Lezione 6

I circuiti dinamici

Lezioni di ***Elettrotecnica*** *per studenti di* ***Ingegneria Gestionale***

ideate e scritte da

Lorenza Corti

in collaborazione con **Vincenzo Paolo Loschiavo**

Sommario

1 Dal sistema di equazioni circuitali alle equazioni di stato

Abbiamo visto nella Lezione 3 che l'insieme delle equazioni d'interconnessione, unite alle equazioni caratteristiche, costituisce il ***sistema di equazioni circuitali*** che abbiamo scritto nella (3.35). Questo è un sistema di 2l equazioni algebrico-differenziale lineare (se tutti i bipoli della rete sono lineari) in 2l incognite: le correnti e le tensioni di lato. Riscriviamolo esplicitando le relazioni caratteristiche dei vari tipi di bipoli:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_\mathrm{r}\boldsymbol{i}(t)=0 & n-1 \ \text{ equazioni} \\ \mathbf{B}_\mathrm{f}\boldsymbol{v}(t)=0 & l-(n-1) \ \text{ equazioni} \\ v_k(t)=\mathrm{R}_\mathrm{k} i_k(t) & k=1,\dots n_\mathrm{R} \\ i_i(t)=\mathrm{C}_i \dfrac{dv_i(t)}{dt} & i=1,\dots n_C \\ v_j(t)=\mathrm{L}_j \dfrac{di_j(t)}{dt} & j=1,\dots n_L \\ v_n(t)=\mathrm{e}_n(t) & n=1,\dots n_e \\ i_m(t)=\mathrm{j}_m(t) & m=1,\dots n_j \end{cases} \tag{6.1}$$

con $t>t_0$, dove t_0 è l'istante iniziale in cui si analizza il circuito. Si osservi che abbiamo utilizzato la formulazione (3.30) anziché la (3.29) per la LKT.

Per prima cosa occupiamoci di semplificare il sistema riducendolo ad un altro in cui compaiono solo alcune delle incognite. Queste saranno le ***variabili di stato***, cioè le tensioni sui condensatori e le correnti negli induttori. La conoscenza di tali variabili, insieme ai generatori indipendenti (che sono, però, dei termini noti), permette di rappresentare in ogni istante lo stato del sistema ossia ci consente di risalire a tutte le altre grandezze del circuito.

Il sistema ridotto in cui compaiono solo le variabili di stato viene detto ***sistema fondamentale***.

Per eliminazioni successive, di tutte le altre grandezze che non siano le variabili di stato, si giunge al sistema di n_C + n_L equazioni differenziali del primo ordine, aventi come incognite le n_C tensioni sui condensatori v_i e le n_L correnti negli induttori i_j:

$$\left\{ F_k\left(i_j(t), v_i(t), \frac{di_j(t)}{dt}, \frac{dv_i(t)}{dt}, \mathrm{e}_n(t), \mathrm{j}_m(t) \right) = 0\,,\quad t > t_0 \right. \tag{6.2}$$

dove $k = 1,...,n_C + n_L$, $i = 1,...n_C$, $j = 1,...n_L$, $n = 1,...n_e$ e $m = 1,...n_j$.

Nel sistema (6.2) compare il "funzionale" F_k che rappresenta in modo sintetico un operatore che mette in relazione le grandezze $i_j(t), v_i(t), \mathrm{e}_n(t), \mathrm{j}_m(t)$, le quali possono comparire anche sotto segno di derivata.

Una volta risolto il sistema (6.2) e trovate tutte le variabili di stato, tutte le altre grandezze possono essere ricavate da queste.

Nelle prossime lezioni impareremo come trovare il sistema (6.1) e da questo il sistema (6.2) per circuiti del primo e secondo ordine, cioè per sistemi in cui vi sono rispettivamente una o due variabili di stato.

Ora facciamo in modo che nel sistema (6.2) siano esplicitate le derivate prime al primo membro delle equazioni moltiplicate per i coefficienti relativi L o C, ossia esplicitiamo le relazioni caratteristiche dei bipoli dinamici. Essendo il sistema lineare e considerando le derivate come incognite possiamo riscrivere il sistema senza difficoltà. Con un metodo noto per i sistemi algebrici, le $n_C + n_L$ derivate prime delle variabili di stato si esprimono in funzione degli altri termini posti al secondo membro. Si ottiene:

$$\begin{cases} \mathrm{L}_j \dfrac{di_j(t)}{dt} = r_i\left(i_j(t), v_i(t), \mathrm{e}_n(t), \mathrm{j}_m(t)\right) & j = 1,...n_L \\ \mathrm{C}_i \dfrac{dv_i(t)}{dt} = g_j\left(i_j(t), v_i(t), \mathrm{e}_n(t), \mathrm{j}_m(t)\right) & i = 1,...n_C \end{cases} \tag{6.3}$$

con $t > t_0$.

Si può dimostrare che il sistema (6.3) può essere riscritto in forma matriciale nel modo seguente:

$$\mathbf{D}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = -\mathbf{H}\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{g}(t) \quad t>t_0, \tag{6.4}$$

dove $\boldsymbol{x}(t) = \left(i_1, i_2, ... i_{n_L}, v_1, v_2, ... v_{n_C}\right)^T$ è il vettore delle variabili di stato. La matrice **D** sarà una matrice diagonale i cui elementi sulla diagonale saranno le ***capacità*** e le ***induttanze*** relative ai bipoli dinamici presenti nel circuito:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{n_L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{n_C} \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

Mentre la matrice **H** conterrà ***resistenze*** e/o ***conduttanze*** equivalenti e/o coefficienti adimensionali dipendenti dai resistori presenti nel circuito.

Infine, il vettore $\mathbf{g}(t)$ è un vettore di termini noti che contiene le tensioni e le correnti dei generatori indipendenti $e_n(t)$ e $j_m(t)$.

Il sistema (6.3), o (6.4) nella sua forma matriciale, è costituito dalle ***equazioni di stato*** del circuito.

Prima di addentrarci nella soluzione del problema, sottolineiamo alcune proprietà delle matrici **D** e **H** che ci guideranno nella risoluzione dei circuiti che incontreremo nel corso.

Se il ***circuito*** è ***dissipativo***[1], allora gli elementi di **D** sono tutti positivi e inoltre relativamente alla matrice **H** si ha che gli elementi sulla diagonale sono ≥ 0;

Infine, osserviamo che il segno meno presente davanti alla matrice **H** nella (6.4) è un modo di rappresentare il sistema di equazioni (6.3): si sceglie di evidenziare il segno negativo e di avere gli elementi sulla diagonale sempre positivi.

---

[1] Un circuito si dice dissipativo se nell'evoluzione libera (vedi § 4.4.4) l'energia immagazzinata negli elementi dinamici tende, durante l'evoluzione libera, asintoticamente a zero per $t \to \infty$.

Questa è la teoria generale per circuiti lineari dinamici di ordine qualsiasi. Nel nostro corso studieremo solo circuiti del primo e del secondo ordine, ossia circuiti in cui vi sono, rispettivamente, un elemento dinamico e due elementi dinamici.

1.1 L'algoritmo per la scrittura delle equazioni di stato*[2]

In questa sezione vediamo un algoritmo da utilizzare come guida alla scrittura delle equazioni di stato per circuiti del I e del II ordine (rispettivamente una e due variabili di stato). La procedura che daremo nel seguito non è, ovviamente, l'unica percorribile.

Ecco l'algoritmo:

1. Numerare i nodi e i lati in modo arbitrario.
2. Dare i versi a tutte le correnti presenti nel circuito in modo arbitrario.
3. Dare i versi a tutte le tensioni presenti nel circuito in modo arbitrario (ma cercando di sfruttare al meglio le conoscenze ormai acquisite relativamente alle convenzioni ed alla loro convenienza sulle base della natura dei diversi bipoli).
4. Indicare le tensioni e le correnti di lato con il pedice relativo al lato a cui afferiscono.
5. Scegliere un nodo da escludere in modo arbitrario.
6. Individuare le maglie fondamentali e orientare il verso di percorrenza in senso orario in modo arbitrario.
7. Scrivere le $n-1$ equazioni della LKC considerando positive le correnti entranti nei nodi e negative le altre.
8. Scrivere le $l-(n-1)$ equazioni della LKT considerando positive le tensioni concordi con il verso di percorrenza della maglia e negative le altre.
9. Scrivere le l relazioni caratteristiche.
10. Individuare quali sono le variabili di stato.

[2] Ricordiamo che con l'asterisco sono indicati i paragrafi non necessari alla preparazione dell'esame.

11. Individuare quali sono tutte le altre variabili (non di stato) da eliminare nel sistema di equazioni circuitali.
12. Sostituire le relazioni caratteristiche nelle equazioni della LKC e LKT. In particolare, sostituire le tensioni per i resistori, le tensioni per gli induttori, le correnti per i condensatori, le tensioni per i generatori ideali di tensione e le correnti per i generatori ideali di corrente.
13. Si ottiene un sistema di l equazioni da cui dobbiamo eliminare tutte le correnti dei resistori, le tensioni dei generatori ideali di corrente e le correnti dei generatori ideali di tensione.
14. Si ottiene il sistema fondamentale.
15. Abbiamo ottenuto le equazioni cercate che però probabilmente non saranno nella forma data dalla equazione (6.3) (o, in forma matriciale, (6.4)). Basta fare qualche semplificazione nelle equazioni. Per circuiti del I ordine avremo trovato una unica equazione e quindi il gioco è fatto. Nei circuiti del II ordine le equazioni saranno due e potremmo incontrare un problema. Le derivate delle variabili di stato non compaiono unicamente rispettivamente in una delle due equazioni; in questo caso basta fare una semplice sostituzione!

1.2 I circuiti mal posti

Come abbiamo sottolineato nel § 1.4.1 della Lezione 2, i generatori ideali sono un modello idealizzato dei generatori fisicamente realizzabili. Un generatore di tensione avrà sempre, seppur molto piccola, una resistenza in serie. Analogamente un generatore di corrente avrà sempre una piccola resistenza in parallelo. Pertanto, quando usiamo i generatori ideali conviene sempre considerare una resistenza serie o parallelo rispettivamente per i generatori di tensione o corrente. Se così non facessimo dovremmo stare attenti ad eventuali "patologie" di funzionamento rilevate nel circuito. Può accadere, infatti, che il modello circuitale, in cui ho considerato come bipoli anche i generatori ideali, si imbatta in qualche situazione critica in cui vi sono delle "incompatibilità". Da un punto di vista matematico accade che, scrivendo le equazioni del sistema circuitale, ci imbattiamo in un problema "mal posto".

Vediamo, con degli esempi, di chiarire il concetto.

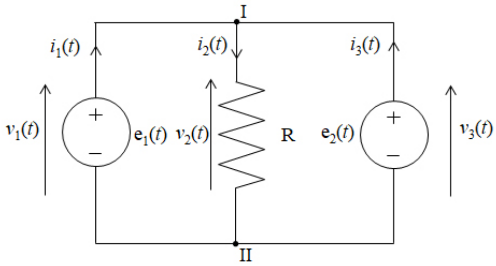


Fig. 6.1 – Esempio di circuito con una patologia.

Per il circuito di Fig. 6.1 scriviamo le equazioni:

$$\begin{cases} v_1(t) = v_2(t) \\ v_1(t) = \mathrm{e}_1(t) \\ v_2(t) = \mathrm{e}_2(t) \end{cases} \Rightarrow \mathrm{e}_1(t) = \mathrm{e}_2(t)\,! \tag{6.6}$$

Il sistema (6.6) risulta essere un problema mal posto, in quanto non ammette soluzione se i due generatori non erogano la stessa tensione. Abbiamo modellato male il circuito fisico in quanto abbiamo "trascurato" le resistenze in serie ai generatori di tensione ideali che non possono essere trascurate in questo caso. Ho messo in parallelo due bipoli che impongono entrambi una data tensione e questo non è accettabile. Quanto trovato è in accordo con quanto abbiamo visto nel §6 della Lezione 4.

Analoga patologia può essere osservata nel circuito di Fig. 6.2, duale rispetto al caso precedente.

$$\begin{cases} \mathrm{j}_1(t) = \mathrm{j}_2(t) \\ i_1(t) = \mathrm{j}_1(t) \\ i_2(t) = \mathrm{j}_2(t) \end{cases} \Rightarrow \mathrm{j}_1 = \mathrm{j}_2 \tag{6.7}$$

In questo caso l'incompatibilità è dovuta ai generatori di corrente in serie i quali impongono ognuno la propria corrente. Anche in questo caso ritroviamo quanto detto nel § 6 della Lezione 4.

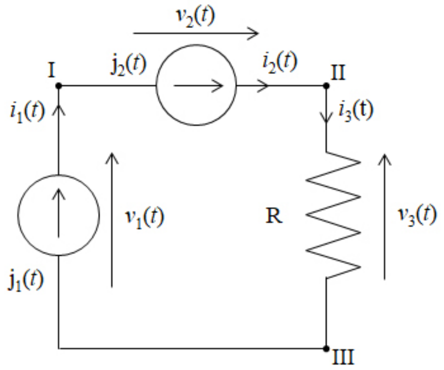


Fig. 6.2 – Esempio di circuito con una patologia.

In generale, per evitare di imbattersi in situazioni patologiche, non bisogna considerare generatori di tensione in parallelo o generatori di corrente in serie. Questi due casi non sono gli unici esempi in cui il nostro modello "va in crisi". Vedremo, quando risolveremo circuiti dinamici, che possono nascere delle situazioni critiche anche tra generatori ideali e bipoli dinamici.

1.3 Le variabili di stato

In questo paragrafo mostreremo che le variabili di stato devono essere funzioni continue.

Vediamo perché. Consideriamo la potenza assorbita da un condensatore

$$\mathrm{p}(t)=v(t)i(t)=v(t)\mathrm{C}\frac{dv(t)}{dt}=\frac{1}{2}\mathrm{C}\frac{dv^2(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathrm{C}v^2(t)\right)=\frac{d}{dt}\mathrm{w_C}(t), \qquad (6.8)$$

dove $\mathrm{w_C}(t)$ è l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore nell'istante t.

Consideriamo ora la potenza assorbita dall'induttore:

$$\mathrm{p}(t)=v(t)i(t)=\mathrm{L}\frac{di(t)}{dt}i(t)=\frac{1}{2}\mathrm{L}\frac{di^2(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathrm{L}i^2(t)\right)=\frac{d}{dt}\mathrm{w_L}. \qquad (6.9)$$

dove $\mathrm{w_L}(t)$ è l'energia magnetica immagazzinata nell'induttore nell'istante t.

La potenza in gioco nei circuiti dissipativi deve necessariamente essere limitata. In particolare, la potenza assorbita da un condensatore o da un induttore può assumere qualsiasi segno e qualsiasi valore purché limitato. Osservando le relazioni (6.8) e (6.9), ne ricaviamo che affinché questa condizione sia soddisfatta la tensione nel condensatore e la corrente nell'induttore devono essere funzioni continue. Ricordiamo infatti che affinché una funzione sia derivabile e abbia derivata limitata deve essere continua[3].

Riassumiamo quanto detto nella Tabella 6.1.

Circuito	**Variabili di stato**	**Corrente nei condensatori** **Tensione su induttori** **(Variabili non di stato)**	**Altre grandezze**
Senza generatori impulsivi	Continue	Eventualmente discontinue	Eventualmente discontinue

Tabella 6.1 – Schema riassuntivo delle proprietà di continuità delle grandezze in un circuito.

Vedi il § 3.6 per un'applicazione del concetto di continuità delle variabili di stato.

[3] In un circuito possiamo prevedere la possibilità di avere variabili di stato discontinue ammettendo di introdurre dei generatori ideali di tensione e corrente ***impulsivi***, generatori, cioè, capaci di generare in un istante rispettivamente tensione e corrente illimitata. Se ammettiamo l'esistenza di generatori impulsivi vuol dire che ammettiamo l'esistenza di potenze illimitate e dunque l'esistenza di discontinuità delle variabili di stato. Nella realtà non è possibile disporre di tali generatori, tuttavia tenerne conto ci agevolerebbe molto nella soluzione dei circuiti come si può scoprire in corsi di livello superiore.

2 L'equazione di stato dei circuiti

Abbiamo visto nella (6.4) che le equazioni di stato si possono scrivere in forma matriciale:

$$\mathbf{D}\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = -\mathbf{H}\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{g}(t) \qquad t>t_0 \qquad (6.10)$$

Le equazioni differenziali sono un particolare tipo di equazione in cui le incognite compaiono anche sotto l'operatore di derivata, fino a quelle di un certo ordine n. Il numero della derivata di ordine massimo rappresenta anche l'ordine dell'equazione differenziale. In questo corso risolveremo equazioni del I e del II ordine.

2.1 L'equazione di stato dei circuiti del I ordine

In questo paragrafo ci occuperemo di specificare il sistema (6.10) per un circuito del I ordine. In questo caso basta semplicemente sostituire al vettore $\boldsymbol{x}(t)$ una sola incognita x(t), alla matrice **H** un coefficiente h, alla matrice **D** il coefficiente d e al vettore **g**(t) la funzione nota g(t). Avremo:

$$\mathrm{d}\frac{dx(t)}{dt} = -\,\mathrm{h}x(t) + \mathrm{g}(t) \qquad t>t_0 \qquad (6.11)$$

La (6.11) rappresenta l'equazione di stato di un circuito dinamico del I ordine. Essa è un'equazione differenziale lineare ordinaria del I ordine a coefficienti costanti. t_0 rappresenta l'istante iniziale, $x(t)$ è la funzione incognita da determinare (corrente o tensione) e $\frac{dx(t)}{dt}$ è la sua derivata prima. La g(t) dipende dalla presenza di generatori nel circuito. Lo scalare d è uguale ad L o a C a seconda che nel circuito sia presente un induttore o un condensatore, mentre lo scalare h dipende dalle resistenze presenti nel circuito. Essendo il circuito di ordine uno, l'equazione di stato (6.11) coincide con l'equazione differenziale da risolvere per determinare la $x(t)$.

La (6.11) può essere riscritta anche nel seguente modo:

$$\frac{dx(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}x(t)=\mathrm{G}(t) \qquad t>t_0 \qquad (6.12)$$

dove:

$$\tau=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{h}} \qquad (6.13)$$

è detta ***costante di tempo*** del circuito del I ordine per ragioni che vedremo a breve e G(t) rappresenta il ***termine forzante*** dell'equazione differenziale.

Distinguiamo l'equazione differenziale (6.12) dalla equazione di stato (6.11), chiamandola ***equazione di stato esplicita***.

