forma exponencial los números complejos siguientes:

$$\text{(a)}\quad 4-4i\,. \qquad \text{(b)}\quad \sqrt{3}+3i\,. \qquad \text{(c)}\quad 6+2\sqrt{3}i\,.$$

Solución:

a) $z = 4-4i$, $r = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{4}{4\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

$$\boxed{\Longrightarrow \ z = 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}.}$$

b) $z = \sqrt{3}+3i$, $r = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

$$\boxed{\Longrightarrow \ z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}.}$$

c) $z = 6+2\sqrt{3}i$, $r = \sqrt{36+12} = 4\sqrt{3}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{6}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

$$\boxed{\Longrightarrow \ z = 4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}.}$$

— — —

2. Escribir en forma binómica los números complejos siguientes:

$$\text{(a)}\quad 6e^{i\pi/4}\,, \qquad \text{(b)}\quad 4e^{-\pi i/3}\,, \qquad \text{(c)}\quad 5e^{\pi i}\,.$$

Solución:

a) $z = 6e^{i\frac{\pi}{4}} \;\Rightarrow r = 6,\ \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

$z = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) = 6(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}) = \boxed{3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i.}$

b) $z = 4e^{-i\frac{\pi}{3}} \;\Rightarrow r = 4,\ \alpha = -\dfrac{\pi}{3}$

$z = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) = 4(\cos -\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\, -\dfrac{\pi}{3}) = \boxed{2 - 2\sqrt{3}i.}$

c) $z = 5e^{i\pi} \;\Rightarrow r = 5,\ \alpha = \pi$

$z = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) = 5(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi) = \boxed{-5.}$

— — —

3. Calcular:

$$\text{(a)}\quad (2+\sqrt{3}i)^5. \qquad \text{(b)}\quad (1+i)^6.$$

Solución:

a)

$$(2+\sqrt{3}i)^5 =$$
$$\binom{5}{0}2^5 + \binom{5}{1}2^4\sqrt{3}i + \binom{5}{2}2^3(\sqrt{3}i)^2 + \binom{5}{3}2^2(\sqrt{3}i)^3 + \binom{5}{4}2(\sqrt{3}i)^4 + \binom{5}{5}(\sqrt{3}i)^5 =$$
$$(32 - 240 + 90) + (-120\sqrt{3} + 80\sqrt{3} + 9\sqrt{3})i = \boxed{118 - 31\sqrt{3}i.}$$

b)

$$(1+i)^6 = (\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}))^6 = (\sqrt{2})^6(\cos\frac{6\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{6\pi}{4}) = \boxed{-8i.}$$

— — —

4. Calcular: $\sqrt{\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^{60}}{(-1+i)^{20}}}$.

Solución:

$\sqrt{\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^{60}}{(-1+i)^{20}}} = \sqrt{z_1 \cdot z_2}$ con

$z_1 = (1+\sqrt{3}i)^{60}$ y

$z_2 = \dfrac{1}{(-1+i)^{20}} = \dfrac{(-1-i)^{20}}{(-1+i)^{20}(-1-i)^{20}} = \left(\dfrac{-1-i}{2}\right)^{20}$

$z_1 = (r_1(\cos\alpha_1 + i\mathrm{sen}\,\alpha_1))^{60} = (2(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{3}))^{60} = 2^{60}(\cos\dfrac{60\pi}{3} + i\mathrm{sen}\,\dfrac{60\pi}{3}) = 2^{60}$

$z_2 = (r_2(\cos\alpha_2 + i\mathrm{sen}\,\alpha_2))^{20} = (\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\mathrm{sen}\,\dfrac{5\pi}{4}))^{20} = (\dfrac{\sqrt{2}}{2})^{20}(\cos 20\dfrac{5\pi}{4} + i\mathrm{sen}\,20\dfrac{5\pi}{4}) = -\dfrac{1}{2^{10}}$

$\sqrt{z_1 z_2} = \sqrt{2^{60}(-\dfrac{1}{2^{10}})} = \sqrt{-2^{50}} = \boxed{\pm 2^{25} i.}$

— — —

5. Encontrar $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^2 = (1+i)^2$.

Solución:

$$\boxed{z = \sqrt{(1+i)^2} = \pm(1+i).}$$

— — —

6. Calcular las raíces cuartas de $z = -16i$.

Solución:

$r = \sqrt{(-16)^2} = 16 = 2^4$ y $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$.

Por lo tanto las raíces cuartas de dicho número son:

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2^4}(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4} + i\mathrm{sen}\,\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}) \text{ para } k = 0, 1, 2, 3.$$

Esto es:

$$\boxed{\begin{array}{ll} z_1 = 2(\cos\frac{3\pi}{8} + i\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{8}), & z_3 = 2(\cos\frac{11\pi}{8} + i\mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{8}), \\ z_2 = 2(\cos\frac{7\pi}{8} + i\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{8}), & z_4 = 2(\cos\frac{15\pi}{8} + i\mathrm{sen}\,\frac{15\pi}{8}). \end{array}}$$

— — —

7. Si u es una de las tres raíces cúbicas de $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, y w es una raíz cuadrada de $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, determinar $2iwu^2$.

Solución:

$$u = \left\{ \begin{array}{l} \cos\frac{2\pi}{9} + i\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9} = e^{\frac{2\pi}{9}i} \\ \cos\frac{8\pi}{9} + i\mathrm{sen}\,\frac{8\pi}{9} = e^{\frac{8\pi}{9}i} \\ \cos\frac{14\pi}{9} + i\mathrm{sen}\,\frac{14\pi}{9} = e^{\frac{14\pi}{9}i} \end{array} \right. \qquad w = \left\{ \begin{array}{l} \cos\frac{5\pi}{6} + i\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{6} = e^{\frac{5\pi}{6}i} \\ \cos\frac{11\pi}{6} + i\mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{6} = e^{\frac{11\pi}{6}i} \end{array} \right.$$

Realizando el producto $2iwu^2$, tenemos:

$$\boxed{2iwu^2 \in \{2e^{i\frac{16\pi}{9}}, 2e^{i\frac{25\pi}{9}}, 2e^{i\frac{28\pi}{9}}, 2e^{i\frac{37\pi}{9}}, 2e^{i\frac{22\pi}{9}}, 2e^{i\frac{31\pi}{9}}\}.}$$

— — —

8. Probar que sólo existen dos números complejos tales que su suma es igual a 2 y su producto es igual a $\frac{3}{4}$.

Solución:

Pongamos $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$.

$$\left. \begin{array}{rl} z_1 + z_2 & = 2 \\ z_1 z_2 & = \frac{3}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{rl} (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i & = 2 \\ (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i & = \frac{3}{4} \end{array} \right\}$$

$$\left.\begin{array}{rl} b_1 + b_2 & = 0 \\ a_1 + a_2 & = 2 \\ a_1a_2 - b_1b_2 & = \dfrac{3}{4} \\ a_1b_2 + a_2b_1 & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow b_1 = b_2 = 0, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{3}{2}$$

Luego dichos números son reales y son:

$$\boxed{z_1 = \frac{1}{2},\ z_2 = \frac{3}{2}.}$$

— — —

9. Determinar el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para el cual $\dfrac{3+2i}{1-i} + \alpha i$ es un número real.

Solución:

$$\frac{3+2i}{1-i} + \alpha i = \frac{3+2i}{1-i} + \frac{\alpha i(1-i)}{1-i} = \frac{(3+\alpha)+(2+\alpha)i}{1-i} =$$
$$\frac{((3+\alpha)+(2+\alpha)i)(1+i)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5+2\alpha}{2}i$$

Para que este número sea real ha de ser $5 + 2\alpha = 0$. Por lo que

$$\boxed{\alpha = -\frac{5}{2}.}$$

— — —

10. ¿Para qué valores de la constante $a \in \mathbb{R}$ el polinomio $p(t) = t^5 + at^4 + 7t^3 - 2t^2 + 4t - 8$, tiene 2 como raíz múltiple? Análogamente para $q(t) = t^5 - 6t^4 + at^3 - 8t^2$. ¿Cuál es su multiplicidad en cada caso?

Solución:

Apliquemos Ruffini con $t = 2$

	1	a	7	-2	4	-8
2)		2	4+2a	22+4a	40+8a	88+16a
	1	2+a	11+2a	20+4a	44+8a	(80+16a

$p(t) = (t-2)(t^4 + (2+a)t^3 + (11+2a)t^2 + (20+4a)t + 44 + 8a) + 80 + 16a$

luego para que el polinomio sea múltiplo de $t-2$ ha de ser $80 + 16a = 0$. De lo que deducimos que $a = -5$

En cuyo caso aplicando Ruffini de nuevo y tomando $a = -5$,

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -3 & 1 & 0 & 4 \\ 2) & & 2 & -2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & -2 & (0 \\ 2) & & 2 & 2 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & (0 & \end{array}$$

concluimos que

$$p(t) = (t-2)^3(t^2 + t + 1).$$

Estudiemos el polinomio $q(t)$.

Al igual que para $p(t)$, aplicamos Ruffini para $t = 2$

$q(t) = t^2((t-2)(t^2 - 4t + a - 8) + 2a - 24)$

luego para que el polinomio sea múltiplo de $t-2$ ha de ser $2a - 24 = 0$ y, por tanto, $a = 12$.

En cuyo caso y aplicando Ruffini de nuevo y tomando $a = 12$, observamos que $q(t) = t^2(t-2)^3$.

— — —

11. Para qué valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ el polinomio $p(t) = t^4 - at + 1$ es múltiplo del polinomio $q(t) = t^2 - t + a$?

Solución:

$t^4 - at + 1 = (t^2 - t + a)(t^2 + t + 1 - a) + (1 - 3a)t - a + a^2 + 1$

Para que el polinomio $t^4 - at + 1$ sea múltiplo de $t^2 - t + a$ ha de ser:

$$(1-3a)t - a + a^2 + 1 = 0$$

por lo que

$$\left.\begin{array}{rl} 1 - 3a & = 0 \\ -a + a^2 + 1 & = 0 \end{array}\right\} \text{ sistema incompatible}$$

Es decir, no existe ningún valor de a para el cual, el polinomio $p(t) = t^4 - at + 1$ es múltiplo del polinomio $q(t) = t^2 - t + a$.

— — —

12. Determinar el polinomio mónico $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ de grado 5 que verifica que 2 es raíz doble de $p(t)$, $p(0) = p'(0) = 0$ y $p(3) = 2$.

Solución:

$(t-2)^2$ es factor de $p(t)$.

$p(0) = p'(0) = 0$ luego t^2 es factor de $p(t)$.

Puesto que $p(t)$ es mónico y de grado 5, $p(t) = t^2(t-2)^2(t-a)$

Obliguemos ahora a que $p(3) = 2$

$p(3) = 3^2(3-2)^2(3-a) = 2$ por lo que $\boxed{a = \frac{25}{9}.}$

— — —

13. Encontrar un polinomio mónico de grado 5 tal que $p(0) = 10$, y $p'(t)$ tiene a 1 como raíz simple y a -2 como raíz triple.

Solución:

$$p(t) = t^5 + a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$$

Puesto que $p(0) = 10$ tenemos que $a_0 = 10$.

puesto que $p'(t)$ tiene a 1 como raíz simple y a -2 como raíz triple ha de ser

$$p'(t) = \lambda(t-1)(t+2)^3 = \lambda(t^4 + 5t^3 + 6t^2 - 4t - 8)$$

pero

$$p'(t) = 5t^4 + 4a_4t^3 + 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1$$

por lo que

$$\lambda = 5,\ a_4 = \frac{25}{4},\ a_3 = 10,\ a_2 = -10,\ a_1 = -40$$

y

$$\boxed{p(t) = t^5 + \frac{25}{4}t^4 + 10t^3 - 10t^2 - 40t + 10.}$$

— — —

14. Determinar el valor de a para el cual, los polinomios de $\mathbb{R}[t]$ $p(t) = t^2 - (3+a)t + 3a$ y $q(t) = t^2 - 4t + 4$ tengan una raíz común.

Solución:

Observamos que $q(t) = (t-2)^2$ por lo que, para que los polinomios dados tengan una raíz en común, 2 ha de ser raíz de $p(t)$.

Aplicando Ruffini para $t = 2$ al polinomio $p(t)$ tenemos

	1	-(3+a)	3a
2)		2	-2-2a
	1	-1-a	(-2+a

por lo que 2 es raíz de $p(t)$ si y sólo si $-2 + a = 0$. Esto es

$$\boxed{a = 2.}$$

— — —

15. Sea $p(t) \in \mathbb{R}[t]$. Si el resto de dividir $p(t)$ por $(t+1)$ es 3, por $(t-3)$ es 4, ¿Cuál es el resto de dividir $p(t)$ por $t^2 - 2t - 3$?

Solución:

Por las leyes de la divisibilidad sabemos que

$$\begin{array}{l} p(t) = (t+1)q_1(t) + 3 \\ p(t) = (t-3)q_2(t) + 4 \\ p(t) = (t^2 - 2t - 3)q_3(t) + (at + b) = (t+1)(t-3)q_3(t) + (at + b) \end{array}$$

Esto es

$$\left.\begin{array}{l} p(-1) = 3 = -a + b \\ p(3) = 4 = 3a + b \end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema, tenemos $a = \frac{1}{4}t, b = \frac{13}{4}$, es decir

$$\boxed{at + b = \frac{1}{4}t + \frac{13}{4}.}$$

— — —

16. Calcular el resto de dividir por $t-1$ el polinomio $p(t) = t^n + (n-1)t^{n-1} + t^{n-2} + (n-3)t^{n-3}$.

Solución:

$$p(t) = (t-1)q(t) + a$$

por lo que $p(1) = a = 1 + (n-1) + 1 + n - 3 = 2n - 2$

$$\boxed{a = 2n - 2.}$$

— — —

17. Determinar las raíces reales y dar la descomposición en factores irreducibles de los polinomios de $\mathbb{R}[t]$ siguientes a $\mathbb{R}[t]$ y $\mathbb{C}[t]$: (a) $p_1(t) = t^3 + t^2 - 8t - 12$ (b) $p_2(t) = t^5 - 5t^4 + 7t^3 - 2t^2 + 4t - 8$.

Solución:

a) Apliquemos Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & -8 & -12 \\
-2) & & -2 & 2 & 12 \\
\hline
 & 1 & -1 & -6 & (0 \\
-2) & & -2 & 6 & \\
\hline
 & & 1 & -3 & (0
\end{array}$$

Por lo que

$$\boxed{p_1(t) = (t+2)^2(t-3)}$$

tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{C}$.

b) Apliquemos de nuevo, Ruffini

	1	-5	7	-2	4	-8
2)		2	-6	2	0	8
	1	-3	1	0	4	(0
2)		2	-2	-2	-4	
	1	-1	-1	-2	(0	
2)		2	2	2		
	1	1	1	(0		

El polinomio t^2+t+1 es primo en $\mathbb{R}$, no así en $\mathbb{C}$ cuya descomposición es $t^2+t+1 = (t - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2})(t - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2})$

Por lo tanto

$$\boxed{\begin{array}{l} p_2(t) = (t-2)^3(t^2+t+1) \text{ en } \mathbb{R}, \\ p_2(t) = (t-2)^3(t - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2})(t - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}) \text{ en } \mathbb{C}. \end{array}}$$

— — —

18. Determinar el desarrollo de Taylor del polinomio $p(t) = t^5 - 3t^3 + 5$ en el punto $t = 1$. Utilizar este desarrollo para determinar el resto de la división de $p(t)$ por $t-1$ y por $(t-1)^2$.

Solución:

$$p(t) = p(1)+p'(1)(t-1)+\frac{p''(1)}{2!}(t-1)^2+\frac{p'''(1)}{3!}(t-1)^3+\frac{p^{iv}(1)}{4!}(t-1)^4+\frac{p^{v}(1)}{5!}(t-1)^5$$

Calulemos pues $p^i(1)$

$p(1) = 3$
$p'(t) = 5t^4 - 9t^2 \;\Rightarrow\; p'(1) = -4$
$p''(t) = 20t^3 - 18t \;\Rightarrow\; p''(1) = 2$
$p'''(t) = 60t^2 - 18 \;\Rightarrow\; p'''(t) = 42$
$p^{iv}(t) = 120t \;\Rightarrow\; p^{iv}(1) = 120$
$p^{v}(t) = 120 \;\Rightarrow\; p^{v}(1) = 120$

por lo tanto

$$\boxed{p(t) = 3 - 4(t-1) + (t-1)^2 + 7(t-1)^3 + 5(t-1)^4 + (t-1)^5.}$$

Observamos que

$$p(t) = 3 - (t-1)(4 + (t-1) + 7(t-1)^2 + 5(t-1)^3 + (t-1)^4)$$

por lo que

$$\boxed{p(t) = (t-1)c_1(t) + 3,}$$

$$p(t) = 3 - 4(t-1) + (t-1)^2(1 + 7(t-1) + 5(t-1)^2 + (t-1)^3)$$

por lo que

$$p(t) = (t-1)^2 c(t) + 3 - 4(t-1) = \boxed{(t-1)^2 c_2(t) - 4t + 4.}$$

— — —

19. Factoritzar como producto de polinomios primos en $\mathbb{Q}[t]$, $\mathbb{R}[t]$ y $\mathbb{C}[t]$ respectivamente, el siguiente polinomio: $p(t) = t^4 - t^2 - 2$.

Solución:

Llamemos $t^2 = y$, por lo que tenemos un polinomio de segundo grado en la variable y: $y^2 - y - 2$ que sabemos descomponer en $\mathbb{C}$ determinando las raíces de la ecuación subyacente $y^2 - y - 2 = 0$.

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2} = \begin{cases} y_1 = 2, \\ y_2 = -1. \end{cases}$$

Por lo tanto el polinomio $y^2 - y - 2$ descompone en

$$y^2 - y - 2 = (y-2)(y+1).$$

Susituyendo de nuevo y por t^2 tenemos

$$p(t) = t^4 - t^2 - 2 = (t^2 - 2)(t^2 + 1).$$

Observamos que t^2+1 no descompone ni en $\mathbb{R}$ ni en $\mathbb{Q}$ aunque sí en $\mathbb{C}$ (-1 sólo tiene raíces en $\mathbb{C}$) y que $t^2 - 2$ descompone en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ aunque no en $\mathbb{Q}$, (2 tiene raíces en $\mathbb{R}$ y por lo tanto en $\mathbb{C}$ pero no en $\mathbb{Q}$).

Finalmente tenemos

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{en } \mathbb{Q}: & p(t) = (t^2-2)(t^2+1) \\ \text{en } \mathbb{R}: & p(t) = (t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})(t^2+1) \\ \text{en } \mathbb{C}: & p(t) = (t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})(t-i)(t+i) \end{array}}$$

— — —

20. Calcular el máximo común divisor de las parejas de polinomios siguientes, descomponiéndolos primero como producto de factores primos:

1. $p_1(t) = t^4 - 7t^3 + 17t^2 - 17t + 6$

   $q_1(t) = t^4 - 2t^3 + t^2$

2. $p_2(t) = t^4 - 1$

   $q_2(t) = t^4 - 6t^3 + 13t^2 - 12t + 4$

Determinar también el mínimo común múltiplo de dichas parejas de polinomios.

Solución:

1) $p_1 = (t-1)^2(t-2)(t-3)$, en efecto

	1	-7	17	-17	6
1)		1	-6	11	-6
	1	-6	11	-6	(0
1)		1	-5	6	
	1	-5	6	(0	
2)		2	-6		
	1	-3	(0		

$q_1(t) = t^2(t-1)^2$,

Luego,

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{m.c.d.}(p_1, q_1) = (t-1)^2, \\ \text{m.c.m.}(p_1, q_1) = t^2(t-1)^2(t-2)(t-3). \end{array}}$$

2) $p_2(t) = (t-1)(t+1)(t^2+1)$

$q_2(t) = (t-1)^2(t-2)^2$, en efecto,

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -6 & 13 & -12 & 4 \\ 1) & & 1 & -5 & 8 & -4 \\ \hline & 1 & -5 & 8 & -4 & (0 \\ 1) & & 1 & -4 & 4 & \\ \hline & 1 & -4 & 4 & (0 & \\ 2) & & 2 & 4 & & \\ \hline & 1 & -2 & (0 & & \end{array}$$

Luego,

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{m.c.d.}(p_2, q_2) = (t-1), \\ \text{m.c.m.}(p_2, q_2) = (t-1)^2(t+1)(t-2)^2(t^2+1). \end{array}}$$

— — —

21. Sean $p(t) = t^3 - 6t^2 + 11t - 6$ y $q(t) = t^3 + 2t^2 - t - 2$. Encontrar dos polinomios $p_1(t)$, $q_1(t)$ tales que:

$$\text{m.c.d.}(p(t), q(t)) = p_1(t)p(t) + q_1(t)q(t).$$

Dicha igualdad se denomina *Identidad de Bezout*.

Solución:

Calculemos el m.c.d$(p(t), q(t)$ mediante el algoritmo de Euclides.

$$\begin{array}{l} p(t) = q(t)c(t) + r(t) = q(t) \cdot 1 + (-8t^2 + 12t - 4) \\ r(t) = p(t) - q(t)c(t) \\ q(t) = r(t)c_1(t) + r_1(t) = r(t)(-\frac{1}{8}t - \frac{7}{16}) + (\frac{15}{4}t - \frac{15}{4}) \\ r_1(t) = q(t) - r(t)c_1(t) \\ r(t) = r_1(t)c_2(t) = r_1(t)(\frac{32}{15}t - \frac{16}{15}) \end{array}$$

Luego el máximo común divisor es $\frac{15}{4}t - \frac{15}{4}$ que normalizado es $t-1$.

Sustituyendo en $r_1(t) = q(t) - r(t)c_1(t)$ el valor de $r(t)$ tenemos

$$r_1(t) = q(t) - (p(t) - q(t)c(t))c_1(t)$$

esto es

$$r_1(t) = -p(t)c_1(t) + q(t)(1 + c(t)c_1(t))$$

$$\boxed{\frac{15}{4}t - \frac{15}{4} = -p(t)\left(-\frac{1}{8}t - \frac{7}{16}\right) + q(t)\left(1 + 1\left(-\frac{1}{8}t - \frac{7}{16}\right)\right).}$$

— — —

22. Escribir la tabla de la suma y del producto en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ y comprobar que es un cuerpo.

Solución:

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[0]	[1]	[2]	[3]

·	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[0]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[0]	[3]	[1]	[4]	[2]
[4]	[0]	[4]	[3]	[2]	[1]

La simetría de las tablas nos aseguran la conmutatividad de ambas operaciones.

Con respecto la suma, observamos que [0] es el elemento neutro, y que el elemento simétrico de [1] es [4], de [2] es [3].

Con respecto el producto observamos que [1] es el elemento neutro, y que el elemento simétrico de [2] es [3], de [4] es [4].

Las demás propiedades se comprueban fácilmente.

— — —

23. Determinar los elementos $[x]$ de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ que no son [0] y que no tienen inverso.

Solución:

Escribamos la tabla de multiplicar

$\cdot$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[2]$	$[0]$	$[2]$	$[4]$	$[0]$	$[2]$	$[4]$
$[3]$	$[0]$	$[3]$	$[0]$	$[3]$	$[0]$	$[3]$
$[4]$	$[0]$	$[4]$	$[2]$	$[0]$	$[4]$	$[2]$
$[5]$	$[0]$	$[5]$	$[4]$	$[3]$	$[2]$	$[1]$

De la tabla se deduce que estos elementos son:

$$\boxed{[2],[3],[4].}$$

— — —

Capítulo 2

Espacios vectoriales

Los espacios vectoriales tienen su origen y derivan de la geometría afín a través de la introducción de coordenadas en el plano o en el espacio tridimensional. Giusto Bellavitis definió el concepto de *bipoint* como un segmento orientado, cuyos extremos componen el origen y el objetivo o dirección del segmento. Esta definición dio lugar a la noción de vector hasta que fue reconsiderada por Argand y Hamilton (este último introdujo el nombre de vector) al presentar el cuerpo de los números complejos. El tratamiento mediante combinaciones lineales fue debido a Laguerre en 1867, quien también definió los sistemas de ecuaciones lineales. La notación matricial fue introducida por Cayley en 1857. Notación que nos proporciona una simplificación y armonización de las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales.

Los conceptos de independencia lineal y dimensión, así como el producto escalar están presentes en los trabajos, ya iniciados por Möbius, de Grassmann en 1844.

Sin embargo, los conceptos, tanto de espacios vectoriales como de aplicaciones lineales, tal como hoy los conocemos, hubieron de esperar a 1888, cuando el matemático Peano los redefinió.

Ejercicios

Varios de los ejercicios de este capítulo, y tal y como veremos en el siguiente, se pueden resolver utilizando lenguaje matricial. En este capítulo se presenta una solución utilizando las herramientas proporcionadas en el capítulo 2 del libro de teoría[1].

1. Estudiar la dependencia o independencia lineal de las familias de vectores de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

(a) $\{(1,-1,2,2),(-2,-1,3,4),(7,-1,0,-2)\}$

(b) $\{(1,1,-2,3),(2,-1,0,4),(5,-1,0,0),(1,0,1,0)\}$

(c) $\{(0,-1,3,2),(2,7,-3,4),(5,1,2,-2),(8,9,3,4),(6,3,2,4)\}$

Solución:

Sabemos que una colección de vectores $\{u_1,\dots,u_4\}$ son independientes si y sólo si

$$\lambda_1 u_1+\ldots+\lambda_r u_r=0 \ \Leftrightarrow\ \lambda_1=\ldots=\lambda_r=0$$

En el próximo capítulo veremos que podemos estudiar la dependencia o independencia de una familia de vectores analizando el rango de una cierta matriz.

a) $\lambda_1(1,-1,2,2)+\lambda_2(-2,-1,3,4)+\lambda_3(7,-1,0,-2)=(0,0,0,0)$.

$$\left.\begin{array}{rl}\lambda_1-2\lambda_2+7\lambda_3 &=0\\ -\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3 &=0\\ 2\lambda_1+3\lambda_2 &=0\\ 2\lambda_1+4\lambda_2-2\lambda_3 &=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{ll}\lambda_1 &=-3\lambda_3\\ \lambda_2 &=2\lambda_3\end{array}\right\}$$

Luego los tres vectores son dependientes. Concretamente $(7-1,0,-)=3(1,-1,2,2)-2(-2,-1,3,4)$.

b) $\lambda_1(1,1,-2,3)+\lambda_2(2,-1,0,4)+\lambda_3(5,-1,0,0)+\lambda_4(1,0,1,0)=(0,0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{rl}\lambda_1+2\lambda_2+5\lambda_3+\lambda_4 &=0\\ \lambda_1-\lambda_2-\lambda_3 &=0\\ -2\lambda_1+\lambda_4 &=0\\ 3\lambda_1+4\lambda_2 &=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{ll}\lambda_1 &=0\\ \lambda_2 &=0\\ \lambda_3 &=0\\ \lambda_4 &=0\end{array}\right\}$$

Luego los cuatro vectores son linealmente independientes.

c) Como tenemos cinco vectores en un espacio de dimensión cuatro, podemos asegurar que al menos uno de ellos es dependiente de los cuatro restantes.

[1] M$^{\text{a}}$.I. García Planas, M. D. Magret, *Eines d'àlgebra lineal i matricial per a la enginyeria.*

2. Consideremos los subconjuntos de $\mathbb{R}_3[t]$ siguientes:

i) $F_1 = \{P(t) \,|\, P(0) = P(1)\}$.

ii) $F_2 = \{P(t) \,|\, P(0) = P(-1)\}$.

iii) $F_3 = \{P(t) \,|\, P(-1) = P(1)\}$.

iv) $F_4 = \{P(t) \,|\, 1 = P(1)\}$.

¿Es F_i, $i = 1, 2, 3, 4$ subespacio vectorial? Justificar la respuesta.

Solución:

Sabemos que un subconjunto F de un K-espacio vectorial E, es subespacio si y sólo si

$$\begin{gathered} \forall u, v \in F, \; u + v \in F \\ \forall u \in F, \; \forall \lambda \in K, \; \lambda u \in F \end{gathered}$$

i) Sean $P(t)$, $Q(t) \in F_1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

Como $P(t), Q(t) \in F_1$, entonces $P(0) = P(1)$ y $Q(0) = Q(1)$.

Veamos si $P(t) + Q(t) \in F_1$ y $\lambda P(t) \in F_1$

$(P + Q)(0) = P(0) + Q(0) = P(1) + Q(1) = (P + Q)(1)$

$(\lambda P)(0) = \lambda P(0) = \lambda P(1) = (\lambda P)(1)$

Luego F_1 es un subespacio vectorial.

ii) Sean $P(t)$, $Q(t) \in F_2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

Como $P(t), Q(t) \in F_2$, entonces $P(0) = P(-1)$ y $Q(0) = Q(-1)$.

$(P + Q)(0) = P(0) + Q(0) = P(-1) + Q(-1) = (P + Q)(-1)$

$(\lambda P)(0) = \lambda P(0) = \lambda P(-1) = (\lambda P)(-1)$.

Luego F_2 es un subespacio vectorial.

iii) Sean $P(t)$, $Q(t) \in F_3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

Como $P(t), Q(t) \in F_3$, entonces $P(-1) = P(1)$ y $Q(-1) = Q(1)$.

$(P + Q)(-1) = P(-1) + Q(-1) = P(1) + Q(1) = (P + Q)(1)$

$(\lambda P)(-1) = \lambda P(-1) = \lambda P(1) = (\lambda P)(1)$

Luego F_3 es un subespacio vectorial.

iv) Sean $P(t)$, $Q(t) \in F_4$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

Como $P(t), Q(t) \in F_4$, entonces $1 = P(1)$ y $1 = Q(1)$.

$(P+Q)(1) = P(1) + Q(1) = 1 + 1 = 2 \neq 1$

Luego F_4 no es un subespacio vectorial.

— — —

3. Determinar para qué valores de las constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ son subespacio vectorial los conjuntos de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

i) $F_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid ax_1 - bx_2 + c = 0\}$,

ii) $F_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = a\}$,

iii) $F_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) = ab\}$.

Solución:

i) Sean (x_1, x_2, x_3, x_4), $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in F_1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

Como $(x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \in F_1$, entonces $ax_1 - bx_2 + c = 0$ y $ay_1 - by_2 + c = 0$.

Obliguemos a que $(x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) \in F_1$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4) \in F_1$ si y sólo si $a(x_1 + y_1) - b(x_2 + y_2) + c = 0$

Ahora bien $a(x_1 + y_1) - b(x_2 + y_2) + c = (ax_1 - bx_2 + c) + (ay_1 - by_2) = -c$. Luego el resultado es cero si y sólo si $c = 0$.

Impongamos $c = 0$ y obliguemos ahora a que $\lambda(x_1, x_2, x_3, x_4) \in F_1$, $a\lambda x_1 - b\lambda x_2 = \lambda(ax_1 - bx_2) = \lambda 0 = 0$

Luego F_1 es un subespacio vectorial si y sólo si $c = 0$.

ii) Sean (x_1, x_2, x_3, x_4), $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in F_2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

Como $(x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \in F_2$, entonces $x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = a$ y $y_1 - y_2 = y_3 - y_4 = a$.

Veamos si $(x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) \in F_2$.

