IES LA BAHÍA.
Departamento de Matemáticas

Curso 2012-13

Cuaderno de ejercicios de Matemáticas I 1º de Bachillerato

Mª Fernanda Babiano Álvarez de los Corrales
Francisco Fernández Díaz
Susana Sempere Pérez
Mª Isabel Vilarrubí Vázquez

Índice general

Tema 1

Trigonometría

1.1. Medidas de ángulos

1. Expresar en radianes:

   a) 75° *b*) 120° *c*) 240° *d*) 345° *e*) 330° *f*) 210°

2. Expresa en grados los siguientes ángulos:

   a) $\frac{7\pi}{6}$ rad. *b*) $\frac{20\pi}{9}$ rad. *c*) $\frac{\pi}{5}$ rad. *d*) 1 rad. *e*) $\frac{3\pi}{4}$ rad. *f*) $\frac{7\pi}{2}$ rad.

3. Expresa los siguientes ángulos, como suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor de 360°.

   a) 720° *b*) −3000° *c*) 900° *d*) 7200°

4. Expresa los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor de 2π:

   a) 10πrad. *b*) 60πrad. *c*) $-\frac{13\pi}{4}$rad.

5. Hallarla longitud de un arco de circunferencia cuyo radio mide 22cm y cuyo ángulo central correspondiente es:

   a) 1 rad. *b*) 0,54 rad. *c*) 44° *d*) 145°

6. Si un arco mide $\frac{2}{3}$ de radio, ¿cuál es la medida de su ángulo central correspondiente, expresado en grados y en radianes?

7. En una circunferencia de 16m de radio, un arco mide 2m. Hallar su ángulo central correspondiente, expresado en grados y en radianes.

1.2. Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas

8. Dibuja los siguientes ángulos identificando el seno, el coseno y la tangente de los mismos:

   a) 60° *b*) 315° *c*) 120°

9. Calcula las demás razones trigonométricas sabiendo que:

   a) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ y $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *b*) $\operatorname{tg} x = 2$ y $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

10. Sabiendo que $\cos\alpha = \frac{-1}{2}$, y que $\operatorname{tg}\alpha > 0$, halla las restantes razones trigonométricas.

11. Halla $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y $\operatorname{tg} x$, sabiendo que $\operatorname{cosec} x = 2$ y $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

12. Dada $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{2}$ y $\cos\alpha < 0$, determina el valor del $\operatorname{sen}\alpha$.

13. Comprueba las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha = \sec^2\alpha \operatorname{cosec}^2\alpha$

b) $(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha$

c) $\dfrac{\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha + \sec\alpha$

d) $\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}$

e) $\cos^2\alpha = \dfrac{\operatorname{cotg}^2\alpha}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}$

14. Estudia si son verdaderas o falsas las igualdades:

a) $\operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}x = \sec x \cdot \operatorname{cosec}x$

b) $\operatorname{cotg}^2 x - \cos^2 x = \operatorname{cotg}^2 x \cdot \cos^2 x$

c) $\dfrac{1-\operatorname{sen}x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen}x}$

d) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{cotg}x} = \dfrac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}$

e) $\dfrac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{\operatorname{cotg}x + \operatorname{cotg}y} = \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y$

f) $\dfrac{\operatorname{sen}x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$

15. Simplifica las expresiones trigonométricas siguientes:

a) $\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\operatorname{sen}x}$

b) $\dfrac{\cos^4 x(1+\operatorname{sen}x)}{(1-\operatorname{sen}^2 x)^2}$

c) $\dfrac{\operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}{\cos^4 x - \cos^2 x\operatorname{sen}^2 x}\cdot\operatorname{cotg}x$

d) $\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{sen}a}\cdot\sqrt{1+\operatorname{sen}a}}{\sqrt{1-\cos a}\cdot\sqrt{1+\cos a}}$

16. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\operatorname{sen}a\dfrac{1}{\operatorname{tg}a}$

b) $\dfrac{\cos^2 x}{1-\operatorname{sen}x}$

c) $\dfrac{\sec^2 x + \cos^2 x}{\sec^2 x - \cos^2 x}$

d) $\dfrac{\operatorname{cosec}a}{1+\operatorname{cotg}^2 a}$

e) $\operatorname{sen}^3\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos^2\alpha$

f) $\cos^3 x + \cos^2 x\cdot\operatorname{sen}x + \cos x\cdot\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^3 x$

17. Si $\cos\alpha = -1,11$, ¿cuál de estas afirmaciones es cierta?

a) α es un ángulo negativo.

b) α está en el tercer cuadrante

c) α es un ángulo mayor que 2π.

d) Es imposible que el coseno de un ángulo sea $-1,11$.

18. ¿Es posible que exista un ángulo α que verifique simultáneamente que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{5}$ y $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$? Razona tu respuesta.

19. Si $\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}\beta$, ¿podemos asegurar que α y β son iguales? Razona tu respuesta.