In generale, le soluzioni della (6.12) sono infinite. L'insieme di tutte queste possibili soluzioni viene definito ***integrale generale*** dell'equazione. Il fatto che l'equazione (6.12) assume una infinità di soluzioni dipende dal fatto che non contiene informazione su quale è lo stato del sistema nell'istante iniziale. Fra tutte le soluzioni possibili, dunque, noi dobbiamo scegliere quella coerente con lo stato in cui si trova il sistema nel momento iniziale, cioè con la ***condizione iniziale***.

Questo è argomento del § 3.

Gli esercizi utili alla determinazione delle equazioni di stato per circuiti del I ordine sono svolti nella Lezione 7.

2.1.1 La dimensione fisica dei coefficienti dell'equazione di stato

Quando troviamo le equazioni di stato per il circuito che intendiamo risolvere è buona abitudine fare un controllo sulle dimensioni fisiche di ogni singolo termine della equazione, ossia applicare la cosiddetta "analisi dimensionale". In questo modo possiamo controllare se abbiamo commesso qualche errore!

Consideriamo la (6.11). I casi possono essere due:

1) l'incognita è una tensione e i termini dell'equazione sono omogenei ad una corrente.

Pertanto:

- d è una capacità;
- h è una conduttanza equivalente;
- g(t) è la funzione (nota) con dimensioni di una corrente.

2) l'incognita è una corrente e i termini dell'equazione sono omogenei ad una tensione. Pertanto:

- d è una induttanza;
- h è una resistenza equivalente;
- g(t) è la funzione (nota) con dimensioni di una tensione.

Un'altra cosa molto importante è verificare sempre la correttezza dei segni dei coefficienti d ed h. Questi devono essere sempre positivi in quanto rappresentano rispettivamente una capacità o induttanza e una resistenza equivalente che sono valori sempre positivi.

2.2 Le equazioni di stato dei circuiti del II ordine*

La (6.10) per un circuito del II ordine diventa:

$$\begin{cases} d_1 \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -h_{11}x_1(t) - h_{12}x_2(t) + g_1(t) \\ d_2 \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -h_{21}x_1(t) - h_{22}x_2(t) + g_2(t) \end{cases} \qquad t>t_0 \qquad (6.14)$$

dove abbiamo posto

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{d}_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathrm{h}_{11} & \mathrm{h}_{12} \\ \mathrm{h}_{21} & \mathrm{h}_{22} \end{bmatrix} \qquad (6.15)$$

È chiaro che le variabili di stato $x_1(t)$ e $x_2(t)$ possono essere o una tensione e una corrente, se nel circuito abbiamo un condensatore e un induttore, oppure due tensioni (correnti) se abbiamo due condensatori (induttori). Nel primo caso parliamo di circuiti

RLC nel secondo caso di RC o RL del secondo ordine (o anche RCC o RLL). I parametri d_1 e d_2 saranno nei vari casi, rispettivamente, una capacità e una induttanza, due capacità o due induttanze.

Vediamo alcune proprietà delle matrici **D** e **H**. Se il ***circuito** è **dissipativo*** (nota 1 di p.6) allora gli elementi di **D** sono tutti positivi e inoltre, per quanto riguarda la matrice **H** si ha che:

- gli elementi sulla diagonale sono ≥ 0;
- gli elementi fuori diagonale, nel caso di circuiti RLL e RCC, sono, in modulo, minori degli elementi corrispondenti sulla diagonale; nel caso di circuiti RLC sono, in modulo, ≤ 1;
- la matrice è simmetrica nel caso di circuiti RLL e RCC mentre è antisimmetrica nel caso di circuito RLC.

Nel § 3.2 ci occuperemo di trovare la soluzione della (6.14).

3 La soluzione dei circuiti dinamici

In questo paragrafo, ci occuperemo di risolvere la (6.4).

Come detto precedentemente, le soluzioni della (6.4) sono infinite e l'insieme di tutte queste possibili soluzioni si definisce ***integrale generale*** dell'equazione. Per ottenere LA soluzione del problema, dobbiamo scegliere, fra tutte le soluzioni possibili, quella coerente con lo stato in cui si trova il sistema nel momento in cui cominciamo a studiarlo, cioè con la ***condizione iniziale***.

Per determinare la soluzione del sistema (6.4) è necessario conoscere il valore delle variabili di stato nell'istante iniziale t_0:

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \mathbf{X}_0 \tag{6.16}$$

che rappresenta il vettore delle ***condizioni iniziali*** del problema di equazioni (6.4)[4].

Sottolineiamo una cosa molto importante: le variabili di stato $\boldsymbol{x}(t)$ sono funzioni continue pertanto possiamo sempre considerare continui i suoi valori in un istante generico t, ed in particolare nell'istante iniziale t_0. Come vedremo in seguito e negli esercizi svolti nella Lezione 7, le altre grandezze non di stato potrebbero essere discontinue nell'istante iniziale t_0.

La condizione iniziale sulle variabili di stato contiene le informazioni necessarie della storia passata del sistema. È come se tutta la storia pregressa si fosse "condensata" nel vettore $\mathbf{X}_0$. Per poter conoscere in che stato si trova il sistema per ogni istante successivo a t_0 è necessario, conoscere lo stato in t_0.

Avendo introdotto la condizione iniziale (6.16), possiamo, utilizzando le equazioni di stato (6.4), scrivere il seguente ***problema alle condizioni iniziali*** o ***problema di Cauchy***:

[4] Quando le condizioni iniziali sono nulle si dice che il circuito si trova in uno ***stato di riposo***.

$$\begin{cases} \mathbf{D}\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = -\mathbf{H}\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{g}(t) \\ \boldsymbol{x}(t) = \mathbf{X}_0 \end{cases} \qquad t>t_0 \tag{6.17}$$

Che sappiamo dall'analisi matematica, ammettere un'unica soluzione, quella cercata!

Nei prossimi paragrafi impareremo a risolvere il problema di Cauchy (6.17) per circuiti del I ordine e, facoltativamente, per circuiti del II ordine.

3.1 L'approccio sistemico ai circuiti

Un circuito elettrico può essere visto come un sistema ingresso-stato-uscita. Un sistema ingresso-stato-uscita è caratterizzato da grandezze di ***ingresso, variabili di stato*** e ***grandezze di uscita***.

Nel caso dei circuiti, le grandezze di ingresso sono le tensioni dei generatori di tensione e le correnti dei generatori di corrente presenti nel circuito. Le grandezze di uscita possono essere qualsiasi grandezza presente nel circuito, comprese le variabili di stato. Le variabili di stato, che sono le tensioni sui condensatori e le correnti negli induttori, tra tutte le grandezze del circuito, hanno un ruolo "privilegiato" in quanto rappresentano la memoria del circuito. La conoscenza di tali variabili ci consente di risalire a tutte le altre grandezze presenti nel sistema. Per trovare le grandezze di uscita è necessario conoscere le condizioni iniziali delle variabili di stato.

Osserviamo che una grandezza di uscita può coincidere con una variabile di stato, anzi possiamo sottolineare che il più delle volte ci troviamo proprio in questo caso.

Consideriamo il sistema rappresentato in Fig. 6.3 in cui abbiamo schematizzato un circuito supposto lineare.

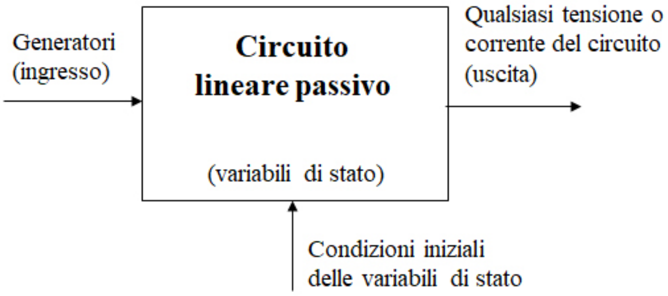


Fig. 6.3 – Sistema ingresso – stato - uscita.

In questo modello occorrerà specificare qual è la funzione che consente di produrre l'uscita a partire dall'ingresso. Poiché stiamo supponendo di lavorare con circuiti dinamici, questa funzione conterrà delle derivate, come abbiamo visto nel problema (6.17).

Abbiamo introdotto questo modello perché, come vedremo già nel prossimo paragrafo, ci sarà utile.

3.2 La soluzione dei circuiti dinamici del I ordine

Per la formulazione del problema di Cauchy per circuiti del I ordine possiamo usare l'equazione di stato (6.11), oppure, la più compatta equazione di stato esplicita (6.12), e quindi scrivere:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} + \dfrac{1}{\tau} x(t) = \mathrm{G}(t) \\ x(t_0) = \mathrm{X}_0 \end{cases} \qquad \text{per } t > t_0 \qquad (6.18)$$

dove τ è definita nella (6.13).

Ora dobbiamo determinare la soluzione del problema (6.18). Si procede in questo modo: si determina prima l'***integrale generale*** dell'equazione e poi, imponendo che questa verifichi la condizione iniziale, si determina la soluzione del problema.

Per vedere come determinare l'integrale generale della (6.18), cominciamo con il considerare l'equazione differenziale omogenea:

$$\frac{dx_{\mathrm{o}}(\mathrm{k},t)}{dt}+\frac{1}{\tau}x_{\mathrm{o}}(\mathrm{k},t)=0 \quad \text{per } t>t_0 \tag{6.19}$$

Questa è un'equazione differenziale lineare ordinaria del I ordine omogenea a coefficienti costanti ed è l'equazione presente nel problema (6.18) priva del termine forzante. La (6.19) descrive il funzionamento generale del circuito quando sono stati spenti i generatori[5].

La soluzione della (6.19) l'abbiamo indicata con $x_{\mathrm{o}}(\mathrm{k},t)$ mettendo in evidenza che:

- con il pedice "o" si vuole indicare che l'equazione è omogenea (generatori spenti);
- con il parametro "k" si vuole indicare che l'equazione differenziale (6.19) non è associata ad alcuna condizione iniziale e pertanto ammetterà come soluzione una ***famiglia di soluzioni*** corrispondente alla variabilità del parametro k.

La funzione $x_{\mathrm{o}}(\mathrm{k},t)$ la chiamiamo ***integrale generale dell'equazione omogenea associata.***

Si può dimostrare, dall'analisi matematica, che l'integrale generale dell'equazione differenziale presente nel problema di Cauchy (6.18) sarà la somma della ***integrale generale dell'omogenea associata*** (6.19) e del cosiddetto ***integrale particolare*** $x_{\mathrm{p}}(t)$ che, come vedremo meglio in seguito, tiene conto del fatto che nel circuito vi sono i generatori. Poniamo quindi:

$$\underbrace{x(\mathrm{k},t)}_{\substack{\textit{integrale}\\ \textit{generale}}}=\underbrace{x_o(\mathrm{k},t)}_{\substack{\textit{integrale generale}\\ \textit{dell'omogenea}\\ \textit{associata}}}+\underbrace{x_{\mathrm{p}}(t)}_{\substack{\textit{integrale}\\ \textit{particolare}}} \quad \text{per } t>t_0 \tag{6.20}$$

La soluzione generale della equazione differenziale presente nel problema di Cauchy (6.18), dipende dal parametro k poiché l'integrale generale rappresenta una "famiglia"

[5] Ricordiamo che un generatore di tensione spento equivale ad un corto circuito mentre un generatore di corrente spento equivale ad un circuito aperto.

di soluzioni. Per ottenere LA soluzione del problema (6.18) dobbiamo imporre la condizione iniziale richiesta X_0.

Per meglio comprendere quanto appena affermato puoi consultare l'Appendice 1.

L'integrale particolare $x_p(t)$ non dipende dal parametro k ed è una funzione che dipende unicamente dal tempo, per tale motivo spesso l'integrale particolare viene detto ***soluzione particolare***. Per determinare la soluzione particolare $x_p(t)$ ci sono metodi diversi a seconda della forma che ha il termine noto $G(t)$. Nello studio dell'analisi abbiamo imparato che la soluzione particolare $x_p(t)$ è ***isomorfa*** al generatore. Con questo intendiamo che il tipo di funzione matematica che descrive la soluzione particolare è uguale a quella del generatore presente nel circuito. Nel seguito ci occuperemo del calcolo di questa funzione, per il momento poniamo l'attenzione sull'integrale generale dell'omogenea associata.

La soluzione dell'equazione (6.19) sarà una funzione del tipo:

$$x_o(k,t) = k\,e^{\lambda(t-t_0)} \qquad \text{per } t>t_0 \tag{6.21}$$

con k costante arbitraria e con λ soluzione del cosiddetto ***polinomio caratteristico***[6]:

$$\lambda + \frac{1}{\tau} = 0 \tag{6.22}$$

La soluzione λ del polinomio caratteristico (6.22) è detta ***frequenza naturale*** del circuito e vale, nel caso dei circuiti del I ordine, grazie alla (6.13):

$$\lambda = -\frac{1}{\tau} = -\frac{h}{d} \tag{6.23}$$

Quindi la frequenza naturale è l'opposto dell'inverso della costante di tempo τ.

[6] Il polinomio caratteristico è stato studiato nei corsi di analisi nell'ambito della soluzione del problema di Cauchy.

La costante k nella (6.21), rappresenta il parametro che descrive la famiglia di soluzioni. Trovare "la soluzione" vuol dire determinare un particolare valore di k.

Sostituendo la (6.23) nella (6.21) otteniamo la soluzione della (6.19), che vale:

$$x_o(\mathrm{k},t) = \mathrm{k}e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} \qquad \text{per } t>t_0 \tag{6.24}$$

Analizzando la (6.24), notiamo che la funzione esponenziale ha esponente sempre negativo ricordando che il rapporto h/d, e ovviamente la costante di tempo τ, è sempre positivo. La funzione $x_0(\mathrm{k},t)$, che in $t=t_0$ vale k, tende ad estinguersi con legge esponenziale con una costante di tempo τ che rappresenta la velocità con la quale la funzione tende a zero (questo spiega il motivo della denominazione adottata per τ).

Sostituendo la (6.24) nella (6.20) si ha:

$$x(\mathrm{k},t) = \mathrm{k}\,e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} + x_p(t) \qquad \text{per } t>t_0 \tag{6.25}$$

che rappresenta l'***integrale generale*** del problema (6.18).

Per determinare la soluzione del problema dobbiamo determinare la costante k nella (6.25) imponendo le condizioni iniziali. In particolare, sostituendo in tale equazione l'istante iniziale t_0 al generico istante di tempo t, avremo:

$$x(\mathrm{k},t_0) = \mathrm{k}\,e^{-\frac{1}{\tau}(t_0-t_0)} + x_p(t_0) = \mathrm{k}e^0 + x_p(t_0) = X_0 \tag{6.26}$$

da cui:

$$\mathrm{k} = X_0 - x_p(t_0) \tag{6.27}$$

Sostituendo la (6.27) nella (6.20) otteniamo:

$$x(t) = \left(X_0 - x_p(t_0)\right) e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} + x_p(t) \quad \text{per } t > t_0 \tag{6.28}$$

che è la soluzione del problema di Cauchy (6.18).

In particolare, osserviamo che, una volta che abbiamo imposto le condizioni iniziali assegnando un valore a k, l'integrale generale dell'omogenea associata è diventata la ***soluzione dell'omogenea associata***:

$$x_o(t) = \left(X_0 - x_p(t_0)\right) e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} \quad \text{per } t > t_0 \tag{6.29}$$

La soluzione del problema di Cauchy (6.18), ossia la (6.28), è dunque la somma della soluzione dell'omogenea associata (6.29) e della soluzione particolare $x_p(t)$.

La soluzione (6.28) può essere vista in due modi differenti. Un primo modo:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{\left(X_0 - x_p(t_0)\right) e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)}}_{\textit{termine transitorio}} + \underbrace{x_p(t)}_{\textit{termine di regime}}} \quad \text{per } t > t_0 \tag{6.30}$$

dove il termine transitorio coincide con la soluzione dell'omogenea associata e il termine di regime coincide con la soluzione particolare.

E poi un secondo modo:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{X_0 e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)}}_{\textit{evoluzione libera}} + \underbrace{x_p(t) - x_p(t_0) e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)}}_{\textit{evoluzione forzata}}} \quad \text{per } t > t_0 \tag{6.31}$$

Pertanto, possiamo affermare che la soluzione del problema di Cauchy può essere concepita in due modi differenti:

1) Come somma del ***termine transitorio*** e del ***termine di regime***.
2) Come somma dell'***evoluzione libera*** e dell'***evoluzione forzata***.

Utilizzando il modello ingresso-stato-uscita rappresentato nella Fig. 6.3, abbiamo rappresentato nelle Fig. 6.4 e Fig. 6.5, rispettivamente, il modo (1) e il modo (2).

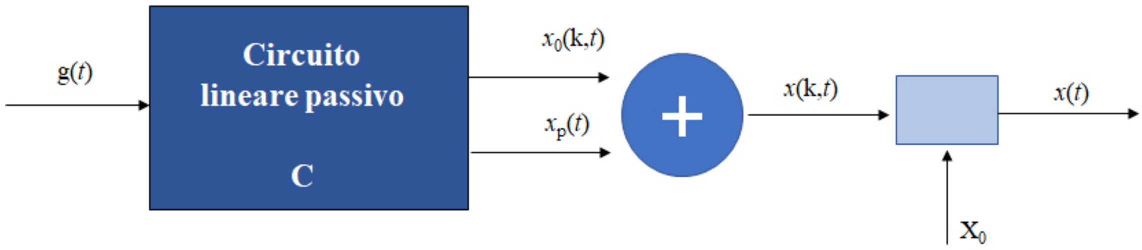


Fig. 6.4 – Soluzione del problema di Cauchy (6.18) con termine transitorio e di regime.

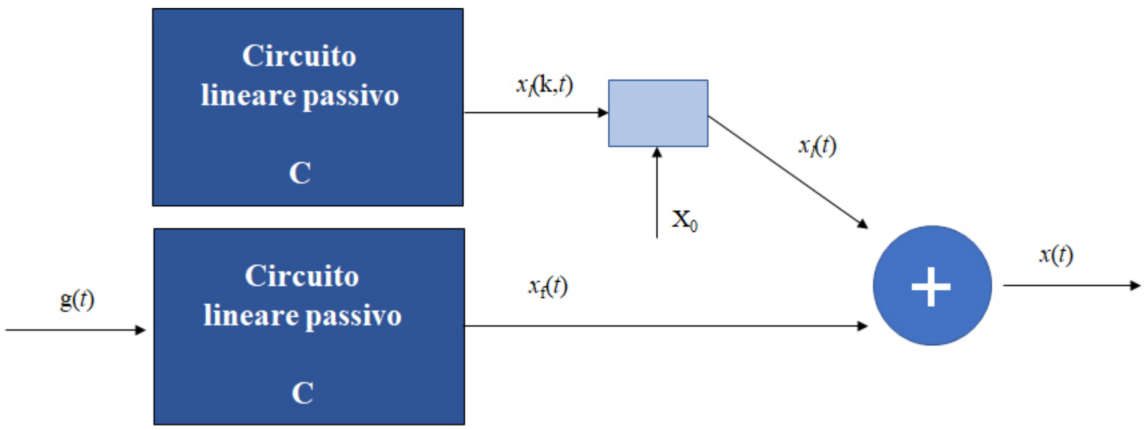


Fig. 6.5 – Soluzione del problema di Cauchy (6.18) con evoluzione libera e forzata.