$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = a + a = 2a = a$

$(x_3 + y_3) - (x_4 + y_4) = (x_3 - y_4) + (y_3 - y_4 = a + a = 2a = a$

Entonces $2a = a$ si y sólo si $a = 0$.

Impongamos ahora que $a = 0$ y comprobemos si $\lambda(x_1, x_2, x_3, x_4) \in F_2$

$\lambda x_1 - \lambda x_2 = \lambda(x_1 - x_2 = \lambda(x_3 - x_4) = \lambda x_3 - \lambda x_4 = 0$

Luego F_2 es un subespacio vectorial si y sólo si $a = 0$.

iii) Sean (x_1, x_2, x_3, x_4), $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in F_3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como $(x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \in F_3$, entonces $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) = ab$ y $(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) = ab$.

Veamos si $(x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) \in F_3$

$((x_1+y_1)-(x_2+y_2))((x_2+y_2)-(x_3+y_3)) = ((x_1+y_1)-(x_2+y_2))((x_2+y_2)-(x_3+y_3)) = (x_1-x_2)(x_2-x_3)+(y_1-y_2)(y_2-y_3)+(x_1-x_2)(y_2-y_3)+(y_1-y_2)(x_2-x_3) \neq ab \forall a, b \in \mathbb{R}$

Luego F_3 no es un subespacio vectorial.

4. Consideremos las siguientes familias de vectores de $\mathbb{R}^4$:

a) $\{(1, 1, 2, 2), (2, 1, 3, 4), (1, 0, 7, 1)\}$

b) $\{(1, -1, 2, 2), (-2, -1, 3, 4), (1, 0, 7, 1)\}$

c) $\{(1, 1, 2, 2), (-2, 1, -3, 4), (-1, 2, -1, 6)\}$

Dar la dimensión del subespacio que engendran, así como una base de este subespacio.

Solución:

a) Planteamos la siguiente ecuación vectorial:

$\lambda_1(1, 1, 2, 2) + \lambda_2(2, 1, 3, 4) + \lambda_3(1, 0, 7, 1) = (0, 0, 0, 0)$

Resolviendo el sistema tenemos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Luego, los tres vectores son linealmente independientes y, por tanto, forman una base de este subespacio.

b) Planteamos la siguiente ecuación vectorial:

$\lambda_1(1, -1, 2, 2) + \lambda_2(-2, -1, 3, 4) + \lambda_3(1, 0, 7, 1) = (0, 0, 0, 0)$

Resolviendo el sistema tenemos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Luego, los tres vectores son linealmente independientes y, por tanto, forman una base de este subespacio.

c) Observamos que:

$(1,1,2,2)+(-2,1,-3,4)=(-1,2,-1,6)$

Luego, el tercer vector es dependiente de los dos primeros. Ahora planteamos la ecuación vectorial siguiente.

$\lambda_1(1,1,2,2)+\lambda_2(-2,1,-3,4)=(0,0,0,0)$.

Resolviendo el sistema tenemos $\lambda_1=\lambda_2=0$. Luego, los dos vectores son linealmente independientes y, por tanto, una base de este subespacio es la formada por esos dos vectores: $\{(1,1,2,2),(-2,1,-3,4)\}$.

— — —

5. En $\mathbb{R}^5$ consideremos los subespacios vectoriales siguientes:

$$F=[(1,0,1,2,-2),(3,1,-1,0,2),(2,1,-2,-2,4),(0,0,0,2,1)],$$
$$G=[u].$$

a) Encontrar una base de F.

b) ¿Es $\dim(F+[u])-\dim F=\dim[u]$?

Solución:

a) Observamos que $-(1,0,1,2,-2)+(3,1,-1,0,2)=(2,1,-2,-2,4)$, luego el tercer vector es dependiente de los dos primeros.

Ahora bien resolviendo el sistema $\lambda_1(1,0,1,2,-2)+\lambda_2(3,1,-1,0,2)+\lambda_3(0,0,0,2,1)=(0,0,0,0,0)$, tenemos $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Luego una base de F es $\{(1,0,1,2,-2),(3,1,-1,0,2),(0,0,0,2,1)\}$

b) $\dim(F+[u])-\dim F=\dim F+\dim[u]-\dim(F\cap[u])-\dim F=$

$=\dim[u]-\dim(F\cap[u])$.

Por lo que $\dim(F+[u])-\dim F=\dim[u]$ si y sólo si $F\cap[u]=\{0\}$.

— — —

6. Encontrar la dimensión del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^6$:

$$F_a=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)\mid ax_1+x_4=ax_2+x_5=ax_3+x_6=0\}$$

según los diferentes valores de $a \in \mathbb{R}$.

Solución:

Calculemos la dimensión del espacio F_a.

Las condiciones que definen F dicen $x_4 = -ax_1$, $x_5 = -ax_2$ y $x_6 = -ax_3$, por lo que, todo vector $v = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in F$ es de la forma

$$\begin{aligned} v &= (x_1, x_2, x_3, -ax_1, -ax_2, -ax_3) = \\ & x_1(1,0,0,-1,0,0) + x_2(0,1,0,0,-a,0) + x_3(0,0,1,0,0,-a). \end{aligned}$$

Obviamente los vectores $(1,0,0,-a,0,0), (0,1,0,0,-a,0), (0,0,1,0,0,-a)$ pertenecen a F, son independientes y generan el subespacio, son pues una base de F.

Por lo que $\boxed{\dim F = 3.}$

— — —

7. Determinar la dimensión y una base de los subespacios vectoriales de $E = \mathbb{R}_4[t]$:

a) $F_1 = \{p(t) \in E \mid p'(0) = 0\}$

b) $F_2 = \{p(t) \in E \mid p(0) = p'(0) - p'(1) = 0\}$

c) $F_3 = \{p(t) \in E \mid p(t) = p(0) + p'(0)t + p''(0)t^2\}$

d) $F_4 = \{p(t) \in E \mid p(t) = p(1) + p'(0)t + p(0)t^2 + p(0)t^3\}$

Solución:

Dado un espacio vectorial E de dimensión n, y un subespacio F definido a través de un sistema de r ecuaciones y n incógnitas, si las ecuaciones son linealmente independientes entonces $\dim F = n - r$.

En nuestro caso $\dim E = 5$ y una base es $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$.

a) Escribamos F_1 mediante un sistema de ecuaciones $F_1 = \{p(t) \in E \mid p'(0) = 0\} = \{a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 \in E \mid b = 0\}$.

Tenemos un sistema de una sola ecuación, luego

$\dim F_1 = \dim E - r = 5 - 1 = 4$.

Los polinomios de F_1 son $a+ct^2+dt^3+et^4$, por lo que una base de F_1 es $\{1, t^2, t^3, t^4\}$.

b) Describamos F_2 también como un sistema de ecuaciones, para ello recordemos que $p'(t) = b + 2ct + 3dt^2 + 4et^3$. Con lo cual $F_2 = \{a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 \in E \mid a = 0, 2c + 3d + 4e = 0\}$.

F_2 viene representado por un sistema de dos ecuaciones independientes. Tenemos pues

$\dim F_2 = \dim E - r = 5 - 2 = 3$.

Determinemos una base. Un polinimio de F_2 es de la forma $bt + ct^2 + dt^3 + (-\frac{1}{2}c - \frac{3}{4}d)^4 = bt + c(t^2 - \frac{1}{2}t^4) + d(t^3 - \frac{3}{4}t^4)$. Luego una base de F_2 es $\{t, t^2 - \frac{1}{2}t^4, t^3 - \frac{3}{4}t^4\}$.

c) Describamos F_3 como un sistema de ecuaciones. Para ello observamos que si $p(t) = a+bt+ct^2+dt^3+et^4$, entonces $p'(t) = b+2ct+3dt^2+4et^3$ y $p''(t) = 2c+6dt+12et^2$. Por lo que $F_3 = \{a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 \in E \mid c = 2c, d = e = 0\}$.

F_3 viene representado por un sistema de tres ecuaciones independientes. Tenemos pues

$\dim F_3 = \dim E - r = 5 - 3 = 2$.

Los polinomios de F_3 son de la forma $a + bt$ por lo que una base de F_3 es $\{1, t\}$.

d) Al igual que en los apartados anteriores, describamos F_4 como un sistema de ecuaciones.

$F_4 = \{a+bt+ct^2+dt^3+et^4 \in E \mid a+bt+ct^2+dt^3+et^4 = (a+b+c+d+e)+bt+at^2+at^3\} = \{a+bt+ct^2+dt^3+et^4 \in E \mid b+c+d = 0, c-a = 0, d-a = 0, e = 0\}$

F_4 viene representado por un sistema de cuatro ecuaciones independientes. Tenemos pues

$\dim F_4 = \dim E - r = 5 - 4 = 1$.

Teniendo en cuenta que los polinomios de F_4 son de la forma $a - 2at + at^2 + at^3$ una base de F_4 es $\{1 - 2t + t^2 + t^3\}$.

— — —

8. Lo mismo que en el ejercicio anterior, si $E = \mathbb{R}[t]$.

Solución:

$R[t] = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + ... + a_nt^n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall a_i \in \mathbb{R}\}$. En este caso $\dim E = \infty$.

a) $F_1 = \{p(t) \in E \mid p'(0) = 0\} = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + ... + a_nt^n \in E \mid a_1 = 0\} = \{a_0 + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + ... + a_nt^n, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

Por lo que $\dim F_1 = \infty$.

Base (infinita) de F_1 es $\{1, t^2, t^3, t^4, ...\}$.

b) Sea $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + ... + a_nt^n \in F_2$ por lo que $a_0 = 0$, $a_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + ... + na_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

Observamos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(t) = nt^{n-1} - (n-1)t^n \in F_2$, por lo que $\dim F_2 = \infty$.

c) En este caso observamos que $F_3 \subset \mathbb{R}_2[t] \subset \mathbb{R}_4[t]$ por lo que nos remitimos al ejercicio anterior. Esto es, F_3 es de dimensión finita e igual a 2 y una base de F_3 es $\{1, t\}$.

d) Al igual que en el apartado anterior $F_4 \subset \mathbb{R}_3[t] \subset \mathbb{R}_4[t]$ y podemos remitirnos al ejercicio anterior. Esto es $\dim F_4 = 1$ y una base de F_4 es $\{1 - 2t + t^2 + t^3\}$.

— — —

9. Encontrar una base de los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ generados por los conjuntos de vectores siguientes:

a) $\{(1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 1), (-2, 1, 0, 1)\}$

b) $\{(1, 1, -1, 0), (2, -1, -1, 0), (3, 0, -2, 0)\}$

c) $\{(1, -1, 0, 1), (1, 1, 1, 1), (2, 0, 1, 2), (0, -2, -1, 0)\}$

Solución:

a) Estudiemos la independiencia de los vectores

$\lambda_1(1, 1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 1, 1) + \lambda_3(-2, 1, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$

Resolviendo el sistema tenemos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Los tres vectores son independientes por lo que determinan una base.

b) Estudiemos la independencia de los vectores

$\{(1,1,-1,0),(2,-1,-1,0),(3,0,-2,0)\}$

Observamos que $(1,1,-1,0)+(2,-1,-1,0)=(3,0,-2,0)$, por lo que son dependientes. Ahora bien, $(1,1,-1,0),(2,-1,-1,0)$ son independientes. Por tanto, una base es: $\{(1,1,-1,0),(2,-1,-1,0)\}$.

c) $\{(1,-1,0,1),(1,1,1,1),(2,0,1,2),(0,-2,-1,0)\}$

$(1,-1,0,1)+(1,1,1,1)=(2,0,1,2)$, $(1,-1,0,1)-(1,1,1,1)=(0,-2,-1,0)$.

Por lo tanto, el tercer y cuarto vector son dependientes de los dos primeros. Observamos que los dos primeros son independientes.

Por lo que una base es $\{(1,-1,0,1),(1,1,1,1)\}$.

— — —

10. Encontrar una base de los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_3[t]$ generados por los conjuntos de vectores siguientes:

(a) $\{1, t+t^2, t^3\}$

(b) $\{1, 1+t, 1+t+t^2, t+t^2\}$

(c) $\{t+t^2, t-t^2, t^3, 1+t^2, 1+t^3\}$

Solución:

a) Analicemos la dependencia o independencia lineal de los generadores.

Consideremos $\lambda_1 1+\lambda_2(t+t^2)+\lambda_3 t^3=0$ y esto sólo es posible si y sólo si $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Por lo que los tres vectores son independientes y determinan una base.

b) Hagamos $\lambda_1 1+\lambda_2(1+t)+\lambda_3(1+t+t^2)+\lambda_4(t+t^2)=0$

equivalentemente: $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)1+(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)t+(\lambda_3+\lambda_4)t^2=0$ y puesto que $1, t, t^2$ son independientes tenemos que $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0, \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0, \lambda_3+\lambda_4=0$, sistema indeterminado, una solución es $\lambda_1=1, \lambda_2=0, \lambda_3=-1, \lambda_4=1$. Por lo que el vector $t+t^2$ es linealmente dependiente de los anteriores.

Ahora bien, $\lambda_1 1 + \lambda_2(1+t) + \lambda_3(1+t+t^2) = 0$ implica $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ por lo que son independientes y por tanto una base. Esto es, $\{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ es una base del subesapcio.

c) $\lambda_1(t+t^2) + \lambda_2(t-t^2) + \lambda_3 t^3 + \lambda_4(1+t^2) + \lambda_5(1+t^3) = 0$ equivalentemente $(\lambda_4+\lambda_5)1 + (\lambda_1+\lambda_2)t + (\lambda_1-\lambda_2+\lambda_4)t^2 + (\lambda_3+\lambda_5)t^5 = 0$. Por lo que $\lambda_4+\lambda_5 = 0, \lambda_1+\lambda_2 = 0, \lambda_1-\lambda_2+\lambda_4 = 0, \lambda_3+\lambda_5 = 0$. Sistema compatible indeterminado, una solución es $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = -2, \lambda_5 = 2$ por lo que $t+t^3$ es dependiente de los cuatro anteriores.

Ahora bien, $\lambda_1(t+t^2) + \lambda_2(t-t^2) + \lambda_3 t^3 + \lambda_4(1+t^2) = 0$ equivale a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Por lo tanto, los cuatro primeros vectores determinan una base del subespacio. Esto es, una base: $\{t+t^2, t-t^2, t^3, 1+t^2\}$.

— — —

11. Determinar la dimensión de $\mathbb{C}^2$ considerándolo como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$.

Solución:

Sea $v \in (a_1+b_1 i, a_2+b_2 i) \in \mathbb{C}^2$, entonces $a_1(1,0) + b_1(i,0) + a_2(0,1) + b_2(0,i)$, luego $(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)$ es un sistema de generadores.

Si trabajamos con coeficientes reales éstos, además, son independientes por lo que $\mathbb{C}^2$, considerándolo como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, tiene dimensión cuatro.

Ahora bien, si trabajamos con coefientes complejos se tiene $(i,0) = i(1,0)$ y $(0,i) = i(0,1)$. Por lo que sobre $\mathbb{C}$ la dimensión del espacio es dos.

— — —

12. Determinar la dimensión de $\mathbb{C}_2[t]$ considerándolo como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Solución:

Sea $(a_0+b_0 i) + (a_1+b_1 i)t + (a_2+b_2 i)t^2 \in \mathbb{C}_2[t]$.

Este polinomio podemos escribirlo de la forma $a_0 1 + b_0 i + a_1 t + b_1(it) + a_2 t^2 + b_2(it^2)$.

Por lo que $1, i, t, it, t^2, it^2$ es un sistema de generadores que son independientes si trabajamos con coeficientes reales (no así si trabajamos con coeficientes complejos en los que 1 y i son dependientes, al igual que t y it, y t^2 y it^2).

La dimensión de $\mathbb{C}^2[t]$ sobre $\mathbb{R}$ es $\boxed{6.}$

— — —

13. En $E = \mathbb{R}^5$ considerar el subespacio vectorial F engendrado por el conjunto de vectores,

$$\{(1,-1,0,1,1),(0,1,0,-1,1),(1,0,0,0,2),(2,-1,0,0,1)\}$$

Determinar una base de F y ampliarla a una base de $\mathbb{R}^5$.

Solución:

Observamos que $(1,0,0,0,2) = (1,-1,0,1,1) + (0,1,0,-1,1)$.

Por otra parte $(1,-1,0,1,1),(0,1,0,-1,1),(2,-1,0,0,1)$ son linealmente independientes, pues

$$\lambda_1(1,-1,0,1,1) + \lambda_2(0,1,0,-1,1) + \lambda_3(2,-1,0,0,1) = (0,0,0,0)$$

si y sólo si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Por lo tanto $\dim F = 3$ y una base de F es $\{(1,-1,0,1,1),(0,1,0,-1,1),(2,-1,0,0,1)\}$.

Para completar a una base de $\mathbb{R}^5$ utilizamos el Teorema de Steinitz:

Sea $\{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^5$ y sean $(1,-1,0,1,1)$, $(0,1,0,-1,1)$, $(2,-1,0,0,1)$ una colección de vectores independientes. Podemos cambiar tres vectores de la base dada por los vectores dados obteniendo una nueva base del espacio.

Empezamos cambiando el primer vector de la base obteniendo una nueva base $(1,-1,0,1,1),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)$.

A continuación cambiamos el segundo vector de esta base por el segundo de la colección obteniendo la base $\{(1,-1,0,1,1)$, $(0,1,0,-1,1)$, $(0,0,1,0,0)$, $(0,0,0,1,0)$, $(0,0,0,0,1)\}$. Finalmente observamos que no podemos cambiar el tercer vector de esta base por el último de la colección, pero si podemos cambiar el cuarto, obteniendo la base deseada siguiente:

$$\boxed{(1,-1,0,1,1),(0,1,0,-1,1),(0,0,1,0,0),(2,-1,0,0,1),(0,0,0,0,1).}$$

— — —

14. En $E = \mathbb{R}^4$, consideramos los subespacios vectoriales

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 = 0\} \\ F_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 - 3x_2 = x_3 = 0\} \\ F_3 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_3 = x_4\} \end{aligned}$$

Encontrar a) $F_1 \cap F_2$, b) $F_1 \cap F_3$, c) $F_2 \cap F_3$, d) $F_1 \cap F_2 \cap F_3$, e) $F_1 + F_2$, f) $F_1 + F_3$, g) $F_2 + F_3$, h) $F_1 + F_2 + F_3$.

Solución:

Recordemos que

i) dado un espacio vectorial E de dimensión n y un subespacio F definido a través de un sistema de r ecuaciones y n incognitas, si las ecuaciones son linealmente independientes entonces $\dim F = n - r$.

ii) Dados dos subespacios vectoriales F_1, F_2 de un espacio vectorial E de dimensión finita entonces $\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2)$.

a) $F_1 \cap F_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 = 2x_1 - 3x_2 = x_3 = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = x_3 = 0\} = \boxed{[(0, 0, 0, 1)].}$

b) $F_1 \cap F_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 = 0, x_2 = x_3 = x_4\} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4\} = \boxed{[(1, 1, 1, 1)].}$

c) $F_2 \cap F_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 - 3x_2 = 0, x_3 = 0, x_2 = x_3 = x_4\} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0\} = \boxed{\{0\}.}$

d) Puesto que $F_2 \cap F_3 = \{0\}$ entonces $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \{0\}$.

e) $\dim F_1 = 4 - 1 = 3$, $\dim F_2 = 4 - 2 = 2$. Por lo tanto

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

Luego $\boxed{F_1 + F_2 = \mathbb{R}^4.}$

f) $\dim F_1 = 4 - 1 = 3$, $\dim F_3 = 4 - 2 = 2$. Por lo tanto $\dim(F_1 + F_3) = \dim F_1 + \dim F_3 - \dim(F_1 \cap F_3) = 3 + 2 - 1 = 4$.

Luego $\boxed{F_1 + F_3 = \mathbb{R}^4.}$

g) $\dim F_2 = 4 - 2 = 2$, $\dim F_3 = 4 - 2 = 2$. Por lo tanto

$$\dim F_2 + F_3 = \dim F_2 + \dim F_3 - \dim(F_2 \cap F_3) = 2 + 2 - 0 = 4.$$

Luego $\boxed{F_2 + F_3 = \mathbb{R}^4.}$

h) $\dim(F_1+F_2+F_3) = \dim(F_1+F_2)+\dim F_3 - \dim((F_1+F_2)\cap F_3) = 4+2-2 = 4.$

Luego $\boxed{F_1 + F_2 + F_3 = \mathbb{R}^4.}$

(Observación: puesto que $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^n$, entonces $F_1 + F_2 + G = \mathbb{R}^4$, $\forall G$).

— — —

15. En $E = \mathbb{R}_4[t]$, determinar $F + G$ si

$$\begin{aligned} F &= \{p(t) \in E \mid p(t) = p'(0)t + p''(0)t^3\} \\ G &= [1+t^2, t-t^3, t^4] \end{aligned}$$

¿Es directa la suma?

Solución:

Un sistema de generadores de $F+G$ se obtiene juntando bases de ambos subespacios.

Determinemos pues una base de F.

Sea $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$, entonces $p'(0) = a_1$ y $p''(0) = 2a_2$, por lo que

$$\begin{aligned} F &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 \in E \mid p(t) = a_1 t + 2a_2 t^3\} \\ &= \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 \in E \mid a_0 = 0, a_2 = 0, a_3 = 2a_2, a_4 = 0\} = [t]. \end{aligned}$$

Por lo tanto $F + G = [t, 1+t^2, t-t^3, t^4]$.

Estudiemos la dependencia o independencia lineal de estos cuatro vectores

$$\lambda_1 t + \lambda_2(1+t^2) + \lambda_3(t-t^3) + \lambda_4 t^4 = 0$$

equivalentemente

$$\lambda_2 1 + (\lambda_1 + \lambda_3)t + \lambda_2 t^2 - \lambda_3 t^3 + \lambda_4 t^4 = 0$$

y esto sólo es posible si y sólo si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

Luego los vectores son independientes, por lo que podemos concluir que la suma es directa (observar que $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$ por tanto $\dim F \cap G = \{0\}$).

Luego $\boxed{F \oplus G = [t, 1+t^2, t-t^3, t^4].}$

16. En $\mathbb{R}^5$ consideremos los subespacios vectoriales seguientes:

$$\begin{aligned} F &= [(1,0,2,1,3)] \\ G &= [(1,0,0,1,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,1,0)] \end{aligned}$$

Encontrar $F+G$. ¿Es directa la suma?

Solución:

La reunión de bases de F y G proporcionan un sistema de generadores de $F+G$ si además son independientes pasarán a ser una base por lo que además la suma será directa.

Estudiemos pues la independencia $\lambda_1(1,0,2,1,3)+\lambda_2(1,0,0,1,0)+\lambda_3(0,1,0,0,0)+\lambda_4(0,0,1,1,0)=(0,0,0,0,0)$

Resolviendo el sistema tenemos $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$. Por lo que los vectores son independientes.

Tenemos que una base de $F+G$ es $\{(1,0,2,1,3),(1,0,0,1,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,1,0)\}$ y la suma es directa.

— — —

17. Dar tres subespacios complementarios del subespacio vectorial

$$F=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1-x_2+2x_3=3x_1-x_4=0\}$$

Solución:

Determinemos una base de F:

$x_4=3x_1$, $x_2=x_1+2x_3$, por lo que $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1,x_1+2x_3,x_3,3x_1)=x_1(1,1,0,3)+x_3(0,2,1,0)$.

Tenemos $F=[(1,1,0,3),(0,2,1,0)]$.

Busquemos subespacios complementarios de F que serán de dimensión 2 ya que $\dim F=2$.

Así tenemos que tres subespacios complementarios de F, pueden ser:

1) $F_1=[(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$

Claramente $\{(1,1,0,3),(0,2,1,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

2) $F_2 = [(0,1,0,0),(0,0,0,1)]$

Claramente $\{(1,1,0,3),(0,2,1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

3) $F_3 = [(1,0,0,0),(0,0,1,0)]$

Claramente $\{(1,1,0,3),(0,2,1,0),(1,0,0,0),(0,0,1,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

— — —

18. Dar tres subespacios complementarios del subespacio vectorial

$$F = \{p(t) \in \mathbb{R}_4[t] \mid p(0) + p''(0) = p'''(0) = 0\}$$

Solución:

Determinemos una base del subespacio

$$\begin{aligned} F &= \{p(t) \in \mathbb{R}_4[t] \mid p(0) + p''(0) = p'''(0) = 0\} = \\ &= \{a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 \in \mathbb{R}_4[t] \mid a + 2c = 6d = 0\} = \\ &= [2 - t^2, t, t^4] \end{aligned}$$

Busquemos complementarios que serán de dimensión 2 ya que $\dim F = 3$.

1) $F_1 = [t^2, t^3]$.

Claramente $\{2 - t^2, t, t^4, t^2, t^3\}$ es una base de $\mathbb{R}_4[t]$.

2) $F_2 = [1, t^3]$.

Claramente $\{2 - t^2, t, t^4, 1, t^3\}$ es una base de $\mathbb{R}_4[t]$.

$F_3 = [1, t^2 + t^3]$.

Claramente $\{2 - t^2, t, t^4, 1, t^2 + t^3\}$ es una base de $\mathbb{R}_4[t]$.

— — —

19. Discutir cuales de las familias siguientes de vectores de $\mathbb{R}^3$ son bases ortonormales, con el producto escalar ordinario de $\mathbb{R}^3$.

a) $\{(0,1,0),(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}),(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2})\}$

b) $\{(1,-1,0),(1,1,0),(0,0,1)\}$

c) $\{(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0),(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0)\}$

d) $\{(1,0,0), \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\}$.

Solución:

Si una familia de vectores es ortonormal necesariamente es una familia independiente. Para que además sean base el número de vectores tendrá que coincidir con la dimensión del espacio.

a) Calculemos el valor de la norma de cada uno de los vectores:

$\|(0,1,0)\| = \sqrt{1^2} = 1$

$\|(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})\| = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$

$\|(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})\| = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$

Calculemos el producto escalar dos a dos:

$< (0,1,0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}) >= 0$

$< (0,1,0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}) >= 0$

$< (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}) >= (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 0$

Luego tenemos tres vectores ortonormales por lo que tenemos una base ortonormal.

b) Calculemos las normas de los vectores:

$\|(1,-1,0)\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \neq 1$. La familia no puede ser ortonormal

c) Esta familia de vectores no puede ser una base pues la dimensión del espacio es tres y sólo tenemos dos vectores.

d) $\{(1,0,0), \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\}$.

Calculemos el valor de las normas:

$\|(1,0,0)\| = \sqrt{1^2} = 1$

$\|\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)\| = \sqrt{(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$

$\|\frac{1}{\sqrt{3}}(1-1,1)\| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (-\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 1$

Calculemos el producto escalar dos a dos:

$< (1,0,0), \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) >= -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Los dos primeros vectores no son ortogonales, por lo que la familia no puede formar una base ortonormal.

Calculemos de todas formas los otros dos productos escalares

$< (1,0,0), \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) >= -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$< \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) >= -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

Tampoco son ortogonales.

— — —

20. Sea E un espacio vectorial sobre K y sean $F_1 \dots F_r$ subespacios vectoriales tales que

$$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$$

. Estudiar si es cierto que para todo subespacio vectorial G de E se tiene:

$$G = (G \cap F_1) \oplus \cdots \oplus (G \cap F_r)$$

Solución:

Supongamos $E = \mathbb{R}^2$, y $F_1 = [e_1]$, $F_2 = [e_2]$ y $G = [e_1 + e_2]$.

Se tiene:

$E = F_1 \oplus F_2$,

$G \cap F_1 = \{0\}$,

$G \cap F_2 = \{0\}$.

Por lo que $(G \neq G \cap F_1) \oplus (G \cap F_2) = \{0\}$.

Por lo tanto, en general es falso.

— — —

21. Consideremos el espacio euclideo ordinario $\mathbb{R}^3$. Encontrar la proyección ortogonal sobre $F = [(2,-1,0),(0,0,1)]$ del vector $(0,5,4)$.

Solución:

Dado un subespacio F de un espacio vectorial E, la proyección ortogonal de un vector $v \in E$ cualquiera se define como $\pi_F(v) = v_1$ siendo v_1 tal que $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in F$ y $v_2 \in F^\perp$.

Calculemos pues $F^\perp$.

$F^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y = z = 0\} = [(1,2,0)]$.

Determinemos ahora v_1 y v_2

$(0,5,4) = \alpha(2,-1,0) + \beta(0,0,1) + \gamma(1,2,0)$, entonces:

$$\begin{aligned} <(0,5,4),(1,2,0)> &= <\alpha(2,-1,0)+\beta(0,0,1)+\gamma(1,2,0),(1,2,0)>= \\ &= \gamma <(1,2,0),(1,2,0)> \end{aligned}$$

por lo que

$$10 = 5\gamma \;\Rightarrow\; \gamma = 2$$

.

Por lo tanto $v_2 = (2,4,0)$ y $\pi_F(v) = v_1 = v - v_2 = \boxed{(-2,1,4).}$

— — —

22. Dar la proyección ortogonal sobre el subespacio vectorial F de los vectores indicados en cada uno de los casos siguientes:

a) $E = \mathbb{R}^3$, $F = [(1,0,-1),(0,1,1)]$, $v = (1,1,1)$

b) $E = \mathbb{R}^n$, $F = \{(x_1,\dots,x_n) \,|\, x_1 - \cdots - x_n = 0\}$, $v = (1,2,\dots,n)$.

Solución:

a) Calculemos $F^\perp$.

$F^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - z = y + z = 0\} = [(1,-1,1)]$

$(1,1,1) = \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,-1,1)$, entonces:

$$\begin{aligned} 1 =< (1,1,1),(1,-1,1) > &=< \alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,1)+\gamma(1,-1,1),(1,-1,1) >= \\ &= \gamma < (1,-1,1),(1,-1,1) >= 3\gamma. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$1 = \gamma 3 \;\Rightarrow\; \gamma = \dfrac{1}{3}$ y $v_2 = \dfrac{1}{3}(1,-1,1)$.

Así pues, la proyección ortogonal de $(1,1,1)$ sobre F es: $\pi_F(v) = v - v_2 = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$.

b) Calculemos $F^\perp$.

$F^\perp = [(1,-1,\ldots,-1,-1)]$, $v = v_1 + v_2 \in F \perp F^\perp$ con $v_2 = \lambda(1,-1,\ldots,,-1)$

$< (1,2,\ldots,n),(1,-1,\ldots,-1) >=< v_1 + \lambda(1,-1,\ldots,-1),(1,-1,\ldots,-1) >$.

Esto es

$1 - 2 - \ldots - n = \lambda(1+1+\ldots+1) = \lambda \cdot n$.

Así, la proyección ortogonal de $(1,2,\ldots,n)$ sobre F es:

$\pi_F(v) = v - v_2 = (1,2,\ldots,n) - \dfrac{4-n-n^2}{2n}(1,-1,\ldots,n)$.

— — —

23. En $E = \mathbb{R}^4$ considerar el subespacio vectorial

$$F = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$$

Estudiar si se cumple que:

a) $2 \cdot ((1,0,1,-1)+F) - 3 \cdot ((0,1,-1,2)+F) = (-2,1,-5,2)+F$,

b) $2 \cdot ((1,0,1,-1)+F) - 3 \cdot ((0,1,-1,2)+F) = (3,0,7,-6)+F$.

