

Identificación paramétrica en línea de edificios con tiempos de viaje de onda

Jesús Morales-Valdez* Luis Alvarez-Icaza*

* *Instituto de Ingeniería*
Universidad Nacional Autónoma de México
04510 Coyoacán DF, México
(e-mail: *jmoralesv@iingen.unam.mx, alvar@pumas.iingen.unam.mx*)

Resumen: Se presenta un modelo alternativo para edificios a cortante bajo el principio de movimiento inducido por una onda sísmica. La meta final es identificar los parámetros estructurales en línea, como lo son el amortiguamiento y la rigidez, haciendo uso de los retardos generados en la llegada del movimiento sísmico entre un piso y otro. El esquema de identificación planteado, a diferencia de los tradicionales, resuelve el problema de desacoplar los parámetros rigidez-masa y amortiguamiento-masa, de manera que una vez obtenidos los parámetros sea posible la implementación de técnicas de control de vibraciones o de detección y evaluación de daño de una estructura. El método de identificación empleado es el de mínimos cuadrados con factor de olvido. Los resultados de simulación muestran la versatilidad del método propuesto.

Palabras clave: Identificación de parámetros, control de vibraciones, monitoreo de salud estructural, detección de daño, propagación de ondas.

1. INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente, los edificios son analizados usando métodos de análisis de vibración, como lo son las formas modales y las frecuencias naturales, como en los trabajos de Maia et al. (2003); Hongping et al. (2011); Hwang and Kim (2004); Rahai et al. (2006); Jeong-Tae et al. (2003). En la mayoría de los métodos propuestos se requiere identificar un gran número de parámetros, lo cual hace el proceso relativamente lento.

En otros casos, se estudia la respuesta estructural mediante técnicas de procesamiento de señales, como son las transformadas wavelet, con el objetivo de recuperar los parámetros estructurales y determinar con ellos posible daño estructural como en Huang and Su (2007); Spanos et al. (2006); Yam et al. (2003). Por otra parte en el área de control de vibraciones se han desarrollado algunos trabajos, entre ellos Jiménez and Álvarez Icaza (2007); Kuwabara et al. (2013); Shih-Yu and Shih-Chieh (2009); Garrido and Concha (2011); Morales-Valdez and Alvarez-Icaza (2014b) los cuales recuperan los parámetros estructurales en tiempo real.

En este trabajo se presenta un enfoque novedoso como solución alternativa al problema de identificación de parámetros en edificios, que extiende los trabajos de Todorovska and Trifunac (2008); Todorovska and Rahmani (2012); Zhang et al. (2011) que postulan un modelo de propagación de ondas como base para determinar la rigidez en edificios. Se propone ahora mantener el enfoque de propagación de ondas, pero se transforma la forma de procesar la información para pasar de un proceso fuera de línea a uno de identificación de parámetros en tiempo real. Este método mantiene las ventajas de poder generar

información local para tener mayor certeza de la ubicación del daño, como en Morales-Valdez and Alvarez-Icaza (2014a).

2. MODELO MATEMÁTICO

Un modelo de edificio a cortante clásico como el presentado en la Fig. 1, donde se supone que: a) se presentan desplazamientos únicamente en una dirección, b) la masa de cada uno de los pisos está concentrada en sus centros de masa, c) cumple con la hipótesis de diafragma de piso rígido¹, d) las columnas son flexibles a deformaciones laterales y rígidas en dirección vertical y e) es soportado en suelo firme, puede ser representado por un sistema de n grados de libertad (GDL), como se muestra en la Fig. 2. En ésta, se representa un conjunto de n masas interconectadas por resortes de rigidez k y coeficiente de amortiguamiento c . El modelo es excitado por una fuerza \ddot{u}_g , tal que sobre la masa m_i actúan las fuerzas de reacción F_{ki-1} , F_{ki} , F_{ci-1} , F_{ci} , debidas a la reacción de los resortes y de los amortiguadores, respectivamente, mientras F_{m_i} describe la fuerza inercial debida a la masa m_i . En el modelo, u_1, u_2, \dots, u_n corresponden a las posiciones relativas de cada una de las masas.