Il modo della Fig. 6.4 di concepire la soluzione è utilizzato quando nel circuito abbiamo generatori periodici (in particolare costanti o sinusoidali), il modo della Fig. 6.5 si preferisce utilizzarlo nel resto dei casi.

Nei prossimi due paragrafi daremo un significato ai termini introdotti nella (6.30) e nella (6.31).

3.2.1 Il termine transitorio e il termine di regime

Le considerazioni che faremo qui di seguito si riferiscono alla soluzione di un circuito dinamico scritta nella forma (6.30).

Il ***termine transitorio*** della soluzione del problema di Cauchy, $x_o(t)$, è un termine che dipende dalle condizioni iniziali e dal valore che assume la soluzione particolare $x_p(t)$ in

$t=t_0$ (vedi la (6.29)). Questo termine rappresenta la dinamica che conduce il sistema da un certo stato iniziale ad un certo stato finale (il regime). Questa dinamica transitoria si estingue all'infinito. La rapidità con la quale si estingue dipende dai parametri del circuito attraverso la costante di tempo τ.

Il ***termine di regime (soluzione di regime)*** della soluzione del problema di Cauchy, $x_p(t)$, rappresenta la dinamica del sistema quando il transitorio si è estinto, quando cioè il circuito ha "dimenticato" il suo stato iniziale. La forma matematica di questo termine dipende dal particolare tipo di generatori presenti nel circuito stesso. Come abbiamo già detto nell'introduzione di questo paragrafo, la soluzione particolare e quindi la soluzione di regime è isomorfa al generatore. In altre parole, la funzione che descrive la soluzione di regime è uguale a quella del generatore e quindi:

- se i generatori presenti nel circuito sono costanti, la $x_p(t)$ è costante ed il circuito tende ad un ***regime stazionario*** per $t \rightarrow \infty$.
- se i generatori presenti nel circuito sono sinusoidali (e iso-frequenziali), la $x_p(t)$ è una funzione sinusoidale iso-frequenziale ai generatori presenti ed il circuito raggiunge un ***regime sinusoidale*** per $t \rightarrow \infty$.

In questo corso studieremo principalmente circuiti dinamici con generatori costanti e quindi eventualmente a regime stazionario. Per quanto riguarda i circuiti dinamici alimentati da generatori sinusoidali daremo solo un breve cenno nel § 7 della Lezione 7. In generale, se i generatori sono di tipo periodico allora il termine di regime avrà la stessa forma periodica del generatore. In particolare, si può dimostrare che se tutti i generatori presenti nel circuito sono generatori costanti allora il termine di regime è anch'esso costante e che se i generatori presenti nel circuito sono generatori sinusoidali e iso-frequenziali (erogano sinusoidi alla stessa frequenza) il termine di regime è costituito da una funzione sinusoidale. Come abbiamo detto alla fine del precedente paragrafo, nel caso di regime periodico conviene utilizzare il modo della Fig. 6.4, mentre in tutti gli altri casi, cioè quelli con generatori non periodici, sarà più conveniente utilizzare l'evoluzione forzata (come in Fig. 6.5)[7].

---

[7] In questo caso si utilizzano degli strumenti matematici quali *l'integrale di convoluzione* o *la trasformata di Laplace* che si rivelano di grandissima efficacia.

3.2.2 L'evoluzione libera e l'evoluzione forzata

A differenza del sottoparagrafo precedente, quanto diremo qui di seguito si riferisce alla soluzione di un circuito dinamico scritta nella forma (6.31).

L'***evoluzione libera*** è parte della soluzione del problema (6.18) che corrisponde ad un circuito nel quale i generatori sono spenti. In altre parole, è la soluzione del seguente problema:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_l(t)}{dt} + \dfrac{1}{\tau} x_l(t) = 0 \\ x(t_0) = \mathrm{X}_0 \end{cases} \tag{6.32}$$

Nella (6.32) i generatori sono spenti, cioè G(t)=0. L'integrale generale del problema (6.32) è:

$$x_l(t) = \mathrm{k}_l \mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} \tag{6.33}$$

in accordo con la Fig. 6.5.

Per conoscere il valore di k_l dobbiamo imporre le condizioni iniziali. Possiamo scrivere:

$$x_l(t_0) = \mathrm{k}_l\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}(t_0-t_0)} = \mathrm{X}_0 \tag{6.34}$$

e quindi:

$$\mathrm{k}_l = \mathrm{X}_0 \tag{6.35}$$

e infine:

$$x_l(t) = \underbrace{\mathrm{X}_0\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)}}_{\substack{evoluzione \\ libera}} \tag{6.36}$$

Si osservi che la (6.36) è analoga alla (6.24), avendo la stessa forma matematica. Tuttavia, le due funzioni rappresentano cose diverse: la (6.24) è un termine transitorio mentre la (6.36) è un'evoluzione libera. Per questo motivo nella (6.24) abbiamo usato k e nella (6.33) abbiamo usato k_l. Le due costanti sono diverse in quanto k la troviamo con la (6.27), se stiamo risolvendo il problema (6.18) con termine transitorio e di regime, mentre la k_l è quella della (6.35) e risulta diversa dalla k.

In definitiva, si ha che la soluzione del problema (6.32) è dato dalla (6.36) che rappresenta *l'**evoluzione libera*** del sistema ed è così denominata perché si impongono al sistema non forzato condizioni iniziali non nulle e poi lo si lascia libero ("libera") di evolvere ("evoluzione"). Se le condizioni iniziali sono nulle, il sistema si trova a ***riposo*** e l'evoluzione libera non avrà lungo.

Evoluzione forzata è parte della soluzione del problema (6.18) che corrisponde a condizioni iniziali nulle. In altre parole, è la soluzione del seguente problema:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_f(t)}{dt} + \dfrac{1}{\tau} x_f(t) = \mathrm{G}(t) \\ x(t_0) = 0 \end{cases} \tag{6.37}$$

La soluzione del problema (6.37) si può determinare con vari metodi. La scelta del metodo dipende dalla natura dei generatori e quindi della funzione G(t). In generale, dalla (6.31) e dalla (6.37) possiamo scrivere:

$$\boxed{x_f(t) = -x_\mathrm{p}(t_0)\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} + x_\mathrm{p}(t)} \text{ per } t>t_0 \tag{6.38}$$

Quindi anche per il calcolo della evoluzione forzata abbiamo bisogno di determinare la $x_\mathrm{p}(t)$. Questa sarà una funzione costante se i generatori sono costanti, sinusoidale se i generatori sono sinusoidali. In generale avrà, quindi, la stessa struttura matematica dei generatori presenti e quindi della funzione G(t).

In questo corso ci focalizzeremo sulla soluzione di un circuito dinamico nella forma (6.30) e impareremo a risolvere circuiti dinamici del I ordine determinando il termine transitorio ed il termine di regime.

3.2.3 La costante di tempo τ

In questo paragrafo daremo una interpretazione della costante di tempo τ e impareremo un metodo per la sua determinazione lavorando direttamente sul circuito e utilizzando gli strumenti acquisiti nelle Lezioni 4 e 5.

Cosa rappresenta la costante di tempo τ di un circuito dinamico del I ordine data dalla (6.13)?

Rappresenta la velocità con cui si estingue il transitorio presente nella soluzione del problema (6.18) e cioè la (6.29) che riscriviamo:

$$x_{\mathrm{o}}(t) = \left(\mathrm{X}_0 - x_{\mathrm{p}}(t_0)\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} \quad \text{per } t > t_0 \tag{6.39}$$

Oppure rappresenta la velocità con cui si estingue l'evoluzione libera di un circuito passivo:

$$x_l(t) = \mathrm{X}_0\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} \tag{6.40}$$

Nelle (6.39) e (6.40) la X_0 è la condizione iniziale della variabile di stato $x(t)$.

Come si può dedurre dal fatto che τ ha lo stesso significato sia nel caso di un transitorio che nel caso di un'evoluzione libera, la costante di tempo è un parametro del circuito che dipende unicamente dalla natura dei bipoli passivi attraverso i coefficienti R, L e C. Utilizzando un approccio ingresso-stato-uscita, potremmo dire che la costante di tempo rappresenta la velocità con cui il sistema passivo reagisce alla sollecitazione del forzamento dei generatori. Questa velocità dipende dall'identità del sistema che si sostanzia nei coefficienti R, L e C.

Nel caso di un circuito del I ordine la costante di tempo del transitorio τ, tenendo conto della (6.13) e del § 2.1.1, sarà pari a:

$$\tau = \frac{d}{h} = \frac{C}{G_{eq}} = R_{eq}\,C \tag{6.41}$$

se nel circuito è presente un condensatore o ad:

$$\tau = \frac{d}{h} = \frac{L}{R_{eq}} \tag{6.42}$$

se nel circuito è presente un induttore.

La R_{eq} rappresenta la resistenza equivalente vista dal componente dinamico quando si sono spenti i generatori. Questo ci sarà chiaro nel prossimo paragrafo.

3.2.4 Il circuito equivalente di un circuito dinamico del I ordine

In questo paragrafo vogliamo ricordare come un qualsiasi circuito dinamico del I ordine si può trasformare, in virtù di un principio di equivalenza, in uno più semplice grazie all'impiego del teorema del generatore equivalente descritto nella Lezione 5. Tale circuito sarà definito ***circuito equivalente del circuito dinamico***.

Ricorderemo come a partire da un circuito dinamico possiamo trovare un circuito ad esso equivalente come quelli di Fig. 6.6 cercando di generalizzare i risultati trovati nella Lezione 5. Due dei circuiti mostrati nella Fig. 6.6 li abbiamo già incontrati nella Lezione 5, in particolare:

- il circuito (b) nell'esercizio 1.1.1 della Lezione 5 – Fig. 5.18,
- il circuito (c) nell'esercizio 1.1.2 della Lezione 5 – Fig. 5.23.

Nella Fig. 6.6, compaiono la R_{eq}, la tensione V_0 e la corrente I_{cc} a cui tra poco daremo significato ricordando quanto studiato nella Lezione 5.

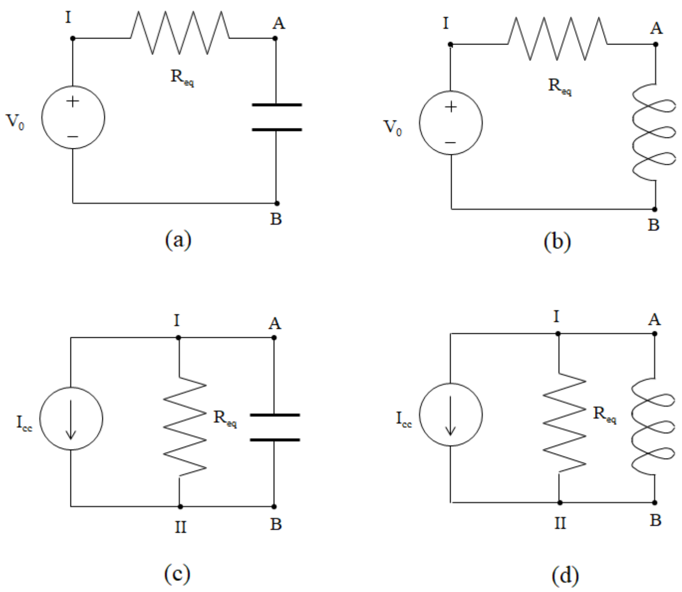


Fig. 6.6 – Semplici circuiti dinamici del I ordine con un condensatore o un induttore.

Ispirati dalla Fig. 5.1 della Lezione 5, consideriamo la Fig. 6.7. Abbiamo due circuiti dinamici rispettivamente con un condensatore (a) e con un induttore (b). E' facile convincersi che qualsiasi circuito dinamico lo possiamo concepire come quelli di Fig. 6.7: basta mettere in evidenza il bipolo dinamico così come fatto in figura. Possiamo aiutarci con una grafica opportuna magari ridisegnando il circuito dinamico con in evidenza sulla destra il bipolo dinamico e tutto il resto sulla parte sinistra.

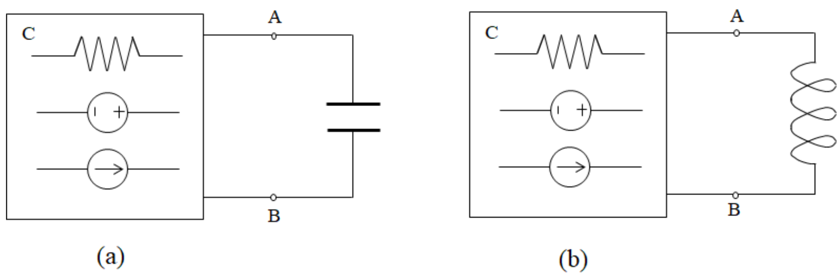


Fig. 6.7 – Circuito dinamico del I ordine.

Una volta concepito il circuito come in Fig. 6.7 è naturale applicare il teorema del generatore equivalente ed ottenere i circuiti di Fig. 6.6 dove:

- la R_{eq} è la resistenza equivalente vista dall'elemento dinamico quando il sotto-circuito C è reso passivo

- la V_0 è la tensione a vuoto ai morsetti A–B e la I_{cc} è la corrente di corto circuito tra i morsetti A–B.

Per un'applicazione di quanto detto si vedano gli esercizi 1.1.1 e 1.1.2 della Lezione 5.

3.2.5 Il grafico del termine transitorio e dell'evoluzione libera del problema di Cauchy

In questo paragrafo vogliamo ottenere il grafico del termine transitorio (6.29) che per semplicità riportiamo:

$$x_o(t) = \underbrace{\left(\mathrm{X}_0 - x_p(t_0)\right)e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)}}_{termine\ transitorio} \quad \text{per } t>t_0 \tag{6.43}$$

e il grafico dell'evoluzione libera (6.36), che per semplicità riportiamo:

$$x_l(t) = \underbrace{\mathrm{X}_0\, e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)}}_{\substack{evoluzione\\ libera}} \tag{6.44}$$

Osserviamo che entrambe le funzioni (6.43) e (6.44) sono di tipo esponenziale. L'andamento di tipo esponenziale è tipico di ogni transitorio ed evoluzione libera che esamineremo.

Per analizzare le proprietà di tali funzioni, consideriamo la generica funzione:

$$x(t) = \mathrm{C}_0 e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} \qquad t>t_0 \tag{6.45}$$

Analizziamo le caratteristiche della funzione esponenziale (6.45):

- in $t = t_0$ vale C_0 (X_0 nell'evoluzione libera e ($X_0–x_p(t_0)$) nel termine transitorio),
- l'esponente dell'esponenziale è sempre negativo in quanto t è sempre maggiore di t_0 e quindi la funzione tende a zero all'infinito,
- la velocità con cui tende a zero è data dal coefficiente τ (la costante di tempo).

Pertanto, il grafico della funzione (6.45) sarà quello rappresentato in Fig. 6.8 per $C_0>0$, e Fig. 6.9 per $C_0<0$.

Nel grafico abbiamo evidenziato graficamente la costante di tempo τ. Essa corrisponde al segmento limitato dagli estremi corrispondenti all'istante iniziale t_0 e all'istante in cui la tangente alla curva della funzione (6.45) in t_0 interseca l'asse delle ascisse. Per convincerci di quanto detto, calcoliamo la derivata della funzione (6.45)

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{C_0}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} \qquad t>t_0 \tag{6.46}$$

La derivata (6.46) in t_0^+ è pari a:

$$\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=t_0^+} = -\frac{C_0}{\tau} \tag{6.47}$$

e rappresenta la pendenza della retta rossa che è la retta tangente alla curva della funzione (6.45) nell'istante t_0^+. Osserviamo che, affinché la pendenza della retta abbia l'espressione (6.47), il segmento indicato in Fig. 6.8 e Fig. 6.9 con colore blu deve essere il coefficiente τ.

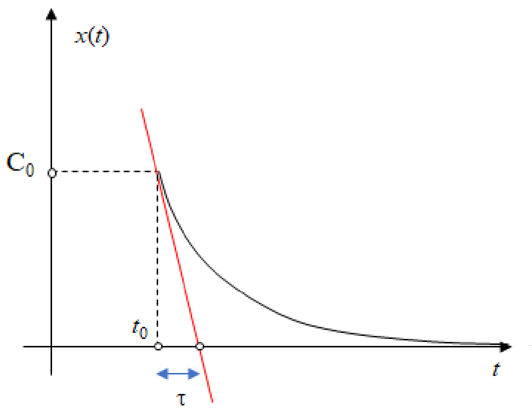


Fig. 6.8 – Grafico della funzione esponenziale (6.45) con $C_0>0$.

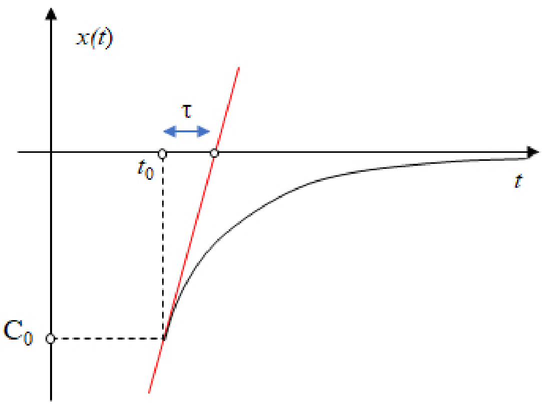


Fig. 6.9 – Grafico della funzione esponenziale (6.45) con $C_0<0$.

Osserviamo infine che, dalla (6.47), la pendenza della retta tangente è negativa nella Fig. 6.8 e positiva nella Fig. 6.9 in quanto nel primo caso $C_0>0$ e nel secondo $C_0<0$.

I circuiti la cui evoluzione abbiamo descritto in Fig. 6.8 e Fig. 6.9, come vedremo nel prossimo § 3.2.6, rappresentano, nel caso di circuito RC, la scarica di un condensatore: il condensatore inizialmente carico a C_0 si scarica ed assume un valore nullo della tensione.