20. Determina en qué cuadrante puede estar comprendido x:

a) $\operatorname{sen}x = \dfrac{2}{3}$

b) $\cos x = \dfrac{3}{4}$

c) $\operatorname{tg}x = \dfrac{4}{3}$

d) $\operatorname{cotg}x = 0{,}75$

e) $\sec x = 2$

f) $\operatorname{cosec}x = \sqrt{2}$

g) $\operatorname{sen}x = 0{,}8$

h) $\cos x = 0{,}28$

21. Calcular las razones trigonométricas de los siguientes ángulos, relacionándolas con las de un ángulo del primer cuadrante:

a) $240°$

b) $330°$

c) $-240°$

d) $600°$

e) $930°$

f) $1140°$

g) $-1830°$

h) $135°$

22. Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

a) $135°$

b) $270°$

c) 11πrad

d) $\dfrac{\pi}{6}rad$

23. Halla sin calculadora:

a) $\operatorname{sen}(-120°)$

b) $\cos(-30°)$

c) $\operatorname{tg}240°$

d) $\cos 135°$

e) $\sec 300°$

f) $\operatorname{cotg}405°$

24. Si $\operatorname{tg} x = 3/4$ y x está en el tercer cuadrante, calcula:

a) $\operatorname{tg}(90° - x)$	*b*) $\operatorname{tg}(180° - x)$	*c*) $\operatorname{tg}(270° - x)$	*d*) $\operatorname{tg}(-x)$
e) $\operatorname{tg}(90° + x)$	*f*) $\operatorname{tg}(180° + x)$	*g*) $\operatorname{tg}(270° + x)$	*h*) $\operatorname{tg}(720° + x)$

1.3. Fórmulas trigonométricas

25. Siendo $\operatorname{sen} x = 0,6$ y $\operatorname{sen} y = 0,4$, calcula las razones trigonométricas de los ángulos que se indican, sabiendo que el ángulo $x < \frac{\pi}{2}$ radianes y que el ángulo y es obtuso.

    a) $x + y$ *b*) $x - y$ *c*) $2x$ *d*) $2y$ *e*) $\frac{x}{2}$ *f*) $\frac{y}{2}$

26. Usando las fórmulas del ángulo mitad, calcula las razones trigonométricas de $22,5°$.

27. Calcula una fórmula para el seno de la suma de tres ángulos, en función de las razones trigonométricas de los sumandos.

28. Transforma en productos las siguientes sumas y diferencias y luego, calcula sus valores, sin calculadora:

a) $\operatorname{sen} 75° + \operatorname{sen} 15°$	*b*) $\operatorname{sen} 75° - \operatorname{sen} 15°$	*c*) $\cos 75° + \cos 15°$
d) $\cos 75° - \cos 15°$	*e*) $\operatorname{tg} 75° + \operatorname{tg} 15°$	*f*) $\operatorname{tg} 75° - \operatorname{tg} 15°$

29. Sabiendo que $\operatorname{sen} x = 0,2$, halla el $\operatorname{sen} 3x$

30. Transforma en producto $\operatorname{sen} 105° - \operatorname{sen} 15°$ y calcula luego su valor.

31. Calcula $\cos 105° + \cos 15°$ sin usar tablas ni calculadora.

32. Transforma en sumas:

    a) $\operatorname{sen} 40° \cos 70°$ *b*) $\operatorname{sen} 70° \cos 40°$ *c*) $\cos 100° \cos 30°$ *d*) $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x$

33. Simplifica:

    a) $\dfrac{\cos 70° - \cos 10°}{\operatorname{sen} 70° + \operatorname{sen} 10°} \operatorname{cotg} 30°$ *b*) $\dfrac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x} \operatorname{tg} x$

34. Comprueba si son ciertas las siguientes identidades:

    a) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha} = 1 - 2\cos^2\alpha$ *b*) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \cos 2\alpha$

    c) $\operatorname{tg}^2\alpha(\cos^2\alpha - 1) + \operatorname{tg}^2\alpha = 0$ *d*) $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y)$

    e) $\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1 - \cos^2 x}{4\cos^2(x/2)}$ *f*) $\dfrac{\cos(a+b) - cos(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)} = -\operatorname{tg} b$

1.4. Ecuaciones y sistemas trigonométricos

35. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

    a) $\operatorname{sen} x = 1$ *b*) $\cos x = -1/2$ *c*) $\operatorname{sen} x = \cos x$

36. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $2/3 \operatorname{sen} x + 7 \operatorname{sen} x = 23/6$

b) $2 \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} 2x$

c) $(1 + \operatorname{tg}^2 x) \cos x = 1$

d) $\operatorname{tg} x = 2 \operatorname{sen}^2 x$

e) $\operatorname{sen} 2x = -\sqrt{3} \cos x$

f) $\cos 2x + \cos x = 0$

g) $\operatorname{sen} 3x - \cos x = -\operatorname{sen} x$

h) $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x$

i) $\cos 2x + \operatorname{sen} x = 4 \operatorname{sen}^2 x$

j) $8 \operatorname{tg}^2(x/2) = 1 + \sec x$

k) $6 \cos^2 x + \cos 2x = 5$

l) $\operatorname{sen} 2x = \cos x$

m) $\cos x \cdot \operatorname{sen} x = 1/2$

n) $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 1/2$

ñ) $\cos 2x = 1 + 4 \operatorname{sen} x$

o) $4 \operatorname{sen}(x/2) + 2 \cos x = 3$

p) $\operatorname{cotg} x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = 2$

q) $\cos 2x - \cos 6x = \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x$

37. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\cos^2 \dfrac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2} = \operatorname{sen} x$

b) $\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} x$

c) $\operatorname{sen} x + \cos^2 x = \dfrac{5}{4}$

d) $\dfrac{\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x} = 2$

e) $\dfrac{\cos 2x}{2} = 2 - 3 \operatorname{sen}^2 x$

f) $\operatorname{sen} x + 2 = 3 \cos 2x$

g) $\operatorname{sen}(\pi - x) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$

h) $\cos 4x + \cos 2x = 0$

i) $3 \operatorname{sen} 2x \cdot \cos x = 2 \operatorname{sen}^3 x$

j) $\cos x + \operatorname{sen}^2(x/2) = 1$

k) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 5x = \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x$

l) $3 \operatorname{sen} x - \cos^2 x = -3$

m) $\cos 5x - \cos x = 0$

n) $\operatorname{sen} x + 2 \cos 2x = 1/2$

ñ) $\cos 2x + 5 \cos x + 3 = 0$

o) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 3x = 0$

38. Resuelve los siguientes sistemas, dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante:

a) $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4} \\ \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 x + y = 2 \\ \cos^2 x + y = 1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} \cos(x + y) = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}(x - y) = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \dfrac{3}{2} \\ \cos \dfrac{1}{2}(x - y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} x \cdot \cos y = \sqrt{2} \\ x - y = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$

f) $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} x \cos y = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{cosec} x \cdot \sec y = -1 \end{array}\right.$

g) $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} 30^\circ \\ \cos x + \cos y = 1 + \cos 30^\circ \end{array}\right.$

h) $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \dfrac{3}{2} \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

1.5. Resolución de triángulos

39. A 30 metros del pie de una chimenea de fábrica se ve la punta de ésta, bajo un ángulo de 68°. Calcula la altura de la chimenea. (Solución: 74,25m)

40. Dos circunferencias secantes tienen de radios 6cm y 8cm. El ángulo que forman sus dos tangentes comunes es de 30°. Calcula la distancia que hay entre los dos centros de las circunferencias. (Solución: 7,72m)

41. Las diagonales de un paralelogramo miden 6 y 8cm, respectivamente, y forman al cortarse un ángulo de 60°. Calcula el perímetro y el área. (Solución: perímetro: $2(\sqrt{13}+\sqrt{37})$cm y área: $12\sqrt{3}$cm^2)

42. Un túnel $\overline{AB}$ ha de atravesar una montaña. Para hallar su longitud se toman desde el punto C las medidas $\overline{AC} = 1250$m, $\overline{BC} = 1700$m y $\widehat{ACB} = 132°$. Halla dicha longitud. (Solución: 2.701,17m)

43. Dos puntos A y B distan 24km. Desde A se lanza un misil cuya trayectoria rectilinea forma un ángulo de 30° con la recta AB. Desde B se lanza un antimisil con una trayectoria rectilinea que forma un ángulo de 45° con la recta AB. ¿A qué distancia de A y de B se producirá la intercepción? (Solución: 17,57km y 12,42km)

44. Para calcular la anchura $\overline{AB}$ de un río, se elige un punto C que está en la misma orilla que A y se toman las medidas: $\overline{AC} = 67$m, $\widehat{BAC} = 99°$ y $\widehat{ACB} = 20°$. ¿Cuál es la distancia entre A y B? (Solución: 26,2m)

45. Un pasillo de 10m de largo y que forma un ángulo de 25° con la horizontal, conduce al pie de una torre. Calcula la altura de ésta, sabiendo que desde el inicio del pasillo el ángulo de elevación de su punto más alto es de 82°? (Solución: 60,26m)

46. El ángulo de elevación de una peña mide 47°. Después de caminar 1000m hacia ella subiendo una pendiente inclinada 32° respecto de la horizontal, su ángulo de elevación es de 77°. Halla la altura de la peña con respecto al plano horizontal de la primera observación. (Solución 1.034,3m)

47. Una columna está situada sobre una peña. Desde un punto C la parte superior se ve con un ángulo de elevación de 55°. Situándose en un punto D, 40m más cerca, se observa que dicho ángulo se transforma en 80° y el de la base de la columna vale 60°. ¿Cuál es la altura de la columna? (solución: 53,03m)

48. Desde la azotea de un edificio, se ve la calle de 12m de ancho, bajo un ángulo de 20°. Halla la altura del edificio. (Solución: 32,96m)

49. El pupitre de un alumno se encuentra a 3m de la pizarra, los ojos del alumno están a la misma altura que el lado inferior de la pizarra, y él la ve bajo un ángulo de 30°. ¿Cuál es la altura de la pizarra? (Solución: 1,73m)