Solución:

Recordemos que $a + F = b + F$ si y sólo si $a - b \in F$.

a) $2 \cdot ((1,0,1,-1)+F) - 3 \cdot ((0,1,-1,2)+F) = ((2,0,2,-2)+F) + ((0,-3,3,-6)+F) = (2,-3,5,-8)+F$.

Veamos si $(2,-3,5,-8)+F = (-2,1,-5,2)+F$, para ello veamos si $(2,-3,5,-8) - (-2,1,-5,2) = (4,-4,10,-10) \in F$.

$4 - 4 - 10 + 10 = 0$. Por lo que sí se cumple.

b) $2 \cdot ((1,0,1,-1)+F) - 3 \cdot ((0,1,-1,2)+F) = ((1,0,1,-1)+F) + ((0,-3,3,-6)+F) = (1,-3,4,-7)+F$.

Veamos si $(1,-3,4,-7)+F = (3,0,7,-6)+F$, para ello veamos si $(1,-3,4,-7) - (3,0,7,-6) = (-2,-3,-3,-1) \in F$

$-2 - 3 + 3 + 1 \neq 0$. No se verifica.

— — —

24. Si $E = \mathbb{R}_3[t]$ i $F = \{P(t) \mid P(t) = P(1) + P(0)t + P(-1)t^2\}$, estudiar la dependencia o independencia lineal de los vectores $(t+t^2)+F$ y $1+F$. Dar una base de E/F.

Solución:

$F = \{a + bt + ct^2 + dt^3 \in E \mid b + c = d = 0, a = b\} = [1 + t - t^2]$

$(t+t^2)+F$ y $1+F$ son linealmente independientes si los vectores de E $1, t+t^2, 1+t-t^2$ también lo son.

$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (t + t^2 + \lambda_3(1 + t - t^2 = 0$,

es decir

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Estos tres vectores son independientes. Luego $(t+t^2)+F$ y $1+F$ son linealmente independientes.

— — —

25. Calcular la dimensión y encontrar una base de $\mathbb{R}^4/F$, siendo

$$F = [(1,0,-1,1), (0,1,1,-2), (1,1,0,-1)]$$

Solución:

Observamos que $(1,0,-1,1) + (0,1,1,-2) = (1,1,0,-1)$ y $(1,0,-1,1), (0,1,1,-2)$ son linealmente independientes, por lo tanto son una base de F.

Así pues, $\dim \mathbb{R}^4/F = 4 - \dim F = 2$.

Una base de $\mathbb{R}^4/F$ es $u_1 + F, u_2 + F$ con $\{u_1, u_2\}$ base de un complementario cualquiera de F.

Un complementario es: $F^c = [(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$ y

$\mathbb{R}^4/F = [(0,0,1,0) + F, (0,0,0,1) + F]$.

— — —

26. Sea E el espacio vectorial $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4$. Estudiar en E la dependencia/independencia lineal de los conjuntos de vectores:

$$\{(1,1,2,0),(2,1,1,0)\}$$

$$\{(1,1,0,3),(2,1,1,1),(0,1,0,1)\}$$

Solución:

$\lambda_1(1,1,2,0) + \lambda_2(2,1,1,0) = (0,0,0,0)$ con $\lambda_i \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Utilizando las tablas de sumar y multiplicar obtenidas en el ejercicio 22 del capítulo 1, obtenemos $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Luego $\{(1,1,2,0),(2,1,1,0)\}$ son linealmente independientes.

$\lambda_1(1,1,0,3) + \lambda_2(2,1,1,1) + \lambda_3(0,1,0,1) = (0,0,0,0)$ con $\lambda_i \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Resolviendo el sistema obtenemos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Luego $\{(1,1,0,3),(2,1,1,1),(0,1,0,1)\}$ son linealmente independientes.

— — —

27. Siendo E el espacio vectorial del ejercicio anterior, determinar la dimensión y una base del subespacio vectorial F formado por los vectores (x_1, x_2, x_3, x_4) tales que $x_1 + 2x_2 = 3x_3 + 4x_4 = 0$.

Escribir todos los vectores de este subespacio.

Solución:

$$E = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4 = [(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$$

$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4 \,|\, x_1 + 2x_2 = 3x_3 + 4x_4 = 0\} = [(1, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 3)]$
Así, todos los vectores de F se pueden escribir de la forma:

$$\alpha(1, 2, 0, 0) + \beta(0, 0, 1, 3), \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

Así para $\alpha = 3$ y $\beta = 2$ se tiene $3(1, 2, 0, 0) + 2(0, 0, 1, 3) = (3, 1, 2, 1)$.

— — —

28. Sea E el espacio vectorial formado por los vectores (x_1, x_2, x_3) con $x_i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Determinar los subespacios vectoriales de E de dimensión 2.

Solución:

$[(1,0,0),(0,1,0)]$, $[(1,0,0),(0,0,1)]$, $[(1,0,0),(0,1,1)]$, $[(1,0,0),(0,1,2)]$, $[(1,0,0),(0,2,1)]$, $[(0,1,0),(1,0,1)]$, $[(0,1,0),(1,0,2)]$, $[(0,1,0),(2,0,1)]$, $[(0,0,1),(1,1,0)]$, $[(0,0,1),(1,2,0)]$, $[(0,0,1),(2,1,0)]$, $[(1,1,0),(1,0,1)]$, $[(1,1,0),(1,0,2)]$, $[(1,1,0),(2,0,1)]$, $[(1,1,0),(0,1,1)]$, $[(1,1,0),(0,1,2)]$, $[(1,1,0),(0,2,1)]$, $[(1,0,1),(0,1,2)]$, $[(1,0,1),(0,2,1)]$, $[(0,1,1),(1,2,0)]$, $[(0,1,1),(2,1,0)]$, $[(1,0,1),(1,2,0)]$, $[(1,0,1),(2,1,0)]$, $[(0,1,1),(1,0,2)]$, $[(0,1,1),(2,0,1)]$, $[(1,1,1),(1,2,0)]$, $[(1,1,1),(2,1,0)]$, $[(1,1,1),(1,0,2)]$, $[(1,1,1),(2,0,1)]$, $[(1,1,1),(0,1,2)]$, $[(1,1,1),(0,2,1)]$.

— — —

Capítulo 3

Matrices y sistemas de ecuaciones

Diofanto de Alejandría (Diophantos Alexandreías, $\Delta\iota\acute{o}\varphi\alpha\nu\tau o\varsigma$ $A\lambda\varepsilon\xi\alpha\nu\delta\rho\varepsilon\iota\alpha\zeta$) (214-298 antes de nuestra era) fue un antiguo matemático griego. Se le considera el padre del Álgebra. Nació en Alejandría pero nada se conoce de su vida con seguridad, salvo la edad a la que falleció, gracias a este epitafio redactado en forma de ecuación y conservado en la antología griega:

"*Transeúnte, ésta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad*".

Los sistemas de ecuaciones lineales comenzaron a ser estudiados de forma sistemática por Leibniz y Cramer a mediados del siglo XVIII. Este último expuso lo que hoy conocemos como regla de Cramer para los sistemas de orden 3. A mediados del XIX, Cayley, al estudiar las matrices, dedujo la fórmula general de la regla de Cramer exponiendo la condición necesaria y suficiente para que un sistema cuadrado de ecuaciones lineales tuviera solución única: que la matriz de los coeficientes del sistema fuera invertible. En 1879, Frobenius introdujo la noción de rango y, a principios del XIX, Gauss dedujo un método que permite resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales. Sin embargo, el que hoy usamos es el debido a Jordan y que conocemos como algoritmo de Gauss-Jordan.

Ejercicios

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 9 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcular $A + (C + D)B$.

¿Es posible calcular $A^tC + DB$? Y ¿$AB^t + D^t$?

Solución:

$$C + D = \begin{pmatrix} -3 & 10 & -2 \\ 8 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad (C + D)B = \begin{pmatrix} 39 & 8 & -9 & 3 \\ 24 & 8 & 24 & 77 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$\boxed{A + (C + D)B = \begin{pmatrix} 42 & 10 & -7 & 4 \\ 33 & 12 & 27 & 79 \end{pmatrix}.}$$

$A^t \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$, $C \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, luego $A^tC \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$,

$D \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $B \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$, luego $DB \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$,

Las matrices A^tC y DB pertenecen a espacios diferentes, luego no pueden sumarse.

$A \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$, $B^t \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$, luego $AB^t \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$,

$D^t \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$,

Las matrices AB^t y D^t pertenecen a espacios diferentes, luego no pueden sumarse.

— — —

2. Una fábrica produce dos modelos de un producto, A y B, en tres submodelos: N, L y S. Del modelo A produce: 400 unidades del submodelo N, 200 unidades del submodelo L y 50 unidades del submodelo S. Del modelo B produce: 300 unidades del submodelo N, 100 unidades del submodelo L y 30 unidades del submodelo S. El submodelo N conlleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. El submodelo

L conlleva 30 horas de taller y 1.2 horas de administración. El submodelo S conlleva 33 horas de taller y 1.3 horas de administración.

a) Representar la información en dos matrices.

b) Encontrar una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

c) Determinar el número de unidades de cada submodelo que se han producido si el coste total en horas de taller han sido 13980 para e modelo A y 11490 para el modelo B y en horas de administración han sido 558 para el modelo A y 486 para el modelo B y el número total de unidades del modelo A han sido 510 y del modelo B un total de 460.

Solución:

a) Matriz de producción: Filas: Modelos A y B Columnas: submodelos N, L, S

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix},}$$

Matriz de coste en horas: Filas: submodelos N, L, S Columnas: Coste en horas: T, A

$$\boxed{N = \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1.2 \\ 33 & 1.3 \end{pmatrix}.}$$

b) Matriz que expresa las horas de taller y de administración para cada uno de los modelos:

$$MN = \begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1.2 \\ 33 & 1.3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 17650 & 705 \\ 11490 & 459 \end{pmatrix}}.$$

c) Llamemos x_1, y_1 y z_1 las cantidades producidas de los submdelos N, L y S del modelo A y x_2, y_2 y z_2 las cantidades producidas de los submdelos N, L y S del modelo B.

Por una parte tenemos que:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1.2 \\ 33 & 1.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13980 & 558 \\ 12170 & 486 \end{pmatrix}$$

y por otra

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 + z_1 &= 510 \\ x_2 + y_2 + z_2 &= 460 \end{aligned}$$

Por lo que tenemos dos sistemas de ecuaciones a resolver

$$\left.\begin{aligned} 25x_1 + 30y_1 + 33z_1 &= 13980 \\ x_1 + 1.y_1 + 1.3z_1 &= 558 \\ x_1 + y_1 + z_1 &= 510 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 25x_2 + 30y_2 + 33z_2 &= 12170 \\ x_2 + 1.y_2 + 1.3z_2 &= 486 \\ x_2 + y_2 + z_2 &= 460 \end{aligned}\right\}$$

(Observar que la matriz del sistema es la misma para ambos).

Cuyas soluciones son:

$$\boxed{\begin{array}{lll} x_1 = 300, & y_1 = 150, & z_1 = 60, \\ x_2 = 350, & y_2 = 70, & z_2 = 40. \end{array}}$$

— — —

3. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -13 \\ 8 & -4 & -29 \\ 4 & -1 & -6 \end{pmatrix},$$

reducirla a una forma escalonada

a) por filas.

b) por columnas.

Solución:

a) Tomamos la matriz A y restamos la primera fila a la segunda; y la primera al doble de la tercera, quedando

$$A \sim \begin{pmatrix} 8 & -5 & -13 \\ 0 & 1 & -16 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A_1$$

Tomamos ahora la matriz A_1 y restamos a la tercera fila el triple de la segunda, quedando

$$A_1 \sim \begin{pmatrix} 8 & -5 & -13 \\ 0 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} = A_2$$

Sobre A_2, dividimos la tercera fila por 49

$$A_2 \sim \begin{pmatrix} 8 & -5 & -13 \\ 0 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_3$$

Sobre A_3, sumamos a la segunda fila dieciséis veces la tercera y a la primera trece veces la tercera

$$A_3 \sim \begin{pmatrix} 8 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_4$$

Sobre A_4, sumamos a la primera fila cinco veces la segunda y tenemos

$$A_4 \sim \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_5$$

que es ya diagonal; podemos seguir reduciendo dividiendo la primera fila por 8, obteniendo

$$A_5 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

luego $\quad A \sim I.$

b)

$$\begin{pmatrix} 8 & -5 & -13 \\ 8 & -4 & -29 \\ 4 & -1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & -13 \\ 2 & -4 & -29 \\ 1 & -1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -17 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & -49 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

— — —

4. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego el rango es $r = 3$.

$$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0 & -0{,}1 & -0{,}2 & -0{,}3 \\ 0 & -0{,}2 & -0{,}4 & -0{,}6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0 & -0{,}1 & -0{,}2 & -0{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego el rango es $r = 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego el rango es $r = 3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{3}{40} \\ 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{3}{40} \\ 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{3}{80} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{3}{40} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego el rango es $r = 2$.

Esto es

$$\boxed{\operatorname{rango} A = 3, \quad \operatorname{rango} B = 2, \quad \operatorname{rango} C = 3, \quad \operatorname{rango} D = 2.}$$

— — —

5. Estudiar cuales de las siguientes matrices son inversibles:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 3 & -4 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -3 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -2 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}4 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 5 & -4\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}4 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 8 & -20\\ 0 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}4 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 8 & -20\\ 0 & 0 & 0 & 32\end{pmatrix}$$

Luego las matrices que son inversibles son la A y la C.

— — —

6. Discutir para qué valores de la constante $a \in \mathbb{R}$, la matriz

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 1\\ a & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

es inversible, y encontrar en estos casos su inversa.

Solución:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ a & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1-a & 0 & -a & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1-a & 0 & -a & -2 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-a & 0 & -a & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Observamos que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es inversible si y sólo si $\boxed{a \neq -1}$

Calculemos la matriz inversa en estos casos

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & -a & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+a} & -\frac{2}{1+a} & 0 & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{a}{1+a} & \frac{-1+a}{1+a} & 0 & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a}{1+a} & \frac{2}{1+a} & 0 & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo que la matriz inversa es

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+a} & \dfrac{-2}{1+a} & 0 & \dfrac{1}{1+a} \\ \dfrac{-a}{1+a} & \dfrac{-1+a}{1+a} & 0 & \dfrac{1}{1+a} \\ \dfrac{a}{1+a} & \dfrac{2}{1+a} & 0 & \dfrac{-1}{1+a} \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

— — —

7. Calcular las inversas de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución:

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Por lo tanto la matriz inversa es

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 10 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 20 & -10 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 40 & 0 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 20 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -40 & 40 & -10 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 20 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{40}{3} & \frac{40}{3} & -\frac{10}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 50 & -40 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{100}{3} & -\frac{70}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{40}{3} & \frac{40}{3} & -\frac{10}{3} \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{50}{3} & \frac{20}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{100}{3} & -\frac{70}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{40}{3} & \frac{40}{3} & -\frac{10}{3} \end{array}\right).$$

Por lo tanto la matriz inversa es

$$\boxed{\begin{pmatrix} -\frac{50}{3} & \frac{20}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{100}{3} & -\frac{70}{3} & \frac{10}{3} \\ -\frac{40}{3} & \frac{40}{3} & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}.}$$

c)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & | & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & | & 1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & | & 1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & | & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & | & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la matriz inversa es

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.}$$

— — —

8. Sea A una matriz triangular superior (inferior) invertible. Probar que A^{-1} es triangular superior (inferior).

Solución:

Sean

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{n-11} & b_{n-12} & b_{n-13} & \dots & b_{n-1n} \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Puesto que A es inversible tenemos que $a_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots n$.

Si A^{-1} es la matriz inversa de A ha de ser $AA^{-1} = I$.

La primera fila de AA^{-1} es

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} & \ldots & a_{11}b_{1n} \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$b_{11} = \frac{1}{a_{11}},\ b_{12} = \ldots = b_{1n} = 0.$$

Sustituyendo en A^{-1} los valores de la primera fila, la segunda fila de AA^{-1} es

$$\begin{pmatrix} \frac{a_{21}}{a_{11}} + a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} & \ldots & a_{22}b_{2n} \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$b_{22} = \frac{1}{a_{22}},\ b_{23} = \ldots = b_{2n} = 0.$$

Siguiendo este proceso concluimos que A^{-1} es también triangular.

— — —

9. Sea $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular N^2.

Deducir de aquí A^n, donde A es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}; \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ cualquiera.}$$

Solución:

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$N^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \forall n \geq 2.$$

Calculemos A^n para ello observamos que $A = aI + bN$ y que las matrices I y N conmutan, por lo que podemos usar el binomio de Newton.

$A^n = (aI + bN)^n =$
$\binom{n}{0}a^nI^n + \binom{n}{1}a^{n-1}bI.N + \binom{n}{2}a^{n-2}bI^{n-2}N^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1}IN^{n-1} + \binom{n}{n}b^nN^n =$
$\binom{n}{0}a^nI + \binom{n}{1}a^{n-1}bN$

Por lo que

$$\boxed{A^n = a^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + na^{n-1}b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

— — —

10. Se dice que una matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$ es mágica si al sumar los elementos de cada fila, de cada columna, de la diagonal principal, y de la diagonal secundaria se obtiene siempre el mismo valor s. Construir todas las matrices mágicas simétricas.

Solución:

Una matriz $A = (a_{ij})$ es simétrica si y sólo si $a_{ij} = a_{ji}$, luego las matrices mágicas simétricas serán de la forma

$$\begin{pmatrix} x & a & b \\ a & y & c \\ b & c & z \end{pmatrix}$$

con $x + a + b = s$, $a + y + c = s$, $b + c + z = s$, $x + y + z = s$, $2b + y = s$ que interpretándolo como un sistema de cinco ecuaciones con siete incógnitas

$$\left.\begin{aligned} x + y + z - s &= 0 \\ y + a + c - s &= 0 \\ x + a + b - s &= 0 \\ z + b + c - s &= 0 \\ y + 2b - s &= 0 \end{aligned}\right\}$$

resulta un sistema homogéneo, por tanto compatible, y que vamos a resolver por transformaciones elementales

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quedando el sistema de rango cinco:

$$\left.\begin{array}{rl} 3x-3c & =0 \\ 3y-s & =0 \\ 3z+3c-2s & =0 \\ 3a+3c-2s & =0 \\ -3b+s & =0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{ll} 3x & =3c \\ 3y & =s \\ 3z & =-3c+2s \\ 3a & =-3c+2s \\ 3b & =s \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x\;=\;c \\ y\;=\dfrac{s}{3}\;=\;b \\ z\;=\dfrac{2s-3c}{3}\;=\;a \end{array}$$

por lo tanto la matriz mágica simétrica buscada es

$$c\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{s}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

para todo $c, s \in \mathbf{R}$. Esto es:

$$\boxed{\begin{pmatrix} c & \frac{2s-3c}{3} & \frac{s}{3} \\ \frac{2s-3c}{3} & \frac{s}{3} & c \\ \frac{s}{3} & c & \frac{2s-3c}{3} \end{pmatrix} \text{ para todo } c, s \in \mathbb{R}.}$$

— — —

11. Encontrar la matriz inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

según los diferentes valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Obervamos que la matriz es inversible si y sólo si $\alpha \neq 1$.

Supongamos pues que $\alpha \neq 1$, entonces:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2\alpha-1}{\alpha-1} & -\frac{1}{\alpha-1} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto la matriz inversa es

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{2\alpha-1}{\alpha-1} & -\frac{1}{\alpha-1} & -1 \\ -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

— — —

12. Sea $S \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz inversible. Probar que la matriz $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} S^{-1} & S^{-1} \\ S^{-1} & -S^{-1} \end{pmatrix}$ es la inversa de la matriz $X = \begin{pmatrix} S & S \\ S & -S \end{pmatrix}$.

Solución:

Basta probar que el producto de esta matriz por la matriz X es la matriz identidad.

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} S^{-1} & S^{-1} \\ S^{-1} & -S^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & S \\ S & -S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

— — —

13. Discutir y resolver en $\mathbb{R}$ el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + 5z &= 1 \\ 4x + 3y + 6z &= 2 \\ 5x + 4y + 7z &= 3 \\ 6x + 5y + 8z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Escrito matricialmente, el sistema es

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = B$$

Tomamos la matriz $\overline{A}$ obtenida de A yuxtaponiéndole la matriz columna B y procedemos a efectuar transformaciones elementales de fila

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 7 & 3 \\ 6 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 & 12 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y tenemos rango $A = \text{rango}\,\overline{A} = 2 < 3$, luego el sistema es compatible indeterminado y el conjunto de soluciones es

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y = 4,\ -y + 2z = -2\} = \{(2 - \frac{3}{2}\lambda, \lambda, -1 + \frac{1}{2}\lambda), \forall\lambda \in \mathbb{R}\}$$

— — —

14. Determinar el valor de λ de manera que el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x + 3y - z &= 2 \\ 3x + 4y &= \lambda \end{aligned}\right\}$$

sea compatible y dar el conjunto de soluciones para dicho valor de λ.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & \lambda - 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

si y sólo si $\boxed{\lambda = 4.}$

Supongamos pues $\lambda = 4$ y resolvamos el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego las soluciones son:

$$\boxed{x = 4 - 4z, y = -2 + 3z \text{ para todo } z.}$$

— — —

15. Resolver según los valores de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4t = a \\ 2x + 3y + 4z + t = b \\ 3x + 4y + z + 2t = c \\ 4x + y + 2z + 3t = d \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & a \\ 2 & 3 & 4 & 1 & b \\ 3 & 4 & 1 & 2 & c \\ 4 & 1 & 2 & 3 & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & a \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -2a + b \\ 0 & -2 & -8 & -10 & -3a + c \\ 0 & -7 & -10 & -13 & -4a + d \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & a \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 2a - b \\ 0 & 0 & 4 & -4 & a - 2b + c \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 10a - 7b + d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & a \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 2a - b \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -a + 2b - c \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 11 - 9b + c + d \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 & 10a \\ 0 & 40 & 80 & 280 & 80a - 40b \\ 0 & 0 & 40 & 0 & a + 11b - 9c + d \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 11a - 9b + c + d \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 & -9a + b + c + 11d \\ 0 & 40 & 0 & 0 & a + b + 11c - 9d \\ 0 & 0 & 40 & 0 & a + 11b - 9c + d \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 11a - 9b + c + d \end{pmatrix}.$$

El sistema tiene solución única

$$\boxed{\begin{array}{ll} x = \dfrac{-9a+b+c+11d}{40}, & y = \dfrac{a+b+11c-9d}{40}, \\[2ex] z = \dfrac{a+11b-9c+d}{40}, & t = \dfrac{11a-9b+c+d}{40}. \end{array}}$$

— — —

16. Considerar el sistema $AX = B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & 3 & a \\ 1 & 4 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$$

Discutir el sistema según los diferentes valores de las constantes $a, b \in \mathbb{R}$. Encontrar, en los casos en que ello sea posible, el conjunto de soluciones.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & | & 1 & a \\ -1 & 3 & a & | & 1 & b \\ 1 & 4 & a & | & 1 & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & | & 1 & a \\ 0 & 5 & 2a & | & 2 & a+b \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & c-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & | & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & c-a \\ 0 & 5 & 2a & | & 2 & a+b \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & | & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & 0 & 4a & | & 4 & 7a+2b-5c \end{pmatrix}.$$

Luego para que el sistems sea compatible ha de ser $a \neq 0$.

Supongamos pues que $a \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & | & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & 0 & 4a & | & 4 & 7a+2b-5c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & | & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{a} & \frac{7a+2b-5c}{4a} \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 & \frac{-3a-2b+5c}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{a} & \frac{7a+2b-5c}{4a} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & \frac{a-2b+c}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{a} & \frac{7a+2b-5c}{4a} \end{pmatrix}$$

Luego la solución del sistema es:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{a-2b+c}{4} \\ 0 & \dfrac{c-a}{2} \\ \dfrac{1}{a} & \dfrac{7a+2b-5c}{4a} \end{pmatrix}.}$$

— — —

17. Discutir, según los diferentes valores de $a, b \in \mathbb{R}$, el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y resolverlo en los casos en que sea compatible.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & b & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b-a & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

el sistema es compatible si $b - a \neq 0$.

Supongamos pues, $b - a \neq 0$.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & a & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & \frac{-1}{b-a} & \frac{1}{b-a} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & \frac{b}{b-a} & \frac{-a}{b-a} \\ 0 & 1 & | & 0 & \frac{-1}{b-a} & \frac{1}{b-a} \end{pmatrix}$$

Luego la solución es :

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{b}{b-a} & \dfrac{-a}{b-a} \\ 0 & \dfrac{-1}{b-a} & \dfrac{1}{b-a} \end{pmatrix}.}$$

— — —

18. Consideremos las matrices de $M_2(\mathbb{R})$ siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} X + AY = B \\ X + CY = D \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} X + AY = B \\ X + CY = D \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} X + AY = B \\ (C-A)Y = D - B \end{array}\right\}$$

la matriz $C - A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ es inversible por lo que $Y = (C-A)^{-1}(D-B)$ y $X = B - AY = B - A(C-A)^{-1}(D-B)$.

Calculemos pues $(C-A)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & | & 1 & 0 \\ 2 & -1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & 0 & 1 \\ 0 & 2 & | & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & 0 & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & | & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{11}{4} \\ \frac{15}{2} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ -3 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.}$$

— — —

19. Determinar la dimensión de los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

$$\begin{aligned} F_1 &= [(1,-1,0,2),(1,1,-1,1),(0,2,-1,-1),(1,1,3,-1)] \\ F_2 &= [(1,1,2,-1),(0,1,-1,2),(1,2,1,1),(1,1,-1,0)] \\ F_3 &= [(1,-1,0,1),(1,1,-1,1),(0,2,-1,0),(1,3,-2,1)] \\ F_4 &= [(1,1,0,-1),(-2,-2,1,1),(3,1,2,-2),(2,0,1,1)]. \end{aligned}$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

el rango de la matriz A es 3, luego $\boxed{\dim F_1 = 3.}$

$$
\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

el rango de la matriz B es 3, luego $\boxed{\dim F_2 = 3.}$

$$
C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

el rango de la matriz C es 2, luego $\boxed{\dim F_3 = 2.}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

el rango de la matriz A es 4, luego $\boxed{\dim F_4 = 4.}$

— — —

20. Estudiar cuál es la dimensión de los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^5$ siguientes:

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 2x_4 - x_5 = 0\} \\ F_2 &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\} \\ F_3 &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + 2x_2 = x_2 + 2x_3 = x_3 + 2x_4 = 0\} \\ F_4 &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4x_1 - x_2 + 4x_4 = \\ &\qquad\qquad = 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0\} \end{aligned}$$

Solución:

Calcularemos los rangos de los sistemas que definen estos subespacios, ya que $\dim F = n - \text{rango}$.

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\dim F_1 = 5 - 2 = \boxed{3.}$$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\dim F_2 = 5 - 1 = \boxed{4.}$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\0&1&2&0&0\\0&0&1&2&0\end{pmatrix}=3$$

$$\dim F_3 = 5-3=\boxed{2.}$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix}2&-1&3&0&0\\4&-2&0&4&0\\2&-2&-3&4&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&3&0&0\\2&0&3&0&0\\2&-2&-3&4&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&-1&0&0&0\\2&0&3&0&0\\2&-2&-3&4&0\end{pmatrix}=3$$

$$\dim F_1 = 5-3=\boxed{2.}$$

— — —

21.

Calcular la dimensión de los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}[t]$ siguientes:

$$\begin{aligned}F &= [1-t+2t^2, 1+t^2-t^3, t^4-t^5]\\ G &= [1+t, t^2-t^4, 1+t^5, -t-t^2+t^4+t^5]\\ H &= [2-t^2, 1+t^4, 1+t^6, t^2+t^4+t^6]\end{aligned}$$

Solución:

Observamos que $\forall p(t)\in F$ $\operatorname{grado} p(t)\leq 5$, por lo que $F\subset R_5[t]$,

Sea $\{1,t,t^2,t^3,t^4,t^5\}$ una base de $R_5[t]$, entonces

$1-t+2t^2=(1,-1,2,0,0,0)$
$1+t^2-t^3=(1,0,1,-1,0,0)$
$t^4-t^5=(0,0,0,0,1,-1)$

$$\text{rango}\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&0\\2&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=3$$

Luego $\boxed{\dim F = 3.}$

Al igual que para F, $G \subset R_5[t]$, considerando la misma base para $R_5[t]$ tenemos

$1 + t = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$
$t^2 - t^4 = (0, 0, 1, 0, -1, 0)$
$1 + t^5 = (1, 0, 0, 0, 0, 1)$
$-t - t^2 + t^4 + t^5 = (0, -1, -1, 0, 1, 1)$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Luego $\boxed{\dim G = 3.}$

Ahora observamos que, $\forall p(t) \in H$, $\operatorname{grado} p(t) \leq 6$, por lo que $H \subset R_6[t]$,

Sea $\{1, t, t^2, t^3, t^4, t^5, t^6\}$ una base de $R_6[t]$, entonces

$2 - t^2 = (2, 0, -1, 0, 0, 0, 0)$
$1 + t^4 = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$
$1 + t^6 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$
$t^2 + t^4 + t^6 = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Luego $\boxed{\dim H = 3.}$

— — —

22. Calcular la dimensión de los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_3[t]$ siguientes:

$$\begin{aligned} F &= \{p(t) \in \mathbb{R}_3[t] \mid p(t) = p'(0)t + 6p''(0)t^2\} \\ G &= \{p(t) \in \mathbb{R}_3[t] \mid p(0) = \frac{1}{2}p''(0) - \frac{1}{6}p'''(0)\} \\ H &= \{p(t) \in \mathbb{R}_3[t] \mid p(0) = p'(0) - p''(1) = 0\} \end{aligned}$$

Solución:

Para el subespacio F, sea $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in F$, $p'(0) = a_1$, $p''(0) = 2a_2$

Luego $a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 = a_1t + 12a_2t^2$, esto es $a_0 = a_2 = a_3 = 0$ y $F = [t]$.

Por lo que $\boxed{\dim F = 1.}$

Estudiemos el subespacio G, sea $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in G$,

$p(0) = a_0$, $p''(0) = 2a_2$ y $p'''(0) = 6a_3$,, luego $a_0 = \frac{1}{2}2a_2 - \frac{1}{6}6a_3 = a_2 - a_3$, por lo que $p(t) = a_1t + a_2(1 + t^2) + a_3(-1 + t^3)$ y $G = [t, 1 + t^2, -1 + t^3]$

Estos vectores son claramente independientes, comprobémoslo de todos modos.