Consideriamo ora una funzione un po' più complicata. Aggiungiamo, alla funzione esponenziale, un termine costante, diciamolo A, che supponiamo positivo[8]:

$$x(t) = C_0 e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} + A \qquad t>t_0 \tag{6.48}$$

La (6.48) potrebbe rappresentare la (6.28) quando $x_p(t)=A$ e quindi $C_0=X_0-A$. E quindi la (6.48) potrebbe rappresentare la soluzione di un circuito dinamico del I ordine avente generatori di tipo costante. Nella prossima Lezione 7, svolgeremo tanti esercizi di questo tipo.

Possiamo riscrivere la funzione (6.48) esplicitando $C_0=X_0-A$:

[8] Il fatto di considerare A positiva corrisponde a scegliere il verso della grandezza variabile di stato $x(t)$ concorde con il verso della grandezza erogata dal generatore. Ciò sarà più chiaro quando, nella Lezione 7, risolveremo gli esercizi.

$$x(t) = (X_0 - A)e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} + A \qquad t>t_0 \qquad (6.49)$$

Analizziamo le caratteristiche della funzione (6.49): in $t = t_0$ vale X_0[9], e a t>>0 ($t\to\infty$) assumerà valore A. L'esponente dell'esponenziale è sempre negativo in quanto $\tau>0$ e $t > t_0$ e quindi la funzione tende ad un valore limitato, la costante A, all'infinito.

Per considerare il grafico della (6.49), possiamo distinguere diversi casi:

- $X_0>A$. In questo caso l'elemento dinamico, inizialmente carico a X_0, raggiunge un valore di regime minore, come abbiamo rappresentato nella Fig. 6.10. Come vedremo nel prossimo § 3.2.6, nel caso di circuito RC, si tratta della scarica di un condensatore.
- $X_0<A$, $X_0>0$. In questo caso l'elemento dinamico, inizialmente carico a X_0, raggiunge un valore di regime maggiore come abbiamo rappresentato nella Fig. 6.11. Come vedremo nel prossimo § 3.2.6, nel caso di circuito RC, si tratta della carica di un condensatore.
- $X_0<A$, $X_0<0$. In questo caso l'elemento dinamico, inizialmente carico a X_0, che è un valore negativo, viene forzato a raggiungere un valore di regime di segno opposto, come abbiamo rappresentato nella Fig. 6.12. Come si vede dal grafico, la variabile di stato tende ad annullarsi in un certo istante t^* e poi cambia segno tendendo ad assumere il valore indotto dal generatore.

[9] Se la $x(t)$ è una variabile di stato, essa è una funzione continua ed allora non ci dobbiamo preoccupare di garantire la continuità in t_0. La $x(t)$ ha una storia pregressa che sicuramente l'avrà condotta in t_0 ad assumere il valore X_0 considerato.

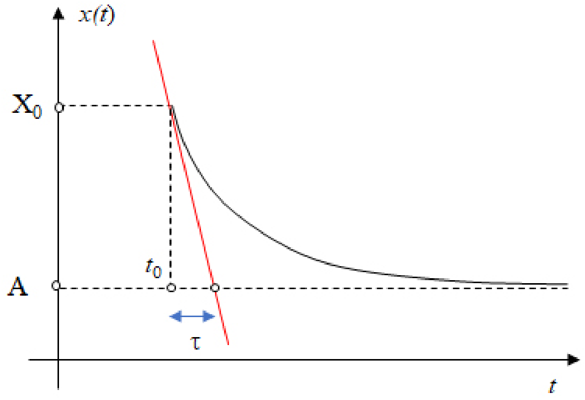


Fig. 6.10 – Grafico della funzione (6.49) con $X_0 > A$.

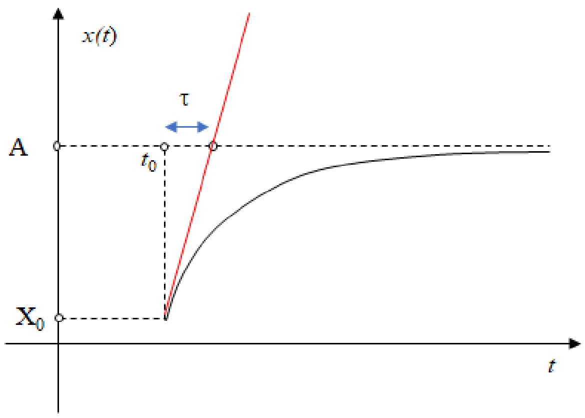


Fig. 6.11 – Grafico della funzione esponenziale (6.49) con $X_0 < A$ *(*X_0 *supposto* >0*).*

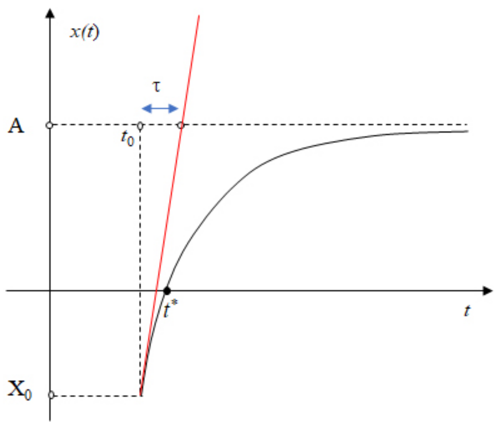


Fig. 6.12 – Grafico della funzione esponenziale (6.49) con $X_0 < A$ *(*X_0 *supposto* <0*).*

Si osservi che in tutti i grafici di Fig. 6.8, Fig. 6.9, Fig. 6.10, Fig. 6.11 e Fig. 6.12 abbiamo utilizzato la stessa costante di tempo τ.

Per finire sottolineiamo che le funzioni (6.44) e (6.49) tendono al valore costante di regime, nullo nel primo caso e pari ad A nel secondo, asintoticamente. Ciò vuol dire che assumono il valore di regime all'infinito! Tuttavia, per istanti di tempo multipli della costante di tempo τ del circuito possiamo trascurare il transitorio considerandolo estinto. Ad esempio, per $t=3\tau$ il transitorio o l'evoluzione libera hanno raggiunto il 95% del valore di regime. Ma questa è solo una approssimazione in quanto, lo sottolineiamo ancora, il valore di regime viene raggiunto solo all'infinito.

Vogliamo dare una interpretazione fisica del termine transitorio (6.49): esso rappresenta la risposta ad un forzamento acceso nell'istante t_0 che un sistema elabora per passare dalla condizione in cui si trova nell'istante iniziale t_0, che riassume la sua storia pregressa, al valore in cui il forzamento desidera condurlo. Ogni sistema compie questo passaggio con una sua velocità (τ) o, come si dice, "con i suoi tempi". Se si osserva la funzione esponenziale si nota che essa "prende" la distanza $X_0 - A$ e la porta ad annullarsi[10].

3.2.6 I circuiti di carica e di scarica di un condensatore

Un circuito del primo ordine di tipo RC, quindi con un condensatore, può servire a caricare o a scaricare il condensatore presente. Nel primo caso si parla di un ***circuito di carica di un condensatore***, nel secondo caso di un ***circuito di scarica di un condensatore***.

In vista della risoluzione degli esercizi svolti nella prossima Lezione 7, vediamo meglio di cosa si tratta.

[10] Si pensi al momento in cui ci siamo iscritti all'università e ad un momento successivo, ad esempio alla fine del secondo anno (ora per voi). Ci siamo dovuti "abituare" ad una nuova esperienza partendo da quelli che eravamo quando ci siamo iscritti. Abbiamo dovuto attivare tanti transitori che ci hanno consentito di arrivare al momento attuale in cui (forse…) abbiamo raggiunto un regime o, detto in altre parole, ci siamo abituati all'esperienza universitaria. Ognuno di noi lo ha fatto con i suoi tempi. C'è chi si è abituato subito e chi invece fa ancora fatica a farlo 😉.

Supponiamo di avere nel circuito generatori costanti, quindi avremo che la $x_p(t)$, essendo isomorfa ai generatori, sarà anch'essa costante. Allora la (6.28) diventa la (6.49), dove t_0 è l'istante iniziale dell'evoluzione del sistema, τ la costante di tempo pari a $\tau=R_{eq}C$ (vedi la (6.41)) trattandosi di un circuito RC, X_0 la condizione iniziale in t_0, A il termine costante che rappresenta la soluzione particolare $x_p(t)$=A, ed infine $C=X_0-A$.

In particolare, possono verificarsi due casi:

- $X_0>A$: la tensione sul condensatore passa da un valore iniziale X_0 ad un valore minore pari ad A. Il condensatore si ***scarica***. Si tratta di un circuito di scarica e il grafico è quello di Fig. 6.10. In particolare, il generatore può essere spento (A=0) e quindi il circuito è in evoluzione libera ($C_0=X_0$) ed il grafico è quello di Fig. 6.8, quando la tensione sul condensatore è inizialmente positiva, o quello di Fig. 6.9, quando la tensione è inizialmente negativa. In questi ultimi due casi la scarica risulta evidente in quanto l'energia immagazzinata nel condensatore si scarica completamente. Oppure, il generatore può essere acceso ($A\neq 0$) e quindi l'elemento dinamico, inizialmente carico a X_0, raggiunge un valore di tensione di regime minore, come in Fig. 6.10.
- $X_0<A$: la tensione sul condensatore passa da un valore iniziale X_0 ad un valore maggiore pari ad A. Il condensatore si ***carica***. Si tratta, in tal caso, di un circuito di carica e il grafico è quello di Fig. 6.11.

3.3 La soluzione dei circuiti dinamici del II ordine*

Risolviamo il sistema (6.17) per un circuito del II ordine dividendo le due equazioni di stato per d_1 e d_2, ottenendo così le equazioni di stato in forma esplicita:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -\dfrac{h_{11}}{d_1}x_1(t) - \dfrac{h_{12}}{d_1}x_2(t) + \dfrac{g_1(t)}{d_1} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -\dfrac{h_{21}}{d_2}x_1(t) - \dfrac{h_{22}}{d_2}x_2(t) + \dfrac{g_2(t)}{d_2} \end{cases} \qquad (6.50)$$

Per trovare la soluzione del sistema (6.50), possiamo ridurre il sistema di due equazioni differenziali ad un'unica equazione del II ordine. Possiamo ricavare l'equazione del II ordine in $x_1(t)$ o in $x_2(t)$. Volendo, ad esempio, ricavare l'equazione in $x_1(t)$, ricaviamo $x_2(t)$ dalla prima equazione del sistema (6.50), ottenendo:

$$x_2(t)=\frac{\mathrm{d}_1}{\mathrm{h}_{12}}\left(-\frac{d}{dt}x_1(t)-\frac{\mathrm{h}_{11}}{\mathrm{d}_1}x_1(t)+\frac{\mathrm{g}_1(t)}{\mathrm{d}_1}\right) \tag{6.51}$$

La (6.51) può essere scritta nel caso in cui $\mathrm{h}_{12}\neq 0$ (se avessimo voluto determinare l'equazione differenziale per x_2 avremmo dovuto ipotizzare $\mathrm{h}_{21}\neq 0$). Cosa accade quando $\mathrm{h}_{12}=0$ e/o $\mathrm{h}_{21}=0$? Se $\mathrm{h}_{12}=0$ e $\mathrm{h}_{21}=0$, da un punto di vista matematico il sistema (6.50) presenta due equazioni "disaccoppiate". Ognuna delle due variabili di stato è soluzione di una equazione del I ordine. In questo caso, per determinare le due variabili di stato occorre risolvere ogni singola equazione di stato distintamente. Nel caso in cui uno solo dei due coefficienti è nullo: $\mathrm{h}_{12}=0$ o $\mathrm{h}_{21}=0$, accade rispettivamente che la $x_1(t)$ è soluzione di una equazione differenziale del I ordine o la $x_2(t)$ è soluzione di una equazione differenziale del I ordine. In questo caso si dovrà procedere risolvendo l'equazione del I ordine e una volta ottenuta la soluzione sostituirla nell'altra equazione come se fosse un termine noto.

Sostituiamo la (6.51) nella prima delle (6.50):

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_1(t)}{dt^2}=&-\frac{\mathrm{h}_{11}}{\mathrm{d}_1}\frac{dx_1(t)}{dt}+\frac{\mathrm{h}_{12}\mathrm{h}_{21}}{\mathrm{d}_1\mathrm{d}_2}x_1(t)+\frac{\mathrm{h}_{22}}{\mathrm{d}_2}\left(-\frac{dx_1(t)}{dt}-\frac{\mathrm{h}_{11}}{\mathrm{d}_1}x_1(t)+\frac{\mathrm{g}_1(t)}{\mathrm{d}_1}\right)+\\&+\frac{1}{\mathrm{d}_1}\frac{dg_1(t)}{dt}-\frac{\mathrm{h}_{12}\mathrm{g}_2(t)}{\mathrm{d}_1\mathrm{d}_2}\end{aligned} \tag{6.52}$$

che riordinata risulta essere l'equazione cercata:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_1(t)}{dt^2}+\left(\frac{\mathrm{h}_{11}}{\mathrm{d}_1}+\frac{\mathrm{h}_{22}}{\mathrm{d}_2}\right)\frac{dx_1(t)}{dt}+\frac{\mathrm{h}_{11}\mathrm{h}_{22}-\mathrm{h}_{12}\mathrm{h}_{21}}{\mathrm{d}_1\mathrm{d}_2}x_1(t)=\\=\frac{\mathrm{h}_{22}}{\mathrm{d}_1\mathrm{d}_2}\mathrm{g}_1(t)+\frac{1}{\mathrm{d}_1}\frac{d\mathrm{g}_1(t)}{dt}-\frac{\mathrm{h}_{12}}{\mathrm{d}_1\mathrm{d}_2}\mathrm{g}_2(t)\end{aligned} \tag{6.53}$$

Al fine di ottenere una visione più sintetica della (6.53) sarà conveniente porre:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{h_{11}}{d_1} + \frac{h_{22}}{d_2}\right) \tag{6.54}$$

che è una quantità sempre non negativa, e

$$\omega^2 = \frac{h_{11}h_{22}\text{-}h_{12}h_{21}}{d_1 d_2} \tag{6.55}$$

anch'essa sempre non negativa. Infine

$$G_1(t) = \frac{h_{22}}{d_1 d_2} g_1(t) + \frac{1}{d_1}\frac{dg_1(t)}{dt} - \frac{h_{12}}{d_1 d_2} g_2(t) \tag{6.56}$$

La (6.53) quindi possiamo riscriverla nella forma:

$$\boxed{\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx_1(t)}{dt} + \omega^2 x_1(t) = G_1(t)} \tag{6.57}$$

Si osservi che, nel caso in cui volessimo trovare l'equazione in x_2, ciò che cambia è solo il secondo membro della (6.57). Si avrebbe infatti al secondo membro:

$$G_2(t) = \frac{h_{11}}{d_1 d_2} g_2(t) + \frac{1}{d_2}\frac{dg_2(t)}{dt} - \frac{h_{21}}{d_1 d_2} g_1(t) \tag{6.58}$$

3.3.1 Il problema alle condizioni iniziali per circuiti del II ordine

Per risolvere un circuito del II ordine è necessario avere le condizioni iniziali su entrambe le variabili di stato. Supponiamo quindi di associare al sistema (6.50) le seguenti condizioni iniziali:

$$x_1(t_0) = \mathrm{X}_{10}; x_2(t_0) = \mathrm{X}_{20} \tag{6.59}$$

In realtà, per quanto abbiamo fatto in precedenza, abbiamo riformulato il problema in termini di un'unica equazione differenziale del II ordine, la (6.57), e quindi ci dobbiamo porre il problema di quali sono le condizioni iniziali da associare alla (6.57). Dallo studio dell'analisi abbiamo imparato che l'equazione (6.57) ha bisogno delle condizioni iniziali rappresentate dal valore dell'incognita dell'equazione, $x_1(t)$, e della sua derivata $\frac{d}{dt}x_1(t)$ all'istante iniziale t_0. Queste sono:

$$x_1(t_0) = \mathrm{X}_{10} \tag{6.60}$$

$$\left.\frac{d}{dt}x_1(t)\right|_{t=t_0} = \mathrm{DX}_{10} \tag{6.61}$$

La (6.60) l'abbiamo ricevuta nell'assegnazione del problema (6.57) con le (6.59). Come facciamo a trovare la (6.61)? Osserviamo innanzitutto che la (6.61) rappresenta una funzione valutata in un punto. In particolare, la funzione derivata della $x_1(t)$ valutata in un punto. Avremmo, quindi, bisogno di conoscere prima la funzione $\frac{dx_1(t)}{dt}$ e poi dobbiamo determinare il valore che assume nell'istante iniziale $t = t_0$.

Osserviamo infatti che

$$\left.\frac{d}{dt}x_1(t)\right|_{t=t_0} \neq \frac{d}{dt}x_1(t_0) \tag{6.62}$$

in quanto i due membri sono incompatibili. Infatti, mentre al primo membro troviamo la derivata di una funzione che poi viene valutata in un punto, al secondo membro troviamo la derivata di una funzione valutata in un punto, cioè di una costante pari a zero.

La condizione (6.61) si ricava dalla prima equazione del sistema (6.50) valutata in $t = t_0^+$ e nella quale si sostituiscono al posto di $x_1(t_0)$ e $x_2(t_0)$ le (6.59):

$$\frac{d}{dt}x_1(t)\Big|_{t=t_0^+} = -\frac{h_{11}}{d_1}X_{10} - \frac{h_{12}}{d_1}X_{20} + \frac{g_1(t_0^+)}{d_1} \tag{6.63}$$

La condizione iniziale sulla derivata la imponiamo in $t = t_0^+$ poiché la derivata prima di una variabile di stato non è detto che sia continua in t_0 e pertanto, essendo interessati alla dinamica per $t > t_0$ ci preoccupiamo di dare la condizione iniziale sul limite destro di t_0.

In conclusione, abbiamo il problema riformulato in termini di equazione differenziale del II ordine completo di condizioni iniziali (problema di Cauchy):

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1(t)}{dt^2} + 2\alpha\,\dfrac{dx_1(t)}{dt} + \omega^2 x_1(t) = G_1(t) \qquad \text{per} \quad t > t_0 \\ x_1(t_0) = X_{10} \\ \dfrac{dx_1(t)}{dt}\Big|_{t=t_0^+} = -\dfrac{h_{11}}{d_1}X_{10} - \dfrac{h_{12}}{d_1}X_{20} + \dfrac{g_1(t_0^+)}{d_1} = DX_{10} \end{cases} \tag{6.64}$$

Osserviamo che potevamo ottenere per la variabile di stato $x_2(t)$ un sistema analogo al (6.64).