50. El ángulo agudo que forman los lados de un paralelogramo es de 60°, y ellos miden 9 y 20cm. Halla la altura del paralelogramo y su área. (solución: $h = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ cm y $S = 90\sqrt{3}\,\text{cm}^2$)

51. Dos casa de campo tienen un obstáculo entre ellas que nos impide medir la distancia que las separa. Nos situamos en un castillo que dista 20km de una y 15km de la otra, y desde él se observan las casas bajo un ángulo de 30°. ¿Qué distancia hay entre las casas? (Solución: 10,26km)

52. A la distancia de 16m del pie de una torre, el ángulo de elevación de su punto más alto es de 36°. Halla la altura de la torre. (solución: 11,62m)

53. Desde un barco se mide, por radar, la distancia a la cima de una montaña, dando un resultado de 2.570m. Halla la altura de la montaña, sabiendo que el ángulo que forma la visual con el horizonte es de 29°. (Solución: 1.246m)

54. Las sombras de María y Carlos miden, respectivamente 2,25m y 2,4m. María mide 1,65m ¿Cuánto mide Carlos? ¿Cuál es la altura angular sobre el horizonte? (Solución: 1,76m y 36°)

55. Desde el punto medio de la distancia entre dos torres A y B, los ángulos de elevación de sus extremos superiores son 30° y 60° respectivamente. Si A tiene una altura de 40m, halla la altura de B y la distancia entre las torres. (Solución: 120m y 138,5m)

56. Desde cierto punto del suelo se ve el punto más alto de una torre formando un ángulo de 30° con la horizontal. Si nos acercamos 75m hacia el pie de la torre, este ángulo mide 60°. Halla la altura de la torre. (Solución: 65m)

57. La anchura de un campo de fútbol es de 50m y la de la portería 7m. ¿Bajo qué ángulo ve la portería un jugador situado en un punto de la banda lateral que está a 20m de la línea de fondo? (Solución: $7°52'14''$)

58. El altímetro de un avión registra 1095m de altitud. El piloto ve la torre de control del aeropuerto mediante una visual que forma un ángulo de 81° con la vertical. ¿A qué distancia del aeropuerto vuela el avión? (Solución: 7km)

59. Desde un barco se ve la distancia entre dos islas bajo un ángulo de 28°. Los aparatos de a bordo indican una distancia a las islas de 3,2 y 5,1 millas respectivamente. Hala la distancia entre ambas. (Solución: 2,726 millas)

60. Dos observadores A y B distantes 248km, se ocupan del seguimiento de un satélite. Las direcciones al satélite y al otro observatorio forman un ángulo de 62° desde A y de 74° desde B. ¿Cuál es la distancia del satélite a cada observatorio? (solución: 343,180m y 315,221m)

61. Del instituto al hospital hay 720m y a la torre del parque 124m. Desde el instituto se mide el ángulo que forman las visuales a la torre y al hospital y es de 76°. Calcula la distancia del hospital a la torre. (Solución: 700,413m)

62. Una chimenea arroja una sombra de 24m. sobre la falda de una colina que tiene una inclinación de 10° con la horizontal. Sabiendo que en ese momento el ángulo de elevación del sol es de 49°. Halla la altura de la chimenea. (Solución: 31,36m)

63. Desde lo alto de un acantilado de 140m que hay en una de las orillas de un río, un topógrafo ve los ángulos de depresión de la parte inferior y de la parte superior del acantilado que hay en la orilla opuesta. Estos ángulos son 80° y 40° respectivamente. Halla la altura del acantilado de la orilla opuesta. (Solución: 119,2m)

64. Halla el área de un pentágono regular de 10m de lado. (solución: 90,82m^2)

65. Una escalera de bomberos que mide 10m, se ha fijado en un punto de la calle. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 45° y si se apoya sobre la otra forma un ángulo de 30°. Halla la anchura de la calle. ¿A qué altura se alcanza con dicha escalera sobre cada fachada? (solución: 15,73m; 7,07m y 5m)

66. Halla la distancia del punto más alto de la torre de telecomunicaciones al punto más alto de la catedral, sabiendo que ambos edificios distan entre si 1350m y los ángulos de observación desde el pie de uno al punto más alto del otro son 25° y 36° respectivamente. (Solución: 1386,5m)

67. Dos torres iguales distan entre si 1km. Desde la parte superior de una de ellas se ve la base de la otra bajo un ángulo de depresión de 5°. ¿Qué altura tienen las torres? (Solución: 87,5m)

68. Para calcular el ancho de un río, se midió una distancia $\overline{AB} = 20$m a lo largo de su orilla, tomándose el punto A directamente opuesto a un árbol C, situado al otro lado. Desde B se midió $\widehat{ABC} = 61°$. ¿Cuál es la anchura del río? (Solución: 36m)

69. Los lados de un triángulo miden 14cm, 16cm y 18cm respectivamente. Halla la altura correspondiente al lado más largo y el área del triángulo. (Solución: 12m)