Sea $\{1, t, t^2, t^3\}$ una base de $R_3[t]$, en dicha base estos vectores son

$t = (0, 1, 0, 0)$
$1 + t^2 = (1, 0, 1, 0)$
$-1 + t^3 = (-1, 0, 0, 1)$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Por lo que $\boxed{\dim G = 3.}$

Finalmente, estudiemos el subespacio H, sea $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in H$,

$P(0) = a_0 = 0$, $p'(0) - p''(1) = a_1 + 2a_2 + 6a_3 = 0$, luego $p(t) = a_2(-2t + t^2) + a_3(-6t + t^3$ y $H = [-2t + t^2, -6t + t^3]$

Estos vectores son independientes, comprobémoslo

Sea $\{1, t, t^2, t^3\}$ una base de $R_3[t]$, en dicha base estos vectores son

$-2t + t^2 = (0, -2, 1, 0)$
$-6t + t^3 = (0, -6, 0, 1)$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -6 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Por lo que $\boxed{\dim H = 2.}$

— — —

23. Calcular la dimensión de los subespacios vectoriales de $M_2(\mathbb{R})$ siguientes:

$$F = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\right],$$

$$G = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

Solución:

Escojamos una base de $M_2(\mathbb{R})$, $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right.$ $\left. e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ en esta base, los generadores de F se expresan

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, -1, 0, 1)$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (4, 1, 2, 0)$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, -1, 0, 1)$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = (0, 5, 2, -4)$$

Calculemos el rango de la matriz formada por estos vectores

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el rango es 2 por lo que $\boxed{\dim F = 2.}$

Con respecto a G,

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,1,0,1)$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (2,1,-1,1)$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = (0,-1,-1,-1)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (1,0,-1,0)$

Calculemos el rango de la matriz formada por estos vectores

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el rango es 2 por lo que $\boxed{\dim G = 2.}$

— — —

24. Calcular la dimensión de los subespacios vectoriales de $M_3(\mathbb{R})$ siguientes:

$$\begin{aligned} F_1 &= \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A + A^t = 0\} \\ F_2 &= \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr} A = 0\} \\ F_3 &= \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \,\middle|\, a_{12} + 2a_{13} = 2a_{22} + 3a_{33} = 0 \right\} \end{aligned}$$

Solución:

Seleccionemos una base de $M_3(\mathbb{R})$:

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg\}$$

Escribamos las ecuaciones que definen F_1,

$A + A^t = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} + a_{21} & a_{13} + a_{31} \\ a_{21} + a_{12} & 2a_{22} & a_{23} + a_{32} \\ a_{31} + a_{13} & a_{32} + a_{23} & 2a_{33} = 0 \end{pmatrix}$, luego

$$F_1 = \{a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0, a_{12} + a_{21} = 0, a_{13} + a_{31} = 0, a_{23} + a_{32} = 0\}$$

El rango de dicho sistema es 6, por lo que $\dim F_1 = 9 - 6 = \boxed{3.}$

Escribamos, ahora, las ecuaciones que definen F_2,

Denotemos por tr a la traza de la matriz.

$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + a_{33}$, luego

$$F_2 = \{a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\}$$

El rango de dicho sistema es 1, por lo que $\dim F_2 = 9 - 1 = \boxed{8.}$

El subespacio F_3 está ya definido como conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineal homogéneo.

Estudiemos pues el rango de dicho sistema.

El rango de dicho sistema es 2, por lo que $\dim F_3 = 9 - 2 = \boxed{7.}$

— — —

25. Encontrar las ecuaciones que definen los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^5$ siguientes:

$$F = [(2, 1, -1, 0, 0), (0, 1, 1, -2, 1)]$$
$$G = [(1, 3, 0, 0, 0), (1, -2, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 3, -1)]$$

Solución:

Sea $(x, y, z, t, u) \in F$ luego este vector ha de ser dependiente de los generadores de F esto es

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \\ 0 & -2 & t \\ 0 & 1 & u \end{pmatrix}.$$

Obliguemos pues a que ambos rangos coincidan

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \\ 0 & -2 & t \\ 0 & 1 & u \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2y-x \\ 0 & 2 & 2z+x \\ 0 & -2 & t \\ 0 & 1 & u \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2y-x \\ 0 & 0 & 2x-2y+2z \\ 0 & 0 & -x+2y+t \\ 0 & 0 & x-2y+2u \end{pmatrix}.$$

Para que los rangos coincidan ha de ser

$$\boxed{\left.\begin{aligned} 2x-2y+2z &= 0 \\ -x+2y+t &= 0 \\ x-2y+2u &= 0 \end{aligned}\right\}.}$$

Análogamente para el subespacio G

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 3 & -2 & 2 & y \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 3 & t \\ 0 & 0 & -1 & u \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -5 & -1 & y-3x \\ 0 & 1 & 3 & t \\ 0 & 0 & -1 & u \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -5 & -1 & y-3x \\ 0 & 0 & 14 & -3x+y+5t \\ 0 & 0 & -1 & u \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -5 & -1 & y-3x \\ 0 & 0 & 14 & -3x+y+5t \\ 0 & 0 & 0 & -3x+y+5t+14u \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Para que los rangos coincidan ha de ser

$$\boxed{\left.\begin{array}{rl} -3x+y+5t+14u & =0 \\ z & =0 \end{array}\right\}.}$$

— — —

26. Encontrar las ecuaciones que definen los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_4[t]$ siguientes: $F=[1+2t,t^2]$, $G=[1+t-t^2,t^2-t^4,1+t^4]$.

Solución:

Escojamos una base de $\mathbb{R}_4[t]$: $\{1,t,t^2,t^3,t^4\}$ por ejemplo,

En coordenadas los generadores de F son

$1+2t=(1,2,0,0,0)$
$t^2=(0,0,1,0,0)$

Obliguemos a que $(x,y,z,u,v)\in F$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}.$$

El rango de dicha matriz es 2 si y sólo si

$$\boxed{\left.\begin{array}{rl} 2x-y & =0 \\ u & =0 \\ v & =0 \end{array}\right\}.}$$

Escribamos también en coordenadas los generadores de G

$1+t-t^2=(1,1,-1,0,0)$
$t^2-t^4=(0,0,1,0,-1)$
$1+t^4=(1,0,0,0,1)$

Obliguemos a que $(x,y,z,u,v)\in G$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ -1 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & u \\ 0 & -1 & 1 & v \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & -1 & -x+y \\ 0 & 1 & 1 & x+z \\ 0 & 0 & 0 & u \\ 0 & -1 & 1 & v \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & -1 & -x+y \\ 0 & 1 & 1 & x+z \\ 0 & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & -x+2y+z+v \end{pmatrix}.$$

El rango de dicha matriz es 3, si y sólo si

$$\boxed{\left.\begin{array}{rl} u & = 0 \\ -x+2y+z+v & = 0 \end{array}\right\}.}$$

— — —

27. Determinar las ecuaciones que definen los subespacios vectoriales de $M_2(\mathbb{R})$ siguientes:

$$\begin{aligned} F &= \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right] \\ G &= \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Solución:

Escojamos una base en $M_2(\mathbb{R})$:

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

En esta base las coordenadas de los generadores de F son

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, -1, 0, 1)$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (2, 1, 1, -1)$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = (1, 2, 1, -2)$$

Obliguemos a que $(x, y, z, t) \in F$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & x \\ -1 & 1 & 2 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 1 & -1 & -2 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 3 & 3 & x+y \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & -3 & -3 & -x+t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 3 & 3 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & -x-y+3z \\ 0 & 0 & 0 & y+t \end{pmatrix}.$$

El rango de dicha matriz es 2, si y sólo si

$$\boxed{\left.\begin{aligned} -x-y+3z &= 0 \\ y+t &= 0 \end{aligned}\right\}.}$$

Estudiemos G

En la base escogida las coordenadas de los generadores de G son

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,-1,2,1)$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (2,1,0,1)$

$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = (0,3,-4,-1)$

$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = (2,-2,4,2)$

Obliguemos a que $(x,y,z,t) \in G$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & x \\ -1 & 1 & 3 & -2 & y \\ 2 & 0 & -4 & 4 & z \\ 1 & 1 & -1 & 2 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & x \\ 0 & 3 & 3 & 0 & x+y \\ 0 & -4 & -4 & 0 & -2x+z \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -x+t \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & x \\ 0 & 3 & 3 & 0 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2x+4y+3z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2x+y+3t \end{pmatrix}.$$

El rango de dicha matriz es 2, si y sólo si

$$\boxed{\left.\begin{aligned} -2x+4y+3z &= 0 \\ -2x+y+3t &= 0 \end{aligned}\right\}.}$$

28. Estudiar la dependencia o independencia lineal de las familias de vectores de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

(a) $\{(1,-1,2,2),(-2,-1,3,4),(7,-1,0,-2)\}$

(b) $\{(1,1,-2,3),(2,-1,0,4),(5,-1,0,0),(1,0,1,0)\}$

(c) $\{(0,-1,3,2),(2,7,-3,4),(5,1,2,-2),(8,9,3,4),(6,3,2,4)\}$

Solución:

Este ejercicio se corresponde con el ejercicio 1 del tema anterior, que pasamos a resolver calculando rangos de matrices.

Para estudiar en cada caso la dependencia o no de los vectores, se calculará el rango de las matrices que forman dichos vectores.

a) rango $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 4 \\ 7 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & 8 \\ 0 & -6 & -14 & -16 \end{pmatrix} = 2.$

Luego los tres vectores son linealmente dependientes.

Observar que hemos colocado por filas los vectores dados. Hemos hecho uso del hecho de que el rango por filas de una matriz coincide con el rango por columnas.

b) rango $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & -6 & 10 & -15 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} =$

rango $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & -8 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 4.$

Luego los cuatro vectores son linealmente independientes.

c) Como el rango de la matriz que forman los vectores como máximo es cuatro y tenemos cinco vectores, podemos asegurar que al menos uno de ellos es dependiente de los cuatro restantes.

— — —

29. En $E=\mathbb{R}^5$ considerar el subespacio vectorial F engendrado por el conjunto de vectores,

$$\{(1,-1,0,1,1),(0,1,0,-1,1),(1,0,0,0,2),(2,-1,0,0,1)\}.$$

Determinar una base de F y ampliarla a una base de $\mathbb{R}^5$.

Solución:

Este ejercicio se corresponde con el ejercicio 13 del tema anterior, que pasamos a resolver calculando rangos de matrices.

$$\dim F = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3.$$

Observamos que el rango de las tres primeras columnas de la matriz es dos, por lo que las columnas 1,2,4 son linealmente independientes, y puesto que la dimensión es tres, tenemos que una base es: $\{(1,-1,0,1,1),(0,1,0,-1,1),(2,-1,0,0,1)\}$

Completemos esta base hasta conseguir una de $\mathbb{R}^5$.

Como $\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3$, entonces,

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5.$$

y por tanto la base de $\mathbb{R}^5$ buscada es

$$\boxed{\{(1,-1,0,1,1),(0,1,0,-1,1),(2,-1,0,0,1),(0,0,1,0,0),(0,0,0,0,1)\}.}$$

— — —

30. Probar que

$$\{(0,1,0),(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}),(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2})\}$$

es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Solución:

Sea A la matriz formada por los vectores dados, basta probar si $A^tA = I$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

— — —

31. Considerar en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar:

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 3x_3y_3.$$

Estudiar si las familias de vectores siguientes son, o no, bases ortonormales, respecto de este producto escalar.

a) $\{(1,0,0),(-1,1,0),(1,-1,1)\}$

b) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

c) $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,1),\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\}$

d) $\{\frac{1}{\sqrt{3}}(0,0,1),(1,0,0),\frac{1}{\sqrt{6}}(3,-3,1)\}$

Solución:

El producto escalar de dos vectores podemos obtenerlo matricialmente de la forma

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 3x_3y_3$$

Por lo tanto para estudiar si las familias dadas forman o no, una base ortonormal, basta hacer el producto de matrices S^tAS donde S es la matriz de la famila de vectores y A la matriz del producto escalar.

a) $S = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Luego no es ortonormal. Observamos que es ortogonal, pero el tercer vector no tiene norma uno.

b) $S = I$ por lo que $S^tAS = A \neq I$, por lo tanto la base no es ortonormal.

c)

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{\sqrt{15}}\\ 0 & 3 & \frac{6}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{6}{\sqrt{6}} & \frac{10}{3}\end{pmatrix} \neq I,$$

por lo que los vectores no constituyen una base ortonormal.

d)

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 1 & 0 & 0\\ \frac{3}{\sqrt{6}} & -\frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & \frac{3}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} = I.$$

Por lo tanto la familia de vectores es una base ortonormal del espacio.

— — —

Capítulo 4

Aplicaciones Lineales

Descartes, en uno de sus intentos por algebrizar la geometría plana, estudió la relación entre (x, y) y $(x^{'}, y^{'})$ si el segundo se obtiene girando un ángulo α el primero. Jean Bernouilli (1667-1748) en una carta a Leibniz en 1715 introdujo los planos coordenados en R^3 tal como los conocemos hoy en día.

Los siguientes pasos los dieron Euler y Lagrange desde los puntos de vista geométrico y analítico que les llevaron a descubrir las traslaciones y formular los movimientos que conservan distancias. En lenguaje moderno sus ecuaciones se escriben como $x = Ax^{'}$, donde $A = (a_{ij})$, $x = (x, y, z)^t$ y $x^{'} = (x^{'}, y^{'}, z^{'})^t$. Mientras que las condiciones impuestas equivalen a $AA^t = I$.

La relación entre matriz y aplicación lineal se hizo más palmario cuando Cayley escribió de forma matricial las ecuaciones de los diferentes tipos de transformaciones geométricas. También escribió de forma matricial las ecuaciones obtenidas por Lagrange obteniendo un tipo particular de matrices: las llamadas ortogonales. El concepto de aplicación lineal en su forma actual se debe a Peano cuando axiomatizó la definición de espacio vectorial.

En la actualidad, tanto en matemáticas como en ciencias aplicadas, las aplicaciones lineales son fundamentales ya que modelan las transformaciones geométricas y las ecuaciones lineales. En realidad, muchos de los problemas más complicados son linealizados mediante aproximación prefiriendo, así, el estudio de los problemas lineales que surgen mediante este proceso por su menor complejidad. Incluso en la mecánica cuántica, un observable es cierto operador lineal en un espacio vectorial complejo.

Ejercicios

1. Discutir a partir de la definición, si las siguientes aplicaciones son, o no, lineales:

a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (3x_1 + 5x_2, x_2 + x_3, x_2 - 5x_3, x_1 + x_2 + x_3)$.

b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1 + a, bx_2)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

c) $f : \mathbb{R}_n[t] \longrightarrow \mathbb{R}_n[t]$

$$p(t) \longmapsto p(t) + p'(0)p'(t) + p''(0)p''(t) + \cdots + p^{(n)}(0)p^{(n)}(t).$$

d) $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ c+2d & a-b+c-d \end{pmatrix}$$

e) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto \begin{pmatrix} ax_1 & bx_2 \\ cx_3 & x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Solución:

Recordemos la definición de linealidad.

$f : E_1 \longrightarrow E_2$ es lineal si y sólo si, para todo $x, y \in E_1$, $f(x) + f(y) \in E_2$, y para todo $\lambda \in K$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

a) Sean (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3),

$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

$\lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$

$$\begin{array}{l} f((x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = \\ (3(x_1 + y_1) + 5(x_2 + y_2), (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3), (x_2 + y_2) - 5(x_3 + y_3), \\ \qquad\qquad (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3)) = \\ (3x_1 + 5x_2, x_2 + x_3, x_2 - 5x_3, x_1 + x_2 + x_3) + (3y_1 + 5y_2, y_2 + y_3, y_2 - 5y_3, \\ \qquad\qquad y_1 + y_2 + y_3) = \\ f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3), \end{array}$$

$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) =$
$(3\lambda x_1 + 5\lambda x_2, \lambda x_2 + \lambda x_3, \lambda x_2 - 5\lambda x_3, \lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3) =$
$\lambda(3x_1 + 5x_2, x_2 + x_3, x_2 - 5x_3, x_1 + x_2 + x_3) =$
$\lambda f(x_1, x_2, x_3)$.

b) Al igual que en el apartado a)

$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) =$
$((x_1 + y_1) + a, b(x_2 + y_2)) = (x_1 + a, bx_2) + (y_1 + a, by_2) - (a, 0) =$
$f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3) - (a, 0)$.

Luego la primera condición se verifica si y sólo si $a = 0$.

Impongamos $a = 0$,

$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = (\lambda x_1, b\lambda x_2) =$
$\lambda(x_1, bx_2)$.

Luego la aplicación es lineal para $a = 0$ y para todo b.

c) Dados $p_1(t), p_2 \in \mathbb{R}_n[t]$, $(p_1 + p_2)^i(t) = p_1^i(t) + p_2^i(t)$ para todo $i = 1, \dots, n$ y $(p_1 + p_2)^i(0) = p_1^i(0) + p_2^i(0)$ para todo $i = 1, \dots, n$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
&f((p_1 + p_2)(t)) = \\
&(p_1 + p_2)(t) + (p_1 + p_2)'(0)(p_1 + p_2)'(t) + (p_1 + p_2)''(0)(p_1 + p_2)''(t) + \dots + \\
&\qquad +(p_1 + p_2)^{(n)}(0)(p_1 + p_2)^{(n)}(t) = \\
&p_1(t) + p_1'(0)p_1'(t) + p_1''(0)p_1''(t) + \dots + p_1^{(n)}(0)p_1^{(n)}(t) + \\
&\quad +p_2(t) + p_2'(0)p_2'(t) + p_2''(0)p_2''(t) + \dots + p_2^{(n)}(0)p_2^{(n)}(t) + \\
&+p_1'(0)p_2'(t) + p_1''(0)p_2''(t) + \dots + p_1^{(n)}(0)p_2^{(n)}(t) + \\
&\quad +p_2'(0)p_1'(t) + p_2''(0)p_1''(t) + \dots + p_2^{(n)}(0)p_1^{(n)}(t) = \\
&f(p_1(t)) + f(p_2(t)) + p_1'(0)p_2'(t) + p_1''(0)p_2''(t) + \dots + p_1^{(n)}(0)p_2^{(n)}(t) + \\
&\quad +p_2'(0)p_1'(t) + p_2''(0)p_1''(t) + \dots + p_2^{(n)}(0)p_1^{(n)}(t)
\end{aligned}$$

Por lo que la aplicación no es lineal.

d) Recordemos que

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

y $\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$.

$$f\left(\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_1+d_2 \end{pmatrix}\right) =$$
$$\begin{pmatrix} (a_1+a_2)-(b_1+b_2) & (a_1+a_2)+(b_1+b_2) \\ (c_1+c_2)+2(d_1+d_2) & (a_1+a_2)-(b_1+b_2)+(c_1+c_2)-(d_1+d_2) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} a_1-b_1 & a_1+b_1 \\ c_1+2d_1 & a_1-b_1+c_1-d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2-b_2 & a_2+b_2 \\ c_2+2d_2 & a_2-b_2+c_2-d_2 \end{pmatrix} =$$
$$f\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right).$$

Luego se verifica la primera condición, veamos si se verifica la segunda

$$f\left(\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda a-\lambda b & \lambda a+\lambda b \\ \lambda c+2\lambda d & \lambda a-\lambda b+\lambda c-\lambda d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(a-b) & \lambda(a+b) \\ \lambda(c+2d) & \lambda(a-b+c-d) \end{pmatrix} =$$
$$\lambda \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ c+2d & a-b+c-d \end{pmatrix} = \lambda f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

e) En este caso tenemos

$$f(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) = \begin{pmatrix} a(x_1+y_1) & b(x_2+y_2) \\ c(x_3+y_3) & (x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} ax_1 & bx_2 \\ cx_3 & x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ay_1 & by_2 \\ cy_3 & y_1+y_2+y_3 \end{pmatrix} = f(x_1,x_2,x_3)+f(y_1,y_2,y_3).$$

Se verifica la primera condición para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, veamos la segunda.

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \begin{pmatrix} a\lambda x_1 & b\lambda x_2 \\ c\lambda x_3 & \lambda x_1+\lambda x_2+\lambda x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a x_1 & \lambda b x_2 \\ \lambda c x_3 & \lambda(x_1+x_2+x_3) \end{pmatrix} =$$
$$\lambda \begin{pmatrix} ax_1 & bx_2 \\ cx_3 & x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix} = \lambda f(x_1,x_2,x_3).$$

Luego la aplicación es lineal para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

— — —

2. Estudiar cuales de las aplicaciones lineales siguientes son inyectivas, exhaustivas y/o biyectivas.

a) $f : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t]$

$$p(t) \longmapsto \lambda p(0) + 3p''(t)$$

b) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ c+d & c-d \end{pmatrix}$$

c) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (x_1 - x_2, x_3 - x_4, x_1, x_3)$.

d) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1 + x_2, x_2 - x_3)$.

e) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x_1, x_2) \longmapsto (3x_1 - x_2, x_1 + 5x_2, 2x_1 - 4x_2)$

Solución:

Una aplicación lineal $f : E_1 \longrightarrow E_2$ es inyectiva si y sólo sí $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, es exhaustiva si y sólo sí $\operatorname{Im} f = E_2$. Es biyectiva si y sólo sí es inyectiva y exhaustiva. Observamos que si E_1 es de dimensión finita para que la aplicación sea biyectiva es necesario que $\dim E_1 = \dim E_2$. Además si $\dim E_1 = \dim E_2$ entonces inyectividad equivale a exhaustividad.

a) Recordemos que dado $p(t) = a + bt + ct^2$, $p(0) = a$ y $p''(t) = 2c$.

$\operatorname{Ker} f = \{p(t) \mid f(p(t)) = 0\} = \{p(t) = a + bt + ct^2 \mid c = -\frac{\lambda}{6}a\}$.

La aplicación no es inyectiva, por tanto tampoco exhaustiva (ni biyectiva).

b)

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} f &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ c+d & c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = . \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Por lo que la aplicación es inyectiva, por lo tanto exhaustiva y biyectiva.

c)

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0,0,0)\} = \\ &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid (x_1-x_2,x_3-x_4,x_1,x_3)=(0,0,0,0)\} = \\ &\{(0,0,0,0)\}.\end{aligned}$$

La aplicación es pues inyectiva, exhaustiva y por tanto también biyectiva.

d) Teniendo en cuenta que $\dim E_1 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$, esta aplicación no puede ser inyectiva. Veamos si es exhaustiva.

Sea $\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. $\operatorname{Im} f = [f(e_1), f(e_2), f(e_3)]$

$f(e_1)=(1,0)$, $f(e_2)=(1,1)$, $f(e_3)=(0,-1)$.

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rango}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} = 2 = \dim \mathbb{R}^2.$$

Luego la aplicación es exhaustiva.

e) En este caso observamos que la aplicación no puede ser exhaustiva ya que $\dim \operatorname{Im} f \leq \dim E_1 < \dim E_2$. Veamos si es inyectiva.

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f &= \{(x_1,x_2) \mid f(x_1,x_2)=0\} = \\ &= \{(x_1,x_2) \mid (3x_1-x_2, x_1+5x_2, 2x_1-4x_2)=(0,0,0)\} = \\ &= [(0,0,0)].\end{aligned}$$

Luego la aplicación es inyectiva.

— — —

3. Sea $u=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ que verifica:

$$\begin{aligned}f(u_1) &= u_3\,,\\ f(u_2) &= 2u_3\,,\\ f(u_3) &= -u_1+u_4\,,\\ f(u_4) &= u_2-u_3\,.\end{aligned}$$

¿Cuál es la imagen del vector $v=2u_1-3u_3+4u_4$? ¿Y la del vector $w=u_1-u_2+u_3-u_4$?

Solución:

$$\begin{aligned}
f(v) &= f(2u_1 - 3u_3 + 4u_4) = \\
&= 2f(u_1) - 3f(u_3) + 4f(u_4) = 2u_3 - 3(-u_1 + u_4) + 4(u_2 - u_3) = \\
&= 3u_1 + 4u_2 - 2u_3 - 3u_4 \\
f(w) &= f(u_1 - u_2 + u_3 - u_4) = \\
& f(u_1) - f(u_2) + f(u_3) - f(u_4) = u_3 - 2u_3 - u_1 + u_4 - u_2 + u_3 = \\
&= -u_1 - u_2 + u_4
\end{aligned}$$

También hubieramos podido obtener las imágenes de dichos vectores de forma matricial:

Escribamos la matriz de la aplicación en la base dada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y los vectores v y w en coordenadas $v = (2, 0, -3, 4)$, $(1, -1, 1, -1)$. Entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

— — —

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $f(1, 0, 1) = (3, 0, 2)$, $f(0, 1, 0) = (1, 1, 2)$ y $f(3, 1, 0) = (-1, 0, 0)$. Hallar el valor de $f(1, 1, 2)$.

Solución:

Escribamos el vector $(1, 1, 2)$ como combinación lineal de los vectores $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(3, 1, 0)$ y la linealidad de la aplicación nos permitirá obtener la imagen de dicho vector.

$(1, 1, 2) = \lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(3, 1, 0)$ que escrito en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Esto es
$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ \frac{4}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$
Busquemos ahora la imagen de dicho vector
$$f(1,1,2) = 2f(1,0,1) + \frac{4}{3}f(0,1,0) - \frac{1}{3}f(0,1,1) = (\frac{23}{3}, \frac{4}{3}, \frac{20}{3})$$
que hubieramos podido resolver matricialmente escribiendo la matriz de la aplicación tomando en la base de partida los vectores $(1,0,1),(0,1,0),(3,1,0)$ y la base canónica en el espacio de llegada
$$\bar{A} = \begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ \frac{4}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{23}{3}\\ \frac{4}{3}\\ \frac{20}{3}\end{pmatrix}.$$

— — —

5. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (x_1 + 2x_2, x_2 + 2x_3, x_3 + 2x_4, 2x_1 + x_4)$$
Calcular $f^{-1}(1,1,1,1)$ (conjunto de antiimágenes del vector $(1,1,1,1)$).

Solución:

Buscamos $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid (x_1 + 2x_2, x_2 + 2x_3, x_3 + 2x_4, 2x_1 + x_4) = (1,1,1,1)\}$.

Esto el conjunto de soluciones del sistema
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1\\ x_2 + 2x_3 &= 1\\ x_3 + 2x_4 &= 1\\ 2x_1 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$
Sistema compatible determinado, por lo que tiene una única solución por lo que
$$\boxed{f^{-1}(1,1,1,1) = \left\{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\right\}.}$$

6. Determinar los subespacios vectoriales $\operatorname{Ker} f$ y $\operatorname{Im} f$ para la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longrightarrow (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3) \end{aligned}$$

Solución:

Escribamos la matriz de la aplicación lineal en la base canónica.

Recordemos que cada columna de la matriz es la imagen de los vectores de la base expresados en la base del espacio de llegada (en este caso la misma) o equivalentemente cada fila son los coeficientes de los polinomios (homogéneos de grado 1) en las variables dadas por las coordenadas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Busquemos el $\operatorname{Ker} f$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistema compatible determinado, por lo que

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}.}$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{Im} f = [f(e_1), f(e_2), f(e_3)]$ y que la matriz A (cuyas columnas son $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$), tiene rango máximo tenemos que

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3.}$$

— — —

7. Dar la matriz del endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3)$$

en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y en la base $u = \{(1, -1, 0), (0, 1, 1), (2, 0, 1)\}$.

Solución:

Para escribir la matriz en la base canónica basta observar los coeficientes de los polinomios que definen las coordenadas del vector imagen. Así, la primera coordenada es el polinomio $2x_1 + 3x_2 - x_3$ cuyos coeficientes son 2,3,-1, por lo que la primera fila es 2,3,-1, etc.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para obtener la matriz en la nueva base basta hacer

$$\bar{A} = S^{-1}AS$$

siendo $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculemos S^{-1}

$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Por lo que haciendo el producto matricial tenemos

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

— — —

8. Consideremos la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f : M_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longrightarrow (a+b-d, c+d, b-2c+d, a-d). \end{aligned}$$

Dar la matriz de f en las bases

$u = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $M_2(\mathbb{R})$, y
$v = \{(1,-1,0,1),(1,1,2,0),(1,1,0,2),(0,1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^4$.

Solución:

Escribamos primero la matriz tomando la base u en el espacio de partida y la base canónica en el espacio de llegada y tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sea $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz cambio de base que nos pasa los vectores expresados en la base v a la base canónica.

Por lo tanto la matriz buscada es

$$\bar{A} = S^{-1}A$$

Calculando la inversa de la matriz S y realizando el producto tenemos

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

— — —

10. Calcular la imagen por la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}_3[t] \\ (x_1, x_2, x_3) &\longrightarrow (x_1 + x_2) + (x_1 - x_3)t + x_3t^2 + x_2t^3 \end{aligned}$$

del vector de $\mathbb{R}^3$, cuyas coordenadas en la base $u = \{(-1,0,1),(2,1,1),(1,0,2)\}$ son 1,-2,3.

Solución:

Escribamos la matriz de la aplicación en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y base $\{1, t, t^2, t^3\}$ de $\mathbb{R}_3[t]$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pasemos ahora el vector dado a la base canónica. La matriz de cambio de base es

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por lo que el vector en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

— — —

11. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}_2[t]$ definido por:

$$f(p(t)) = 3p(t) - p'(0)t - p''(0)t^2$$

Calcular rango f

Solución:

Dada una base del espacio, el rango del endomorfismo es el rango de la matriz asociada en dicha base. (El rango no depende de la base escogida).

Consideremos la base $\{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{R}_2[t]$ y escribamos la matriz de f en dicha base

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 \\ f(t) &= 2t \\ f(t^2) &= t^2 \end{aligned}$$

La matriz es pues

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo rango es claramente 3.

Observamos que el rango coincide con la dimensión de $\operatorname{Im} f$.

— — —

12. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}_2[t]$ definido por:

$$f(a + bt + ct^2) = a + b + (a - b)t + (b + c)t^2$$

Dar la matriz de f en la base $\{1 + t, 1 - t, 1 - t^2\}$ de $\mathbb{R}_2[t]$.

Solución:

Escribamos primero la matriz de f en la base $\{1, t, t^2\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y sea S la matriz del cambio de base

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces la matriz pedida es $\bar{A} = S^{-1}AS$

Calculemos S^{-1},

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ 0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Haciendo el producto tenemos

$$\boxed{\bar{A}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\ -1&1&1\end{pmatrix}}$$

— — —

13. Sea f el endomorfismo de $M_2(\mathbb{R})$ tal que:

a) $f\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$

b) $f\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3&2\\1&0\end{pmatrix}$

c) $\operatorname{Ker} f=\left[\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]$

Determinar la matriz de f en la base

$$\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

de $M_2(\mathbb{R})$.

Solución:

Puesto que $\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in\operatorname{Ker} f$ se tiene que

$f\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=-f\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ y $f\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=-f\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Por lo tanto la matriz buscada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

— — —

14. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\operatorname{Ker} f = [(2,-1,0),(2,0,1)], \quad f(1,0,0) = (2,0,-1).$$

Determinar la matriz de f en la base natural de $\mathbb{R}^3$.

Solución:

Puesto que $(2,-1,0),(2,0,1) \in \operatorname{Ker} f$, se tiene que

$f(0,1,0) = 2f(1,0,0)$, $f(0,0,1) = -2f(1,0,0)$,

por lo que la matriz de la aplicación es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

— — —

15. Sea $w = (w_1, w_2, w_3)$ una base de $\mathbb{R}^3$, $F = [w_1]$ y $G = [w_3]$. Sea g el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que

a) F y G son invariantes por g.

b) $g(w_1 + w_2) = g(w_2 - w_3) = 2w_1 + w_2$.

Determinar la dimensión de $\operatorname{Ker} g$.