3.3.2 I termini transitorio e di regime. L' evoluzione libera e forzata di un circuito del II ordine.

Come per le equazioni differenziali del I ordine, anche nel caso di circuiti del II ordine l'integrale generale della (6.64) è rappresentabile come la sovrapposizione di due funzioni:

$$x_1(t) = x_{1_0}(t) + x_{1_p}(t) \tag{6.65}$$

dove $x_{1_0}(t)$ è l'***integrale generale dell'equazione omogenea*** associata alla (6.57), e $x_{1_p}(t)$ è il suo ***integrale particolare.*** Anche in questo caso diremo $x_{1_0}(t)$ ***termine transitorio*** e $x_{1_p}(t)$ ***termine di regime***.

Cominciamo con l'integrale generale dell'omogenea associata, che si determina a partire dall'equazione (6.57) in cui $G_1(t)=0$. Cerchiamo, quindi, la soluzione del problema:

$$\frac{d^2x_1(t)}{dt^2}+2\alpha\,\frac{dx_1(t)}{dt}+\omega^2x_1(t)=0 \tag{6.66}$$

Usiamo ancora il ***polinomio caratteristico***:

$$\lambda^2+2\alpha\,\lambda+\omega^2=0 \tag{6.67}$$

le cui soluzioni sono le cosiddette ***frequenze naturali*** del sistema:

$$\lambda_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega^2} \tag{6.68}$$

Ricordiamo che per le proprietà delle matrici **D** e **H**, i coefficienti α e ω sono sempre non negativi. Il "tipo" di soluzioni ottenuti per λ_1 e λ_2 dipende dal valore assunto dal radicando della radice della (6.68):

$$\Delta=\alpha^2-\omega^2 \tag{6.69}$$

Si dovranno distinguere tre casi:

1) $\Delta<0$ – Le soluzioni sono complesse coniugate con parte reale negativa:

$$\lambda_{1,2}=-\alpha\pm j\omega_0 \tag{6.70}$$

dove abbiamo posto $\omega_0=\sqrt{\left|\alpha^2-\omega^2\right|}$. In questo caso la soluzione è:

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\left(\mathrm{k}_1\cos\left(\omega_0(t-t_0)\right) + \mathrm{k}_2\mathrm{sen}\left(\omega_0(t-t_0)\right)\right) + x_p(t) \quad \text{per } t>t_0 \qquad (6.71)$$

2) Δ=0 – Le soluzioni sono reali (negative) e coincidenti:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \qquad (6.72)$$

e la soluzione sarà:

$$x_1(t) = \left(\mathrm{k}_1 + \mathrm{k}_2(t-t_0)\right)\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)} + x_\mathrm{p}(t) \quad \text{per } t>t_0 \qquad (6.73)$$

3) Δ>0 – Le soluzioni sono reali (negative) e distinte

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\left|\alpha^2 - \omega^2\right|} \qquad (6.74)$$

e la soluzione sarà:

$$x_1(t) = \mathrm{k}_1\mathrm{e}^{\lambda_1(t-t_0)} + \mathrm{k}_2\mathrm{e}^{\lambda_2(t-t_0)} + x_{1_\mathrm{p}}(t) \ \text{per } t>t_0 \qquad (6.75)$$

Sinteticamente abbiamo che l'integrale generale corrispondente ai tre casi sarà:

$$x_{1_\mathrm{o}}(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\left(\mathrm{k}_1\cos\left(\omega_0(t-t_0)\right) + \mathrm{k}_2\mathrm{sen}\left(\omega_0(t-t_0)\right)\right) & \Delta < 0 \\ \left(\mathrm{k}_1 + \mathrm{k}_2(t-t_0)]\right)\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)} & \Delta = 0 \\ \mathrm{k}_1\mathrm{e}^{\lambda_1(t-t_0)} + \mathrm{k}_2\mathrm{e}^{\lambda_2(t-t_0)} & \Delta > 0 \end{cases} \qquad (6.76)$$

Si osservi che se esprimiamo il determinante Δ della (6.69) in funzione dei parametri delle matrici **H** e **D** potremmo verificare che i circuiti RLL e RCC possono ammettere solo soluzioni del tipo

$$x_{1_\mathrm{o}}(t) = \mathrm{k}_1\mathrm{e}^{\lambda_1(t-t_0)} + \mathrm{k}_2\mathrm{e}^{\lambda_2(t-t_0)} (\Delta>0) \qquad (6.77)$$

Un'ultima osservazione. Le variabili di stato per un circuito del II ordine sono due $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Noi abbiamo lavorato solo su una delle due variabili. Cosa possiamo dire dell'altra? L'altra variabile, la $x_2(t)$, possiamo ricavarla dalla prima equazione del sistema (6.50). Al secondo membro, infatti, abbiamo tutte funzioni note. Va detto che potevamo procedere in modo opposto, cioè calcolare la $x_2(t)$ e poi, di conseguenza, la $x_1(t)$. È importante osservare che, poiché l'equazione differenziale è uguale nei due casi, le frequenze naturali sono le stesse per entrambe le variabili. Esse, infatti, sono un attributo del sistema e ogni grandezza del circuito avrà un transitorio con le stesse frequenze naturali.

In tutti e tre i casi delle (6.76) abbiamo due costanti da determinare: k_1 e k_2. Occupiamoci ora di determinare tali costanti imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{1_0}(t_0) + x_{1_p}(t_0) = \mathrm{X}_{10} \\ \left.\dfrac{dx_1(t)}{dt}\right|_{t=t_0^+} = \left.\dfrac{dx_{1_0}(t)}{dt}\right|_{t=t_0^+} + \left.\dfrac{d\,x_{1_p}(t)}{dt}\right|_{t=t_0^+} = \mathrm{DX}_{10} \end{cases} \tag{6.78}$$

Ad esempio, la (6.78) applicata al caso (6.74) di soluzione corrispondente al determinante positivo dà:

$$\begin{cases} \mathrm{k}_1 = \dfrac{-\mathrm{DX}_{10} + \left.\dfrac{dx_{1_p}(t)}{dt}\right|_{t=t_0^+} + \lambda_2\left(\mathrm{X}_{10} - x_{1_p}(t_0)\right)}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \mathrm{k}_2 = \dfrac{\mathrm{DX}_{10} - \left.\dfrac{dx_{1_p}(t)}{dt}\right|_{t=t_0^+} - \lambda_1\left(\mathrm{X}_{10} - x_{1_p}(t_0)\right)}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{cases} \tag{6.79}$$

Abbiamo risolto il problema! Abbiamo determinato la soluzione.

Analogamente al § 3.2.2 che riguardava i circuiti del I ordine, la soluzione del problema del II ordine può essere anche scritta come somma di un'***evoluzione libera*** ed un'***evoluzione forzata***.

Quindi potremo scrivere la soluzione della (6.57) come:

$$x_1(t) = x_{1_l}(t) + x_{1_f}(t) \tag{6.80}$$

dove $x_{1_l}(t)$ è l'evoluzione libera ed è, quindi, la soluzione del problema:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 x_{1l}(t)}{dt^2} + 2\alpha \dfrac{dx_{1l}(t)}{dt} + \omega^2 x_{1l}(t) = 0 \\ x_{1l}(t_0) = \mathrm{X}_{10} \\ \left.\dfrac{dx_{1l}(t)}{dt}\right|_{t=t_0^+} = \mathrm{DX}_{10} \end{cases} \tag{6.81}$$

con $t>t_0$, e dove $x_{1_f}(t)$ è la evoluzione forzata ed è quindi la soluzione del problema:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 x_{1f}(t)}{dt^2} + 2\alpha \dfrac{dx_{1f}(t)}{dt} + \omega_1^2 x_{1f}(t) = \mathrm{G}_1(t) \\ x_{1f}(t_0) = 0 \\ \left.\dfrac{dx_{1f}(t)}{dt}\right|_{t=t_0^+} = 0 \end{cases} \tag{6.82}$$

con $t>t_0$.

Gli andamenti caratteristici dell'evoluzione libera di un circuito del II ordine

Osserviamo che la struttura matematica del termine transitorio e dell'evoluzione libera sono uguali. Tuttavia, nei due casi saranno diversi i valori della costante k_1 e k_2, perché queste si calcolano in modo diverso. Nel primo caso, le condizioni iniziali si impongono all'integrale generale dell'omogenea associata sommato all'integrale particolare; nel secondo caso, invece, le condizioni iniziali si impongono unicamente all'integrale generale dell'omogenea associata.

Occupiamoci ora delle frequenze naturali e dei possibili andamenti dell'evoluzione libera $x_{1_l}(t)$.

- Per $\Delta>0$ abbiamo la seguente funzione, somma di due esponenziali:

$$x_{1o}(t) = \mathrm{k}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 (t-t_0)} + \mathrm{k}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 (t-t_0)} \qquad \text{con } t>t_0 \tag{35}$$

Dove λ_1, λ_2 sono sempre negative. L'andamento che ne risulta è quello di una funzione tendente asintoticamente a zero per $t \to \infty$, la cosiddetta ***evoluzione smorzata***. In Fig. 6.13 è stato rappresentato l'andamento tipico di questo caso.

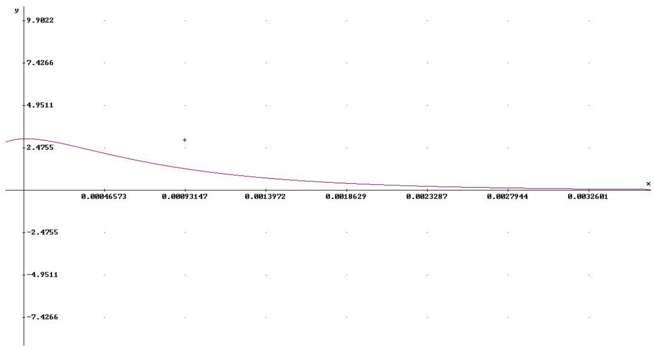


Fig. 6.13 – Evoluzione libera in caso di frequenze reali e distinte (t_0=0).

- Per Δ<0, avremo $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_0$ con $\omega_0 = \sqrt{\left|\alpha^2 - \omega^2\right|}$ e in questo caso possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} x_{1_o}(t) &= \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\left[\overline{\mathrm{k}}_1 \mathrm{e}^{j\omega_0 (t-t_0)} + \overline{\mathrm{k}}_2 \mathrm{e}^{-j\omega_0 (t-t_0)}\right] = \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\left[\mathrm{k}_1 \cos\left(\omega_0 \left(t-t_0\right)\right) + \mathrm{k}_2 \operatorname{sen}\left(\omega_0\left(t-t_0\right)\right)\right] \end{aligned} \tag{6.83}$$

con $t>t_0$, in cui $\mathrm{k}_1 = \overline{\mathrm{k}}_1 + \overline{\mathrm{k}}_2$ e $\mathrm{k}_2 = j\left(\overline{\mathrm{k}}_1 - \overline{\mathrm{k}}_2\right)$. Osserviamo che k_1 e k_2 sono reali poiché $\overline{\mathrm{k}}_1$ e $\overline{\mathrm{k}}_2$ sono complesse coniugate. Anche in questo caso la funzione si smorza a zero. Tuttavia, invece di andare a zero con legge esponenziale questa volta va a zero con una ***oscillazione smorzata***. In Fig. 6.14 è rappresentata l'andamento tipico di questo caso. Si osservi il periodo delle oscillazioni.

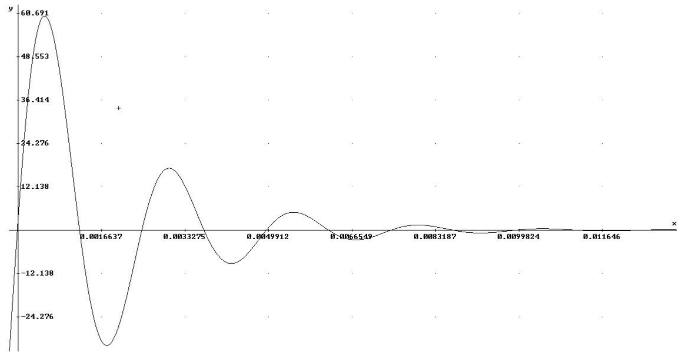


Fig. 6.14 – Evoluzione libera in caso di frequenze complesse coniugate (t_0=0).

- Per Δ=0, avremo $\lambda_{1,2} = -\alpha$ con molteplicità due.

In questo caso possiamo scrivere la soluzione che diremo ***evoluzione critica***:

$$x_{1_0}(t) = \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\left(\mathrm{k} + \mathrm{k}_0(t-t_0)\right) \qquad (6.84)$$

con $t>t_0$. Anche in questo caso la soluzione tende asintoticamente a zero. Quando è possibile trovarsi in questa condizione? Quando $\alpha^2 = \omega^2$. A differenza degli altri due casi, questo caso si può ottenere, dunque, per particolari valori dei parametri. In Fig. 6.15 abbiamo rappresentato questo caso critico che prende appunto il nome di ***evoluzione libera critica***.

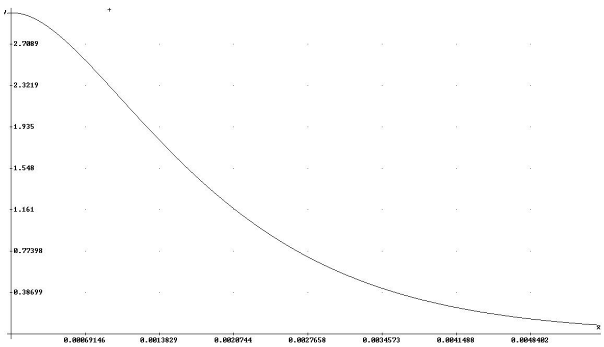


Fig. 6.15 – Evoluzione libera in caso di frequenze reali coincidenti (t_0=0).

In conclusione, ogni soluzione ammissibile del problema omogeneo tenderà a zero asintoticamente. Tale risultato è giustificato dalla passività del circuito. Gli elementi passivi nel circuito sono i condensatori, gli induttori e i resistori. I primi due possono immagazzinare una energia limitata ed essere carichi nell'istante iniziale. Questo fatto è rappresentato dalla presenza delle condizioni iniziali. Tale energia si dissiperà durante il transitorio sui resistori. Ed è per questo motivo che l'evoluzione libera in tutti i casi tende a zero.

Per completezza è bene notare che abbiamo qui trattato i soli i casi in cui i resistori presenti nel circuito abbiamo tutti una resistenza maggiore di zero. Un caso particolare è quello in cui tale valore tende a zero ma esso non sarà oggetto di questo corso.

3.4 L'origine dei transitori

Le considerazioni fatte fino ad ora in questa lezione hanno fatto sempre riferimento ad un'analisi del circuito per $t > t_0$; dove t_0 era un istante iniziale assegnato. È chiaro che per studiare un sistema dinamico abbiamo bisogno di un istante iniziale! Questo rappresenta l'istante a partire dal quale intendiamo studiare il nostro circuito.

Talvolta le condizioni iniziali non sono date quando ci viene "assegnato" un circuito ma bisognerà ricavarle dalla conoscenza del funzionamento del circuito prima dell'istante t_0. In questo caso, però, è evidente che bisognerà avere delle informazioni sufficienti sul funzionamento del circuito anche prima dell'istante t_0. Avendo a disposizione tali informazioni possiamo determinare il funzionamento del circuito solo nell'ipotesi che questo stia funzionando a regime: si sono, cioè, estinti tutti i precedenti transitori. Una volta determinata la soluzione per $t < t_0$, ossia identificata la $x(t_0^-)$, possiamo determinare la condizione iniziale necessaria al problema di Cauchy utilizzando la proprietà di continuità delle variabili di stato: $x(t_0^+) = x(t_0^-)$.

Elenchiamo di seguito tutti i casi possibili in cui si accende una dinamica transitoria in un circuito:

- Il circuito viene osservato a partire dall'istante t_0, istante in cui i suoi elementi dinamici hanno un valore noto per le variabili di stato. Questo valore sarà la condizione iniziale da considerare. Non è, quindi, specificata la storia del circuito prima dell'istante t_0 nel quale abbiamo bisogno della condizione iniziale. "Dispongo" del circuito solo dall'istante t_0 in poi e la condizione iniziale ci viene data. È il caso più semplice nel quale, avendo la condizione iniziale, basta risolvere il problema (6.18) o (6.64).

- Circuiti che cambiano valore di regime. Ho a disposizione il circuito dall'origine della sua costruzione con i suoi generatori noti. Tutti gli eventuali transitori precedenti si sono estinti (è passato un tempo infinito dal momento della costruzione). Il circuito, quindi, si trova a regime. Un generatore del circuito modifica, in un dato istante t_0, la funzione che lo caratterizza ossia passa da un certo regime di funzionamento ad un altro regime, ad esempio da stazionario a sinusoidale oppure restando sinusoidale ma invertendo il segno della tensione o corrente erogata. In tal caso avremo che in t_0 ha luogo un evento che perturba il circuito e che, a causa della presenza di elementi dinamici nel circuito, tenderà a condurlo ad un altro regime in maniera transitoria e NON istantanea con una certa dinamica. In questo caso, si utilizza un'***analisi ad intervalli*** che consiste nello studio del circuito per $t < t_0$ determinando le soluzioni di regime e poi per $t \geq t_0$ risolvendo il problema alle condizioni iniziali di Cauchy (6.18) o (6.64). Nel problema di Cauchy serve la condizione iniziale che andrà determinata dalla soluzione di regime della variabile di stato calcolata per $t < t_0$ imponendone la continuità: $x(t_0^+)=x(t_0^-)$. Si osservi che la conoscenza della soluzione per tempi inferiori a t_0 è permessa dall'ipotesi fondamentale che il circuito si trovi a regime. Se così non fosse non potrei determinare la soluzione in quanto avrei bisogno di risolvere un problema (6.18) o (6.64) il cui istante iniziale si perde nella storia remota e le cui condizioni iniziali non sarebbero note a priori. (Vedi l'esercizio svolto nel § 1.1.4, § 1.3.3 e § 5.1 della Lezione 7)

- Circuiti con interruttori. Possiamo avere ancora un'altra situazione: un interruttore che modifica la topologia del circuito che si trovava precedentemente in condizioni di regime. Guardiamo la Fig. 6.17 nella quale un interruttore si apre in $t=t_0$ modificando il circuito. Assumiamo per semplicità che il generatore sia costante. Anche in questo caso si può effettuare un'***analisi per intervalli***. Il circuito per $t<t_0$ si trova a regime stazionario e noi possiamo studiare tale regime per conoscere il valore della variabile di stato $x(t) \Rightarrow x(t_0^-)$. In $t=t_0$ accade qualcosa, il circuito cambia la sua struttura e si accende un transitorio e quindi dobbiamo risolvere un problema di Cauchy per $t \geq t_0$ dove la condizione iniziale la troviamo per la continuità $x(t_0^+) = x(t_0^-)$. (Vedi § 3.5 di questa lezione e vedi esercizio svolto nel § 5.2 e § 5.6 della Lezione 7).