70. Se dirigen visuales a dos objetos inaccesibles A y B desde dos puntos C y D situados en un mismo semiplano de los dos que determinan la recta que pasa por A y B. Los puntos C y D distan entre si 562m. Se miden los ángulos $\widehat{ACB} = 62°$, $\widehat{BCD} = 41°$, $\widehat{ADB} = 60°$ y $\widehat{ADC} = 34°$. Halla la distancia $\overline{AB}$. (Solución: 705,7m)

Tema 2

Vectores en el plano

2.1. El espacio vectorial de los vectores libres en el plano

1. Para los vectores $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (3, 5)$ halla:

   a) $2\vec{u} + 3\vec{v}$ *b*) $-\vec{u} + 4\vec{v}$ *c*) $3(\vec{u} - 2\vec{v})$

2. Sean los vectores $\vec{u} = (2, 4)$ y $\vec{v} = (3, -3)$:

   a) Dibújalos b) Halla $2\vec{u}$, $\frac{1}{2}\vec{u}$, $-\vec{u}$ y $\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}$.

3. Dados los vectores $\vec{u} = (3, 4)$ y $\vec{v} = (-3, 4)$. Halla:

   a) $-\vec{u}$ y $-\vec{v}$. b) Representa gráficamente $\vec{u}$, $\vec{v}$, $-\vec{u}$ y $-\vec{v}$.

4. Estudia cuáles de los siguientes pares de vectores son linealmente dependientes o proporcionales:

   a) $(15, 12)$ y $(10, 8)$ *b*) $(1, -1)$ y $(1, 3)$ *c*) $(5, 12)$ y $(1, 10)$

5. Estudia si $\{(1, -1), (1, 2)\}$ es una base de V_2.

6. Halla las coordenadas del vector $(3, -2)$ como combinación lineal de los vectores $(1, -1)$ y $(2, 5)$.

7. Dados los vectores $\vec{v}_1 = (1, 3)$ y $\vec{v}_2 = (2, -5)$, hallar un vector $\vec{v}$ tal que: $(\vec{v}_2 + \vec{v}_1) + \vec{v} = \vec{v}_2 - (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$. Comprobar el resultado.

8. Siendo $\vec{u} = (3, 5)$, $\vec{v} = (-7, -2)$ y $\vec{w} = (0, 5)$, hallar las componentes del vector $\vec{x}$ sabiendo que: $\vec{u}$+$\vec{x}$=$\vec{w}$+(-$\vec{v}$).

2.2. Producto escalar

9. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (2, -3)$, referidos a la base canónica, calcula:

   a) El producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$. b) Los módulos de ambos vectores.
   c) El ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$. d) Un vector en la dirección y sentido de $\vec{u}$ que sea unitario.

   e) ¿Son $\vec{u}$ y $\vec{v}$ ortogonales? En caso contrario, busca un vector cualquiera ortogonal a $\vec{u}$.

10. Dados los vectores $\vec{a}(-1, 4)$ y $\vec{b}(2, -3)$. Se pide:

    a) Producto escalar *b*) Módulo de $\vec{a}$
    c) Ángulo que forman *d*) Proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$

11. Hallar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sabiendo que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 2$ y que el ángulo que forma $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 60°$.

12. Calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en los siguientes casos:

    a) $\vec{u} = (0, 1)$ y $\vec{v} = (6, -2)$ *b*) $\vec{u} = (-2, 3)$ y $\vec{v} = (3, 2)$
    c) $\vec{u} = (\sqrt{2}, \sqrt{27})$ y $\vec{v} = (\sqrt{8}, \sqrt{3})$ *d*) $\vec{u} = (1, 1)$ y $\vec{v} = (3, -2)$

13. Averiguar si los siguientes pares de vectores son perpendiculares:

    a) $(1,2)$ y $(1,5)$ *b*) $(2,0)$ y $(0,1)$ *c*) $(-1,5)$ y $(5,1)$ *d*) (v_1,v_2) y $(-v_2,v_1)$

14. Dado el vector $\vec{u}=(4,-7)$, encuentra dos vectores que tengan la misma dirección que $\vec{u}$ y sean unitarios.

15. Halla un vector que tenga la misma dirección que $\vec{a}(4,-3)$, módulo 2 y distinto sentido.

16. Halla un vector perpendicular al vector $\vec{a}(1,3)$ y que tenga módulo 2.

17. Normaliza el vector $\vec{v}(1,\sqrt{2})$.

18. Calcular a para que el producto escalar de $\vec{x}(a,1)$ por $\vec{y}(2,-3)$, sea la unidad.

19. Halla h, sabiendo que el módulo del vector $\vec{x}(h,3)$ es 5.

20. ¿Qué modificación sufre el módulo de un vector $\vec{v}$ si se multiplican sus componentes por un escalar k?

21. Halla las coordenadas del vector $\vec{x}$ sabiendo que $\vec{v}\cdot\vec{x}=0$ y $\vec{w}\cdot\vec{x}=2$, siendo $\vec{v}(2,-3)$ y $\vec{w}(-1,0)$.