Solución:

Puesto que F y G subespacios de dimensión 1, son invariantes por g, tenemos que:

$$g(w_1) = \lambda_1 w_1, \quad g(w_3) = \lambda_3 w_3.$$

Por otra parte la condición b) nos dice

i) $g(w_1+w_2)-(w_2-w_3)) = g(w_1+w_3) = 0$, y puesto que $g(w_1+w_3) = \lambda_1 w_1+\lambda_3 w_3$, se tiene: $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ (ya que w_1 y w_3 son linealmente independientes.

ii) $g(w_1+w_2) = g(w_1)+g(w_2) = \lambda_1 w_1 + g(w_2) = g(w_2) = 2w_1+w_2 \neq 0$.

Por lo que $\operatorname{Ker} g = \{w_1, w_3\}$ y $\boxed{\dim \operatorname{Ker} g = 2.}$

— — —

16. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida mediante $f(x,y,z) = (2x-y, 2y+z)$, y $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida mediante $g(x,y) = (4x+2y, y, x+y)$. Sea $u = (u_1, u_2, u_3)$ una base de $\mathbb{R}^3$, con $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,1,0)$, $u_3 = (1,1,1)$, y $v = (v_1, v_2)$ una base de $\mathbb{R}^2$, con $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (1,1)$.

a) Dar la matriz de f y la matriz de g en las bases canónicas.

b) Dar una base de $\operatorname{Ker} f$ y una base de $\operatorname{Im} g$.

c) Calcular las matrices de f y de g en las bases u y v.

Solución:

a) La matriz de f en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de g en la base canónica es

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \mid 2x-y=0, 2y+z=0\} = [(1,2,-4)]$.

$\operatorname{Im} g = [(4,0,1),(2,1,1)]$.

c) Sea S la matriz cambio de base que pasa las coordenadas en la base u a la base canónica

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y sea T la matriz cambio de base que pasa las coordenadas en la base v a la canónica

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces las matrices pedidas son $\bar{A} = T^{-1}AS$ y $\bar{B} = S^{-1}BT$.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

— — —

17. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ tal que $f(e_1) = e_1 - e_2$, $f(e_3) = e_1$ i $\operatorname{Ker} f = [e_1 + e_2, e_3 - e_4]$. Estudiar si se verifica $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Solución:

Observamos que $\dim \operatorname{Ker} f = 2$, por lo que $\operatorname{Im} f = [e_1 - e_2, e_1] = [e_1, e_2]$ (ya que $\dim \operatorname{Im} f = n - \dim \operatorname{Ker} f$).

Veamos si estos dos subespacios forman suma directa:

Sea $v \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, entonces $v = \lambda_1(e_1 + e_2) + \lambda_2(e_3 - e_4) = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$. Equivalentemente: $(\mu_1 - \lambda_1)e_1 + (\mu_2 - \lambda_1)e_2 - \lambda_2 e_3 + \lambda_2 e_4 = 0$ y esto sólo es posible si $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_1 = \mu_1 = \mu_2$.

Es decir, los vectores de la forma $\lambda(e_1 + e_2)$ pertenecen a la intersección y lo suma no puede ser directa.

— — —

18. Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo conmutativo K de dimensión n, y sea $f \in \text{End}(E)$. Probar que los subespacios vectoriales $\text{Ker}\, f$ y $\text{Im}\, f$ son invariantes por el endomorfismo f.

Solución:

Recordemos que un subespacio F es invariante por el endomorfismo f, si y sólo si $f(F) \subset F$.

Veamos pues, si se verifica la condición para los subespacios dados.

Sea $v \in \text{Ker}\, f$, entonces $f(v) = 0 \in \text{Ker}\, f$, luego este subespacio es invariante.

Sea $v \in \text{Im}\, f$, por lo tanto $f(v) \in \text{Im}\, f = \{w \in E \mid \exists u \in E \text{ con } f(u) = w\}$. Luego este subespacio también es invariante.

— — —

19. Sean $f : E \longrightarrow F$ y $g : F \longrightarrow G$ dos aplicaciones lineales, con E, F i G espacios vectoriales sobre un cuerpo conmutativo K de dimensión finita. Probar que $\text{rango}\,(g \circ f) \leq \text{rango}\, f$. Si g es inyectiva, entonces se tiene la igualdad.

Solución:

Observamos que $\forall v \in \text{Ker}\, f$ es $f(v) = 0$ por lo tanto $(g \circ f)(v) = 0$ y $v \in \text{Ker}\,(g \circ f)$. Esto es, $\text{Ker}\, f \subset \text{Ker}\,(g \circ f)$ y $\dim \text{Ker}\, f \leq \dim \text{Ker}\,(g \circ f)$.

Teniendo en cuenta que $\dim E = \dim \text{Ker}\, f + \text{rango}\, f = \dim \text{Ker}\,(g \circ f) + \text{rango}\,(g \circ f)$ tenemos que $\text{rango}\,(g \circ f) \leq \text{rango}\, f$.

Supongamos que g es inyectiva y sea $v \in \text{Ker}\,(g \circ f)$, entonces $g(f(v)) = 0$ y al ser g inyectiva es $f(v) = 0$ es decir $v \in \text{Ker}\, f$. Tenemos pues que si g es inyectiva, $\text{Ker}\,(g \circ f) \subset \text{Ker}\, f$, de donde deducimos la contención en sentido contrario, y por tanto la igualdad.

— — —

20. Sea $f : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t]$ la aplicación lineal definida por:

$$f(p(t)) = 2(p(0) - p''(0))t + (p''(0) - p'(0) - p(0))t^2$$

¿Es el subespacio vectorial $F = [1 + 2t, 1 - t^2]$, invariante por f?

Solución:

Busquemos las imágenes de los vectores de la base de F.

$f(1+2t) = 2t - 3t^2$, $f(1-t^2) = 6t - 3t^2$

Veamos si estos vectores están o no en F,

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 & 0 \\ 2 & 0 & | & 2 & 6 \\ 0 & -1 & | & -3 & -3 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 & 0 \\ 0 & -2 & | & 2 & 6 \\ 0 & 0 & | & 4 & 6 \end{pmatrix} = 3 > 2$$

por lo que el subespacio no es invariante.

— — —

21. Sean $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_3(\mathbb{R})$, $g : M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ las aplicaciones lineales definidas por:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b & a \\ c & d & c \\ a & c & d \end{pmatrix}$$

$$g\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$$

¿Es invertible la aplicación $f \circ g$? ¿y $g \circ f$?

Solución:

Observamos que la aplicación g nunca puede ser inyectiva pues la dimensión del espacio de salida es mayor que el espacio de llegada, por lo tanto $f \circ g$ tampoco puede ser inyectiva (observamos que si $g(v) = 0$ entonces $f(g(v)) = f(0) = 0$).

La composición $g \circ f$ será invertible si $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

Haciendo la composición vemos que

$$(f \circ g)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} a & b & a \\ c & d & c \\ a & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Es decir $f \circ g$ es la identidad y por tanto invertible.

22. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ tal que $f(e_1) = e_1 + e_2$, $e_1 - e_2 \in \operatorname{Ker} f$. Probar que el subespacio vectorial $F = [e_1, e_2]$ es invariante por f y dar la matriz del endomorfismo restricción $f_{|F}$ en la base (e_1, e_2) de F.

Solución:

Puesto que $e_1 - e_2 \in \operatorname{Ker} f$, tenemos que $f(e_2) = f(e_1)$ y puesto que $f(e_1) = e_1 + e_2$ tenemos que $f(e_1), f(e_2) \in [e_1, e_2]$ y el subespacio es invariante.

La matriz de la aplicación restricción es

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

— — —

23. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial E de dimensión n y sea F un subespacio vectorial de E engendrado por los vectores $\{v_1, \dots, v_m\}$ tales que $f(v_i) = \alpha_i v_i \ \forall i \in \{1, \dots, m\}$. Probar que F es un subespacio invariante por el endomorfismo f.

Solución:

Claramente $f(v_i) \in F$, por lo que el subespacio es invariante.

— — —

24. Sea f el endomorfismo de $M_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3a + b & -4a - b \\ 7a + b + 2c + d & -17a - 6b - c \end{pmatrix}$$

¿Es el subespacio $F = \left[\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}\right]$ invariante por f?

Solución:

Escribamos la matriz de la aplicación en la base $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Busquemos las imágenes de los vectores de la base del subespacio

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \\ 7 & 1 \\ -17 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \\ 7 & 1 \\ -17 & -6 \end{pmatrix}.$$

Observamos que ambos vectores son invariantes, por lo tanto el subespacio es invariante.

— — —

25. Sea $f : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t]$ la aplicación lineal definida por: $f(p(t)) = 2p(t) - 3p'(t)$.

a) Dar la matriz de f^{-1} en la base $(1, t, t^2)$ de $\mathbb{R}_2[t]$.

b) Escribir f^{-1} en función de f.

Solución:

a) Determinemos primero la matriz de la aplicación en la base dada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Basta ahora invertir dicha matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

b) Observamos que $(f - 2id)^3 = 0$ de donde

$$\begin{aligned} f^3-6f^2+12f-8id &= 0 \\ \frac{1}{8}(f^3-6f^2+12f) &= id \\ \frac{1}{8}(f^2-6f+12id)f &= id \\ \frac{1}{8}(f^2-6f+12id) &= f^{-1}. \end{aligned}$$

— — —

26. Sean f, g los endomorfismes de $\mathbb{R}_2[t]$ definidos mediante:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1+\tfrac{1}{2}t^2 \\ f(t) &= 2-t+t^2 \\ f(t^2) &= 2t^2 \end{aligned}$$

$$g(a+bt+ct^2) = (a+b+2c)+bt-(\frac{1}{4}a+\frac{7}{4}b+\frac{1}{2}c)t^2$$

a) Dar la matriz de f en la base $(1,t,t^2)$ de $\mathbb{R}_2[t]$.

b) Dar la matriz de $f\circ g$ en la base $(1,t,t^2)$ de $\mathbb{R}_2[t]$.

c) ¿Es f invertible? En caso afirmativo, dar la matriz de f^{-1} en la base $(1,t,t^2)$.

d) ¿Es $f\circ g$ invertible?

e) Determinar $\mathrm{Im}\,(f\circ g)$.

Solución:

a)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Escribamos primero la matriz de la aplicación g en la base dada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) $\operatorname{rango} A = 3$, por lo tanto la matriz es invertible. Calculando la inversa tenemos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{-1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

d) $\operatorname{rango}(f \circ g) = 2$, por lo tanto el endomorfismo no es invertible.

e) $\operatorname{Im}(f \circ g) = [1, 3 - t - 2t^2]$.

— — —

27. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}_2[t]$ definido por

$$f(a + bt + ct^2) = (a + 2b + c) + (\alpha a + b)t + (a + 2b + \alpha c)t^2.$$

Encontrar las dimensiones de $\operatorname{Ker} f$ y $\operatorname{Im} f$ según los distintos valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solución:

Escojamos una base de $\mathbb{R}_2[t]$, por ejemplo $\{1, t, t^2\}$ y escribamos la matriz de la aplicación en dicha base.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ \alpha & 1 & 0\\ 1 & 2 & \alpha\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1-2\alpha & -\alpha\\ 0 & 0 & \alpha-1\end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rango} A = \begin{cases} 3 \text{ si } \alpha \neq 1, \dfrac{1}{2} \\ 2 \text{ si } \alpha = 1, \text{o } \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\dim \operatorname{Ker} A = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha \neq 1, \dfrac{1}{2} \\ 1 \text{ si } \alpha = 1, \text{o } \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

— — —

28. Sean f_1, f_2 y f_3 los endomorfismos de $\mathbb{R}_3[t]$ siguientes:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}_3[t] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[t] \\ p(t) &\longrightarrow p(0) + p(0)t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}_3[t] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[t] \\ p(t) &\longrightarrow p'(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R}_3[t] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[t] \\ p(t) &\longrightarrow p(0) \end{aligned}$$

¿Es $f_3 = f_2 \circ f_1$? ¿Es $f_3 = f_1 \circ f_2$?

Solución:

$$(f_2 \circ f_1)(p(t) = f_2(f_1(p(t)) = f_2(p(0) + p(0)t) = p(0) = f_3(p(t))$$

$$(f_1 \circ f_2)(p(t) = f_1(f_2(p(t)) = f_1(p'(t)) = p'(0) + p'(0)t \neq f_3(p(t))$$

— — —

29. Sea π el endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ que a cada vector le hace corresponder su proyección ortogonal sobre el subespacio vectorial F fijado. Probar:

a) $\operatorname{Ker}\pi = F^\perp$.

b) $\operatorname{Im}\pi = F$.

c) $\pi^2 = \pi$.

Solución:

Sabemos que $\mathbb{R}^n = F \perp F^\perp$, es decir para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in F$, $x_2 \in F^\perp$ únicos. Por lo que $\pi(x) = x_1$.

a) Para todo $x = x_1 + x_2 \in \operatorname{Ker}\pi$, es $\pi(x) = x_1 = 0$ por lo que $x \in F^\perp$. Esto es $\operatorname{Ker} f \subset F^\perp$. Ahora bien, para todo $x \in F^\perp$, $x = 0 + x_2$, por lo que $\pi(x) = 0$ y $F^\perp \subset \operatorname{Ker}\pi$.

b) Para todo $x = x_1 \in F$ se tiene $\pi(x) = x_1$, luego $x_1 \in \operatorname{Im}\pi$, y $F \subset \operatorname{Im}\pi$.

Ahora bien, $\dim \mathbb{R}^n = \dim \operatorname{Ker}\pi + \dim \operatorname{Im}\pi = \dim F + \dim F^\perp$. Teniendo en cuenta el apartado a) $\dim F^\perp = \dim \operatorname{Ker}\pi$. Por lo tanto $\dim F = \dim \operatorname{Im}\pi$ y $F = \operatorname{Im}\pi$.

c) $\pi^2(x) = \pi(\pi(x_1 + x_2)) = \pi(x_1) = x_1$.

— — —

30. Sean F un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y $G \subseteq F^\perp$. Sean π_F y π_G los endomorfismos de $\mathbb{R}^n$ que a cada vector le hacen corresponder su proyección ortogonal sobre los subespacios vectoriales F y G. Probar que $\pi_F \circ \pi_G = \pi_G \circ \pi_F = 0$.

Solución:

Dado F tenemos que $\mathbb{R}^n = F \perp F^\perp$. Puesto que $G \subset F^\perp$ tenemos que $F^\perp = G \perp (G^\perp \cap F^\perp)$.

Por lo tanto $\mathbb{R}^n = F \perp G \perp (G^\perp \cap F^\perp)$

Entonces, para todo vector $x \in \mathbb{R}^n$, $x = x_1 + x_2 + x_3$ con $x_1 \in F$, $x_2 \in G$, $x_3 \in (G^\perp \cap F^\perp)$.

$$\begin{aligned}(\pi_F \circ \pi_G)(x) = \pi_F(\pi_G(x)) = \pi_F(x_2) = 0\\(\pi_G \circ \pi_F)(x) = \pi_G(\pi_F(x)) = \pi_G(x_1) = 0.\end{aligned}$$

Capítulo 5

Determinantes

En el intento de resolver los sistemas de ecuaciones lineales es cuando surgen los determinantes. Pero pronto también se emplearon en la solución de problemas de transformación de coordenadas, de sistemas de ecuaciones diferenciales, cambios de variables, integrales dobles o triples... En 1693, Leibniz (1646-1716) usó un conjunto sistemático de índices para los coeficientes de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas obteniendo un determinante. La solución de ecuaciones lineales de dos, tres y cuatro incógnitas fue obtenida por Maclaurin (1698-1746) y publicada en 1748 en su *Treatise of algebra*. Cramer (1704-1752) publicó en 1750 el libro titulado *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* donde describe la regla para determinar los coeficientes de una cónica general pasando por cinco puntos dados utilizando los determinantes. En 1776, Bezout (1730-1783) demostró que la anulación del determinante de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas homogéneo es una condición necesaria y suficiente para que haya soluciones no nulas. Sin embargo, el primero en hacer una exposición lógica y coherente de la teoría de los determinantes como tales, aplicándolos a los sistemas de ecuaciones lineales fue, en 1776, Vandermonde (1735-1796). Proporcionó una regla para calcular determinantes por medio de submatrices de orden 2. Laplace, en su ensayo de 1772 *Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde*, generalizó el método de Vandermonde.

La palabra "determinante", usada por primera vez por Gauss, la aplicó Cauchy (1789-1857) a los determinantes ya aparecidos en el siglo XVIII en un artículo publicado en 1815. En 1812, Binet (1786-1856), enunció el teorema de multiplicación previamente demostrado por Cauchy. H. Scherk (1798-1885) aportó nuevas reglas como la de que el determinante es nulo si una fila es combinación lineal de otras.

Ejercicios

1. Determinar las permutaciones de C_5: $s \circ t\,, t \circ s\,, s^{-1}\,, t^{-1}$ si

$$\begin{array}{ccc} s : C_5 & \longmapsto & C_5 \\ 1 & \longmapsto & s(1) = 4 \\ 2 & \longmapsto & s(2) = 3 \\ 3 & \longmapsto & s(3) = 5 \\ 4 & \longmapsto & s(4) = 1 \\ 5 & \longmapsto & s(5) = 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} t : C_5 & \longmapsto & C_5 \\ 1 & \longmapsto & t(1) = 1 \\ 2 & \longmapsto & t(2) = 5 \\ 3 & \longmapsto & t(3) = 2 \\ 4 & \longmapsto & t(4) = 4 \\ 5 & \longmapsto & t(5) = 3 \end{array}$$

Solución:

Las permutaciones son las siguientes:

$s \circ t = (4, 2, 3, 1, 5)$,

$t \circ s = (4, 2, 3, 1, 5)$,

$s^{-1} = (4, 5, 2, 1, 3)$,

$t^{-1} = (1, 3, 5, 4, 2)$.

— — —

2. Determinar el valor de los determinantes de las matrices de $M_3(\mathbb{R})$ siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 24 + 0 - (-21) - 14 - 0 = \boxed{32}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{a)}{=} \boxed{0}$$

a) la primera y última columna son iguales.

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{b)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{-1}$$

b) a la segunda fila le sumamos la primera y a la tercera le restamos la primera.

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{c)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -9 \end{vmatrix} = 1(36-4) = \boxed{32}$$

c) a la segunda fila le restamos 2 veces la primera, y a la tercera le restamos 4 veces la primera.

— — —

3. Encontrar el valor de los determinantes de las matrices de $M_4(\mathbb{R})$ siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{a)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\
&= -2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(0+2-4-1-0-4) = \boxed{14.}
\end{aligned}$$

$a)$ a la tercera fila le restamos la segunda.

$$\begin{aligned}
\det B &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \underset{b)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \\
&= -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = \boxed{-6.}
\end{aligned}$$

$b)$ a la segunda y tercera filas les restamos dos veces la última.

$$\begin{aligned}
\det C &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \underset{c)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \\
&= 1(-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{-4.}
\end{aligned}$$

$c)$ a la cuarta fila le restamos la primera.

$$\begin{aligned}
\det D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{d)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \\
&= 1(-(-1)) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \boxed{1.}
\end{aligned}$$

$d)$ a la cuarta fila le restamos la primera.

4. Probar que

$$V_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le 4} (x_j - x_i).$$

En general,

$$V_n = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

para $\quad n \ge 2 \quad$ (Es el denominado determinante de Vandermonde).

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_1^3 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & x_3^3 - x_1^3 \\ 0 & x_4 - x_1 & x_4^2 - x_1^2 & x_4^3 - x_1^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_1^3 \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & x_3^3 - x_1^3 \\ x_4 - x_1 & x_4^2 - x_1^2 & x_4^3 - x_1^3 \end{vmatrix} =$$

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 \\ 1 & x_3 + x_1 & x_2^3 + x_1 x_3 + x_1^2 \\ 1 & x_4 + x_1 & x_4^2 + x_1 x_4 + x_1^2 \end{vmatrix} =$$

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_2 & x_2^3 - x_2^2 + x_1(x_3 - x_2) \\ 0 & x_4 - x_2 & x_4^2 - x_2^2 + x_1(x_4 - x_2) \end{vmatrix} =$$

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} x_3 - x_2 & x_2^3 - x_2^2 + x_1(x_3 - x_2) \\ x_4 - x_2 & x_4^2 - x_2^2 + x_1(x_4 - x_2) \end{vmatrix} =$$

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \begin{vmatrix} 1 & x_3 + x_2 + x_1 \\ 1 & x_4 + x_2 + x_1 \end{vmatrix} =$$

$$(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)\begin{vmatrix}1 & x_3+x_2+x_1\\ 0 & x_4-x_3\end{vmatrix}=$$

$$(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3).$$

— — —

5. Calcular los determinantes de las matrices siguientes:

$$A(t)=\begin{vmatrix}t & -2 & 0 & 0\\ -2 & t & -2 & 0\\ 0 & -2 & t & -2\\ 0 & 0 & -2 & t\end{vmatrix},\ B(t)=\begin{vmatrix}t & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & t & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & t & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & t & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & t\end{vmatrix},\ C(t)=\begin{vmatrix}t & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & t & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & t & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & t & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & t\end{vmatrix}.$$

Solución:

$$\begin{aligned}A(t) &= \begin{vmatrix}t & -2 & 0 & 0\\ -2 & t & -2 & 0\\ 0 & -2 & t & -2\\ 0 & 0 & -2 & t\end{vmatrix} = t\begin{vmatrix}t & -2 & 0\\ -2 & t & -2\\ 0 & -2 & t\end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix}-2 & 0 & 0\\ -2 & t & -2\\ 0 & -2 & t\end{vmatrix} =\\ &= t(t^3-4t-4t)+2(-2(t^2-4)) = \boxed{t^4-12t^2+16.}\end{aligned}$$

$$B(t)=\begin{vmatrix}t & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & t & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & t & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & t & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & t\end{vmatrix} = \boxed{t^5-7t^3+6t^2+3t-2.}$$

$$\begin{aligned}C(t) &= \begin{vmatrix}t & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & t & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & t & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & t & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & t\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}t+4 & 1 & 1 & 1 & 1\\ t+4 & t & 1 & 1 & 1\\ t+4 & 1 & t & 1 & 1\\ t+4 & 1 & 1 & t & 1\\ t+4 & 1 & 1 & 1 & t\end{vmatrix} = (t+4)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & t & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & t & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & t & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & t\end{vmatrix} =\\ &= (t+4)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & t-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & t-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & t-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-1\end{vmatrix} = \boxed{(t+4)(t-1)^4.}\end{aligned}$$

— — —

6. Calcular los determinantes de las matrices siguientes:

$$a)\ A_2(t)=\begin{vmatrix} t & 1\\ 1 & t\end{vmatrix},\quad b)\ A_3(t)=\begin{vmatrix} t & 1 & 0\\ 1 & t & 1\\ 0 & 1 & t\end{vmatrix},$$

$$c)\ A_4(t)=\begin{vmatrix} t & 1 & 0 & 0\\ 1 & t & 1 & 0\\ 0 & 1 & t & 1\\ 0 & 0 & 1 & t\end{vmatrix},\quad d)\ A_n(t)=\begin{vmatrix} t & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 1 & t & 1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots\\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & t\end{vmatrix},$$

Solución:

a) $A_2(t)=t^2-1$

b) $A_3(t)=t^3-2t$.

c) $A_4(t)=t\begin{vmatrix} t & 1 & 0\\ 1 & t & 1\\ 0 & 1 & t\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & t & 1\\ 0 & 1 & t\end{vmatrix}=t\begin{vmatrix} t & 1 & 0\\ 1 & t & 1\\ 0 & 1 & t\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} t & 1\\ 1 & t\end{vmatrix}=$

$=tA_3(t)-A_2=t^4-3t^3+1.$

d) $A_n(t)=tA_{n-1}-A_{n-2}=t^n-\binom{n-1}{1}t^{n-2}+\binom{n-2}{2}t^{n-4}-\binom{n-3}{3}t^{n-6}+\dots.$

— — —

7. Estudiar el rango de las matrices siguientes.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1\\ 3 & -3 & 1\\ -2 & 0 & -2\\ 5 & -1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 4\\ 1 & -1 & 5 & 2\\ -1 & -3 & 2 & 3\\ 1 & 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 3 & -1 & -1 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1\\ 5 & 1 & -1 & 2 & 3\\ 2 & -2 & -1 & 1 & 4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3 & -3\\ 3 & 4 & -2 & 1\\ 4 & 1 & -3 & -3\end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 6+0+6+6-0-18 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3+3-15-15+1+9 = -20$$

Luego el rango de la matriz A es 3.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 15 & 29 \\ 0 & 0 & -12 & 17 \end{vmatrix} \neq 0$$

Luego el rango de la matriz B es 4.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 11 & 18 & 22 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 12 \end{vmatrix} \neq 0$$

Luego el rango de la matriz C es 5.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Luego el rango de la matriz D es 3.

— — —

8. Estudiar si son invertibles las matrices siguientes y, en caso de serlo, calcular sus inversas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ -3 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$\det A \neq 0$, $\det B = 0$, $\det C \neq 0$, $\det D = 0$.

Luego las matrices A y C son invertibles y sus inversas son:

$$A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -5 & -15 & 0 & -10 \\ 3 & 7 & 2 & 10 \\ 7 & 13 & -12 & 10 \\ 6 & 4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \frac{1}{84} \begin{pmatrix} -7 & 12 & 23 & -4 & 10 \\ 7 & 24 & -17 & -8 & 20 \\ 49 & 36 & -29 & 16 & 2 \\ 14 & 24 & -10 & 20 & -8 \\ 70 & 72 & -44 & 4 & -10 \end{pmatrix}.$$

Las matrices B y D no son invertibles.

— — —

9. Sea A una matriz de $M_n(\mathbb{R})$ tal que $A^p = 0$ para un cierto $p \in \mathbb{N}$ (una tal matriz se denomina *nilpotente*). Probar que $\det(A) = 0$.

Solución:

$$(\det A)^p = \det A^p = \det 0 = 0$$

Luego

$$\boxed{\det A = 0.}$$

— — —

10. Resolver los sistemas de ecuaciones lineales siguientes, utilizando la regla de Cramer.

$$a) \quad \left\{\begin{array}{rl} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 & = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 + x_4 & = -1 \end{array}\right. \qquad b) \quad \left\{\begin{array}{rl} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 & = 1 \end{array}\right.$$

$$c) \quad \left\{\begin{array}{rl} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 & = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_5 & = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 & = 1 \end{array}\right. \qquad d) \quad \left\{\begin{array}{rl} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 & = 1 \\ x_1 + 2x_4 + x_5 & = 1 \\ 2x_1 + 3x_5 - x_6 & = 0 \end{array}\right.$$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -11 \neq 0.$

Luego el sistema

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = -x_4 \\ 3x_1 - 2x_2 & = -x_4 \\ 2x_1 - 3x_3 & = -1 - x_4 \end{array}\right.$$

es compatible y

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_4 & -3 & 1 \\ -x_4 & -2 & 0 \\ -1 - x_4 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}} = \boxed{\frac{-2 + 13x_4}{-11}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & x_4 & 1 \\ 3 & -x_4 & 0 \\ 2 & -1-x_4 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}} = \boxed{\frac{-3+14x_4}{-11}}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & x_4 \\ 3 & -2 & -x_4 \\ 2 & 0 & -1-x_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}} = \boxed{\frac{-5+5x_4}{-11}}$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. El sistema es compatible indeterminado y el sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = 1 - x_4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 & = 1 \end{cases}$$

es compatible y

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-x_4 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \boxed{\frac{-13+7x_4}{-5}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-x_4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \boxed{\frac{6-4x_4}{-5}}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1-x_4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \boxed{\frac{10-5x_4}{-5}}$$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$. El sistema es compatible indeterminado y el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rl} x_1 - x_2 + x_3 & = 2 + x_4 - 2x_5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = 1 + 2x_5 \\ x_1 - x_3 & = 1 - 2x_4 - x_5 \end{array} \right.$$

es compatible y

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2+x_4-2x_5 & -1 & 1 \\ 1+2x_5 & 2 & 1 \\ 1-2x_4-x_5 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{8-4x_4-5x_5}{6}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+x_4-2x_5 & 1 \\ 1 & 1+2x_5 & 1 \\ 1 & 1-2x_4-x_5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1-x_4+4x_5}{3}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -12+x_4-2x_5 \\ 1 & 2 & 1+2x_5 \\ 1 & 0 & 1-2x_4-x_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2+8x_4+x_5}{6}$$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$. El sistema es compatible indeterminado y el sistema

$$\left\{ \begin{aligned} x_6 &= 1 - 3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ 2x_4 + x_5 &= 1 - x_1 \\ 3x_5 - x_6 &= -2x_1 \end{aligned} \right.$$

es compatible y

$$x_4 = \frac{2 + 2x_1 + 2x_2 + x_3}{6}$$

$$x_5 = \frac{1 - 5x_1 - 2x_2 - x_3}{3}$$

$$x_6 = 1 - 3x_1 - 2x_2 - x_3$$

— — —

11. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones en $\mathbb{C}$

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= a \\ x + wy + w^2 z &= b \\ x + w^2 y + wz &= b \end{aligned} \right\}$$

sabiendo que w es una raíz cúbica de la unidad.

Solución:

El determinante del sistema es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{vmatrix} = (w-1)^2 - (w^2-1)^2 = 3w(w-1)$$

(Nota: puesto que $w^3 = 1$, se tiene $w^4 = w, ...,$ y $w^3 - 1 = (w-1)(w^2 + w + 1)$).

Si $w(w-1) \neq 0$, el sistema es compatible y determinado para todo $a, b \in \mathbb{C}$ y resolviendo el sistema por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & w & w^2 \\ b & w^2 & w \end{vmatrix}}{3w(w-1)} = \frac{a+2b}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & w^2 \\ 1 & b & w \end{vmatrix}}{3w(w-1)} = \frac{a-b}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & w & b \\ 1 & w^2 & b \end{vmatrix}}{3w(w-1)} = \frac{a-b}{3}$$

si $w(w-1) = 0$, se tiene que $w = 0$ o $w - 1 = 0$, pero si $w^3 = 1$, es $w \neq 0$, luego ha de ser $w - 1 = 0$, es decir $w = 1$, en cuyo caso

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

y para que el sistema sea compatible, $b - a = 0$, y el conjunto de soluciones es

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / x + y + z = a\}$$

si $a \neq b$, el sistema es incompatible.

— — —

12. Estudiar si son, o no, linealmente independientes, los conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$ siguientes.

a) $\{(2, 1, -3), (4, 5, -3), (2, 1, 1)\}$,

b) $\{(1, 1, 3), (2, -1, 3), (2, -5, -3)\}$,

c) $\{(1, 1, 2), (4, 6, 8), (3, 5, 6)\}$.

Solución:

Calculemos los determinantes de estas familias de vectores

a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -5 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 3 & -3 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 5 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Luego, las dos primeras familias son independientes y la última dependiente.

— — —

13. Estudiar para qué valores de α los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente, son linealmente independientes.

a) $\{(1, \alpha, 2), (-1, \alpha, 3), (2, 1, 1)\}$.

b) $\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, \alpha), (1, 0, 2, 1)\}$.