De acuerdo al principio D'Alembert, el equilibrio en cada instante de tiempo sobre la masa m_i debido a la excitación F , puede ser calculado como

$$\sum F_{m_i} = -F_{k_i} - F_{c_i} - F_{m_i} + F_{k_{i+1}} + F_{c_{i+1}} = 0 \quad (1)$$

¹ es decir, los pisos son tan rígidos que no se deforman

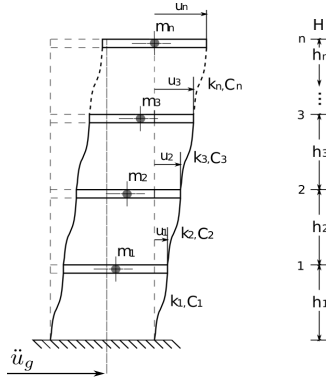


Figura 1. Edificio de corte clásico

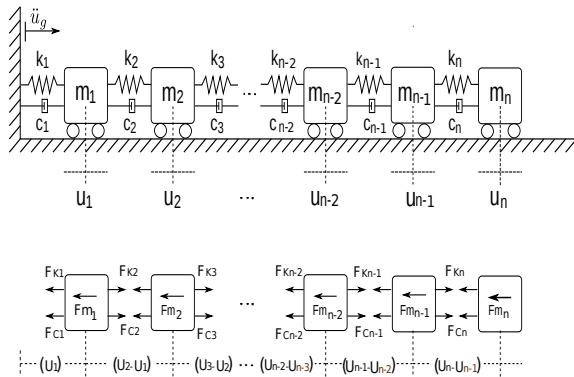


Figura 2. Sistema masa-amortiguamiento-rigidez

despejando la fuerza inercial debida a la reacción de la masa F_{m_i} y sustituyendo su valor por el producto de la masa por la aceleración,² se obtiene²

$$-F_{k_i} - F_{c_i} + F_{k_{i+1}} + F_{c_{i+1}} = m_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2)$$

De acuerdo al modelo reológico de Kelvin, las fuerzas de resistencia elástica sobre la masa F_{m_i} se pueden calcular como

$$F_{k_i} = -k(u_i - u_{i-1}) \quad (3a)$$

$$F_{k_{i+1}} = k(u_{i+1} - u_i) \quad (3b)$$

$$F_{c_i} = -c(u_i - u_{i-1}) \quad (3c)$$

$$F_{c_{i+1}} = c(u_{i+1} - u_i) \quad (3d)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores (3a), (3b), (3c) y (3d) en la Ec. (2) se obtiene

$$m_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = k(u_{i+1} - u_i) - k(u_i - u_{i-1}) + \quad (4)$$

$$c(\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i) - c(\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1}) \quad (5)$$

Reduciendo y agrupando términos semejantes, se llega a

² Note que la derivada de u_i puede ser temporal o espacial a lo largo del edificio con altura H . Por simplicidad se omiten los argumentos de u_i en sus derivadas parciales.

$$\underbrace{k(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})}_{\partial^2 u_i / \partial y^2} + \underbrace{c(\dot{u}_{i+1} - 2\dot{u}_i + \dot{u}_{i-1})}_{\partial^2 \dot{u}_i / \partial y^2} = m_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (6)$$

En la Ec. (6), los términos entre paréntesis son similares a la segunda derivada del desplazamiento u y de la velocidad \dot{u} mediante una aproximación por diferencias finitas centradas con respecto a la variable espacial y , las cuales tienen la siguiente forma, LeVeque (2007)

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta y)^2} \quad (7a)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{u}_i}{\partial y^2} \approx \frac{\dot{u}_{i+1} - 2\dot{u}_i + \dot{u}_{i-1}}{(\Delta y)^2} \quad (7b)$$

por lo tanto, multiplicando las Ecs. (7a) y (7b) por $(\Delta y)^2$ y sustituyendo los productos resultantes en la Ec. (6) se obtiene

$$(\Delta y)^2 \left(k \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 \dot{u}_i}{\partial y^2} \right) = m_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (8)$$

despejando m_i de la Ec. (8), se obtiene

$$\beta^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + \eta^2 \frac{\partial^2 \dot{u}_n}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \quad (9)$$

cuyas condiciones iniciales y de frontera son:

$$u(y, 0) = 0 \quad 0 \leq y \leq H \quad (10a)$$

$$\dot{u}(y, 0) = 0 \quad 0 \leq y \leq H \quad (10b)$$

$$u(0, t) = u_g \quad 0 < t \quad (10c)$$

$$\mu \dot{u}(H, t) = 0 \quad 0 < t \quad (10d)$$

La Ec. (9) es conocida como la ecuación de onda con amortiguamiento de Kelvin-Voigt, la cual es usada para describir la respuesta dinámica de los edificios frente una acción sísmica \ddot{u}_g . Además representa el comportamiento viscoelástico de las ondas de corte en una dimensión (1D) dentro de un estrato³, donde β es la velocidad de corte de la onda y η es una constante no negativa proporcional a la fuerza del amortiguador. Es importante notar que de acuerdo a las Ecs. (10a) y (10b) el edificio inicialmente se encuentra en reposo y es excitado únicamente en su base (10c). Además está libre de esfuerzos en el techo (10d).

3. DISCRETIZACIÓN Y LINEALIZACIÓN DEL MODELO

De acuerdo a la Ec. (9), el modelo de edificio de corte puede ser representado por una barra elástica dividida en capas de acuerdo al número de pisos, soportada por una base rígida y excitada por una acción sísmica en la base. Además se supone que el edificio se mueve únicamente de manera horizontal en el eje Y , como se ilustra en la Fig. 3

Actualmente existen muchos métodos para resolver ecuaciones diferenciales parciales, siendo algunos de los más

³ En este trabajo, un estrato equivale a un piso del edificio

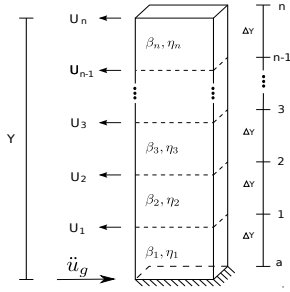


Figura 3. Barra de cortante elástica

usuales, la transformación de coordenadas por backstepping como en Smyshlyayev and Krstic (2010), Ramm (2001), Smyshlyayev and Krstic (2004), Cheng et al. (2010), las soluciones analíticas como en Haberman (1983) y otros métodos, Mocenni et al. (2011). En este trabajo se realiza una semidiscretización por diferencias finitas centradas a lo largo de la derivada espacial, con un número de puntos equivalente al número de pisos del edificio. A continuación se describe el método de discretización usado.

3.1 Semidiscretización por Diferencias Finitas Centradas

Considerando la relación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta y^2} (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) \quad (11)$$

que describe la aproximación de la segunda derivada en un punto, se puede obtener una representación del mismo mediante un operador matricial. Para ello es necesario considerar una malla con n número de puntos y una condición de frontera a como se muestra en la Fig. 3. Donde, Y corresponde a la altura total del edificio, Δy es la distancia constante entre pares de pisos y $j = 1, 2, \dots, n$ describe los puntos donde se quiere observar la respuesta dinámica. Resultando

$$\Delta y = \frac{Y}{(n+1)} \quad (12)$$

Aplicando la aproximación por diferencias finitas centradas a cada punto de la malla hasta el $n-1$, y un *backward* de segundo orden al punto n , se obtiene el siguiente grupo de ecuaciones

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}_1 = \frac{1}{\Delta y^2} (u_a - 2u_1 + u_2) \quad (13a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}_2 = \frac{1}{\Delta y^2} (u_1 - 2u_2 + u_3) \quad (13b)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}_3 = \frac{1}{\Delta y^2} (u_2 - 2u_3 + u_4) \quad (13c)$$

⋮

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}_{n-1} = \frac{1}{\Delta y^2} (u_{n-2} - 2u_{n-1} + u_n) \quad (13d)$$

$$(13e)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}_n = \frac{1}{\Delta y^2} (u_{n-2} - 2u_{n-1} + u_n) \quad (13f)$$

es claro que el grupo de ecuaciones (13) se puede reescribir en forma matricial si se usa un vector de estados más un vector de condiciones de frontera, es decir

$$A = \frac{1}{\Delta y^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} u, \quad (14)$$

$$u = \begin{bmatrix} u_a \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{\Delta y^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{u}_g \quad (15)$$

donde, u corresponde al vector de estados y \ddot{u}_g a la señal de excitación, la cual es medible. De manera que la Ec. (11) se puede reescribir como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Au + B\ddot{u}_g \quad (16)$$

La Ec. (16) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, lineal, variante en el tiempo, la cual puede ser resuelta de manera analítica o mediante métodos numéricos, como en Nieves (2003). La mayor ventaja es que por su estructura se puede utilizar un algoritmo de identificación o bien diseñar un observador de estados lineal sin requerir una transformación de coordenadas.