3.5 La soluzione dei circuiti dinamici con un'analisi per intervalli

Nel precedente paragrafo abbiamo introdotto l'analisi per intervalli. Abbiamo visto che questo metodo risulta utile in due casi:

- Circuiti che cambiano valore di regime. Il circuito si trova a regime per $t<t_0$ e in t_0 il generatore presente nel circuito attiva la dinamica che vogliamo studiare per $t> t_0$.
- Circuiti con interruttori. Il circuito si trova a regime per $t< t_0$ e in t_0 agisce un interruttore che attiva la dinamica che vogliamo studiare per $t> t_0$.

Nei prossimi due paragrafi descriveremo questi due casi.

3.5.1 I circuiti del I ordine che cambiano valore di regime

Consideriamo il circuito di Fig. 6.16. Supponiamo che il generatore presente abbia la seguente funzione: $j(t)= 1\ u(-t)$ A $+2\ u(t)$ A. La funzione $u(t)$ è la funzione gradino unitario definita nella (6.85). Il generatore è costante per $t<0$ e per $t>0$, ma in $t=0$ cambia valore. Questo genera la nascita di un fenomeno transitorio che conduce il circuito ad un regime, per $t\to\infty$, diverso da quello presente per $t<0$.

Per risolvere l'esercizio possiamo ricorrere all'***analisi per intervalli*** descritta nel § 3.4. Gli intervalli da studiare saranno quello per $t<0$, e quello per $t\geq0$.

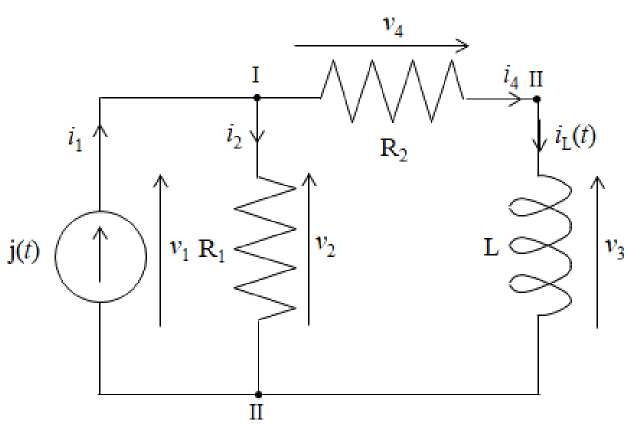


Fig. 6.16 – Circuito dinamico del I ordine.

Con un'analisi per intervalli procediamo in questo modo:

- supponiamo che il circuito sia a regime per $t<t_0$ e calcoliamo la variabile di stato,
- imponiamo la continuità della variabile di stato in $t=t_0$ e quindi conosciamo la condizione iniziale del problema per $t\geq t_0$,
- risolviamo il problema di Cauchy per $t\geq t_0$.

Abbiamo risolto il circuito di Fig. 6.17 nel § 5.1 della Lezione 7.

3.5.2 I circuiti del I ordine con interruttori

Osserviamo il circuito di Fig. 6.17 che consiste di un circuito dinamico con due resistori, un induttore e un interruttore. Dal § 1.7 della Lezione 2 ricordiamo la natura dell'interruttore. Osserviamo che in figura abbiamo un interruttore in apertura in quale si comporta come un corto circuito per $t<t_0$ e come un circuito aperto per $t\geq t_0$.

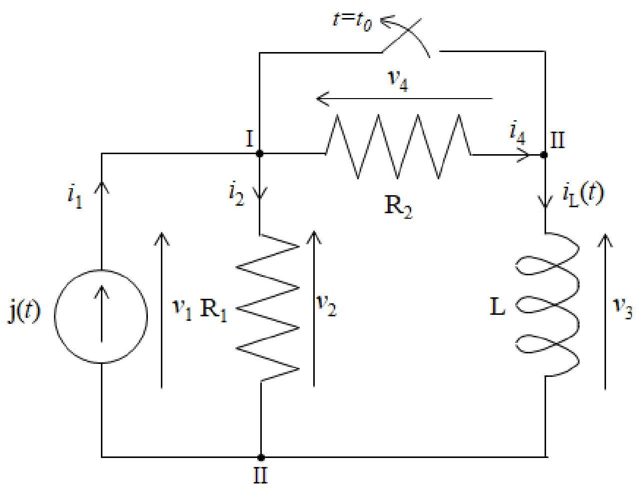


Fig. 6.17 – Circuito dinamico del I ordine con interruttore.

Per risolvere l'esercizio possiamo adoperare l'***analisi per intervalli*** descritta nell'introduzione del § 3.5. Gli intervalli da studiare saranno quello per $t<t_0$, e quello per $t\geq t_0$.

Nella Fig. 6.18 abbiamo rappresentato il circuito per $t<t_0$, nella Fig. 6.19 abbiamo rappresentato il circuito per $t>t_0$: i circuiti sono topologicamente diversi!

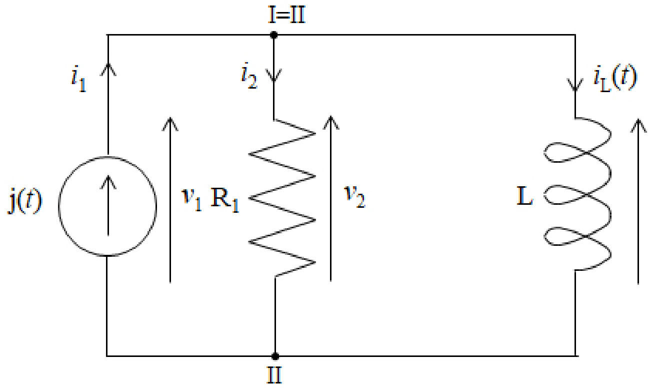


Fig. 6.18 – Circuito Fig. 6.17 di per t<t₀.

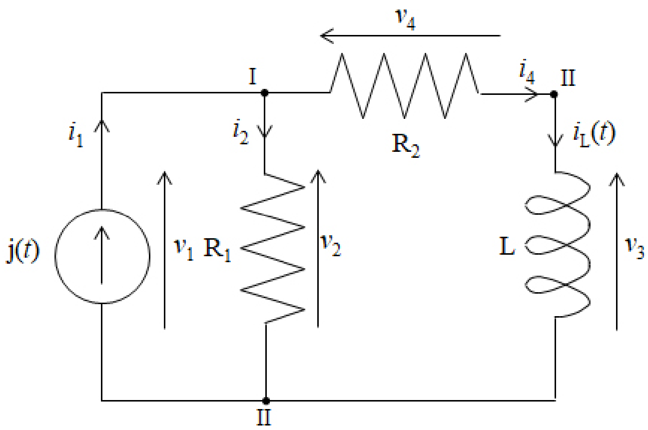


Fig. 6.19 – Circuito Fig. 6.17 di per t>t₀

Per lo studio di circuiti con interruttore utilizziamo un'analisi per intervalli e procediamo in questo modo:

- supponiamo che il circuito sia a regime per $t<t_0$ e calcoliamo la variabile di stato,
- imponiamo la continuità della variabile di stato in $t=t_0$ e quindi conosciamo la condizione iniziale del problema per $t\geq t_0$,
- disegniamo il circuito per $t\geq t_0$ che avrà una nuova struttura rispetto a quella per $t<t_0$,
- risolviamo il problema di Cauchy per $t\geq t_0$.

Abbiamo risolto il circuito di Fig. 6.17 nel § 5.2 della Lezione 7.

3.6 I circuiti dinamici con generatori discontinui

In questo paragrafo ci vogliamo esercitare con il concetto di continuità delle variabili di stato. Questo concetto lo abbiamo introdotto nel § 1.3. In sintesi, abbiamo affermato che le variabili di stato devono essere continue sempre (possono essere discontinue solo con generatori impulsivi che noi non considereremo in questo corso) mentre le altre grandezze possono essere sia continue che discontinue a seconda del tipo di circuito in cui sono inserite (vedi Tabella 6.1 del § 1.3)

Innanzitutto, ricordiamo che una funzione discontinua con discontinuità di prima specie è una funzione come quella rappresentata in Fig. 6.22. Un altro esempio tipico di funzione discontinua è la ***funzione gradino unitario*** $u(t)$ così definita:

$$u(t)=\begin{cases} 0 & \text{per } t<0 \\ 1 & \text{per t} \geq 0 \end{cases} \tag{6.85}$$

e avente come grafico[11] quello di Fig. 6.20.

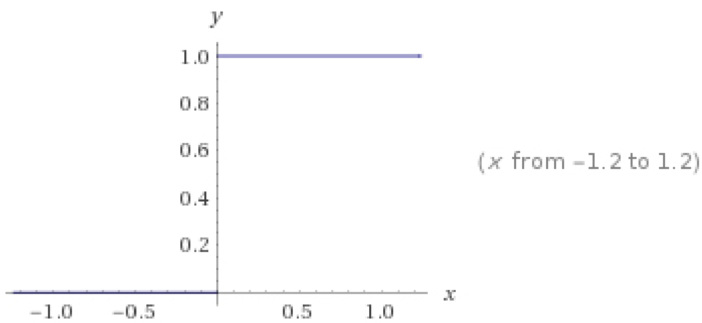


Fig. 6.20 – grafico della funzione gradino unitario u(t) della (6.85)

Ricordiamo, a questo punto, che la derivata di una funzione continua può essere discontinua. Consideriamo ad esempio la funzione:

$$y = f(x) = 3u(-t) + \left(e^{-100t} + 2\right)u(t) \quad \forall t \tag{6.86}$$

[11] Il grafico, e quelli successivi, sono stati ottenuti con la piattaforma web https://www.youmath.it/.

Che è una funzione continua come mostrato in Fig. 6.21. La funzione (6.86) potrebbe essere quella di una variabile di stato di un circuito del primo ordine il cui generatore passa da un certo valore costante ad uno diverso in t=0.

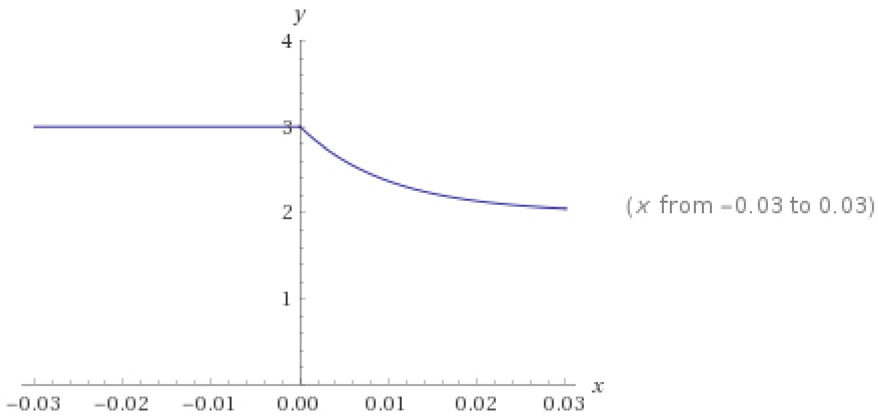


Fig. 6.21 – Grafico di una funzione continua.

La derivata della funzione (6.86) risulta essere:

$$\frac{d}{dt}y = f'(x) = -100e^{-100t}u(t) \quad \forall t \tag{6.87}$$

che è, però, una funzione discontinua, come mostrato nel grafico di Fig. 6.22. Ciò ci ricorda il fatto che la tensione di un induttore e la corrente di un condensatore possono essere funzioni discontinue!

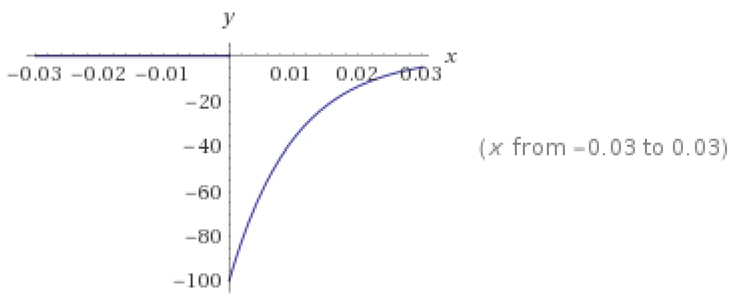


Fig. 6.22 – Grafico della derivata (discontinua) della funzione continua.

Per esercitarci risolveremo il seguente problema: ho un circuito del II ordine con un solo generatore che ha una discontinuità di prima specie in un certo istante t*, ci chiediamo cosa accade a tutte le grandezze del circuito. Vogliamo quindi indagare il circuito intorno all'istante t* per stabilire se ognuna delle grandezze è continua o discontinua.

Operiamo con circuiti molto semplici come l'RLC serie e l'RLC parallelo mostrati in Fig. 6.23 e Fig. 6.24 rispettivamente. In riferimento ai due circuiti supporremo quindi che il generatore e(t) dell'RLC serie abbia una discontinuità di prima specie in t* e lo stesso il generatore di corrente j(t) dell'RLC parallelo.

Osserviamo innanzitutto che nel circuito di Fig. 6.23 esiste la corrente, $i_L(t)$, unica della maglia, che è la variabile di stato e quindi continua. Per l'RLC serie si deve semplicemente verificare la LKT nell'unica maglia presente mentre per l'RLC parallelo si deve sempre verificare la LKC al nodo I (o II). In entrambe le equazioni comparirà una funzione (quella del generatore) che ha una discontinuità intorno a t*. Questa discontinuità dovrà essere "bilanciata" da almeno un termine presente nella equazione (diverso da quello del generatore).

Per l'RLC serie possiamo scrivere:

$$v_2(t) + v_3(t) + v_C(t) = \mathrm{e}(t) \qquad \text{intorno a } t^* \tag{6.88}$$

Cerchiamo di "bilanciare" la discontinuità del generatore al secondo membro della (6.88). Nella (6.88) abbiamo che: $v_2(t)=\mathrm{R}i_L(t)$ e quindi è continua, $v_3(t)$ che essendo pari alla tensione sull'induttore, può essere discontinua ed infine $v_C(t)$ che essendo una variabile di stato deve necessariamente essere continua. Concludiamo che la discontinuità del generatore di tensione è "bilanciata" dalla tensione sull'induttore $v_3(t)$.

Osserviamo che la corrente nel condensatore, che in generale possiamo ammettere essere discontinua, risulta continua in quanto il condensatore è in serie ad un induttore che gli impone una corrente continua.

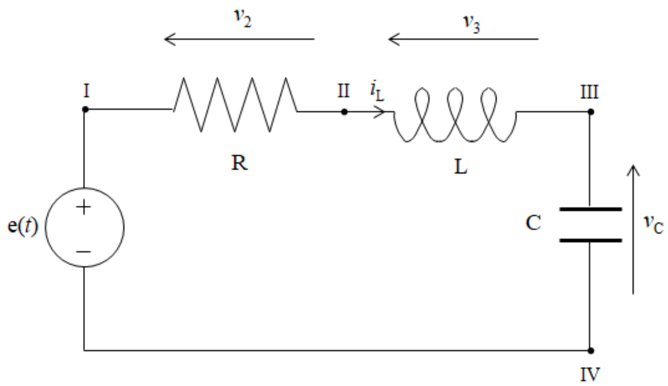


Fig. 6.23 – Circuito RLC serie.

Per l'RLC parallelo possiamo procedere dualmente innanzitutto osservando che nel circuito di Fig. 6.24, esiste la tensione, $v_C(t)$, unica del parallelo, che è variabile di stato e quindi continua. Considerando la LKC al nodo I scriviamo:

$$i_2(t)+i_L(t)+i_4(t)=\mathrm{j}(t) \qquad \text{intorno a } t^* \tag{6.89}$$

Cerchiamo ora di "bilanciare" la discontinuità del generatore di corrente al secondo membro. Nella (6.89) abbiamo che: $i_2(t)= v_C(t)/\mathrm{R}$ che deve essere continua, $i_L(t)$ che essendo una variabile di stato deve essere necessariamente continua ed infine $i_4(t)$ che, essendo pari alla corrente del condensatore, può essere discontinua. Concludiamo che la discontinuità del generatore di corrente è bilanciata dalla corrente nel condensatore $i_4(t)$.

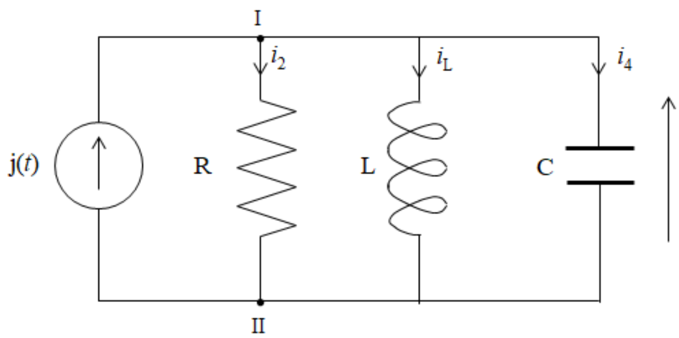


Fig. 6.24 – Circuito RLC parallelo.

Osserviamo, inoltre, che la tensione dell'induttore, che in generale possiamo ammettere essere discontinua, risulta continua in quanto è in parallelo ad un condensatore che gli impone una tensione continua.

3.6.1 Esercizio

Consideriamo il circuito di Fig. 6.25 che risulta un pochino più complesso di un semplice RLC serie o RLC parallelo. Supponendo che in t^* il generatore presenti una discontinuità di prima specie, ci chiediamo come si comportano tutte le grandezze in gioco intorno a t^*. In particolare, vogliamo sapere quali sono le grandezze continue e quali sono discontinue.

Certamente:

- $i_L(t)$, essendo una variabile di stato, deve essere necessariamente continua;
- $v_C(t)$, essendo una variabile di stato, deve essere necessariamente continua.