Solución:

Calculemos el determinante de estas familias de vectores y obliguemos a que sean no nulos

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \alpha + 6\alpha - 2 - 4\alpha - 3 + \alpha = 4\alpha - 5$

$4\alpha - 5 \neq 0$ si y sólo si $\boxed{\alpha \neq \frac{5}{4}.}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \alpha + 2$

$\alpha + 2 \neq 0$ si y sólo si $\boxed{\alpha \neq -2.}$

— — —

14. Calcular el determinante de los endomorfismos siguientes.

a) $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\longrightarrow (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 - x_4, x_3 + x_4) \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_3[t] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[t] \\ p(t) &\longrightarrow p(t) + p''(t) \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} f : M_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} a & -d \\ c & b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Solución:

Sabemos que el determinante de un endomorfismo es el determinante de la matriz de la aplicación en una base cualquiera.

a) Escribamos la matriz de la aplicación en la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante de A.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$-2\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Por lo que $\boxed{\det f = -2.}$

b) La imagen de un polinomio cualquiera $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ es

$$f(p(t)) = (a_0 + 2a_2) + (a_1 + 6a_3)t) + a_2t^2 + a_3t^3$$

Escogiendo la base $\{1, t, t^2, t^3\}$ de $\mathbb{R}_3[t]$, tenemos que la aplicación en coordenadas queda
$$f(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_0 + 2a_2, a_1 + 6a_3, a_2, a_3)$$
por lo que la matriz de la aplicación en dicha base es
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular por lo que su determinante es el producto de los elementos de la diagonal: $\det A = 1$.

Por lo que $\boxed{\det f = 1.}$

c) Escogiendo la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $M_2(\mathbb{R})$, la aplicación en coordenadas queda

$$f(a, b, c, d) = (a, -d, c, b)$$
por lo que la matriz de la aplicación en dicha base es
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos su determinante
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$
Por lo que $\boxed{\det f = 1.}$

— — —

15. Considerar la aplicación $f : M_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que viene definida por $f(A) = \det(A)$. Estudiar si es lineal.

Solución:

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene que, $\det A = \det B = 0$ sin embargo $A + B = I$, por lo que $\det(A + B) = 1 \neq \det A + \det B = 0 + 0 = 0$.

Luego la aplicación no es lineal.

— — —

16. Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ fija. Consideremos los endomorfismos de $M_2(\mathbb{R})$ que vienen defindos por:

$$f_1(M) = AM,\ f_2 = MA,\ f_3(M) = A^t M,\ f_4 = MA^t$$

Probar que: $\det(f_1) = \det(f_2) = \det(f_3) = \det(f_4)$.

Solución:

Escojamos la base $\{e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ de $M_2(\mathbb{R})$, y escribamos las matrices de f_i en dicha base.

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & a_4 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 \\ 0 & 0 & a_2 & a_4 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_3 \\ a_2 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & a_4 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \end{pmatrix},$$

Calculando los determinantes de dichas matrices tenemos

$$\det f_1 = \det f_2 = \det f_3 = \det f_4 = \det A^2.$$

17. Sea $E = \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ y consideremos el conjunto $C = \{f \in E \mid \det(f) \neq 0\}$. Probar que C con la operación composición es un grupo (no conmutativo), pero que con la operación suma no lo es.

Solución:

Sean $f_1, f_2 \in C$ para que C sea grupo respecto la operación producto $f_2^{-1} f_1 \in C$. Puesto que $\det f_2 \neq 0$ existe f_2^{-1} y $\det f_2^{-1} = \dfrac{1}{\det f_2}$. Ahora bien $\det(f_2^{-1} f_1) = \det f_2^{-1} \det f_1 \neq 0$.

Para que C tenga estructura de grupo con la operación suma ha de ser que dados $f_1, f_2 \in C$, entonces $f_1 - f_2 \in C$

Sean f_1 un endomorfismo cualquiera y $f_2 = f_1$, claramente $f_1 - f_2 = 0$ y $\det 0 = 0$, por lo que $f_1 - f_2 \notin C$, y C no tiene estructura de grupo respecto la suma.

— — —

18. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ definido de la siguiente manera $f(x) = \lambda x$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo (un tal endomorfismo se denomina homotecia). Determinar $\det f$.

Solución:

Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, en dicha base (y en este caso, en cualquier otra base), la matriz del endomorfismo es

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es $\det A = \lambda^n$, por lo que $\boxed{\det f = \lambda^n.}$

— — —

19. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ que a cada vector de $\mathbb{R}^n$ le hace corresponder la proyección ortogonal de este vector sobre un subespacio $F \neq \{0\}, \mathbb{R}^n$ fijo. Probar que $\det(f) = 0$.

Solución:

Puesto que $F \neq 0, \mathbb{R}^n$ es $0 < \dim F = r < n$. Sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de F.

Consideremos $F^\perp$ cuya dimensión es $n - r$, también por tanto, distinta de 0 y n. Sea $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ una base de $F^\perp$.

Claramente $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ es una base de E, y la matriz de la proyección ortogonal sobre F en esta base es

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & {}_r\ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & {}_{n-r}\ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Es obvio que el determinate de esta matriz es nulo por lo que $\boxed{\det f = 0}$.

— — —

Capítulo 6

Diagonalización de endomorfismos

El rápido desarrollo de las matemáticas durante los siglos XVII y XVIII fue consecuencia, en gran parte, del descubrimiento y utilización de nuevos métodos. Además, los estrictos requerimientos de lógica en los nuevos conocimientos, no sólo proporcionaron unos fundamentos sólidos y estables a los métodos ya conocidos, sino que dieron un valor propio a todo un sistema construido lógicamente. Con la aparición del "álgebra de determinantes con matrices", el concepto de número se perfeccionó y, más aún, permitió poseer de un gran número de herramientas para enfrentarnos a la realidad exterior, a la materia, y descubrir el mecanismo de sus profundidades.

Cayley fue el primero en desarrollar, de modo independiente, el concepto de matriz en 1855. A partir de este momento los trabajos sobre matrices se disparan habiendo de destacar los trabajos de Jordan (1838-1922), Rouché (1832-1910) y Frobenius (1849-1917). En el siglo XX es raro encontrar cualquier rama de la matemática aplicada que no haga uso de la teoría de matrices. Pues como en su día dijo Tait (1831-1901), casi, podríamos decir, a modo de profecía, "Cayley está forjando las armas para las futuras generaciones de físicos".

El tema de los valores propios apareció cuando Euler, en el primer tercio del siglo XVIII, estudió sistemáticamente la ecuación general de segundo grado en dos y tres variables en el plano y en el espacio respectivamente. Posteriormente, las situaciones por él encontradas en sus trabajos, se vio que eran casos particulares del hecho de que una matriz simétrica sea ortogonalmente diagonalizable. La noción de polinomio característico aparece explícitamente en los trabajos de Lagrange, sobre sistemas de ecuaciones diferenciales en 1774, y de Laplace en 1775.

Ejercicios

1. Encontrar los valores propios del endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ que viene definido por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3, 2x_2 - x_4, -x_3 + x_4, 2x_4)$$

Solución:

Escribamos la matriz de la aplicación en la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es triangular por lo que los valores propios son los valores de la diagonal.

Valores propios:

$$\boxed{-1, 1, \text{ y } 2 \text{ de multiplicidad } 2.}$$

— — —

2. Encontrar los valores propios del endomorfismo de $\mathbb{R}^5$ definido por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-x_1, x_1 + 2x_2, x_3, -x_5, x_4)$$

Solución:

Escribamos la matriz del endomorfismo en la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} -1-t & 0 \\ 1 & 2-t \end{pmatrix} (1-t) \det \begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix}$$

$$\det(A - tI) = (-1-t)(2-t)(1-t)(1+t^2) = -(t+1)(t-2)(t-1)(t-i)(t+i).$$

Por lo tanto los valores propios son

$$\boxed{-1, 1, 2, i, -i.}$$

— — —

3. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^6$ cuya matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^6$, es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Encontrar el polinomio característico.

Solución:

$$\det(M - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & -1-t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1-t & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4-t & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3-t \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 1 \\ 0 & -1-t & 0 \\ -1 & 3 & -1-t \end{vmatrix} \cdot (2-t) \cdot \begin{vmatrix} 4-t & 12 \\ 1 & 3-t \end{vmatrix} =$$
$$= (-1-t) \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ -1 & -1-t \end{vmatrix} \cdot (2-t) \cdot \begin{vmatrix} 4-t & 12 \\ 1 & 3-t \end{vmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\boxed{Q(t) = (t+1)t^3(t-2)(t-7).}$$

4. Encontrar el polinomio característico del endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$f(x,y,z) = (-3y+2z, 2x-y, x-2z)\,.$$

Solución:

Escribamos la matriz de la aplicación en la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

y calculemos $\det(A-tI)$.

$$\det(A-tI) = \begin{vmatrix} -t & -3 & 2 \\ 2 & -1-t & 0 \\ 1 & 0 & -2-t \end{vmatrix} = \boxed{-t^3-3t^2-6t-10.}$$

— — —

5. Estudiar la diagonalización de los endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ cuyas matrices en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, son:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Calculemos los valores propios de A

$$\det(A-tI) = \begin{vmatrix} -1-t & 2 & 0 \\ -2 & 3-t & 0 \\ -2 & 1 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)\cdot \begin{vmatrix} -1-t & 2 \\ -2 & 3-t \end{vmatrix} =$$
$$(2-t)(1-t)^2$$

Los valores propios son 2 y 1, éste de multplicidad 2.

Calculemos la dimensión del subespacio de vectores propios de valor propio 1:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto es, $\operatorname{Ker}(A - I) = \{(x, y, z) \mid -x + y = 0, z = 0\} = [(1, 1, 0)]$

Luego $\dim \operatorname{Ker}(A - I) = 1 \neq 2$. Por lo tanto A no diagonaliza.

Estudiemos la matriz B

$$\det(B - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 4 & -2 \\ 0 & 3-t & 0 \\ 1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} = (3-t)((1+\sqrt{2}i)-t)((1-\sqrt{2}i)-t)$$

Observamos que en $\mathbb{R}$ el polinomio característico sólo tiene una raíz mientras que en $\mathbb{C}$ tiene tres. Es decir en $\mathbb{R}$ tiene un sólo valor propio (simple) y en $\mathbb{C}$ tiene tres valores propios distintos, por lo que B no diagonaliza en $\mathbb{R}$, pero sí en $\mathbb{C}$).

— — —

6. Estudiar la diagonalización de los endomorfismos de $\mathbb{R}^4$ cuyas matrices en la base canónica de $\mathbb{R}^4$, son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Busquemos los valores propios

$$\det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1-t & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} =$$

$= \begin{vmatrix} 1-t & -1 \\ 1 & -1-t \end{vmatrix} \cdot (-1-t) \cdot (2-t) = t^2(-1-t)(2-t).$

Los valores propios son 0 de multiplicidad 2, -1 y 2.

Calculemos la dimensión del subepacio de vectores propios de valor propio 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (0,0,0,0)$$

$\mathrm{Ker}A = \{(x,y,z,t) =\mid x = z, y = t = 0\} = [(1,0,1,0)]$

Por lo tanto $\dim \mathrm{Ker}A = 1 \neq 2$ y A no diagonaliza.

Estudiemos B

Al ser la matriz triangular los valores propios son los elementos de la diagonal. Es así que todos son nulos y la matriz B no es nula, concluimos que la matriz B no diagonaliza.

Observar que las matrices escalares lo siguen siendo por cambio de base: $S^{-1}\lambda I S = \lambda I$. Es así que si el polinomio característico de una matriz A es $(\lambda - t)^n$, esta no diagonaliza salvo que dicha matriz fuese escalar.

— — —

7. Estudiar la diagonalización sobre $\mathbb{R}$ del endomorfismo f de $\mathbb{R}_3[t]$ definido por

$$f(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) = (a_0 - a_1) + 2a_1 t - a_2 t^2 + (a_2 + 2a_3)t^3.$$

Solución:

Consideremos la base $\{1, t, t^2, t^3\}$ y escribamos la matriz de la aplicación en dicha base

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observamos que es una matriz diagonal por bloques por lo que distinguimos dos subespacios invariantes a saber $[1,t]$ y $[t^2,t^3]$.

Calculemos los valores propios

$$\det(A-tI)=\begin{vmatrix}1-t & -1 & 0 & 0\\ 0 & 2-t & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1-t & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2-t\end{vmatrix}=$$
$$\begin{vmatrix}1-t & -1\\ 0 & 2-t\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-1-t & 0\\ 1 & 2-t\end{vmatrix}=(1-t)(2-t)^2(-1-t)$$

Los valores propios son 2 doble, 1, -1.

Observamos que $\dim\operatorname{Ker}(A-2I)=2$ puesto que el subespacio invariante $[1,t]$ contiene un vector propio de valor propio 2 y el subespacio $[t^2,t^3]$ contiene otro.

Podemos pues concluir que el endomorfismo diagonaliza.

— — —

8. Estudiar la diagonalización del endomorfismo f de $\mathbb{R}_3[t]$ definido por $f(P(t))=P''(t)-P'(0)t$.

Solución:

Consideremos la base $\{1,t,t^2,t^3\}$ y escribamos la matriz de la aplicación en dicha base. Para ello busquemos las imágenes de los vectores de la base

$$\begin{aligned}f(1)&=0\\ f(t)&=t\\ f(t^2)&=2\\ f(t^3)&=6t\end{aligned}$$

luego la matriz es

$$\begin{pmatrix}0&0&2&0\\0&1&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Matriz triangular, por lo que los valores propios son los elementos de la diagonal. Es decir 0 triple y 1.

El rango de la matriz es claramente 2, por lo que $\dim \operatorname{Ker} A = 2 \neq 3$. Por lo tanto el endomorfismo f no diagonaliza.

— — —

9. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$f(x,y,z) = (3x, -y + az, 3x + bz)$$

¿Para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ es f diagonalizable?

Solución:

Escribamos la matriz de la aplicación en la base canónica

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Calculemos los valores propios

$$\det(A+tI) = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 0 \\ 0 & -1-t & a \\ 3 & 0 & b-t \end{vmatrix} = (3-t)\begin{vmatrix} -1-t & a \\ 0 & b-t \end{vmatrix} = (3-t)(-1-t)(b-t)$$

Por lo que los valores propios son $3, -1, b$.

Si $b \neq -1, 3$, f tiene tres valores propios distintos por tanto diagonaliza.

Si $b = -1$, el valor propio -1 es de multiplicidad 2, calculemos pues, la dimensión del subespacio de vectores propios correspondiente

$$\operatorname{rango}(A+I) = \operatorname{rango}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 \text{ para } a = 0 \\ 2 \text{ para } a \neq 0 \end{cases}$$

Luego $\dim \operatorname{Ker}(A+I) = \begin{cases} 3-1 = 2 \text{ para } a = 0 \\ 3-2 = 1 \text{ para } a \neq 0 \end{cases}$

Por lo que

$$f \begin{cases} \text{para } a = 0 \text{ diagonaliza,} \\ \text{para } a \neq 0 \text{ no diagonaliza.} \end{cases}$$

Si $b = 3$, el valor propio 3 es de multiplicidad 2, hemos de calcular la dimensión del subespacio de vectores propios de dicho valor propio

$$\text{rango}(A - 3I) = \text{rango} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Luego $\dim \text{Ker}(A - 3I) = 3 - 2 = 1 \neq 2$ por lo que f no diagonaliza.

— — —

10. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ tal que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(e_2) = a(e_1 + e_2 - e_3 + e_4), \\ f(e_3) &= f(e_4) = b(e_1 + e_4). \end{aligned}$$

Estudiar la diagonalización de f, según los distintos valores de $a, b \in \mathbb{R}$ y, en el caso en que sea diagonalizable, encontrar una base de vectores propios.

Solución:

Escribamos la matriz de f en dicha base

$$A = \begin{pmatrix} a & a & b & b \\ a & a & 0 & 0 \\ -a & -a & 0 & 0 \\ a & a & b & b \end{pmatrix}$$

Calculemos los valores propios

$$\det(A - tI) = \begin{pmatrix} a-t & a & b & b \\ a & a-t & 0 & 0 \\ -a & -a & -t & 0 \\ a & a & b & b-t \end{pmatrix} = (-t)^2(2a - t)(b - t)$$

Observamos que si $a = b = 0$ la matriz es idénticamente nula.

Supongamos $2a \neq b$ y ambos no nulos. El valor propio cero tiene multiplicidad 2 y rango $A = 2$ por lo que f diagonaliza.

Supongamos $2a = b \neq 0$. El valor propio cero tiene multiplicidad 2 así como $2a = b$. Calculemos la dimensión de los subespacios de vectores propios correspondientes

rango $A = 2$,

$$\text{rango}(A - 2aI) = \text{rango}\begin{pmatrix} -a & a & 2a & 2a \\ a & -a & 0 & 0 \\ -a & -a & -2a & 0 \\ a & a & 2a & 0 \end{pmatrix} = 3 \text{ por lo que } \dim \text{Ker}(A - 2I) = 4 - 3 = 1$$

por lo tanto f no diagonaliza.

Supongamos $a = 0$, $b \neq 0$. El valor propio cero es de multiplicidad 3 y rango $A = 1$. Por lo que f diagonaliza

Supongamos $b = 0$, $a \neq 0$. El valor propio cero es de multiplicidad 3 y rango $A = 1$. Por lo que f diagonaliza

Busquemos una base de vectores propios para el caso $2a \neq b$ y ambos no nulos:

$\text{Ker}A = \{(x, y, z, t) \mid ax + ay + bz + bt = 0, ax + ay = 0\} = [(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)]$.

$\text{Ker}(A - 2aI) = \{(x, y, z, t) \mid -ax + ay + bz + bt = 0ax - ay = 0, -ax - ay - 2az = 0\} = [(1, 1, -1, 1)]$.

$\text{Ker}(A - bI) = \{(x, y, z, t) \mid (a - b)x + ay + bz + bt = 0, ax + (a - b)y = 0, -ax - ay - bz = 0\} = [(b - a, a, -a, b - a)]$.

Por lo que una base es $\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1), (1, 1, -1, 1), (b - a, a, -a, b - a)\}$.

Busquemos una base de vectores propios para el caso $2a = 0$, $b \neq 0$:

$\text{Ker}A = \{(x, y, z, t) \mid bz + bt = 0\} = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)]$.

$\text{Ker}(A - bI) = \{(x, y, z, t) \mid -bx + bz + bt = 0, -by = 0, -bz = 0\} = [(1, 0, 0, 1)]$.

Por lo que una base es $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1), (1, 0, 0, 1)\}$.

Queda ahora el caso $b = 0$, $a \neq 0$

$\text{Ker}A = \{(x, y, z, t) \mid ax + ay = 0\} = [(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]$.

$\text{Ker}(A - 2aI) = \{(x, y, z, t) \mid ax - ay = 0, -ax - ay - 2a = 0, ax, ay - 2at = 0\} = [(1, 1, -1, 1)]$.

Por lo que una base es $\{(1,-1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,1,-1,1)\}$.

— — —

11. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial E sobre K de dimensión n. Probar que f es injectivo si, y sólo si, $Q_f(0) \neq 0$.

Solución:

Basta observar que si $Q_f(0) = 0$ si y sólo si $Q_f(t)$ es múltiplo de t, equivalentemente 0 es valor propio de f, es decir existe $u \neq 0$ con $f(u) = 0.u = 0$ y f no es inyectivo.

— — —

12. Consideremos el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$\begin{array}{l} f(e_1+e_2) = 2(e_1-e_2) \\ f(e_1-e_2+e_3) = e_1-e_2+3e_3 \\ f(2e_2+e_3) = 2e_1-2e_2+3e_3 \\ f(e_4) = 0 \end{array}$$

a) Encontrar los valores propios de este endomorfismo, y, para cada uno de ellos, encontrar el subespacio de vectores propios.

b) Estudiar si diagonaliza.

Solución:

a) La matriz de la aplicación en la base $\{u_1 = e_1+e_2, u_2 = e_1-e_2+e_3, u_3 = 2e_2+e_3, u_4 = e_4\}$ en el espacio de salida y la base canónica en el espacio de llegada es

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz en la base canónica es:

$$A = \bar{A}S^{-1}$$

con

$$S=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad \text{por lo tanto}\quad S^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&-2&0\\1&-1&2&0\\-1&1&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Haciendo pues el producto tenemos

$$A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5&3&2&0\\-5&-3&-2&0\\0&0&12&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Calculemos el polinomio característico

$$\det(A-tI)=\begin{vmatrix}\frac{5}{4}-t&\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{5}{4}&-\frac{3}{4}-t&-\frac{1}{2}&0\\0&0&3-t&0\\0&0&0&-t\end{vmatrix}=(3-t)t\begin{vmatrix}\frac{5}{4}-t&\frac{3}{4}\\-\frac{5}{4}&-\frac{3}{4}-t\end{vmatrix}=(3-t)t^2(\frac{1}{2}-t).$$

Valores propios $\frac{1}{2}$, 3 y 0 de multiplicidad 2.

Busquemos los subespacios de vectores propios

Para el valor propio 0:

$$\text{Ker}A=\{(x,y,z,t)\mid 5x+3y+2z=0,12z=0,\}=[(3,-5,0,0),(0,0,0,1)].$$

Para el valor propio $\frac{1}{2}$:

$$\text{Ker}(A-\frac{1}{2}I)=\{(x,y,z,t)\mid 3x+3y+2z=0,\frac{5}{2}z=0,-\frac{1}{2}t=0\}=[(1,-1,0,0)].$$

Para el valor propio 3:

$$\text{Ker}(A-3tI)=$$
$$\{(x,y,z,t)\mid -7x+3y+2z=0,-5x-15y-2z=0,-3t=0\}=[(1,-1,5,0)].$$

b) Observamos que el valor propio de multiplicidad dos tiene un subespacio asociado de dimensión dos por lo que el endomorfismo diagonaliza.

— — —

13. Sea f_α el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$f_\alpha(e_1) = f_\alpha(e_2) = \alpha(e_1 + e_3), \quad e_3 \in \operatorname{Ker} f_\alpha$$

a) Estudiar si el endomorfismo f_α es diagonalizable.

b) En caso afirmativo, encontrar una base de vectores propios y la matriz D_α de f_α en dicha base.

Solución:

a) Escribamos la matriz de la aplicación en la base dada

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que si $\alpha = 0$ el endomorfismo es idénticamente nulo.

Si $\alpha \neq 0$, el rango de la matriz A es uno, por lo que $\dim \operatorname{Ker} A = 2$ y 0 es valor propio de multiplicidad por lo menos dos

La traza de la matriz es invariante y $\operatorname{traza} A = \alpha$ por lo tanto el tercer valor propio es α.

Los valores propios son 0 de multiplicidad 2 y α. Puesto que $\dim Ker\, A = 2$, el endomorfismo diagonaliza.

b) Para $\alpha = 0$ la matriz es diagonal en cualquier base.

Sea pues $\alpha \neq 0$. Busquemos una base de $\operatorname{Ker} A$

$$\operatorname{Ker} A = \{(x, y, z) \mid \alpha x + \alpha y = 0\} = [(1, -1, 0), (0, 0, 1)]$$

y un base de $\operatorname{Ker}(A - \alpha I)$,

$$\operatorname{Ker}(A - \alpha I) = \{(x, y, z) \mid \alpha y = 0, \alpha x + \alpha y - \alpha z = 0\} = [(1, 0, 1)].$$

Una base de vectores propios es pues

$$\boxed{\{(1, -1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1)\}}$$

y la matriz de la aplicación en dicha base es

$$\boxed{D_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \alpha \end{pmatrix}.}$$

Observamos que la forma diagonal D_α es para todo α.

— — —

14. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}[t]$ definido por

$$f(p(t)) = tp''(t) + t^2 p'''(t)$$

a) Probar que $\mathbb{R}_3[t] = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid \text{gr } p \leq 3\}$ es un subespacio invariante por f.

b) Encontrar la matriz de $f_{|\mathbb{R}_3[t]}$ en la base $(1, t, t^2, t^3)$ de $\mathbb{R}_3[t]$.

c) Estudiar la diagonalización del endomorfismo anterior.

Solución:

a) Sea $p(t) = a_a + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathbb{R}_3[t]$, miremos si $f(p(t)) \in \mathbb{R}_3[t]$

$p'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$
$p''(t) = 2a_2 + 6a_3 t$
$p'''(t) = 6a_3$

Por lo tanto $f(p(t)) = 2a_2 t + 6a_3 t^2 + 6a_3 t^2 = 2a_2 t + 12a_3 t^2 \in \mathbb{R}_3[t]$ y el subespacio es invariante.

Podemos restringir pues la aplicación a este subespacio que es de dimensión finita.

b) Escribamos la matriz de la aplicación restricción en esta base

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&12\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

c) Observamos que la imagen de un polinomio de grado $n\geq 2$ es un polinomio de grado uno inferior, por lo que ningún polinomio de grado mayor o igual a dos puede ser vector propio.

Los polinomios de grado menor o igual a 1 son del núcleo de la aplicación, son pues los únicos vectores propios (de valor propio cero) del endomorfismo.

— — —

15. Encontrar los valores propios y los vectores propios del endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en una base d'$\mathbb{R}^3$, es

$$M=\begin{pmatrix}a&-a&a\\-a&a&-a\\a&-a&a\end{pmatrix}\qquad a\in\mathbb{R}\,;\ a\neq 0\,.$$

Solución:

Observamos que al ser $a\neq 0$, el rango de la matriz M es uno, por tanto 0 es valor propio de multiplicidad por lo menos dos. La invariancia de la traza de la matriz nos dice que el tercer valor propio es $3a\neq 0$. Por lo que el endomorfismo diagonaliza.

Busquemos los vectores propios

$\operatorname{Ker} A=\{(x,y,z=ax-ay+az=0\}=[(1,1,0),(1,0,-1)]$,

$\operatorname{Ker}(A-3aI)=\{(x,y,z)\mid -2ax-ay+az=0,-ax-2ay-az=0\}=[(1,-1,1)]$.

— — —

16. ¿Para que valores de las constantes a, b, c, d, e y f, la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1&a&d\\2&b&e\\3&c&f\end{pmatrix}$$

tiene como vectores propios $(1,0,1)$, $(-1,1,0)$ y $(0,1,-1)$?

Solución:

Obliguemos a que estos vectores sean propios

$$\begin{pmatrix}1 & a & d\\ 2 & b & e\\ 3 & c & f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & -\lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1 & 0 & -\lambda_3\end{pmatrix}$$

Por lo que

$$\begin{pmatrix}1 & a & d\\ 2 & b & e\\ 3 & c & f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & -\lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1 & 0 & -\lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}=$$
$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & -\lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1 & 0 & -\lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_2}{2} & \frac{\lambda_1}{2}-\frac{\lambda_2}{2} & \frac{\lambda_1}{2}-\frac{\lambda_2}{2}\\ -\frac{\lambda_2}{2}+\frac{\lambda_3}{2} & \frac{\lambda_2}{2}+\frac{\lambda_3}{2} & \frac{\lambda_2}{2}-\frac{\lambda_3}{2}\\ \frac{\lambda_1}{2}-\frac{\lambda_3}{2} & \frac{\lambda_1}{2}-\frac{\lambda_3}{2} & \frac{\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_3}{2}\end{pmatrix}$$

Tenemos pues

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2 &= 2\\ -\lambda_2+\lambda_3 &= 4\\ \lambda_1-\lambda_3 &= 6\end{aligned}\right\}$$

Esto es, los valores propios posibles son los siguientes relación:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 6\\ \lambda_2 &= -4\\ \lambda_3 &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores de los parámetros son:

$$\boxed{\begin{pmatrix}1 & a & d\\ 2 & b & e\\ 3 & c & f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 5\\ 2 & -2 & -2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}}$$

— — —

17. Sea $f : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t]$ la aplicación lineal definida por:

$$f(p(t)) = \alpha p(t) - p''(0)t^2$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. ¿Cuáles son los valores propios y los vectores propios de f?

Solución:

Consideremos la base $\{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{R}_2[t]$ y escribamos la matriz de la aplicación en dicha base

$$\begin{array}{rl} f(1) & = \alpha \\ f(t) & = \alpha t \\ f(t^2) & = \alpha t^2 - 2t^2 = (\alpha - 2)t^2 \end{array}$$

Observamos que los vectores de la base son vectores propios de valores propios α, α y $\alpha - 2$ respectivamente por lo que la matriz es diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 2 \end{pmatrix}$$

Por lo que los subespacios de vectores propios son $\operatorname{Ker}(A - \alpha I) = [1, t]$ y $\operatorname{Ker}(A - (\alpha - 2)I) = [t^2]$.

— — —

18. ¿Existe alguna base de $\mathbb{R}_2[t]$ formada por vectores propios del endomorfismo f de $\mathbb{R}_2[t]$ cuya matriz asociada, en la base $(1, t, t^2)$, sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}?$$

En caso afirmativo, dar una base formada por vectores propios de f.

Solución:

Observamos que el rango de la matriz es uno y que la traza de la matriz es tres. Por lo que

$$\det(A - tI) = t^2(3 - t)$$

Y puesto que $\dim \operatorname{Ker} A = 3 - 1 = 2$, la matriz diagonaliza.

Busquemos una base de vectores propios

$\operatorname{Ker} A = \{(x, y, z) \mid x + 2y + 3z = 0\} = [(-2, 1, 0), (-3, 0, 1)]$.

$\operatorname{Ker}(A - 3I) = \{(x, y, z) \mid x + 2y + 3z = 0, \frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z = 0\} = [(6, 3, 2)]$.

Por lo tanto, una base de vectores propios es

$$\boxed{\{-2 + t, -3 + t^2, 6 + 3t + 2t^2\}.}$$

— — —

19. Estudiar la diagonalización, según los distintos valores de α, de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & -\alpha & -\alpha \\ \alpha & 1+\alpha & -1+\alpha \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\det(A - tI) = (1 - t)^2(2 - t).$$

Luego los valores propios son 1 doble y 2.

$\dim \operatorname{Ker}(A - I) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \neq 0, \\ 2 & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$

Por lo que la matriz diagonaliza si y sólo si $\alpha = 0$.

— — —

20. Estudiar la diagonalización del endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ cuya la matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^4$, es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & a & -a & 0 \\ 0 & -a & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$. En los casos en que sea diagonalizable, dar una base de $\mathbb{R}^4$ formada por vectores propios.

Solución:

Observamos que si $a = 0$, la matriz es diagonal.

$\det(A - tI) = ((1-a) - t)((1+a) - t)t(2a - t)$.

Los valores propios son $1 - a, 1 + a, 0, 2a$.

Observamos que los subespacios $F_1 = [e_1, e_4]$ y $F_2 = [e_2, e_3]$ son invariantes y $\det(A - tI) = \det(A_{|F_1} - tI_2)\det(A_{|F_2} - tI_2) = (((1-a) - t)((1+a) - t)) \cdot (t(2a - t))$.

La matriz restricción a F_1 es

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios son $1 + a$ y $1 - a$ que sólo son iguales si $a = 0$ en cuyo caso la matriz es la identidad.

Una base de vectores propios es

$\mathrm{Ker}(A_1 - (1-a)I_2) = \{(x, y) \mid ax + ay = 0\} = [(1, -1)]$

$\mathrm{Ker}(A_1 - (1+a)I_2) = \{(x, y) \mid -ax + ay = 0\} = [(1, 1)]$.