3.2 Linealización

Partiendo de la ecuación de onda con amortiguamiento de Kelvin-Voigt (Ec. 17)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \eta^2 \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial y^2} \quad (17)$$

y realizando el siguiente cambio de variable

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \quad (18)$$

La Ec. (17), queda descrita como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \eta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (19)$$

reagrupando, la Ec. (19) se puede expresar como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\beta^2 u + \eta^2 v) \quad (20)$$

de acuerdo al cambio de variable en la Ec. (18) se sabe que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \dot{u} = v \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \dot{v} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\beta^2 u + \eta^2 v)\end{aligned}\quad (21)$$

Aplicando la discretización espacial (16) a la Ec. (21), se obtiene un sistema como se muestra a continuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta^2 A u + \eta^2 A v + B \ddot{u}_g \quad (22)$$

si además la excitación en la condición de frontera es $-\ddot{u}_g$ y considerando el cambio de variable realizado en las Ecs. (18) y (21), la Ec. (17) puede ser reescrita en espacio de estados como

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \beta^2 A & \eta^2 A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \ddot{u}_g \quad (23)$$

donde la matriz $I \in \mathcal{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad, $(\beta^2 A)$ y $(\eta^2 A) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ son las matrices resultantes de la discretización espacial que contienen a β y a η . Por otro lado, $u \in \mathcal{R}^{n \times 1}$, $\dot{u} \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ y $\ddot{u} \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ son los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración relativos al suelo respectivamente, mientras \ddot{u}_g es la aceleración que sufre el suelo aplicada en la condición de frontera. La Ec. (23) tiene una estructura similar a un modelo de edificio a cortante en el espacio de estados.

4. ESTIMACIÓN CON MÍNIMOS CUADRADOS

El método utilizado en este trabajo es el de mínimos cuadrados con factor de olvido, que a diferencia del método convencional, introduce un factor δ que pondera más a las muestras recientes, permitiendo así detectar cambios en los parámetros cuando el algoritmo lleva un tiempo considerable de funcionamiento. La idea de la estimación en línea, consiste en ajustar los parámetros $\theta(t)$ de manera continua de tal manera que la salida estimada del modelo parametrizado $\hat{y}(\theta(t), t)$ sea igual a la salida real $y(t)$ del sistema, a medida que transcurre el tiempo. Si esto sucede, bajo la condición de excitación persistente, los valores del vector de parámetros estimados $\theta(t)$ tienden hacia los valores del vector de parámetros reales θ_0 del modelo del sistema, (Ioannou and Sun, 1989). Matemáticamente este algoritmo se puede implantar como se muestra a continuación.

4.1 Parametrización del modelo

Partiendo de la ecuación de onda discretizada que describe el comportamiento de la estructura, donde $\beta > 0$, $\eta > 0$ son matrices diagonales constantes desconocidas⁴

$$\ddot{u} = \beta^2 (A u) + \eta^2 (A v) - B \ddot{u}_g \quad (24)$$

y si se supone que los vectores u , \dot{u} y \ddot{u}_g son señales medidas, una forma de parametrizar el modelo es

$$\ddot{u} + B \ddot{u}_g = \beta^2 (A u) + \eta^2 (A v) \quad (25)$$

⁴ Para ello se supone que β, η pueden cambiar de piso a piso.

donde $(\ddot{u} + B \ddot{u}_g)$ es el vector de aceleración absoluta del edificio. De manera que β y η contienen los parámetros a identificar, los cuales representan la velocidad de cortante y el factor de amortiguamiento de cada piso, respectivamente.