22. Halla h para que el vector $\vec{v}(3,h)$ sea ortogonal con $\vec{w}(-1,4)$.

23. Halla m, sabiendo que $\vec{x}(m,5)$ y $|\vec{x}|=13$.

24. Determina el valor de b, para que los vectores $\vec{x}(3,b)$e $\vec{y}(2,-1)$ formen un ángulo de $45°$.

25. Dados los vectores $\vec{u}(3,5)$ y $\vec{v}(a,-1)$, halla el valor de a, para que el vector $\vec{v}$ tenga la misma dirección que el vector $\vec{u}+\vec{v}$.

26. Un vector $\vec{x}$, de módulo 3, forma un ángulo de $60°$ con el vector $\vec{a}(-\sqrt{3},1)$. Halla sus componentes.

27. Halla la longitud de la proyección del vector $\vec{a}(5,-2)$ sobre el $\vec{b}(3,4)$.

28. Halla los cosenos directores del vector $\vec{a}(0,-7)$.

29. Halla un vector cuyo producto escalar con $\vec{a}(-3,1)$ sea 9 y con $\vec{b}(7,2)$ sea 5.

30. Halla x para que el producto escalar de los vectores $\vec{a}(2x,5)$ y $\vec{b}(3,2)$ sea -8.

31. Dados los vectores $\vec{a}(x,1)$ y $\vec{b}(12,-5)$. Halla x para que sean:

    a) Paralelos *b*) Perpendiculares

32. Halla x para que sean perpendiculares los vectores $\vec{u}(2,x)$ y $\vec{v}(3,2)$. Halla $|\vec{u}+\vec{v}|$.

33. Demuestra que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios, se verifica: $(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$.

34. Si $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=\sqrt{7}$ y $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares. Halla $|\vec{u}-\vec{v}|$.

35. Dados los vectores $\vec{a}(2,1)$ y $\vec{b}(6,2)$. Halla un vector $\vec{v}$, tal que, $\vec{a}\cdot\vec{v}=1$ y $\vec{v}\perp\vec{b}$.

36. Halla dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de coordenadas enteras y que cumplan: $\vec{x}\cdot\vec{y}=2$, $|\vec{x}|=\sqrt{5}$, $|\vec{y}|=5$ y $\vec{x}\cdot\vec{z}=-4$, siendo $\vec{z}(1,6)$.

37. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}|=9$ y $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=17$. Calcula el módulo de $\vec{v}$.

38. Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son tales que $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=10\sqrt{3}$ y $|\vec{a}+\vec{b}|=20$. Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Tema 3

Geometría analítica en el plano

3.1. Aplicaciones de los vectores

1. Calcula las componentes de los vectores cuyo origen y extremo se dan, así como el punto medio del segmento determinado en cada caso.

   a) $A = (2, -1)$ y $B = (4, 7)$ *b*) $P = (0, -5)$ y $Q = (3, -4)$
   c) $A = (1, -\sqrt{2})$ y $B = (-2, \sqrt{2})$ *d*) $P = (\sqrt{2}, -\sqrt{3})$ y $Q = (-\sqrt{3}, \sqrt{2})$

2. Siendo $M = (2, 3)$ el punto medio del segmento AB con $B = (-1, 8)$, halla las coordenadas de A.

3. Dadas las coordenadas de los puntos medios de los lados de un triángulo ABC, $M(2, 4)$, $N(1, 1)$ y $P(2, 0)$, halla las coordenadas de A, B y C.

4. Dado el segmento de extremos $A(3, 5)$ y $B(6, 15)$, calcula las coordenadas de los puntos C, D y E que divide al segmento $\overline{AB}$ en 4 partes iguales.

3.2. Ecuaciones de la recta

5. Calcula las ecuaciones vectorial, paramétrica, continua y general de la recta definida por el punto A y el vector de dirección $\vec{v}$ en los siguientes casos:

   a) $A(0, 2)$, $\vec{v} = (4, 3)$ *b*) $A(2, 7)$, $\vec{v} = (-1, 2)$ *c*) $A(5, -4)$, $\vec{v} = (2, -2)$
   d) $A(0, 3)$, $\vec{v} = (2, 0)$ *e*) $A(-1/2, \pi)$, $\vec{v} = (0, -2)$ *f*) $A(0, 0)$, $\vec{v} = (-1/3, 1/2)$

6. Calcula la ecuación explícita de una recta de la que se conoce un punto A y la pendiente m en los casos siguientes:

   a) $A(1, 3)$, $m = 2$ *b*) $A(4, -3)$, $m = 0$ *c*) $A(0, 3)$, $m = 1/3$

7. Halla la ecuación general de la recta definida por los puntos A y B en los siguientes casos:

   a) $A(2, 0)$ y $B(0, 3)$ *b*) $A(1, -2)$ y $B(3, -2)$ *c*) $A(1, -1)$ y $B(-1, 1)$

8. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, 2)$ y forma un ángulo de $30°$ con el eje OY.