Poi consideriamo la LKT alla maglia:

$$v_2(t)+v_3(t)+\underbrace{v_C(t)}_{continua}=\mathrm{e}(t) \qquad \text{intorno a } t^* \tag{6.90}$$

e la LKC al nodo II:

$$i_2(t)=\underbrace{i_L(t)}_{continua}+i_3(t) \qquad \text{intorno a } t^* \tag{6.91}$$

Nella (6.90) abbiamo che entrambe le tensioni $v_2(t)$ e $v_3(t)$ potrebbero bilanciare la tensione discontinua del generatore e(t). Questa volta, a differenza del RLC serie, in cui $v_2(t)$=R$i_L(t)$ abbiamo, dalla (6.91):

$$v_2(t)=\mathrm{R}_1\left(\underbrace{i_L(t)}_{continua}+\frac{v_3(t)}{\mathrm{R}_2}\right) \qquad \text{intorno a } t^* \tag{6.92}$$

Essendo poi, la tensione $v_3(t)$ uguale a quella dell'induttore, che può essere discontinua, concludiamo che sia la tensione $v_2(t)$ che $v_3(t)$ possono essere discontinue "bilanciando" la discontinuità del generatore.

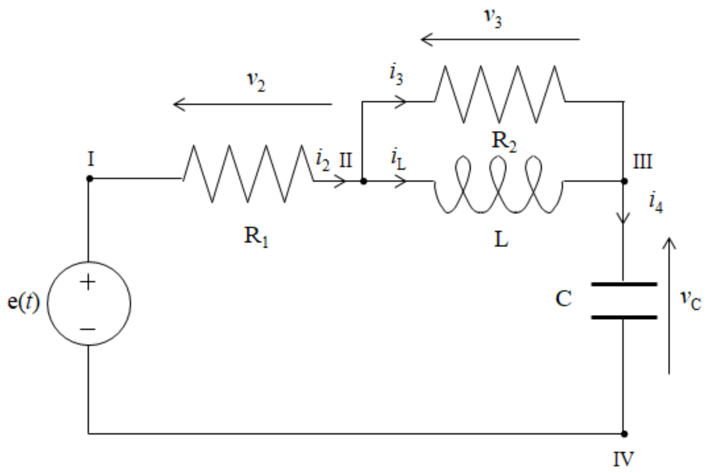


Fig. 6.25 – Circuito del II ordine con discontinuità del generatore.

Quello che accade è che la presenza del resistore R_2, in parallelo all'induttore L, crea una nuova maglia, rappresentata in Fig. 6.26, e dunque crea un percorso chiuso per le correnti dei bipoli della maglia che possono essere discontinue in quanto non includono quella dell'induttore che invece deve essere continua.

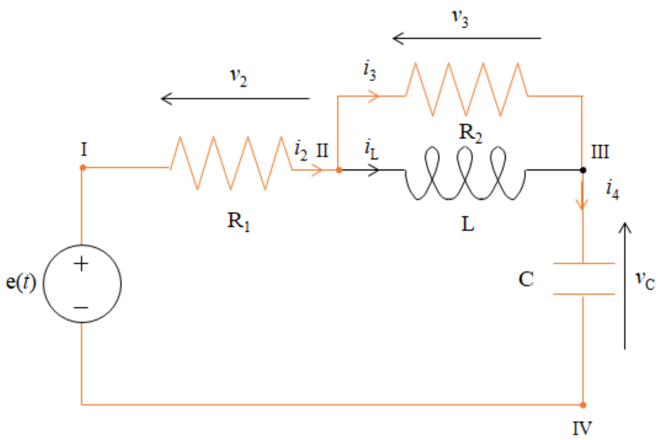


Fig. 6.26 – Circuito di Fig. 6.25 con una maglia in evidenza.

Il ragionamento fatto per risolvere quest'esercizio non è l'unico possibile. Possiamo allenarci a costruire diversi percorsi logici che approdino ad una soluzione accettabile. Per esempio, per esercizio, possiamo chiederci:

Come possiamo modificare un circuito RLC parallelo affinché la tensione sull'induttore sia discontinua?

3.7 Il principio di sovrapposizione degli effetti

Per concludere, è opportuno rilevare che quando in un circuito dinamico ci sono più generatori possiamo usare il ***principio di sovrapposizione degli effetti*** (PSE). Tale principio è verificato se nel circuito tutti i bipoli passivi sono lineari. Utilizzando l'approccio sistema ingresso-stato-uscita del §3.1, la soluzione sarà la somma di diverse soluzioni, ognuna corrispondente alla risposta ad un singolo generatore. Quando consideriamo uno dei generatori vorrà dire che abbiamo spento tutti gli altri, ossia consideriamo un corto circuito al posto dei generatori di tensione e un circuito aperto al posto dei generatori di corrente. Calcolate tutte le risposte ai vari generatori, le condizioni iniziali vanno imposte alla sovrapposizione di queste sommate al termine transitorio.

Descriviamo con maggior dettaglio quanto appena detto. Consideriamo un generico circuito lineare con due generatori da un punto di vista sistema ingresso–stato–uscita, come mostrato in Fig.6.27.

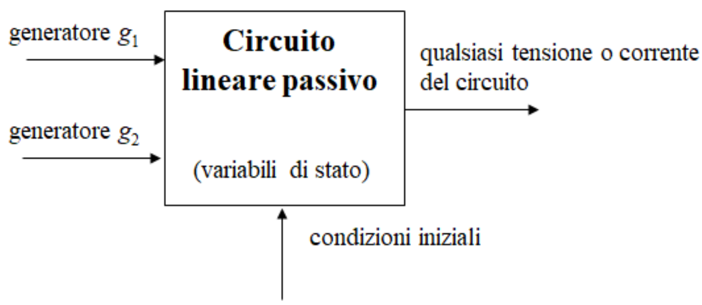


Fig.6.27 – Sistema ingresso–stato-uscita per un circuito lineare forzato da due generatori.

Per studiare un circuito dinamico del I ordine con due generatori, dobbiamo scrivere il problema di Cauchy (6.18) nel modo seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} + \dfrac{1}{\tau}x(t) = G_1(t) + G_2(t) & t > t_0 \\ x(t_0^-) = x(t_0^+) = x(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{6.93}$$

dove le funzioni $G_1(t)$ e $G_2(t)$ sono i termini forzanti relativi, rispettivamente, al generatore $g_1(t)$ e $g_2(t)$.

Il problema (6.93) si risolve applicando la sovrapposizione degli effetti al calcolo della sola soluzione particolare ossia al calcolo della soluzione forzata. Infatti, l'integrale generale dell'omogenea associata, relativa all'evoluzione libera, non dipende dai generatori se non per la sola determinazione della costante k. Nella (6.94) riassumiamo quanto appena detto.

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \underbrace{\mathrm{k}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)}}_{\substack{\text{integrale generale}\\ \text{dell'omogenea}\\ \text{associata}}} + \underbrace{x_{\mathrm{p}1}(t)}_{\substack{\text{integrale particolare}\\ \text{dovuto a } \mathrm{G}_1}} + \underbrace{x_{\mathrm{p}2}(t)}_{\substack{\text{integrale particolare}\\ \text{dovuto a } \mathrm{G}_2}} = \\ &= \underbrace{\left(\mathrm{X}_0 - x_{\mathrm{p}1}(t_0) - x_{\mathrm{p}2}(t_0)\right) e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)}}_{\substack{\text{termine}\\ \text{transitorio}}} + \underbrace{x_{\mathrm{p}1}(t)}_{\substack{\text{termine di}\\ \text{regime dovuto a } \mathrm{G}_1}} + \underbrace{x_{\mathrm{p}2}(t)}_{\substack{\text{termine di}\\ \text{regime dovuto a } \mathrm{G}_2}} \end{aligned}} \qquad (6.94)$$

Nella (6.94) si osserva che, rispetto a quanto abbiamo imparato nel caso di un sol generatore, si ha una difficoltà aggiuntiva dovuta al calcolo di due integrali particolari (o due evoluzioni forzate). Operativamente il calcolo della soluzione complessiva risulta molto semplice poiché, grazie alla sovrapposizione degli effetti, posso calcolare prima un termine di regime (una soluzione forzata) dovuto ad un sol generatore spegnendo l'altro e poi invertendo posso calcolare l'altro termine di regime (l'altra soluzione forzata) spegnendo il generatore che ho considerato per primo.

Nella Fig. 6.28 abbiamo rappresentato l'applicazione della sovrapposizione degli affetti per il calcolo della soluzione con il termine transitorio e di regime.

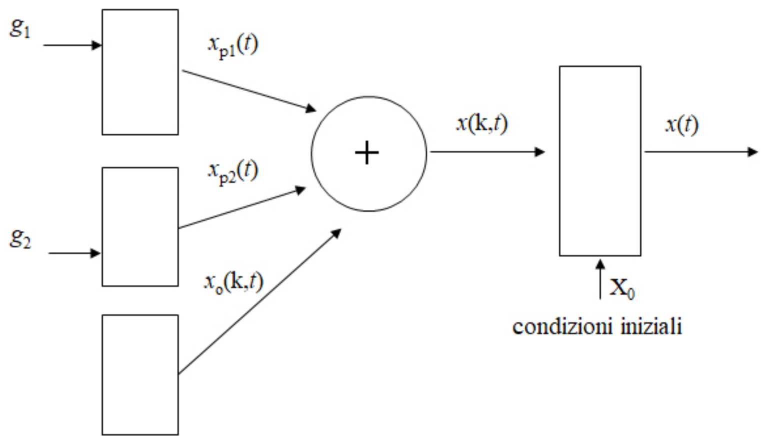


Fig. 6.28 – Calcolo della soluzione con la sovrapposizione degli effetti.

Si troverà risolto un circuito con due generatori nella § 6.1 della Lezione 7.

4 Cosa vale in regime dinamico che abbiamo dimostrato in regime a–dinamico[12]?

Pur se con le loro specificità, i bipoli induttore e condensatore, se inseriti in una rete insieme ad altri bipoli, devono anche loro sottostare alle ***leggi di Kirchhoff***: la LKC e la LKT, istante per istante. La conseguenza immediata di questa constatazione è che tutte le proprietà delle reti che abbiamo potuto dimostrare valide in regime stazionario, basandoci sulle sole leggi di Kirchhoff, restano valide, istante per istante, anche in regime dinamico. Proviamo a ricordarle.

In primo luogo, come già abbiamo ampiamente acquisito, si possono scrivere per un circuito in regime dinamico $n-1$ equazioni ai nodi ed $l-(n-1)$ equazioni alle maglie, oppure $n-1$ equazioni nelle incognite potenziali ai nodi, o ancora $l-(n-1)$ equazioni nelle incognite correnti di maglia. Le equazioni conterranno, in alcuni termini, delle derivate temporali, e quindi saranno equazioni differenziali ordinarie: ci porremo tra breve il problema della loro soluzione.

Si potrà considerare valido il ***teorema di Tellegen*** istante per istante! Dal teorema di Tellegen si potrà derivare un ***teorema di reciprocità*** (vedi Lezione 10) anch'esso valido istante per istante.

Si intuisce anche che tutti i ***principi di equivalenza*** tra bipoli dinamici (serie, parallelo, stella-triangolo) sarebbero facilmente estendibili se sapessimo come trattare in maniera adeguata le caratteristiche dinamiche dell'induttore e del condensatore. Questo lo sapremo fare nel regime sinusoidale introducendo il metodo simbolico come vedremo largamente nella Lezione 8. Tuttavia, è chiaro che, se in un circuito dinamico ho due resistenze in serie o in parallelo o una stella di resistenze, quindi se ho un sotto-circuito costituito da sole resistenze, allora posso utilizzare i principi di equivalenza suddetti.

Rimanendo nell'ambito dei principi di equivalenza, i ***teoremi del generatore equivalente di Thevenin e Norton*** abbiamo visto che si possono utilizzare nei circuiti dinamici del I ordine se l'unico elemento dinamico si considera esterno al sotto-circuito su cui operare la trasformazione in uno equivalente. Pertanto, possiamo affermare che

---

[12] Luciano De Menna (1998). *Elettrotecnica.* Napoli:Vittorio Pironti. p.121.

non è possibile determinare un sotto-circuito equivalente secondo Thevenin o Norton se nel sotto-circuito sono presenti elementi dinamici. Anche questo strumento, come quello precedente, lo potremo utilizzare nel regime sinusoidale con il metodo simbolico come vedremo nella Lezione 8.

Per quanto riguarda la ***formula di Millman***, dovremmo rinunziarci in quanto non è possibile, per la presenza di elementi dinamici, esprimere la corrente di tutti i lati in funzione della tensione cercata tra i due unici nodi del circuito. Anche la formula di Millman, come per i principi di equivalenza, la potremo utilizzare con il metodo simbolico come vedremo nella Lezione 8.

Non è invece più valido il ***teorema di non amplificazione*** delle tensioni e quindi delle correnti. Il motivo è facilmente intuibile: come si è visto, in regime dinamico esistono bipoli in grado di immagazzinare e poi restituire energia; partendo da questa considerazione si può provare ad individuare, nella dimostrazione che abbiamo dato di tali teoremi, quale è l'ipotesi che viene meno quando le grandezze variano nel tempo.

5 Appendici

Appendice 1

Per capire meglio il significato di integrale generale della (6.18), inteso come famiglia di funzioni, facciamo riferimento alla generica famiglia di funzioni:

$$y = f\left(\mathrm{k}, x\right) = \mathrm{k}e^{-x} \tag{A.1}$$

e al suo grafico in Fig. A1.1.

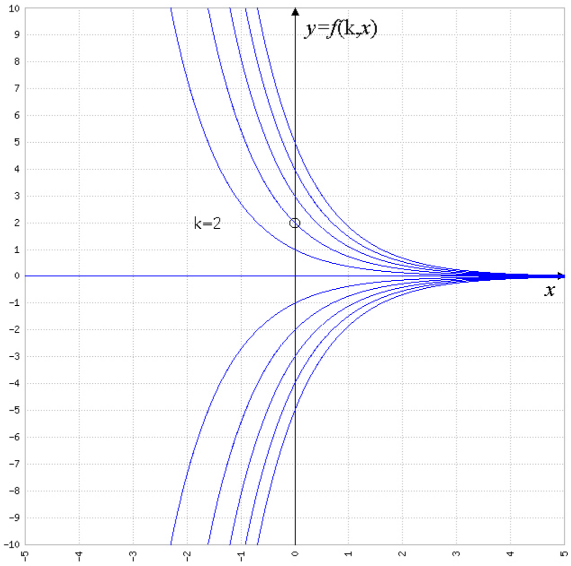


Fig. A1.1 – Grafico della famiglia di funzioni (A1.1)[13].

Osserviamo come la (A.1) rappresenta una famiglia di curve nel piano *x,y* di Fig. A1.1, e come, per ottenere una delle curve della famiglia, possiamo specificare il valore in cui la curva deve intersecare l'asse delle *y*. Nel grafico abbiamo scelto, come esempio, il valore 2 che corrisponde ad una condizione iniziale $y(X_0)$:

[13] Il grafico è stato ottenuto con la piattaforma web https://www.mathe-fa.de/it.

$$y = f(\mathrm{k},0) = 2 \Rightarrow \mathrm{k} = 2 \tag{A.2}$$

Grazie alla (A.2) abbiamo selezionato una delle curve tra tutte quelle della famiglia, in particolare quella corrispondente ad una data condizione. Nell'esempio fatto questa condizione è data dal valore in corrispondenza del quale la curva interseca l'asse delle ordinate. Allo stesso modo accade che, per determinare la soluzione del problema di Cauchy (6.18), imponiamo alla famiglia di curve di avere un determinato valore nell'istante iniziale $t=t_0$.

Indice delle figure

Domande

Teoria

Dal sistema di equazioni circuitali alle equazioni di stato

6.1 Cosa si intende per *sistema di equazioni circuitali* di un circuito?

6.2 Da quante equazioni è costituito il sistema di equazioni circuitali di un circuito dinamico?

6.3 In che modo si risolve analiticamente il sistema di equazioni circuitali per un circuito dinamico?

6.4 Che tipo di equazioni sono le *equazioni di stato* di un circuito dinamico lineare?

6.5 In generale, che tipo di sistema matematico è il sistema di equazioni circuitali?

6.6 Sotto quale condizione l'equazione differenziale per un circuito dinamico è a coefficienti costanti?

6.7 Il termine noto nella equazione differenziale che risolve un circuito dinamico dipende da:

6.8 I coefficienti della equazione differenziale che risolve un circuito dinamico dipendono da:

6.9 Da cosa è costituito il sistema di equazioni circuitali?

6.10 Cosa sono le *equazioni di stato* di un circuito dinamico?

6.11 Cosa si intende per *sistema fondamentale di equazioni* di un circuito dinamico?

6.12 Quante equazioni di stato scriviamo per un circuito dinamico di ordine n?

6.13 Quale tra le seguenti è la forma corretta delle equazioni di stato scritte in forma matriciale per un generico circuito dinamico di ordine n?

6.14 Quali possono essere gli elementi della diagonale principale della matrice **D** del sistema di equazioni di stato di un circuito dinamico?

6.15 Che dimensioni ha la matrice **D** del sistema di equazioni di stato di un circuito dinamico?

6.16 Quali possono essere gli elementi della matrice **H** del sistema di equazioni di stato di un circuito dinamico?

6.17 Che dimensioni ha la matrice **H** del sistema di equazioni di stato di un circuito dinamico?

6.18 Per un circuito dissipativo, come sono gli elementi sulla diagonale principale della matrice **D**?

6.19 Per un circuito dissipativo, come sono gli elementi sulla diagonale principale della matrice **H**?

6.20 In un sistema fondamentale quante sono le equazioni che vi compaiono?

6.21 Che dimensione fisica possono avere gli elementi della diagonale della matrice **H** in un circuito dissipativo?

6.22 Che segno hanno gli elementi nella diagonale della matrice **D** in un circuito dissipativo?

6.23 Che dimensione fisica possono avere gli elementi della diagonale della matrice **D** in un circuito dissipativo?

Circuiti mal posti

6.24 Quali dei seguenti è un esempio di circuito "mal posto"?

6.25 È possibile modellare un sistema elettrico con un circuito avente due generatori ideale di tensione (corrente) in parallelo (serie)?

6.26 Possiamo modellare un sistema elettrico con un generatore ideale di tensione in parallelo ad un condensatore?

6.27 Possiamo modellare un sistema elettrico con un generatore ideale di corrente in serie ad un induttore?

Le variabili di stato

6.28 Cosa sono le *variabili di stato* di un circuito dinamico?

6.29 Quali sono le variabili di stato di un circuito dinamico?

6.30 Quante sono le variabili di stato di un circuito dinamico?

6.31 Perché le variabili di stato devono essere funzioni continue?

6.32 La tensione di un resistore deve essere continua? (Considerare tutti gli altri casi)

6.33 Può una funzione continua avere derivata discontinua?

6.34 Quali, tra le seguenti, sicuramente NON sono variabili di stato di un circuito?

L'equazione di stato dei circuiti del I ordine

6.35 Che segno hanno d ed h nella equazione di un circuito RC (RL)?

6.36 Da cosa dipende il termine forzante di un'equazione di stato di un RC serie (RL parallelo)?

6.37 Da cosa dipende il termine forzante di un'equazione di stato di un RC parallelo (RL serie)?

6.38 Quale delle seguenti è un'equazione di stato di un circuito RC serie (parallelo)?

6.39 Quale delle seguenti è un'equazione di stato di un circuito RL serie (parallelo)?

6.40 Data l'equazione di stato $\mathrm{d}\frac{dx(t)}{dt}=(\ldots)\mathrm{h}x(t)+\mathrm{g}(t)$ di un circuito dinamico del I ordine, che segno ci dobbiamo aspettare al posto del simbolo (…)?