Por lo que $(1, 0, 0, -1)$ es un vector propio de A de valor propio $1 - a$ y $(1, 0, 0, 1)$ es un vector propio de A de valor propio $1 + a$

La matriz restricción a F_2 es

$$A_2 = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios son 0 y $2a$ que sólo son iguales si $a = 0$ en cuyo caso la matriz es la nula.

Una base de vectores propios es

$\mathrm{Ker}(A_2 - 0I_2) = \{(x, y) \mid ax - ay = 0\} = [(1, 1)]$

$\mathrm{Ker}(A_2 - (2a)I_2) = \{(x, y) \mid -ax - ay = 0\} = [(1, -1)]$.

Por lo que $(0, 1, 1, 0)$ es un vector propio de A de valor propio 0 y $(0, 1, -1, 0)$ es un vector propio de A de valor propio $2a$.

Luego $\forall a \in \mathbb{R}$ la matriz A diagonaliza y una base de vectores propios es

$$\{(1,0,0,-1),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,-1,0)\}.$$

Observación: la matriz A es simétrica por lo que estaba asegurada la diagonalización.

— — —

21. Estudiar la diagonalización, según los distintos valores de a y b, constantes no nulas, del endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que tiene como matriz asociada en la base canónica a la siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & ab \\ \frac{1}{a} & 1 & b \\ \frac{1}{ab} & \frac{1}{b} & 1 \end{pmatrix}$$

En el caso en que diagonalice, dar una base de vectores propios.

Solución:

Observamos que el rango de la matriz es uno, por lo que 0 es valor propio de multiplicidad por lo menos 2. La traza de la matriz es 3. Luego los valores propios son 0 doble y 3

Puesto que $\dim \operatorname{Ker} A = 3 - \operatorname{rango} A = 3 - 1 = 2$, la matriz diagonaliza.

Busquemos una base de vectores propios

$\operatorname{Ker} A = \{(x,y,z) \mid x + ay + abz = 0\} = [(a,-1,0),(0,b,-1)]$

$\operatorname{Ker}(A - 3I) = \{(x,y,z) \mid -2x + ay + abz = 0, x - 2ay + abz = 0\} = [(ab,b,1)]$.

Tenemos que una base de vectores propios es $\boxed{\{(a,-1,0),(0,b,-1),(ab,b,1)\}.}$

— — —

22. Sea f el endomorfismo de $M_2(\mathbb{R})$ tal que

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Estudiar si f diagonaliza.

Solución:

Escojamos a $e_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $e_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ como base y escribamos la matriz de f en dicha base

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$\det(A-tI)=t^3(1-t)$.

Los valores propios son 0 de multiplicidad 3 y 1.

Puesto que $\operatorname{rango} A=2$, $\dim\operatorname{Ker} A=4-2=2\neq 3$. Por lo tanto el endomorfismo no diagonaliza.

— — —

23. Consideremos el endomorfismo de $\mathbb{R}_2[t]$ cuya matriz, en la base $(1,t,t^2)$, es

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 9\\ \frac{1}{3} & 0 & 3\\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$$

a) Probar que este endomorfismo diagonaliza.

b) Encontrar una base de $\mathbb{R}_2[t]$ formada por vectores propios.

c) Determinar A^{-1} a partir del Teorema de Cayley-Hamilton.

d) Calcular A^p, per a $p\in\mathbb{N}$.

Solución:

a) $\det(A-tI) = -(t^3-3t-2) = -(t+1)^2(t-2)$, $\dim \operatorname{Ker}(A+I) = 2$. Por lo tanto el endomorfismo diagonaliza y la matriz diagonal es

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Determinemos una base de $\operatorname{Ker}(A+I)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_1 = (-3,1,0) = -3+t$, $v_2 = (-9,0,1) = -9+t^2$. Falta ahora determinar una base de $\operatorname{Ker}(A-2I)$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 9 \\ \frac{1}{3} & -2 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_3 = (9,3,1) = 9+3t+t^2$

Luego una base es $\{-3+t, -9+t^2, 9+3t+t^2\}$.

c) Por el Teorema de Cayley Hamilton, sabemos que cambiando la variable del polinomio característico, por el endomorfismo, obtenemos el endomorfismo cero. Luego

$$A^3 - 3A - 2I = 0,$$

por lo que

$$A(\frac{1}{2}A^2 - \frac{3}{2}A) = I.$$

Teniendo en cuenta la unicidad de la matriz inversa, tenemos

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}A^2 - \frac{3}{2}I.}$$

d) La matriz cambio de base para la cual diagonaliza la matriz es

$$S = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

esto es

$$A = SDS^{-1},$$

de donde

$$A^p = (SDS^{-1})\dots(SDS^{-1}) = SD^pS^{-1}$$

Calculando pues $S^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & 18 & -27 \\ -1 & -3 & 18 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

y realizando el producto obtenemos

$$\frac{1}{27}\begin{pmatrix} -9(-1)^{p+1}+9(-1)^p+9\cdot2^p & 48(-1)^{p+1}+27(-1)^p+9\cdot2^p & 81(-1)^p+162(-1)^{p+1}+81\cdot2^p \\ -3(-1)^p+3\cdot2^p & 18(-1)^p+9\cdot2^p & 27(-1)^{p+1}+27\cdot2^p \\ (-1)^{p+1}+2^p & 3(-1)^{p+1}+3\cdot2^p & 18(-1)^p+9\cdot2^p \end{pmatrix}$$

— — —

24. Calcular A^m, para $m \in \mathbb{N}$, si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

La matriz A es triangular con los elementos de la diagonal todos distintos. Podemos asegurar pues, que dicha matriz diagonaliza.

La matriz diagonal es

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Busquemos la base de vectores propios. Claramente e_1 es un vector propio de valor propio 2, e_2 es un vector propio de valor propio 1. Busquemos el vector propio de valor propio 3.

$v \in \operatorname{Ker}(A - 3I)$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema tenemos $x = 0, y = z$, por lo que podemos tomar $v = (0, 1, 1)$.

La matriz de cambio de base es

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $SDS^{-1} = A$.

Observamos que $SD^mS^{-1} = A^m$ y $D^m = \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^m \end{pmatrix}$.

Calculando $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y realizando el producto tenemos

$$\boxed{A^m = \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1+3^m \\ 0 & 0 & 3^m \end{pmatrix}.}$$

— — —

25. Sea f un endomorfismo de un K-espacio vectorial E de dimensión finita n, y sea λ un valor propio de f. Probar que los subespacios vectoriales $\operatorname{Im}(f - \lambda id)$ y $\operatorname{Ker}(f - \lambda I)$ son invariantes por f.

Solución:

Sea $u \in \operatorname{Im}(f - \lambda I)$. Por lo que $u = (f - \lambda I)v$ y $f(u) = f((f - \lambda I)v) = (f - \lambda I)(f(v))$. Es decir $f(u) \in \operatorname{Im}(f - \lambda I)$.

Observamos que hemos utilizado la conmutatividad de f y $f - \lambda I$.

Sea $u \in \operatorname{Ker}(f - \lambda I)$. Veamos si $f(u) \in \operatorname{Ker}(f - \lambda I)$, $(f - \lambda I)f(u) = f(f - \lambda I)u = f(0) = 0$, por tanto $f(u) \in \operatorname{Ker}(f - \lambda I)$.

— — —

26. Sea f un endomorfismo de un K-espacio vectorial E de dimensión finita n, y sea λ un valor propio de f y v un vector propio de f de valor propio λ.

a) Probar por inducción que λ^m es un valor propio de f^m, para $m \geq 1$.

b) Probar que v es un vector propio de mf de valor propio $m\lambda$.

c) Sea g otro endomorfismo, si u es un vector propio de $g \circ f$ de valor μ. Probar que $f(u)$ es un vector propio de $f \circ g$ de valor propio μ.

Solución:

a) Observamos que se verifica para $m = 1$. Esto es $f(v) = \lambda v$.

Supongamos que se verifica para $m - 1$. Esto es $f^{m-1}(v) = \lambda^{m-1}v$.

Entonces

$$f^m(v) = f(f^{m-1}(v)) = f(\lambda^{m-1}v) = \lambda^{m-1}f(v) = \lambda^{m-1}(\lambda v) = \lambda^m v.$$

b) $mf(v) = m(f(v)) = m(\lambda v) = (m\lambda)v$.

c) $\mu u = (g \circ f)(u) = g(f(u))$.

Apliquemos f a ambos lados de la igualdad $f(\mu u) = f(g(f(u)))$.

Por lo que $\mu f(u) = (f \circ g)(f(u)$.

— — —

27. Sea f un endomorfismo de un K-espacio vectorial E de dimensión 3 tal que $f^3 - f^2 - 8f + 12\mathrm{I} = 0$. Determinar el polinomio característico de f? ¿Qué puede decirse del polinomio anulador mínimo de f?

Solución:

De $f^3 - f^2 - 8f + 12\mathrm{I} = 0$ tenemos que el polinomio mónico de grado 3, $t^3 - t^2 - 8t + 12$ es tal que al cambiar la variable por el endomorfismo obtenemos el endomorfismo cero. Por lo que dicho polinomio coincide con el polinomio característico (salvo el factor $(-1)^3$).

En cuanto al polinomio anulador mínimo sabemos que es un divisor del característico con las mismas raíces por lo que tenemos dos posibles polinomios $(t + 3)(t - 2)$ o bien $(t + 3)(t - 2)^2$.

— — —

28. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$, $f \neq \mathrm{I}$, tal que $f^2 - 2f + \mathrm{I} = 0$. Determinar $Q_f(t)$ y $p_f(t)$.

Solución:

Observamos que $f^2 - 2f + \mathrm{I} = (f - \mathrm{I})^2 = 0$.

Por lo que $(t-1)^2$ es un polinomio tal que al cambiar la variable por el endomorfismo obtenemos el endomorfismo cero. Por lo que dicho polinomio es múltiplo del polinomio anulador mínimo.

Ahora bien por hipótesis sabemos que $f \neq \mathrm{I}$. Por lo que el polinomio anulador mínimo no puede ser $t-1$ (de lo contrario $f - \mathrm{I} = 0$ contra la hipótesis).

Así pues polinomio anulador mínimo es: $\boxed{p_f(t) = (t-1)^2}$.

En cuanto al polinomio característico, sabemos que es de grado n, múltiplo del polinomio anulador mínimo y con las misma raíces.

Por lo tanto, el polinimio característico es

$$\boxed{Q_f(t) = (t-1)^n.}$$

— — —

29. Construir un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que su polinomio anulador mínimo sea $t^2(t-3)$.

Solución:

Puesto que el polinomio anulador mínimo no es producto de factores lineales de multiplicidad uno, este endomorfismo no diagonaliza.

Los valores propios de dicho endomorfimo son 0 de multiplicidad 2 y 3 de multiplicidad 1. Por lo que un posible endomorfismo con estas condiciones puede ser el siguiente

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longrightarrow (0, x, 3z) \end{aligned}$$

cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

en la que es fácil probar que verifica las condiciones exigidas.

— — —

30. Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ una matriz que tiene a 1 como valor propio doble y a $1/2$ como valor propio simple. Utilizando el teorema de Cayley-Hamilton, calcular:

$$2A^4 - 7A^3 + 9A^2 - 5A + I.$$

Solución:

Como que las raíces del polinomio característico de A son los valores propios contados con su multiplicidad tenemos que

$$P(\lambda) = (1-\lambda)^2(1/2-\lambda)) = -(\lambda^3 - 5/2\lambda^2 + 2\lambda - 1/2)$$

Por el Teorema de Cayley-Hamilton se verifica que

$$-(A^3 - 5/2A^2 + 2A - 1/2I) = 0$$

$$\Rightarrow\ 2A^3 - 5A^2 + 4A - I = 0\ \Rightarrow\ 2A^4 - 5A^3 + 4A^2 - A = 0$$

Por tanto

$$2A^4 - 7A^3 + 9A^2 - 5A + I = (2A^4 - 5A^3 + 4A^2 - A) - (2A^3 - 5A^2 + 4A - I) = 0.$$

— — —

Capítulo 7

Endomorfismos ortogonales y simétricos

Cuando los matemáticos posteriores a Descartes desarrollaron la geometría analítica no se dieron cuenta que el concepto de perpendicularidad era independiente del concepto de paralelismo. Fue a principios del siglo XIX, con el estudio de la geometría proyectiva y las geometrías no euclídeas cuando se observó su independencia del espacio métrico y se desarrollaron los conceptos de producto escalar, vectorial y producto interno que se culminaron con los trabajos de Hilbert (1862-1943), en los que definió el concepto de perpendicularidad y norma, en base a los ya iniciados por Grassmann y de Gram (1850-1916) con su proceso de ortogonalización que construye un conjunto ortogonal de vectores a partir de un conjunto independiente.

Cauchy valoró el problema del valor propio en la obra de Euler, Lagrange y Laplace para determinar los "ejes principales"de una forma cuadrática con n variables. En 1826, abordó el problema de la reducción de la forma cuadrática en tres variables y demostró que la ecuación característica es invariante para cualquier cambio en los ejes rectangulares.

En 1829 Cauchy prueba que los valores propios de una matriz simétrica son reales. Las matrices Hermíticas ($A = \bar{A}^t$) fueron introducidas por Hermite (1822-1901). Frobenius, en 1878, prueba la diagonalizabilidad ortogonal de las matrices simétriacas, extendiendo en 1883 la demostración a matrices unitarias ($A\bar{A}^t = I$). El teorema para matrices normales ($A\bar{A}^t = \bar{A}^t A$) es debido a Toeplitz (1881-1940).

Ejercicios

1. Dados los endomorfismos f_1, f_2 de $\mathbb{R}^2$, las matrices de los cuales, en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, son:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Determinar sus endomorfismos adjuntos.

Solución:

Puesto que la base canónica es ortonormal, las matrices en dicha base, de las aplicaciones adjuntas son las traspuestas de las matrices dadas.

Esto es, la matriz en la base canónica de la aplicación adjunta de f_1 es

$$\boxed{A_1^t = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Y la matriz en la base canónica de f_2 es

$$\boxed{A_2^t = \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.}$$

— — —

2. Dados los endomorfismos f_1, f_2 de $\mathbb{R}^3$ cuyas matrices en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, son:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determinar sus endomorfismos adjuntos.

Solución:

Al igual que en el problema anterior, puesto que la base canónica es ortonormal las matrices en dicha base, de los endomorfismos adjuntos de los dados son las matrices traspuestas de las dadas.

Por lo que la matriz en la base canónica de la aplicación adjunta de f_1 es

$$\boxed{A_1^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -8 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.}$$

Y la matriz en la base canónica de la aplicación adjunta de f_2 es

$$\boxed{A_2^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

— — —

3. Estudiar si son, o no, ortogonales, los endomorfismos f_1, f_2, f_3, f_4 de $\mathbb{R}^2$ cuyas matrices, en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, son:

$$\text{a)} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{c)} \quad A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \text{d)} \quad A_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

En caso afirmativo, decir que transformación representan.

Solución:

Puesto que las matrices están expresadas en bases ortonormales, para saber si los endomorfismos son o no ortogonales basta calcular el producto de cada una de ellas por su traspuesta y ver si el resultado es la identidad.

a)

$$A_1^t A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego f_1 no es ortogonal.

b)

$$A_2^t A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego f_2 es ortogonal, puesto que la matriz no es simétrica la transformación es un giro cuyo ángulo lo podemos calcular utilizando el hecho de que la traza es invariante por cambio de base, tenemos: $2\cos\theta = \text{traza}\, A_1 = 0$, por lo que $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. Ahora bien, la imagen del primer vector de la base canónica está en el primer cuadrante $\boxed{\theta = \dfrac{\pi}{2}.}$

c)

$$A_3^t A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que f_3 es un endomorfismo ortogonal. Puesto que la matriz no es simétrica el endomorfismo corresponde a un giro cuyo ángulo pasamos a determinar $2\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$, por lo que $\theta = \pm\dfrac{\pi}{4}$. Ahora bien, la imagen del primer vector de la base canónica está en el primer cuadrante $\boxed{\theta = \dfrac{\pi}{4}.}$

d) Ya por último

$$A_4^t A_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que f_4 es un endomorfismo ortogonal. Puesto que la matriz no es simétrica el endomorfismo corresponde a un giro cuyo ángulo pasamos a determinar $2\cos\theta = 1$, por lo que $\theta = \pm\frac{5\pi}{3}$. Ahora bien, la imagen del primer vector de la base canónica está en el segundo cuadrante $\boxed{\theta = -\dfrac{5\pi}{3}.}$

— — —

4. Estudiar si hay elementos fijos al aplicar las transformaciones del ejercicio anterior y, en caso afirmativo, determinarlos.

Solución:

Las aplicaciones f_2, f_3, f_4 son giros, por lo que el único elemento fijo es el vector nulo.

Sin embargo f_1 es un endomorfismo simétrico ya que su matriz en una base ortonormal es simétrica. Sabemos que todo endomorfismo simétrico diagonaliza en una cierta base ortonormal, por lo que hay dos subespacios invariantes de dimensión 1, que pasamos a determinar

El polinomio característico de A_1 es $t^2 - 3t + 1$. Por lo que los valores propios son $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Los vectores propios son

$v_1 \in \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I)$, $v_1 = \dfrac{2}{5+\sqrt{5}}(-1, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2})$ teniendo en cuenta que v_2 ha de ser ortogonal a v_1 tenemos $v_2 = \dfrac{2}{5+\sqrt{5}}(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 1)$.

— — —

5. Estudiar si son, o no, ortogonales, los endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ cuyas matrices en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, son:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

En caso afirmativo, decir que transformación representan.

Solución:

Puesto que las matrices están expresadas en bases ortonormales, para saber si los endomorfismos son o nó ortogonales basta calcular el producto de ellas por su traspuesta y ver si el resultado es la identidad.

$$A_1^t A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego es ortogonal.

El endomorfismo no es simétrico ya que la matriz no es simétrica, por lo que la transformación es una rotación o una rotación seguida de una simetría. Para distinguir de cual de los dos casos se trata calculamos el determinante de la matriz

$$\det A_1 = -1$$

por lo tanto se trata del segundo caso, es decir una rotación seguida de una simetría.

Veamos A_2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al igual que en el anterior caso se trata de un endomorfismo ortogonal pero no es simétrico y puesto que $\det A_2 = -1$, se trata de una rotación seguida de una simetría.

Finalmente veamos A_3

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que el endomorfismo no es ortogonal.

— — —

6. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

¿Qué condición han de verificar a i b por tal de que el endomorfismo sea ortogonal?

Solución:

Observamos que f es un endomorfismo simétrico puesto que su matriz en una base ortonormal es simétrica. Por lo que el endomorfismo diagonaliza siempre. Este endormorfismo será además ortogonal si los únicos valores propios son 1,-1 o ambos (1 o -1).

Los valores propios de la matriz dada son claramente $a - b$ doble, $a + 2b$.

Para que los tres valores propios sean $+1$ ha de ser $a = 1$, $b = 0$.

Para que los tres valores propios sean -1 ha de ser $a = -1$, $b = 0$.

Para que los valores propios sean 1 doble y -1, ha de ser $a-b=1$, $a+2b=-1$, en cuyo caso $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{2}{3}$.
Para que los valores propios sean -1 doble y 1, ha de ser $a-b=-1$, $a+2b=1$, en cuyo caso $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$.

— — —

7. Escribir la matriz en la base canónica del endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ tal que el vector $u_1=(1,1)$ se transforma en el vector $(0,\sqrt{2})$ y el vector $u_2=(-1,1)$ en el $(-\sqrt{2},0)$. ¿Es ortogonal?

Solución:

Tomando $\{u_1,u_2\}$ como base en el espacio de salida y la base canónica en el espacio de llegada la matriz A_1 de la aplicación es

$$A_1=\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}.$$

Sea S la matriz de cambio de base

$$S=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Entonces la matriz A de la aplicación en la base canónica es $A=A_1S^{-1}$. Calculando S^{-1} tenemos $S^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Por lo que

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.}$$

Observamos que $A^tA=I$ por lo que sí que es ortogonal.

— — —

8. Determinar la imagen del vector $(3,-1)$ por el giro respecto del origen de $\mathbb{R}^2$ de ángulo $\theta=\frac{\pi}{3}$ (en sentido antihorario).

Solución:

La matriz del endomorfismo en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Por lo que la imagen del vector $(3,-1)$ es

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{3+\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{3\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix}}.$$

— — —

9. En $\mathbb{R}^2$, determinar la matriz de la simetría respecto la recta $2x = y$, en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Solución:

Sea $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ un vector unitario en la dirección de la recta eje de simetría.

Completemos a una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$: $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2), u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$. En esta base la matriz de la aplicación es

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando el cambio de base tenemos

$$A = SA_1S^{-1}$$

siendo $S = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Puesto que S es ortogonal y simétrica $S^{-1} = S^t = S$.

Por lo que

$$\boxed{A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.}$$

10. Determinar la matriz, en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, del giro de eje $[(1,-1,0)]$ ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Solución:

Tomando una base ortonormal en la que el primer vector tenga la dirección del eje de giro, la matriz de la aplicación tendrá la forma

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

puesto que el ángulo es $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, entonces $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Determinemos la base ortonormal con la cual la matriz del endomorfismo tiene esta forma

$v_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0)$, por lo que $v_2, v_3 \in [v_1]^\perp$, podemos tomar $v_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0)$ y $v_3 = (0,0,1)$.

Sea $S = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz cambio de base. Por lo que la matriz de la aplicación en la base canónica es

$$A = SBS^{-1}.$$

Ahora bien S es un matriz ortogonal por lo que $S^{-1} = S^t$, y haciendo el producto tenemos

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\frac{\sqrt{2}}{2} & -1+\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ -1+\frac{\sqrt{2}}{2} & 1+\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}\,.$$

— — —

11. Determinar la matriz, en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, de la simetría axial respecto de la recta $x-2y=y-3z=0$.

Solción:

El eje de simetría es un subespacio de vectores propios de valor propio 1, y su plano perpendicular un subespacio de vectores propios de valor propio -1.

Tomando pues una base ortonormal de vectores propios la matriz de la aplicación es

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Explicitemos la base en la cual está escrita esta matriz a fin de poder hallar la matriz en la base canónica

$v_1=\dfrac{1}{\sqrt{46}}(6,3,1)$, por lo que v_2,v_3 han de estar en el plano $6x+3y+z=0$. Escojamos una base ortonormal en dicho plano: $v_2=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(0,1,-3)$, $v_3=\dfrac{1}{\sqrt{115}}(5,9,3)$.

Sea S la matriz cambio de base

$$S=\begin{pmatrix}\frac{6}{\sqrt{46}}&0&\frac{5}{\sqrt{115}}\\ \frac{3}{\sqrt{46}}&\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{9}{\sqrt{115}}\\ \frac{1}{\sqrt{46}}&-\frac{3}{\sqrt{10}}&\frac{3}{\sqrt{115}}\end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz de la simetría es

$$A=SBS^{-1}$$

teniendo en cuenta que S es ortogonal $S^{-1}=S^t$, por lo que haciendo el producto se obtiene

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}\frac{13}{23}&\frac{18}{23}&\frac{6}{23}\\ \frac{18}{23}&\frac{-14}{23}&\frac{3}{23}\\ \frac{6}{23}&\frac{3}{23}&\frac{-22}{23}\end{pmatrix}.}$$

12. Determinar la matriz, en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, de la simetría especular respecto del plano $x + 2y + 3z = 0$.

Solución:

El plano de simetría es un subespacio de vectores propios de valor propio 1, y la recta perpendicular un subespacio de vectores propios de valor propio -1.

Tomando pues una base ortonormal de vectores propios la matriz de la aplicación es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Explicitemos la base en la cual está escrita esta matriz a fin de poder hallar la matriz en la base canónica

$\{v_1, v_2\}$ es una base ortonormal del plano de simetría, así pues podemos tomar $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0)$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{70}}(3, 6, -5)$, $v_3 \in [v_2, v_3]^\perp$ por lo que $v_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$.

Sea S la matriz de cambio de base

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ 0 & -\frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}.$$

Por lo que la matriz de la simetría es

$$A = SBS^{-1}$$

teniendo en cuenta que S es ortogonal $S^{-1} = S^t$, por lo que haciendo el producto se obtiene

$$\boxed{A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}.}$$

— — —

13. Determinar la matriz, en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, del giro de eje la recta $x = y = z$ y ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ seguida de simetría especular respecto del plano $x + y + z = 0$.

Solución:

Consideremos la siguiente base ortonormal

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \\ u_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \\ u_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) \end{aligned}$$

Observamos que u_1 es la dirección del eje de giro y $[u_2, u_3]$ es el plano de la simetría. Por lo tanto las matrices de ambas aplicaciones en dicha base son

Rotación:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{4} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \\ 0 & \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

Simetría:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que la aplicación tiene por matriz

$$A_3 = A_2 A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{4} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \\ 0 & \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{4} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \\ 0 & \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

En la base canónica la matriz será $A = SA_3S^{-1}$ siendo S la matriz de cambio de base

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Puesto que esta matriz es ortogonal $S^{-1} = S^t$.

— — —

14. Sea f un endomorfismo simétrico del espacio euclídeo ordinario $\mathbb{R}^3$, tal que $\operatorname{tr} f = 0$, (1,1,-1) es un vector propio de f de valor propio 1 y $(1,0,1) \in \operatorname{Ker} f$. Justificar cuál de los siguientes vectores es un vector propio de f de valor propio 1 i/o -1:

a) (1,-2,1), b) (1,-2,-1), c) (1,0,1), d) (1,0,-1), e) (1,1,1).

Solución:

Puesto que el endomorfismo es simétrico, este diagonaliza en una base ortonormal.

Sabemos que $(1,1,-1)$ es un vector propio de valor propio 1 y $(1,0,1)$ es un valor propio de valor propio 0.

Observamos que estos dos vectores son ortogonales.

Puesto que la traza del endomorfismo es nula, entonces el tercer valor propio es -1.

El vector propio correspondiente ha de ser ortogonal al subespacio $[(1,1,-1),(1,0,1)]$. Luego el único vector posible es $(1,-2,-1)$.

— — —

15. La imagen del vector $(3,4) \in \mathbb{R}^2$ por un endomorfismo ortogonal es $(0,\alpha)$. Determinar el valor de α.

Solución:

Puesto que todo endomorfismo ortogonal conserva la norma ha de ser

$$\|(3,4)\| = \|(0,\alpha)\|$$

por lo que $5 = \sqrt{\alpha^2}$ y

$$\boxed{\alpha = \pm 5.}$$

— — —

16. Sean $f, g \in \operatorname{End}(E)$ tales que f es simétrico y g es ortogonal. Probar que: $(g \circ f \circ g^{-1})' \circ g = g \circ f$.

Solución:

Si f es simétrico es $f' = f$, si g es ortogonal entonces g^{-1} también es ortogonal y $(g^{-1})' = (g^{-1})^{-1}$. Ahora teniendo en cuenta que $(f \circ g)' = g' \circ f'$ tenemos

$$(g \circ f \circ g^{-1})' \circ g = ((g^{-1})' \circ f' \circ g') \circ g = ((g^{-1})^{-1} \circ f \circ g^{-1}) \circ g = (g \circ f) \circ (g^{-1} \circ g) = g \circ f.$$

— — —

17. Sea f un endomorfismo del espacio euclídeo E, tal que $\langle f(u), v\rangle = -\langle u, f(v)\rangle$, para todo $u, v \in E$. Probar que $E = \operatorname{Ker} f \perp \operatorname{Im} f$.

Solución:

Basta probar que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$, ya que $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.

Sea $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, entonces $f(x) = 0$ y $x = f(y)$ para un cierto $y \in E$.

Apliquemos la condición

$$\langle x, x\rangle = \langle x, f(y)\rangle = -\langle f(x), y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0.$$

Puesto que $\langle x, x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$ se tiene el resultado.

— — —

18. Encontrar un endomorfismo ortogonal f de $\mathbb{R}^2$ de tal manera que para todo vector $u \in \mathbb{R}^2$ no nulo, se tiene que ángulo$(u, f(u)) = \dfrac{\pi}{3}$.

Solución:

Este endomorfismo ha de ser un giro de ángulo $\frac{\Pi}{3}$.

La matriz en la base canónica de este giro es:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Observamos que esta aplicación verifica la condición:

Dado un vector $u = (a, b)$ cualquiera $f(u) = (\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b, \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b)$ por lo que

$$\langle (a, b), (\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b, \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b)\rangle = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = \cos\frac{\pi}{3}\|u\|\|f(u)\|.$$

— — —

19. Resolver utilizando la matriz quasi-inversa el sistema

$$\left.\begin{array}{rl} x & = 4 \\ y & = 5 \\ x + y & = 6 \\ 2x + y & = 5 \\ x + 2y & = 4 \end{array}\right\}$$

Solución:

Escribamos el sistema en forma matricial $AX = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Observamos que la matriz A es de rango máximo igual al número de columnas, por lo que $A^+ = (A^tA)^{-1}A^t$. Por lo tanto la solución es $X = (A^tA)^{-1}A^tb$.

Calculando ahora este producto de matrices tenemos

$$\boxed{(x, y) = (2, 2).}$$

— — —

20. Hemos medido el volumen de un gas 4 veces y hemos obtenido los siguientes valores, $V_1 = 150\,\text{cm}^3$, $V_2 = 153\,\text{cm}^3$, $V_3 = 150\,\text{cm}^3$, $V_4 = 151\text{cm}^3$. ¿Qué volumen le asignaremos mediante el método de los mínimos cuadrados?

Solución:

Planteemos el sistema de ecuaciones que describen estos datos

$$\left.\begin{array}{ll} x & = 150 \\ x & = 153 \\ x & = 150 \\ x & = 151 \end{array}\right\},$$

sistema sobredeterminado que resolveremos mediante el método de los mínimos cuadrados.

Escribamos el sistema de forma matricial $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 150 \\ 153 \\ 150 \\ 151 \end{pmatrix}$$

La matriz A del sistema es de rango máximo igual al número de columnas, por lo que $A^+ = (A^tA)^{-1}A^t$ y la solución del sistema es $x = (A^tA)^{-1}A^tb$.

La matriz A^tA es el escalar 4, por lo tanto $(A^tA)^{-1} = \dfrac{1}{4}$ y $A^tb = 150+153+150+151$.

Por lo que la solución coincide con la media aritmética de los datos $\boxed{x = 151\,\mathrm{cm}^3.}$

— — —

21. Calcular la mejor solución aproximada del sistema:

$$\left.\begin{array}{rl} 2x_1 + x_2 - x_3 & = 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 & = 2 \\ x_1 + x_2 & = -1 \\ x_2 - x_3 & = 1 \end{array}\right\}$$

Solución:

Escribamos el sistema en forma matricial $AX = b$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz A es de rango máximo igual al número de columnas, por lo que $A^+ = (A^tA)^{-1}A^t$ y la solución del sistema es $X = (A^tA)^{-1}A^tb$.

Calculando pues la matriz A^+ tenemos que

$$\boxed{x_1 = 2, x_2 = \frac{2}{5}, x_3 = \frac{-3}{5}.}$$

— — —

22. Determinar la recta de la forma $y = ax + b$ que aproxima mejor, por mínimos cuadrados, los puntos: $(1, -1), (0, 1), (2, 1), (4, 2)$.