9. Halla un vector director y uno normal a las rectas de ecuaciones:

   a) $2x - 5y + 10 = 0$ *b*) $\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 3\lambda \end{cases}$ *c*) $y = 4x - 8$ *d*) $\dfrac{x+2}{3} = y - 4$

10. Calcula, en cada uno de los siguientes casos, las ecuaciones de la recta perpendicular y paralela por el punto que se indica:

    a) $y = -2x + 6$; $P(1, 1)$ *b*) $2x - 4y + 5 = 0; P(0, 3)$ *c*) $x - 2 = \dfrac{y+4}{3}$; $P(0, 0)$

11. Dado el punto $A(-1. -3)$ y la recta $r : x + 2y - 1 = 0$. Halla:

    a) Ecuación de la recta que pasa por A y es paralela a r.

    b) Ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular a r.

12. Comprueba si las diagonales del cuadrilátero de vértices $A(2, 1)$, $B(4, 2)$, $C(4, -3)$ y $D(-2, -4)$ se cortan en el punto medio.

13. Dado el triángulo de vértices $A(2,3)$, $B(4,7)$ y $C(7,-1)$. Halla los puntos medios de los lados AB y BC. Halla la ecuación de la recta que une estos puntos medios. ¿Cuál es la posición relativa de dicha recta respecto de la recta que pasa por A y C?

14. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5,4)$ y es:

    a) Perpendicular al eje OX.

    b) Perpendicular al eje OY.

15. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos $A=(-1,3)$ y $B=(3,5)$.

16. Dado el haz de rectas $y-3=m(x-1)$, hallar de entre las mismas:

    a) La que pasa por el punto $(5,1)$.

    b) La que es paralela a $5x-4y+8=0$.

    c) La ecuación general de la que es perpendicular a $x-3y+1=0$.

17. Halla la perpendicular a la recta $2x+y+4=0$ que tiene por ordenada en el origen $n=5$.

18. Hallar a para que las rectas $r: ax-y+1=0$ y $r': 3x+ay+5=0$ sean perpendiculares.

19. Estudia la posición relativa de cada uno de los siguientes pares de rectas y calcular el punto de corte cuando lo haya:

$$\left\{\begin{array}{l} r: x-3y+5=0 \\ s: 2x-6y+9=0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} r: 3x+2y-12=0 \\ s: x-y+7=0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} r: x+2y-3=0 \\ s: 2x+4y-6=0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} r: x-3=0 \\ s: x+2=0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} r: y=2x-5 \\ s: y=x+4 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} r: y=-x+10 \\ s: y=x-7 \end{array}\right.$$

20. Hallar el punto de intersección de las rectas:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=2+\lambda \\ y=-2\lambda \end{array}\right. \qquad r': x-2y=1$$

21. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto intersección de:

$$\left\{\begin{array}{l} r: 5x-2y+4=0 \\ s: \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y}{-2} \end{array}\right.$$

siendo el ángulo que forma el eje OX positivo con dicha recta de $45°$.

22. Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas:

$$\left\{\begin{array}{l} r: x+2y+4=0 \\ s: 3x-y+5=0 \end{array}\right.$$

y es paralela a la que tiene por ecuación $y=6$.

23. Hallar el pie de la perpendicular a $r: x+y-3=0$ trazada desde el punto $(3,2)$.

24. Hallar el simétrico del punto $A=(4,0)$ respecto de la recta $r: x+y+1=0$.

25. La ecuación de la mediatriz de un segmento AB es $m: 2x+y-2=0$. Siendo $A=(-2,1)$ hallar las coordenadas de B.

26. Las ecuaciones de dos rectas son $3x-5y+2=0$ y $6x+my=1$. Halla el valor de m para que:

    a) Las rectas sean paralelas.

    b) Las rectas sean perpendiculares.

    c) Las rectas sean coincidentes.

    d) La segunda recta pase por el punto $(6,5)$.

27. Dadas las rectas $r: 2x+y-1=0$ y $r': 3x+ay+5=0$. Halla a para que sean:

    a) Paralelas

    b) Perpendiculares

3.3. Ángulos y distancias

28. Calcula el ángulo formados por las rectas $r : x - y + 5 = 0$ y $r' : -x - y + 1 = 0$.

29. Calcula el ángulo formados por las rectas $r : 5x + 4y - 1 = 0$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{array} \right.$

30. Calcula el ángulo formados por las rectas $r : x - 3y + 1 = 0$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{array} \right.$

31. Halla k para que la recta $2x + ky + 4 = 0$ forme un ángulo de $45°$ con la recta $x + 4y - 1 = 0$.

32. Halla k para que la recta $3x + ky + 2 = 0$ forme un ángulo de $60°$ con el sentido negativo del eje de abscisa.

33. Calcula la distancia del origen de coordenadas a los siguientes puntos:

    a) $P(3, 4)$ *b*) $Q(8, -6)$ *c*) $\mathrm{S}(\sqrt{3}, -1)$

34. Calcula la distancia entre los siguientes pares de puntos:

    a) $A(5, 3)$ y $B(-3, 8)$ b) $P(\sqrt{3}, \sqrt{2})$ y $Q(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$ c) $R(5, 2)$ y $S(-3, -7)$