6.41 Che differenza c'è tra equazione di stato ed equazione di stato esplicita di un circuito del I ordine?

6.42 Come chiameremo la seguente equazione $\frac{dx(t)}{dt}=-\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{d}}x(t)+\frac{\mathrm{g}(t)}{\mathrm{d}}$?

6.43 Cosa rappresenta la funzione g(t) nell'equazione di stato esplicita $\frac{dx(t)}{dt}=-\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{d}}x(t)+\frac{\mathrm{g}(t)}{\mathrm{d}}$?

6.44 Che tipo di equazione è quella che descrive i circuiti dinamici del I ordine?

La dimensione fisica dei coefficienti dell'equazione di stato

6.45 In un circuito RC (RL) che dimensione fisica hanno d ed h nella equazione di stato?

6.46 Che dimensione fisica hanno i termini dell'equazione di stato di un RC (RL)?

6.47 Che dimensione fisica hanno i termini dell'equazione di stato esplicita di un RC (RL)?

La soluzione dei circuiti dinamici

6.48 Sia dato un circuito dinamico lineare, con elementi passivi (resistori, induttori e condensatori) tempo invarianti e generatori. Le equazioni del circuito si possono ricondurre con opportune derivazioni ad un'unica equazione differenziale del seguente tipo: (sia n il numero di elementi passivi dinamici)

6.49 Come si chiama la soluzione dell'equazione differenziale che descrive il funzionamento di un circuito dinamico?

6.50 Cosa si intende per *integrale generale* dell'equazione differenziale di un circuito dinamico?

6.51 Cosa si intende per *problema alle condizioni iniziali*?

6.52 Cosa si intende per *problema di Cauchy*?

6.53 Perché per risolvere un circuito dinamico occorrono le condizioni iniziali?

6.54 Quali tra i seguenti è il corretto problema di Cauchy per un circuito dinamico lineare di ordine n?

L'approccio sistemico ai circuiti

6.55 Cosa si intende per *sistema ingresso–stato–uscita*?

6.56 Cosa possiamo considerare *ingresso* per un circuito dinamico descritto con un modello sistemico?

6.57 Cosa possiamo considerare *uscita* per un circuito dinamico descritto con un modello sistemico?

6.58 Cosa possiamo considerare *stato* per un circuito dinamico descritto con un modello sistemico?

La soluzione dei circuiti dinamici del I ordine

6.59 Quale è, tra le seguenti, la definizione più corretta per l'*integrale generale* della soluzione di un circuito dinamico del I ordine?

6.60 Quale è, tra le seguenti, la definizione più corretta per l'*integrale particolare* della soluzione di un circuito dinamico del I ordine?

6.61 Che si intende per *integrale generale* del problema di Cauchy di un circuito del I ordine?

6.62 Che si intende per *integrale particolare* o *soluzione particolare* del problema di Cauchy di un circuito del I ordine?

6.63 Che si intende per *integrale generale dell'omogenea associata* del problema di Cauchy di un circuito del I ordine?

6.64 Che si intende per *soluzione dell'omogenea associata* di un circuito del I ordine?

6.65 Che si intende per *termine di regime (*o *soluzione di regime)* di un circuito del I ordine?

6.66 Che si intende per *termine transitorio* di un circuito del I ordine?

6.67 Cosa si intende per *circuito dinamico a regime*?

6.68 Cosa determina in un circuito dinamico una soluzione particolare costante?

6.69 Cosa determina in un circuito dinamico una soluzione particolare sinusoidale?

6.70 Che significa che l'integrale particolare è *isomorfo* al generatore in un circuito dinamico lineare del I ordine?

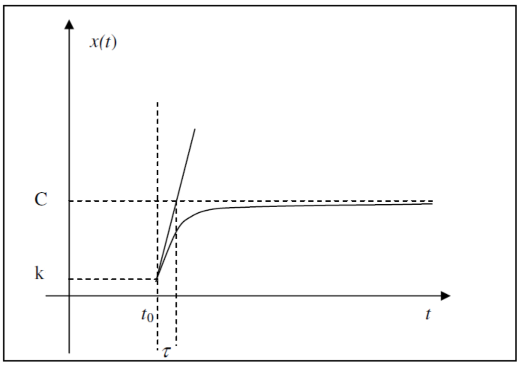
6.71 Quando possiamo ritenere estinto il transitorio di un circuito dinamico del I ordine con costante di tempo τ?

6.72 La frequenza naturale λ per un circuito rispettivamente RC (RL) è:

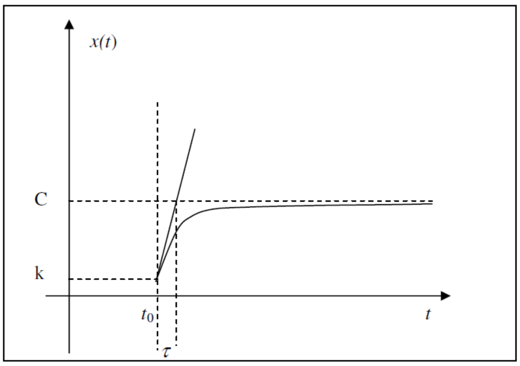
6.73 Quale è il segno della frequenza naturale di un circuito del I ordine?

6.74 Quale tra i seguenti può rappresentare un polinomio caratteristico (in λ) di un circuito del I ordine?

6.75 La funzione $x(t)$ del grafico di figura può rappresentare una variabile di stato in un circuito dinamico del I ordine se:



6.76 Se la $x(t)$ del grafico di figura rappresenta la carica di una variabile di stato di un circuito del I ordine, cosa rappresenta C (anche k, t_0, τ):



6.77 Il seguente circuito è un RL serie o parallelo? (Considerare tutti i casi di RC e RL serie e parallelo)

6.78 L'evoluzione libera e il termine transitorio di un circuito del I ordine hanno in comune:

6.79 La differenza tra soluzione transitoria e soluzione di regime di un circuito dinamico del I ordine è:

6.80 Quante condizioni iniziali abbiamo bisogno per un circuito del I ordine?

6.81 Possiamo dare la condizione iniziale alla corrente del resistore di un circuito RC (tensione per un RL)?

6.82 Per risolvere un circuito lineare del primo ordine a partire da un istante t_0 è necessario specificare cosa?

6.83 Affinché un circuito dinamico lineare con elementi passivi tempo invarianti possa avere soluzioni di regime quali delle seguenti condizioni deve essere verificata?

6.84 In un circuito dinamico lineare in regime stazionario il valore di regime delle grandezze circuitali NON è influenzato da:

6.85 Che si intende per *evoluzione libera* di un circuito lineare dinamico con condizioni iniziali assegnate?

6.86 Che si intende per *evoluzione forzata* di un circuito lineare dinamico con condizioni iniziali assegnate?

6.87 In quale istante di tempo possiamo ritenere estinto il termine transitorio della soluzione di un circuito dinamico del I ordine?

6.88 Cosa è un *circuito di carica* di un condensatore?

6.89 Come possiamo caricare un condensatore?

6.90 Cosa è un *circuito di scarica* di un condensatore?

6.91 In quale circuito si può osservare la scarica di un condensatore?

6.92 In quali condizioni un condensatore in un circuito RC si scarica?

6.93 Quali tra le seguenti è la corretta espressione dell'integrale generale del problema di Cauchy di un circuito dinamico del I ordine?

6.94 Quali tra le seguenti è la corretta espressione dell'integrale generale dell'omogenea associata del problema di Cauchy di un circuito dinamico del I ordine?

6.95 Quali tra le seguenti è la corretta espressione del termine transitorio della soluzione di un circuito dinamico del I ordine?

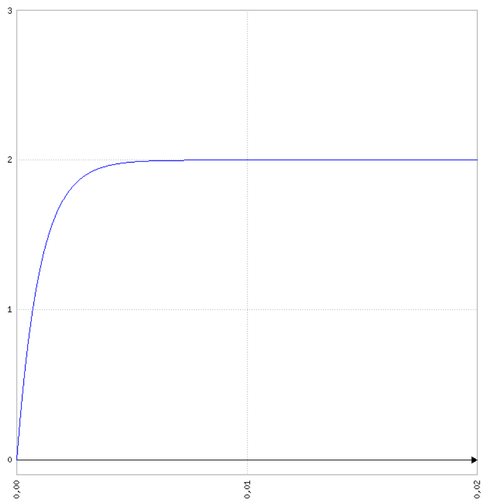
6.96 Quali tra le seguenti è la corretta espressione dell'integrale particolare dell'omogenea associata del problema di Cauchy di un circuito dinamico del I ordine alimentato da generatori costanti?

6.97 Quali tra le seguenti è la corretta espressione del termine di regime della soluzione di un circuito dinamico del I ordine alimentato da generatori costanti?

6.98 Quali tra le seguenti è la corretta espressione dell'evoluzione libera di un circuito dinamico del I ordine?

6.99 Che grandezza può rappresentare il grafico di figura, relativo ad un circuito dinamico del I ordine che osserviamo per $t>0$?

(produrre tutti i possibili grafici e valutarli)

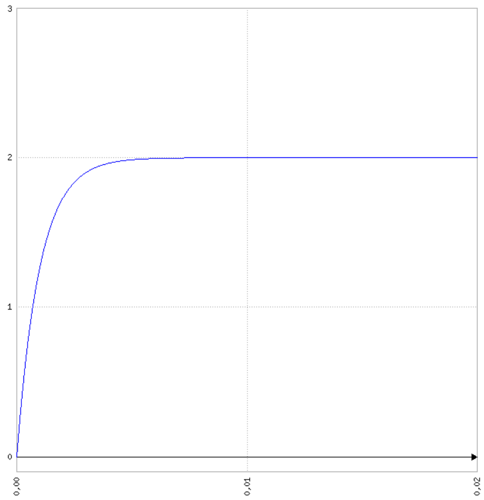


6.100 Produrre il grafico che rappresenta l'andamento tipico di una carica di un condensatore per un circuito RC acceso in t_0=0.5s, con condizioni iniziali nulle e valore di regime 7V. Dare una stima della costante di tempo utilizzata nel grafico.

6.101 Produrre il grafico che rappresenta l'andamento tipico di una carica di un condensatore per un circuito RC acceso in t_0=0.5s, con condizioni iniziali X_0=2V e valore di regime 7V. Dare una stima della costante di tempo utilizzata nel grafico.

6.102 Che cosa può rappresentare il grafico di figura, relativo alla tensione del condensatore di un circuito dinamico RC che osserviamo per $t>0$?

(produrre tutti i possibili grafici e valutarli)



6.103 Produrre il grafico che rappresenta l'andamento tipico di una scarica di un condensatore per un circuito RC acceso in t_0=0.5s e in condizioni iniziali X_0=7V e valore di regime 3V. Dare una stima della costante di tempo utilizzata nel grafico.

6.104 Produrre il grafico che rappresenta l'andamento tipico di una scarica di un condensatore per un circuito RC acceso in t_0=0.5s e in condizioni iniziali X_0=7V e valore di regime nullo. Dare una stima della costante di tempo utilizzata nel grafico.

La costante di tempo

6.105 Quale è il segno della costante di tempo di un circuito del I ordine?

6.106 Le costanti di tempo per i circuiti rispettivamente RC e RL sono:

6.107 Che dimensioni fisiche ha la sostante di tempo di un circuito dinamico del I ordine?

6.108 Cosa rappresenta la costante di tempo di un circuito dinamico del I ordine?

6.109 Come si può graficamente determinare la costante di tempo di un circuito del I ordine?

6.110 Come si può determinare, considerando i parametri di un circuito dinamico del I ordine, la costante di tempo?

Il circuito equivalente di un circuito dinamico del I ordine

6.111 In che modo è possibile trasformare un qualsiasi circuito dinamico lineare del I ordine in un circuito RC serie (RE parallelo, RL serie, RL parallelo)?

6.112 Utilizzando il circuito equivalente di un generico circuito dinamico del I ordine, come posso calcolare, con un'unica formula, la costante di tempo del circuito?

6.113 Utilizzando il circuito equivalente di un generico circuito dinamico del I ordine, nell'espressione della costante di tempo t=$R_{eq}C$ cosa rappresenta la R_{eq}?

6.114 Come calcolo la resistenza equivalente presente in un circuito equivalente di un circuito dinamico lineare del I ordine?

6.115 Come calcolo il valore del generatore di tensione (di corrente) ideale presente in un circuito equivalente ad un circuito dinamico lineare del I ordine?

L'origine dei transitori

6.116 Cosa può dare origine ad un fenomeno transitorio in un circuito dinamico del I ordine?

6.117 Cosa, tra le seguenti cause, NON dà origine ad un transitorio in un circuito dinamico?

6.118 Come possiamo determinare la condizione iniziale della variabile di stato di un circuito del I ordine se non ci viene fornita?

6.119 Fissato l'istante iniziale t_0 di una dinamica di un circuito del I ordine, cosa ci garantisce che la conoscenza del valore della variabile di stato per $t < t_0$ possa esserci utile alla determinazione della condizione iniziale per $t < t_0$?

L'analisi per intervalli

6.120 Cosa s'intende con *analisi per intervalli* nella risoluzione di un circuito dinamico?

6.121 Quando risulta conveniente utilizzare un'analisi per intervalli nella risoluzione di un circuito dinamico?

6.122 In un'analisi per intervalli di un circuito dinamico, quando studiamo l'intervallo $t<t_0$ cosa dobbiamo suppore? (t_0 instante iniziale di una dinamica transitoria)

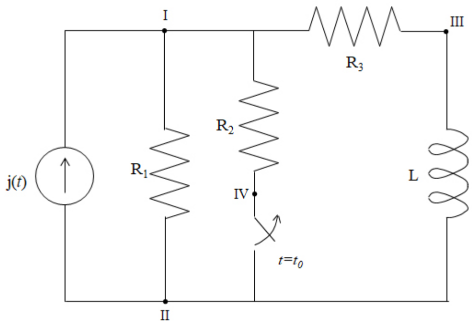
6.123 In un'analisi per intervalli di un circuito dinamico del I ordine, quando studiamo l'intervallo $t>t_0$ in che modo ci siamo trovati la condizione iniziale? (t_0 instante iniziale di una dinamica transitoria)

Circuiti che cambiano valore di regime

6.124 Cosa accade, in un circuito dinamico alimentato da un generatore costante che si trova a regime, se il generatore cambia valore della grandezza erogata nell'istante $t = t_0$?

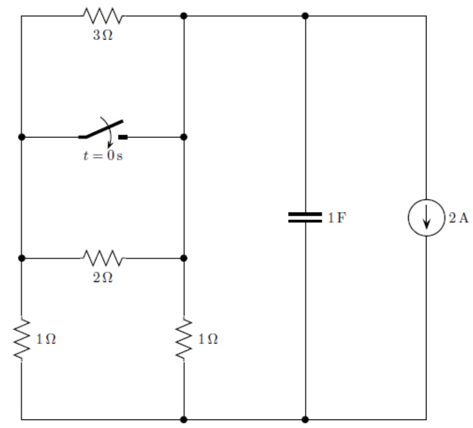
I circuiti del I ordine con interruttori

6.125 Dato il circuito di figura, disegnare il circuito per $t < t_0$ e quello per $t > t_0$.



6.126 Dato il circuito di figura, disegnare il circuito per t <0 e quello per t >0[14].

[14] Questo circuito è stato generato da un software presente nella piattaforma https://autocircuits.org/autocir_home.html realizzato dal prof. Stefano Grivet-Talocia, Politecnico di Torino. È possibile generare altri esercizi risolti utilizzando il sito che prevede varie categorie di esercizi.



I circuiti con generatori discontinui

6.127 Sia dato un circuito dinamico RLC serie (parallelo). Il generatore di tensione (corrente) è discontinuo in un istante dato t^*, nell'istante t^* la tensione sul resistore (tutte le altre grandezze) è continua o discontinua?

6.128 In un circuito dinamico RLC serie (parallelo), si osserva in $t=t_0$ una discontinuità di prima specie nella tensione erogata dall'unico generatore (della corrente). Cosa possiamo dire della corrente della maglia (della tensione sul parallelo)?

6.129 In un circuito dinamico RL serie, si osserva in $t=t_0$ una discontinuità di prima specie nella tensione erogata dall'unico generatore. Cosa possiamo dire della corrente della maglia?

(considerare tutti gli altri casi: RL parallelo, RC serie, RC parallelo)

6.130 Quale di queste funzioni è derivabile ed ha una derivata discontinua (u(t) funzione gradino unitario)?

Il principio di sovrapposizione degli effetti

6.131 In che modo si usa il principio di sovrapposizione degli effetti in un circuito dinamico lineare del I ordine avente due generatori?

6.132 Come deve essere un circuito dinamico con più generatori presenti, per poter utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti?

6.133 Se abbiamo un circuito dinamico del I ordine con due generatori, quale delle seguenti è l'espressione corretta dell'integrale generale del problema di Cauchy?

6.134 Se la funzione $x(t) = \mathrm{k}e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} + x_{\mathrm{p1}}(t) + x_{\mathrm{p2}}(t)$ rappresenta l'integrale generale di un circuito del I ordine alimentato da due generatori, quale delle seguenti è l'espressione corretta per imporre il soddisfacimento delle condizioni iniziali X_0?

Cosa vale in regime dinamico?

6.135 Le leggi di Kirchhoff valgono per circuiti dinamici?

6.136 Le leggi di Kirchhoff valgono per circuiti dinamici non lineari?

6.137 Il teorema di Tellegen vale per circuiti dinamici?

6.138 Il teorema di Tellegen vale per circuiti dinamici non lineari?

6.139 I principi di equivalenza si possono applicare nei circuiti dinamici?

6.140 Il teorema del generatore equivalente si può usare, in generale, in un circuito dinamico lineare?

6.141 In che modo è possibile utilizzare il teorema del generatore equivalente in un circuito dinamico lineare?

6.142 E' possibile utilizzare la formula di Millman in un circuito dinamico lineare?

6.143 Il teorema di non amplificazione delle correnti (tensioni) vale per circuiti dinamici?