Solución:

Impongamos que los puntos $(1, -1), (0, 1), (2, 1), (4, 2)$ verifican la ecuación de la recta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tenemos un sistema de la forma $AX = B$ con A matriz de rango máximo e igual al número de columnas por lo que $A^+ = (A^tA)^{-1}A^t$ y la solución del sistema es $X = (A^tA)^{-1}A^tB$, con $a = 0, b = \frac{3}{7}$, esto es la recta

$$\boxed{y = \frac{3}{7}.}$$

— — —

Capítulo 8

Forma reducida de Jordan

Ya se ha puntualizado que fue Cauchy quien se dio cuenta de la estrecha relación existente entre los valores y vectores propios de una matriz simétrica con las direcciones principales y las longitudes de los ejes de la función asociada a esta matriz simétrica, motivo por el cual se introdujo el concepto de ortogonalmente diagonalizable.

Gracias a los descubrimientos de Cauchy, Jacobi (1804-1851) pudo dar la solución al sistema de ecuaciones diferenciales $Y' = AY$, donde A es una matriz diagonalizable. Posteriormente Jordan resolvió el caso no diagonalizable usando los conceptos de matrices similares (dos matrices A y B se dicen *similares* si existe una matriz invertible S tal que $A = SBS^{-1}$). En su libro *Traité des substitutions* (1870) demostró que una matriz puede ser transformada a una forma canónica hoy conocida como Forma Canónica de Jordan.

Como hemos podido observar en este breve recorrido histórico, tanto los determinantes como las matrices, y todas las elaboraciones abstractas que en el siglo XIX se desarrollaron respecto a estos elementos, nos son imprescindibles en la evolución y avance científico, tanto en física como en ingeniería, en la actualidad.

Ejercicios

1. Determinar la forma reducida de Jordan así como la base para la cual adopta la forma reducida, de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución:

El polinomio característico es:

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^3$$

$$\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) = 1$$

Por lo tanto:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La base ha de ser tal que

$$\begin{array}{l} v_1 \in \operatorname{Ker}(A - I) \\ v_2 \in \operatorname{Ker}(A - I)^2 - \operatorname{Ker}(A - I), \text{ pues } (A - I)v_2 = v_1 \\ v_3 \in \operatorname{Ker}(A - I)^3 - \operatorname{Ker}(A - I)^2, \text{ pues } (A - I)v_3 = v_3 \end{array}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \ (A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ (A - I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $v_3 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (A - I)v_3 = (0, 2, 3)$, $v_1 = (A - I)v_2 = (0, 0, 4)$.

La base es pues $\{(0, 0, 4), (0, 2, 3), (1, 0, 0)\}$.

— — —

2. Sea A una matriz 4×4 con valor propio $\lambda = 5$ de multiplicidad 4.

Determinar todas las posibles formas de Jordan de esta matriz.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

— — —

3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ -4 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) Determinar la matriz de Jordan así como la base en la cual la matriz adopta la forma reducida hallada.

ii) Hallar A^{100}

iii) Calcular e^A

Solución:

i) Empecemos buscando los valores propios

$$\det(A - tI) = (t+2)^2(t-2)^2$$

Determinemos ahora los tamaños de los bloques de Jordan.

$$\dim \operatorname{Ker}(A+2I) = 4 - \operatorname{rango}(A+2I) = 4 - \operatorname{rango}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -4 & 5 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4-3 = 1$$

lo que nos dice que hay una sola caja de Jordan para este valor propio, y que por lo tanto (teniendo en cuenta que $n_1 = 2$) tenemos una caja de tamaño dos.

$$\dim \operatorname{Ker}(A-2I) = 4 - \operatorname{rango}(A+2I) = 4 - \operatorname{rango}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ -4 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4-3 = 1$$

al igual que para el valor propio -2, lo que también nos dice para este caso, es que hay una sola caja de Jordan y que por lo tanto (teniendo en cuenta que $n_1 = 2$) tenemos una caja de tamaño dos.

En definitiva,

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & & \\ 1 & -2 & & \\ & & 2 & \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Busquemos ahora la base en la cual la matriz del endomorfismo adopta esta forma reducida.

Empecemos por los vectores correspondientes al primer bloque de Jordan.

$u_1 \in \operatorname{Ker}(A+2I)^2 \backslash \operatorname{Ker}(A+2I)$
$u_2 = (A+2I)u_1$

$$(A+2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -4 & 5 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad (A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \\ -16 & 16 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Escogiendo pues $u_1 = (1,1,0,0)$, tenemos que $u_2 = (1,0,1,0)$

Análogamente, para el segundo bloque

$u_3 \in \operatorname{Ker}(A-2I)^2 \backslash \operatorname{Ker}(A-2I)$
$u_4 = (A+2I)u_3$

$$(A-2I)=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -4 & 0 & 4\\ -4 & 5 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad (A-2I)^2=\begin{pmatrix}16 & -8 & 0 & 8\\ 0 & 16 & 0 & -16\\ 16 & -24 & 0 & 24\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Escogiendo pues $u_3=(0,1,0,1)$, tenemos que $u_4=(0,0,1,0)$

ii) Teniendo en cuenta que $A^i=(SJS^{-1})^i=SJ^iS^{-1}$, siendo

$S=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ la matriz cambio de base obtenida en el apartado anterior.

Por lo tanto

$A^{100}=SJ^{100}S^{-1}$

$$J^{100}=\begin{pmatrix}2^{100} & & & \\ -100\cdot 2^{99} & 2^{100} & & \\ & & 2^{100} & \\ & & 100\cdot 2^{99} & 2^{100}\end{pmatrix}$$

iii) $e^A=Se^JS^{-1}=Se^{\begin{pmatrix}J_1 & \\ & J_2\end{pmatrix}}S^{-1})S\begin{pmatrix}e^{J_1} & \\ & e^{J_2}\end{pmatrix}S^{-1}$.

Cada caja $e^{\lambda I+N}=e^{\lambda I}e^N=e^{\lambda}e^N$, $e^N=I+N+\dfrac{1}{2!}N^2+\dots$

En ambos casos $N^i=0$ para todo $i\geq 2$, por lo que $e^{J_1}=\begin{pmatrix}e^{-2} & \\ e^{-2} & e^{-2}\end{pmatrix}$ y $e^{J_2}=\begin{pmatrix}e^{2} & \\ e^{2} & e^{2}\end{pmatrix}$.

— — —

4. Probar que las matrices

$$A_1=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 1 & \lambda & 0\\ 0 & 1 & \lambda\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad A_2=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

son semejantes. (Es decir, existe una matriz S invertible tal que $A_1 = S^{-1}A_2S$).

Solución:

En efecto, basta tomar la matriz permutación siguiente

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

— — —

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Hallar la forma reducida de Jordan así como la base en la cual la matriz adopta la forma reducida hallada.

Solución:

Busquemos los valores propios

$$\det(A - tI) = (t-2)^4$$

$$\dim \operatorname{Ker}\,(A - 2I) = 4 - \operatorname{rango}(A - 2I) = 4 - \operatorname{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

Por lo tanto tenemos una única caja de Jordan y la forma reducida es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ 1 & 2 & & \\ & 1 & 2 & \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pasemos a determinar una base de Jordan

$$\begin{aligned}
&u_1 \in \operatorname{Ker}(A-2I)^4 \backslash \operatorname{Ker}(A-I)^3\\
&u_2=(A-2I)u_1\\
&u_3=(A-2I)^2u_1\\
&u_4=(A-2I)^3u_1
\end{aligned}$$

Calculemos pues, las potencias de $(A-2I)$

$$(A-2I)^2=\begin{pmatrix}0&0&-6&7\\0&0&-4&5\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad (A-2I)^3=\begin{pmatrix}0&0&-2&2\\0&0&-2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},(A-2I)^4=0$$

Escogemos $u_1=(0,0,1,0)$, por lo que

$$u_2=(1,1,-2,-2),u_3=(-6,-4,0,0),u_4=(-2,-2,0,0).$$

— — —

6. Sea

$$A=\begin{pmatrix}4&0&0&-1&1\\-1&3&0&1&0\\1&0&3&0&0\\1&0&0&2&1\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}.$$

Hallar la forma reducida de Jordan así como la base en la cual la matriz adopta la forma reducida hallada.

Solución:

Busquemos los valores propios

$$\det(A-tI)=\begin{vmatrix}4-t&0&0&-1&1\\-1&3-t&0&1&0\\1&0&3-t&0&0\\1&0&0&2-t&1\\0&0&0&0&3-t\end{vmatrix}=(-1)^5(t-3)^5.$$

Determinemos ahora el tamaño de las cajas de Jordan

$$\begin{aligned}
\dim \operatorname{Ker}(A-3I) &= 5-\operatorname{rango}(A-3I) = 5-\operatorname{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= 5-3 = 2\\
\dim \operatorname{Ker}(A-3I)^2 &= 5-\operatorname{rango}(A-3I)^2 = 5-\operatorname{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= 5-1 = 4\\
\dim \operatorname{Ker}(A-3I)^3 &= 5-\operatorname{rango}(A-3I)^3 = 5-\operatorname{rango}(0) = 5-0 = 5
\end{aligned}$$

Concluimos que la forma reducida de Jordan tiene dos cajas y la de tamaño más grande es de orden tres, en definitiva:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Determinemos ahora una base en la cual la matriz adopta esta forma reducida.

$$\begin{aligned}
&u_1 \in \operatorname{Ker}(A-3I)^3 \backslash \operatorname{Ker}(A-I)^2\\
&u_2 = (A-3I)u_1\\
&u_3 = (A-3I)^2 u_1\\
&u_4 \in \operatorname{Ker}(A-3I)^2 \backslash \operatorname{Ker}(A-I),\ \text{l. i. con}\ \ u_2, u_3\\
&u_5 = (A-3I)u_4
\end{aligned}$$

(Observamos que u_4 también es l.i. con u_1, u_2, u_3)

$$\begin{aligned} u_1 &= (1,0,0,0,0) \\ u_2 &= (1,-1,1,1,0) \\ u_3 &= (0,0,1,0,0) \\ u_4 &= (0,0,0,1,1) \\ u_5 &= (0,0,0,1,1) \end{aligned} \quad .$$

— — —

6. Hallar la forma reducida de Jordan de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -a & 1+a \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

Solución:

Hallemos los valores propios, el polinomio característico es

$$\det(A - tI) = (1-t)^2(a+1-t)$$

Por lo que los valores propios son 1,1, $a+1$

Para $a \neq 0$ el valor propio 1 es doble

$$\operatorname{rank}(A - I) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -a & a \end{pmatrix} = 2$$

de donde $\dim \operatorname{Ker}(A - I) = 1$ y la forma reducida de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & & a+1 \end{pmatrix}$$

Si $a = 0$ el valor propio 1 es de multiplicidad 3 pero

$$\operatorname{rank}(A - I) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

por lo que $\dim \operatorname{Ker}(A - I) = 1$ y

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

— — —

Capítulo 9

Sistemas lineales discretos

Una de las primeras aplicaciones de la teoría de valores y vectores propios fue en el estudio de las sucesiones dadas por recurrencia lineales, como es el caso de la sucesión de Fibonacci. Sin embargo, no fue hasta finales del siglo XIX, con Poincaré, quien hubo de mostrar que los métodos de perturbaciones podrían no dar resultados correctos en todos los casos, que el análisis perdió su hegemonía, como herramienta favorita en el estudio de los problemas matemáticos, y se fusionó con las herramientas geométricas para el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias. Así, los sistemas dinámicos, como métodos de análisis cualitativo de ecuaciones diferenciales, fueron desarrollados por diversos matemáticos como Birkhoff, que estableció las bases, Andronov y Pontriagyn, que introdujeron el concepto de estabilidad estrutural, y Kolmogorov, Arnold y Moser, que fundaron toda una teoría de control, conocida con sus tres nombres, de crucial importancia en nuestros días.

En los albores del siglo XX, Márkov (1856-1922) fue el primero en estudiar los procesos estocásticos no dependientes del tiempo, llamados hoy cadenas de Márkov y consistentes en una sucesión de variables dependientes $X(t_i) = (x_1(t_i), \dots, x_n(t_i))$ identificadas por valores discretos crecientes de t_i con la propiedad de que cualquier predicción de $X(t_i)$ es sólo función de $X(t_{i-1})$. Es decir, son sucesiones representadas mediante un sistema lineal discreto. Márkov pudo estudiarlas completamente por la relación lineal habida entre $X(t_i)$ y $X(t_{i-1})$. Su trabajo además ha sido aplicado a la biología. En 1945, Leslie introdujo un cierto tipo de matrices usadas en ecología con el fin de estudiar problemas de evolución de poblaciones en un cierto periodo de tiempo y que hoy son conocidas como *matrices de Leslie*.

Ejercicios

1.- Resolver el sistema lineal discreto a coeficientes constantes siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) \\ x_3(k+1) &= x_2(k) + x_3(k) \\ x_4(k+1) &= -x_1(k) - x_2(k) + x_4(k) \end{aligned}\right\} .$$

Solución:

Escribamos este sistema de ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{pmatrix} .$$

El sistema queda escrito en la forma

$$x(k+1) = Ax(k),$$

por lo que es un sistema de ecuaciones lineal discreto a coeficientes constantes y homogéneo.

El conjunto de soluciones será por tanto

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{pmatrix} .$$

Calculemos pues la potencia k-ésima de la matriz A.

Para ello observamos que la matriz A descompone en suma de dos matrices que conmutan:

$$A = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y en la que la matriz B es nilpotente $B^3 = 0$. Luego

$$A^k = I + kB + \frac{k(k-1)}{2}B^2 = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{k(k-1)}{2} & k & 1 & 0 \\ \dfrac{-k(k+1)}{2} & -k & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ kx_1(0) + x_2(0) \\ \dfrac{k(k-1)}{2}x_1(0) + kx_2(0) + x_3(0) \\ -\dfrac{k(k+1)}{2}x_1(0) - kx_2(0) + x_4(0) \end{pmatrix}.$$

— — —

2.- Una ciudad tiene tres supermercados X, Y, Z. Considerando un determinado periodo de tiempo observamos que por diferentes razones como precio, calidad,..., algunos habitantes deciden cambiar de cadena. Deseamos expresar en un modelo matemático y analizar el movimiento de clientes de una cadena a otra suponiendo que la proporción de clientes que cambian al día de supermercado se mantiene constante durante un mes.

Aplicarlo al caso en que la proporción de clientes de X, Y, Z el 31 de Diciembre es $(0{,}2, 0{,}3, 0{,}5) = u(0)$ respecto de la población total y que la proporción de clientes que permanecen en el supermercado o que cambian de uno a otro es:

que se mantiene en X 0.8, que pasa de Y, Z a X es 0.2, 0.1 resp.

que se mantiene en Y 0.7, que pasa de X, Z a Y es 0.1, 0.3 resp.

que se mantiene en Z 0.6, que pasa de X, Y a Z es 0.1, 0.1 resp.

Solución:

Supongamos que la proporción de clientes de X, Y, Z el 31 de Diciembre es $(x_0, y_0, z_0) = u(0)$ respecto de la población total y que el 31 de Enero es $(x_1, y_1, z_1) = u(1)$.

Puesto que la totalidad de la población compra en estos tres únicos estableciemientos tenemos que

$$\begin{aligned} x_0 + y_0 + z_0 &= 1 \\ x_1 + y_1 + z_1 &= 1 \end{aligned}$$

Ahora bien, la proporción de clientes en Enero en cada uno de los supermercados es

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 \\ y_1 &= a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 \\ z_1 &= a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 \end{aligned}\right\},$$

donde a_{ij} con $j \neq i$ es la proporción de clientes del supermercado j que absorbe el supermercado i, y a_{ii} es la proporción de clientes del supermercado i que se mantiene en i.

Puesto que la proporción de clientes que cambia de supermercado se matiene constante durante un mes tenemos

$$\left.\begin{aligned} x_{k+1} &= a_{11}x_k + a_{12}y_k + a_{13}z_k \\ y_{k+1} &= a_{21}x_k + a_{22}y_k + a_{23}z_k \\ z_{k+1} &= a_{31}x_k + a_{32}y_k + a_{33}z_k \end{aligned}\right\},$$

por lo que, en lenguaje matricial tenemos

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \\ z(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \\ z(k) \end{pmatrix}.$$

Aplicándolo a nuestro caso concreto tenemos

$$\begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \\ z(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de A son 1, 0.6, 0.5 y los vectores propios respectivos son

$$v_1 = (0{,}45, 0{,}35, 0{,}20), \; v_2 = (1, -1, 0), \; v_3 = (1, -2, 1).$$

Por lo tanto y teniendo en cuenta que

$$u(0) = 1v_1 + (-0{,}55)v_2 + 0{,}3v_3$$

tenemos que

$$A^k u(0) = 1{,}1^k v_1 + (-0{,}55)(0{,}6)^k v_2 + 0{,}3(0{,}5)^k v_3$$

Finalmente, observamos que

$$\lim_k A^k u(0) = v_1 = (0{,}45, 0{,}35, 0{,}20).$$

— — —

3.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones discreto

$$\left.\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + \beta(x_2(k) - x_1(k)) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + \alpha(x_1(k) - x_2(k)) \end{aligned}\right\},$$

suponiendo que $\alpha + \beta \neq 0$.

Analizar el caso en que $\alpha + \beta = 1$.

Solución:

Escribamos matricialmente el sistema

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\beta & \beta \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix},$$

tenemos pues

$$x(k+1) = Ax(k)$$

con A constante, es pues un sistema lineal discreto a coeficientes constantes y homogéneo, por lo que su solución es

$$x(k) = A^k x(0).$$

Claramente 1 es valor propio de la matriz (rango $A - I$=1), además puesto que la traza de la matriz A es invariante por cambio de base es

$$1 + \lambda = 1 - \beta + 1 - \alpha,$$

por lo que $\lambda = 1 - \alpha - \beta$ es también valor propio.

Los vectores propios correspondientes son:

para $\lambda = 1$, $v_1 = (1, 1)$,

para $\lambda = 1 - \alpha - \beta$, $v_2 = (\beta, -\alpha)$.

Luego

$$
\begin{aligned}
A^k &= \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\alpha+\beta} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (1-\alpha-\beta)^k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\alpha+\beta} =, \\
&= \frac{1}{\alpha+\beta} \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & -\beta \\ -\alpha & \alpha \end{pmatrix} (1-\alpha-\beta)^k \right)
\end{aligned}
$$

y la solución es

$$
\begin{aligned}
x_1(k) &= \frac{1}{\alpha+\beta}((\alpha + \beta(1-\alpha-\beta)^k)x_1(0) + (\beta - \beta(1-\alpha-\beta)^k)x_2(0)), \\
x_2(k) &= \frac{1}{\alpha+\beta}((\alpha + \alpha(1-\alpha-\beta)^k x_1(0) + (\beta + \alpha(1-\alpha-\beta)^k)x_2(0)).
\end{aligned}
$$

En el caso particular en que $\alpha + \beta = 1$ tenemos

$$
\begin{aligned}
x_1(k) &= \alpha x_1(0) + \beta x_2(0), \\
x_2(k) &= \alpha x_1(0) + \beta x_2(0).
\end{aligned}
$$

Nótese que si $x_1(0) = x_2(0)$, entonces $x_1(k) = x_2(k) = x_1(0)$ para todo k. Esto es así debido a que $(x_1(0), x_2(0)) = \lambda(1, 1)$ es vector propio de valor propio 1.

— — —

4.- Resolver

$$
\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Solución:

Tenemos que $A = I + A_1$ con $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y es tal que $A_1^2 = 0$. Luego

$$A^k = (I + A_1)^k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte

$$A^\ell B = B.$$

(esto dice que B es vector propio de A de valor propio 1).

Por lo tanto

$$\sum_{\ell=1}^{k-1} B = kB.$$

Luego

$$x(k) = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k \end{pmatrix}.$$

— — —

5.- a) Determinar, si existe, el punto de equilibrio de

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) En caso de existir el punto de equilibrio ¿es estable?.

Solución:

Tenemos el sistema $x(k+1) = Ax(k) + B$.

Los valores propios de A son 5, -1, -1. Puesto que 1 no es valor propio y $B \neq 0$, existe un único punto de equilibrio x_e.

$$x_e = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

b) Puesto que el valor propio dominante es $5 > 1$, el punto de equilibrio es inestable.

— — —

Ecuaciones en diferencias

1.- Consideremos la ecuación en diferencias siguiente

$$y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 2.$$

a) Resolver la ecuación homogénea asociada.

b) Dar la solución general de dicha ecuación.

c) Deducir la solución particular tal que $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

Solución:

a) La ecuación homogénea asociada es

$$y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 0,$$

cuya ecuación característica es

$$t^2 + 3t + 2 = 0.$$

Las raíces de dicha ecuación son claramente -2, -1. Por lo que la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(k) = C_1(-2)^k + C_2(-1)^k.$$

b) Para dar la solución general de la ecuación en diferencias completa, necesitamos una solución particular de dicha ecuación.

Puesto que $\varphi(k) = 2$ constante, ensayamos una solución constante:

$$y_p(k) = C.$$

esto es

$$C + 3C + 2C = 2,$$

por lo que $C = \dfrac{1}{3}$.

Finalmente tenemos

$$y(k) = C_1(-2)^k + C_2(-1)^k + \frac{1}{3}.$$

c) Obliguemos a que la solución general de la ecuación dada en b), verifique las condiciones iniciales dadas:

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 = C_1 + C_2 + \dfrac{1}{3} \\ y(1) = 1 = -2C_1 - C_2 + \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{lll} C_1 & = -\dfrac{1}{3} \\ C_2 & 0 \end{array} \left.\right\}.$$

Por lo que resolviendo el sistema queda

$$y(k) = \frac{1}{3}\left(1 - (-2)^k\right).$$

— — —

2.- Consideremos la ecuación en diferencias siguiente

$$y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 3^k.$$

a) Resolver la ecuación homogénea asociada.

b) Dar la solución general de dicha ecuación.

Solución:

a) La ecuación homogénea asociada es

$$y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 0,$$

cuya ecuación característica es

$$t^2 - 3t + 2 = 0.$$

Las raíces de dicha ecuación son claramente 2, 1. Por lo que la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(k) = C_1(1)^k + C_2(2)^k = C_1 + C_2(2)^k.$$

b) Para dar la solución general de la ecuación en diferencias completa, necesitamos una solución particular de dicha ecuación.

Puesto que $\varphi(k) = 3^k$ exponecial y 3 no es raíz de la ecuación característica, ensayamos una solución del tipo

$$y_p(k) = A3^k$$

esto es

$$A3^{k+2} - 3A3^{k+1} + 2A3^k = 3^k$$

que simplificando

$$3^k(2A - 1) = 0,$$

y por tanto $A = \dfrac{1}{2}$, esto es $y_p(k) = \dfrac{1}{2}3^k$.

Finalmente tenemos pues

$$y(k) = C_1 + C_2(2)^k + \frac{1}{2}3^k.$$

— — —

3.- Consideremos la ecuación en diferencias siguiente

$$y(k+2) - 9y(k+1) + 20y(k) = 4^k.$$

a) Resolver la ecuación homogénea asociada.

b) Dar la solución general de dicha ecuación.

Solución:

a) La ecuación homogénea asociada es

$$y(k+2) - 9y(k+1) + 20y(k) = 0,$$

cuya ecuación característica es

$$t^2 - 9t + 20 = 0,$$

Las raíces de dicha ecuación son claramente 5, 4. Por lo que la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(k) = C_1(5)^k + C_2(4)^k.$$

b) Para dar la solución general de la ecuación en diferencias completa, necesitamos una solución particular de dicha ecuación.

Puesto que $\varphi(k) = 4^k$ exponecial y 4 es raíz de la ecuación característica de multiplicidad 1, ensayamos una solución del tipo

$$y_p(k) = Ak3^k,$$

esto es

$$A(k+2)4^{k+2} - 9A(k+1)4^{k+1} + 20Ak4^k = 4^k,$$

$$Ak(4^{k+2} - 9 \cdot 4^{k+1} + 20 \cdot 4^k) + (2A4^{k+2} - 9A4^{k+1} - 4^k) = 0,$$

esto es

$$(Ak(16 - 36 + 20) + (A(32 - 36) - 1))4^k = 0$$

y por tanto $A = -\dfrac{1}{4}$, esto es $y_p(k) = -\dfrac{1}{4}k4^k = -k4^{k-1}$.

Finalmente tenemos pues

$$y(k) = C_1(5)^k + C_2(4)^k + -k4^{k-1}.$$

— — —

4.- Consideremos la ecuación en diferencias siguiente

$$y(k+3) - 3y(k+2) + 3y(k+1) - y(k) = 1.$$

a) Resolver la ecuación homogénea asociada.

b) Dar la solución general de dicha ecuación.

c) Deducir la solución particular tal que $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = 0$.

Solución:

a) La ecuación homogénea asociada es

$$y(k+3) - 3y(k+2) + 3y(k+1) - y(k) = 0,$$

cuya ecuación característica es

$$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0,$$

Dicha ecuación tiene una única raíz ($t = 1$), de multiplicidad 3. Por lo que la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(k) = C_1(1)^k + C_2k(1)^k + C_3k^2(1)^k = C_1 + C_2k + C_3k^2.$$

b) Para dar la solución general de la ecuación en diferencias completa, necesitamos una solución particular de dicha ecuación.

Puesto que $\varphi(k) = 1$ es constante y 1 es raíz de la ecuación característica de multiplicidad 3, ensayamos una solución del tipo:

$$y_p(k) = Ck^3$$

esto es

$$C(k+3)^3 - 3C(k+2)^3 + 3C(k+1)^3 - Ck^3 = 1,$$

por lo que $C = \dfrac{1}{6}$, y $y_p(k) = \dfrac{1}{6}k^3$.

Finalmente tenemos

$$y(k) = C_1 + C_2k + C_3k^2 + \frac{1}{6}k^3.$$

c) Obliguemos a que la solución general de la ecuación dada en b), verifique las condiciones iniciales dadas:

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=0=C_1 \\ y(1)=1=C_1+C_2+C_3+\dfrac{1}{6} \\ y(2)=0=C_1+2C_2+4C_3+\dfrac{4}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} C_1 & =0 \\ C_2 & =\dfrac{1}{3} \\ C_3 & =\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}.$$

Por lo que resolviendo el sistema queda

$$y(k)=\frac{1}{3}k-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{6}k^3.$$

— — —

5.- Consideremos una sucesión u_n definida de forma recurrente mediante las relaciones

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 = 1, \\ u_{n+1} &= u_n + u_{n-1}, \qquad n \geq 2. \end{aligned}$$

a) Determinar el término general de la sucesión u_n.

b) Calcular $\lim_k \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (razón aurea).

Solución:

a) La relación de recurrencia que verifican los términos de la sucesión es una ecuación en diferencias a coeficientes constantes homogénea y de orden 2:

$$u_{n+1}-u_n-u_{n-1}=0.$$

que resolvemos determinando las raíces de la ecuación característica

$$t^2-t-1=0,$$

que son $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Por lo que la solución general de la ecuación es

$$u_n=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Determinemos el valor de las constantes C_1, C_2 a partir de las condiciones iniciales $u_1 = u_2 = 1$, esto es

$$\left.\begin{array}{r} C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{array}\right\}$$

cuyas soluciones son

$$C_1 = \frac{1}{1+\sqrt{5}}, \qquad C_2 = \frac{1}{1-\sqrt{5}}.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{1+\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{1-\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

— — —

6.- Consideremos la ecuación en diferencias siguiente:

$$y(k+3) - \frac{7}{3}y(k+2) + \frac{7}{3}y(k+1) + y(k) = 0$$

¿Para qué condiciones iniciales las soluciones son convergentes? y ¿para cuales son acotadas?

Solución:

Resolvamos primero la ecuación.

La ecuación característica es

$$t^3 - \frac{7}{3}t^2 - \frac{7}{3}t + 1 = 0$$

cuyas raíces son $\frac{1}{3}$, -1 y 3, por lo que la solución general es

$$y(k) = C_1(\frac{1}{3})^k + C_2(-1)^k + C_3 3^3$$

que convergen (hacia 0) si y sólo si $C_2 = C_3 = 0$.

y que son acotadas si y sólo si $C_3 = 0$.

Ahora sólo falta poner estas condiciones en términos de las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 + C_3, \\ y(1) &= \frac{1}{3}C_1 - C_2 + 3C_3, \\ y(2) &= \frac{1}{9}C_1 + C_2 + 9C_3. \end{aligned}$$

— — —

Bibliografía

1. BARJA, M.A., M.I. García, M.C. Hernando, M. D. Magret, F. Planas y C. Puig (1993): *Àlgebra Lineal. Problemes resolts i comentats*, Col·lecció Aula Pràctica, Barcelona, Edicions UPC.

2. BENÍTEZ LÓPEZ, J. (1996): *Breve historia del álgebra matricial*, UPV.

3. BOYER, C.B. (1996): *Historia de la matemàtica*, Madrid, Alianza Editorial.

4. BOURBAKI, N. (1976): *Elementos de la historia de las matemáticas*, Madrid, Alianza Editorial.

5. CARBÓ, R. y J.A. Hernández (1983): *Introducción a la teoría de matrices*, Madrid, Alhambra.

6. CASTELLET, M. e I. Llerena (1988): *Àlgebra lineal i geometria*, Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona.

7. DANIEL, J.W. y B. Noble (1989): *Álgebra Lineal Aplicada*, New Jersey, Prentice-Hall.

8. DE BURGOS, J. (1993): *Álgebra lineal*, New York, McGraw Hill.

9. DOMÍNGUEZ GARCÍA, J.L. y M.I. García Planas (2013): *Introducción a la teoría de matrices positivas*, Barcelona, Aplicaciones. Iniciativa Digital Politècnica.

10. GARCÍA PLANAS, M.I. (2000): *Álgebra Lineal. Problemas resueltos*, Barcelona, Edicions UPC.

11. GARCÍA, M.I. y S. Tarragona (2005): *Sistemas lineales discretos. Teoría y problemas*, Barcelona, Editado por las autoras.

12. HERNÁNDEZ, E. (1994): *Álgebra y geometría*, Madrid, Addison Wesley, UAM.

13. KLINE, M. (2002): *El pensamiento matemático: de la antigüedad a nuestros días*, Madrid, Alianza Editorial.

14. LANG, S. (1976): *Álgebra Lineal.* Fondo Educativo Interamericano.

15. LAY, D.C. (1994): *Linear Algebra and its Applications.*, Madrid, Addison-Wesley.

16. LUZARDO, D. y A.J. Peña (2006): *Historia del Álgebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX.* Divulgaciones Matemáticas Vol. 14 No. 2, pp. 153-170.

17. MANKIEWICZ, R. (2000): *Historia de las matemáticas*, Barcelona, Paidós.

18. REY PASTOR, J. y J. Babini (1997): *Historia de la matemática*, vol. I, Barcelona, Gedisa editorial.

19. REY PASTOR, J. y J. Babini (1997): *Historia de la matemática*, vol. II, Barcelona, Gedisa editorial.

20. STRANG, G.(1982): *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, Madrid, Addison-Wesley Iberoamericana.

21. TORREGROSA, J.R. y C. Jordan (1987): *Álgebra Lineal y sus aplicaciones. Teoría y problemas resueltos*, Colección Schaum's, New York, McGraw Hill.

22. XAMBÓ, S. (1977): *Álgebra Lineal y Geometrías Lineales*, Barcelona, Editorial Eunibar.