$$z = \ddot{u} + B \ddot{u}_g \in \mathcal{R}^{n \times 1} \quad (26)$$

$$\theta = [\text{diag}\{\beta\} \text{diag}\{\eta\}]^T \in \mathcal{R}^{2n \times 1} \quad (27)$$

$$\gamma = [(A u) (A v)] \in \mathcal{R}^{n \times 2n} \quad (28)$$

donde θ es la matriz de parámetros reales y γ es el vector regresor, tal que la salida real del sistema es

$$z = \gamma \theta \quad (29)$$

y sea $\hat{\theta}$ la matriz de parámetros estimados del sistema (25), entonces la salida estimada está dada por

$$\hat{z} = \gamma \hat{\theta} \quad (30)$$

El algoritmo de estimación usado es el de mínimos cuadrados con factor de olvido, dado por las Ecs. (31) y (32)

$$\dot{P} = \delta P - P \frac{\gamma^T \gamma}{h^2} P \quad (31)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = P \gamma^T \varepsilon \quad (32)$$

con $P = P^T \in \mathcal{R}^{2n \times 2n}$, $P(0) > 0$, $\gamma \geq 0 \in \mathcal{R}$, $h^2 = 1 + \gamma^T \gamma$, satisface $\gamma/h \in L_\infty$ y garantiza que el error normalizado de estimación

$$\varepsilon = \frac{z - \hat{z}}{h^2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty \quad (33)$$

La prueba de convergencia del algoritmo se puede consultar en Angeles and Alvarez-Icaza (2005).

5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Con el fin de evaluar el desempeño del algoritmo de estimación propuesto, se llevó a cabo una simulación numérica. En ella se usa un edificio de 6 niveles modelado como una barra a cortante, discretizada en 6 puntos con respecto a la derivada espacial, relacionado cada uno con un nivel del edificio y donde se obtienen las mediciones respectivas, mientras el tiempo de muestreo usado es de 0,001s. La altura de cada uno de los entresijos es de 3m, con propiedades heterogéneas. Las velocidades de cortante y los coeficientes de amortiguamiento a identificar son $\beta = \text{diag}\{350; 405; 300; 250; 600; 430; 150\} m/s$ y $\eta = \text{diag}\{15; 30; 42; 40; 25; 20; 10\} Ns/m$. La señal de excitación usada en esta simulación es un registro sísmico, recolectado en el edificio instrumentado Jalapa, ubicado en la ciudad de México en el evento ocurrido el 21 de enero de 2003, con epicentro en Colima, y con un acelerograma como el que se muestra en la Fig. 4.

Al aplicar la señal de excitación en la base del edificio y usar el algoritmo de estimación propuesto, se recupera la respuesta estructural del edificio, como se muestra en la

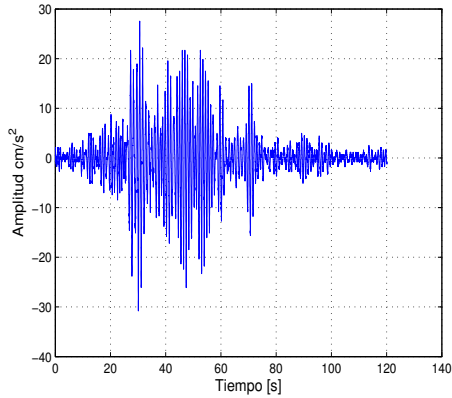


Figura 4. Señal de excitación

Fig. 5, donde la aceleración del sexto piso es comparada con la estimada. Esto mediante la adaptación de los parámetros del modelo de referencia, los cuales convergen a los valores reales en un tiempo menor a los 40s, como se observa en las Figs. 6 y 7. Finalmente, se presenta la norma de la señal de error $\|\varepsilon\|_2$, la cual disminuye a medida que transcurre el tiempo, lo que indica que la salida estimada converge a la salida real del sistema, como se muestra en la Fig. 8. Esta última también sirve para indicar que el algoritmo de estimación funciona satisfactoriamente. La rigidez se puede recuperar con base en la velocidad de cortante β , como se describe en Morales-Valdez and Alvarez-Icaza (2014a).

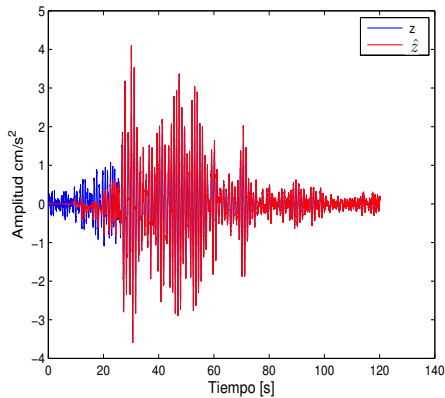


Figura 5. Aceleración del sexto piso

Cabe mencionar que los resultados de simulación fueron obtenidos con parámetros iniciales nulos, un factor de olvido de 0,004 y un valor inicial de la matriz de covarianza de $10e^{10}$. Además debe considerarse que los efectos del ruido en la medición no están incluidos en la señal sísmica, pues esta ha sido preprocesada.

6. CONCLUSIONES

Se propuso un nuevo enfoque para identificar los tiempos de viaje de onda en tiempo real a partir de la velocidad de cortante, que a diferencia de algunos trabajos en la literatura, usa un modelo lineal que no requiere la transforma-

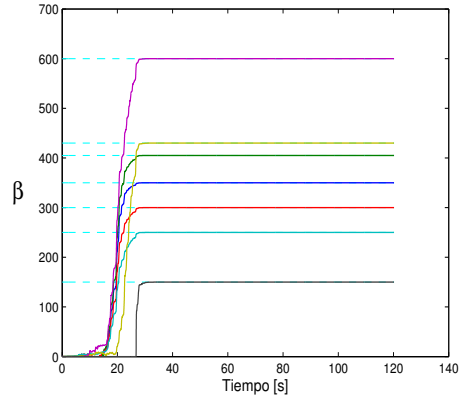


Figura 6. Evolución de las velocidades de cortante

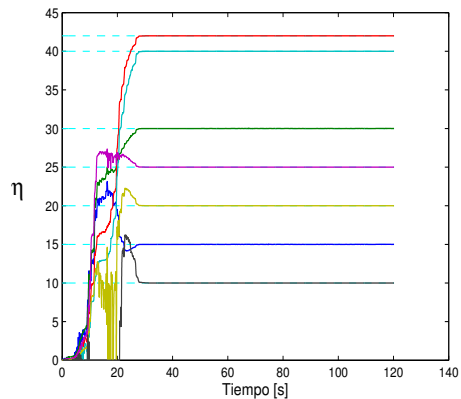


Figura 7. Evolución de los coeficientes de amortiguamiento

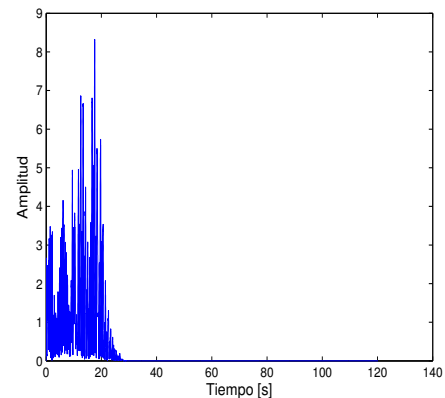


Figura 8. Norma del error de estimación

ción de coordenadas. Con ello, se logró desacoplar las relaciones *rigidez-masa* y *amortiguamiento-masa*. El número de parámetros a identificar es relativamente pequeño en comparación con los métodos tradicionales en la literatura. A diferencia del modelo clásico de edificios a cortante, la excitación se da únicamente en la condición de frontera y no en todos los pisos. Los resultados de simulación usando el algoritmo de estimación en tiempo real muestran que su implantación es bastante prometedora y que además se

podría emplear en paralelo con algoritmos de control para lograr la mitigación de vibraciones en edificios. También sería útil para realizar monitoreo estructural en tiempo real y detección de daño, luego de estimar los valores de rigidez y comparar su valor actual con uno de referencia, nominal o histórico.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de CONACYT. El primero también agradece el apoyo de la Coordinación de Estudios de Posgrado de la Universidad Nacional Autónoma de México. Esta investigación fue realizada con apoyo del proyecto UNAM-PAPIIT IN109414.

REFERENCIAS

- Angeles, J.M. and Alvarez-Icaza, L. (2005). 3D identification of buildings seismically excited. *Proceedings of the 16th IFAC World Congress, 2005*, 16, 54–60.
- Cheng, M.B., Radisavljevic, V., and Su, W.C. (2010). Sliding mode boundary control of a parabolic PDE system with parameter variations and boundary uncertainties. *Automatica*, 47, 381–387.
- Garrido, R. and Concha, A. (2011). Parametric identification of seismically excited building using acceleration measurements. *8th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, 38–43.
- Haberman, R. (1983). *Elementary Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*. Prentice Hall, second edition.
- Hongping, Z., Lin, L., and Xiao-Qiao, H. (2011). Damage detection method for shear building using the changes in the first mode shape slopes. *Journal of Computer and Structures*, 89, 733–743.
- Huang, C. and Su, W. (2007). Identification of modal parameters of a time invariant linear system by continuous wavelet transformation. *Journal of Mechanical System and Signal Processing*, 21, 1642–1664.
- Hwang, H. and Kim, C. (2004). Damage detection in structures using a few frequency response measurements. *Journal of Sound and Vibration*, 270(1-2), 1–14.
- Ioannou, P. and Sun, J. (1989). *Robust Adaptive Control*. Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall.
- Jeong-Tae, K., Yeon-Sun, R., Hyun-Man, C., and Norris, S. (2003). Damage identification in beam-type structures: Frequency-based method vs mode-shape-based method. *Journal of Engineering Structures*, 25, 57–67.
- Jiménez, R. and Álvarez Icaza, L. (2007). A real-time estimation scheme for building with intelligent dissipation devices. In *Mechanical System and Signal Processing*, 12, 2427–2440.
- Kuwabara, M., Yoshitomi, S., and Takewaki, I. (2013). A new approach to system identification and damage detection of high-rise buildings. *Journal of Structural Control and Health Monitoring*, 20, 703–727.
- LeVeque, R.J. (2007). *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: steady-state and time-dependent problems*. Siam.
- Maia, N., Silvia, J., Almas, E., and Sampaio, R. (2003). Damage detection in structures: from mode shape to frequency response function methods. *Journal of Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(3), 489–498.
- Mocenni, C., Madeo, D., and Sparcino, E. (2011). Linear least square estimation of nonlinear reaction diffusion equation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81, 2244–2257.
- Morales-Valdez, J. and Alvarez-Icaza, L. (2014a). Building stiffness estimation by wave traveling times. In *ASME 2014 Dynamic system and control conference*, 1–8.
- Morales-Valdez, J. and Alvarez-Icaza, L. (2014b). On-line environmental noise driven 3-DOF per story parametric identification of a building. In *Control Applications (CCA), 2014 IEEE Conference On*, 2022–2027.
- Nieves, A. (2003). *Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería*. CECSA, segunda edition.
- Rahai, A., Bakhtiari-Nejad, F., and Esfandiari, A. (2006). Damage assessment of structure using incomplete measure mode shape. *Journal of Structural Control and Health Monitoring*, 14, 808–829.
- Ramm, A. (2001). An inverse problem for the heat equation. *Mathematical Analysis and Applications*, 264, 691–697.
- Shih-Yu, C. and Shih-Chieh, L. (2009). Application of real time adaptive identification techniques on damage detection and structural health monitoring. *Journal of Structural Control and Health Monitoring*, 16, 154–177.
- Smyshlyaev, A. and Krstic, M. (2004). Closed-form boundary state feedback for a class of 1-D partial integro-differential equations. *Transactions on Automatic Control*, 40(12), 2185 – 2202.
- Smyshlyaev, A. and Krstic, M. (2010). *Adaptive Control of Parabolic PDEs*. Princeton University Press, first edition.
- Spanos, P., Failla, G., Santini, A., and Pappaticco, M. (2006). Damage detection in Euler-Bernoulli beams via spatial wavelet analysis. *Journal of Structural Control and Health Monitoring*, 13, 472–487.
- Todorovska, M.I. and Rahmani, M.T. (2012). System identification of building by wave travel time analysis and layered shear beam models-spatial resolution and accuracy. *Structural Control and Health Monitoring*.
- Todorovska, M.I. and Trifunac, M.D. (2008). Earthquake damage detection in the Imperial County services building iii: Analysis of wave travel time via impulse response functions. *Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 28, 387–404.
- Yam, L., Yan, Y., and Jiang, J. (2003). Vibration-based damage detection for composite structures using wavelet transform and neural network identification. *Journal of Composite Structures*, 60, 404–412.
- Zhang, R.R., Snieder, R., Gargab, L., and Seibi, A. (2011). Modeling of seismic wave motion in high-rise buildings. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 26, 520–527.