35. Clasifica los siguientes triángulos, cuyos vértices son:

    a) $O(0, 0); A(2, 4); B(4, 2)$ *b*) $P(5, -2); Q(1, -7); R(-1, -2)$ *c*) $A(-1, 7); B(-1, 2); C(-5, 2)$

36. Halla la distancia del punto $A(3, 5)$ a la recta $3x + 4y - 1 = 0$.

37. Halla la distancia entre las rectas $r : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y - 1}{3}$ y $s : 6x - 4y + 1 = 0$

38. Halla la distancia entre las rectas paralelas $r : 2x + y = 0$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{array} \right.$

3.4. Problemas variados

39. El lado desigual de un triángulo isósceles tiene por extremos $A(-1, -1)$ y $B(4, 0)$. El vértice C pertenece a la recta $x - 2y + 8 = 0$. Determina las coordenadas de C, la longitud de la altura h_c y el área del triángulo.

40. Un triángulo isósceles tiene por por base el segmento que une los puntos $A(1, -2)$ y $B(6, 3)$ y el otro vértice, C, está sobre la recta $3x - y + 8 = 0$. Halla las coordenadas de C.

41. El paralelogramo $ABCD$ tiene los vértices $A(-1, 1)$, $B(0, -1)$y $C(3, 2)$. Halla las coordenadas de D y su área.

42. Halla el área del cuadrilátero formado por el eje OX y las rectas $y - 1 = 0$, $x + 2y - 6 = 0$ y $x + 2y - 2 = 0$.

43. Determina sobre la recta $3x - 5y + 25 = 0$ un punto que diste lo mismo de $A(3, 4)$ y de $B(7, 8)$.

44. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a la recta $r : 3x - 2y + 4 = 0$ es 2. ¿Qué figura constituye dicho lugar?

45. Dos vértices opuestos de un rombo son los puntos $A(3, 5)$ y $C(2, 1)$. El vértice B pertenece al eje de abscisa. Calcula las coordenadas del cuarto vértice D.

46. ¿Cuál es la ecuación de una recta que forma un ángulo de $45°$ con la parte positiva del eje OX y dista 4 unidades del origen de coordenadas?

47. Halla la ecuación de la recta que pasando por el punto $(2, -3)$ forma con la recta $2x + 5y + 1 = 0$ un ángulo de $45°$.

48. Dado el triángulo de vértices $A(7,-7)$, $B(1.-5)$ y $C(3,1)$, calcula:

   a) La longitud de sus tres medianas.
   b) La longitud de sus tres alturas.
   c) Su ortocentro y baricentro.

49. Halla la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos $A(1,-2)$ y $B(3,0)$ y el ángulo que forma con el eje OX.

50. Halla la mediatriz del segmento de extremos $A(1,3)$ y $B(5,-1)$.

51. La recta $2x+y-5=0$ es mediatriz del segmento $\overline{AB}$. Siendo $A(-1,2)$. Halla las coordenadas de B.

52. Halla la distancia entre el origen de coordenadas y el pie de la perpendicular trazada desde el punto $(2,5)$ a la recta $x+2y-1=0$.

53. Halla el punto de la recta $r: \left\{ \begin{array}{l} x=2t \\ y=1+t \end{array} \right.$ que diste 2 del origen.

54. Halla la ecuación de la recta paralela a $2x-y-1=0$ que diste 2 del punto $(1,-3)$.

55. Halla las coordenadas de los puntos situados sobre la recta $x+2y-3=0$ que disten de la recta $4x-3y+9=0$ 2 unidades.

56. Halla la distancia del baricentro del triángulo $A(2,3)$, $B(1,-5)$ y $C(-3,-1)$ al lado BC.

57. Calcula el área del triángulo cuyos lados están en el eje de abscisas y en las rectas $x-y=0$ y $3x+5y-24=0$.

58. Halla la ecuación de una recta que pase por el punto $P(-1,0)$ y forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área $\dfrac{3}{2}\mathrm{u}^2$.

59. Halla la distancia del punto $P(3,0)$ a su simétrico respecto de la recta $x-y+1=0$.

60. Dado el triángulo ABC con $A(0,0)$, $B(7,0)$ y $C(2,6)$. Se pide:

   a) Coordenadas del baricentro, ortocentro y circuncentro.
   b) Comprueba que están alineados.
   c) Comprueba que la distancia entre el baricentro y el ortocentro es doble que la distancia entre el baricentro y el circuncentro.

61. Halla la ecuación de una recta sabiendo que la perpendicular trazada desde el origen a ella tiene $\sqrt{2}$ unidades de longitud y que, dicha recta forma con el eje de abscisas un ángulo de $45°$.

62. Dada la recta $r: y=x-2$ y el punto $A(1,0)$, halla el punto X de r tal que $\overrightarrow{AX}$ sea perpendicular a $r': y=4x-3$.

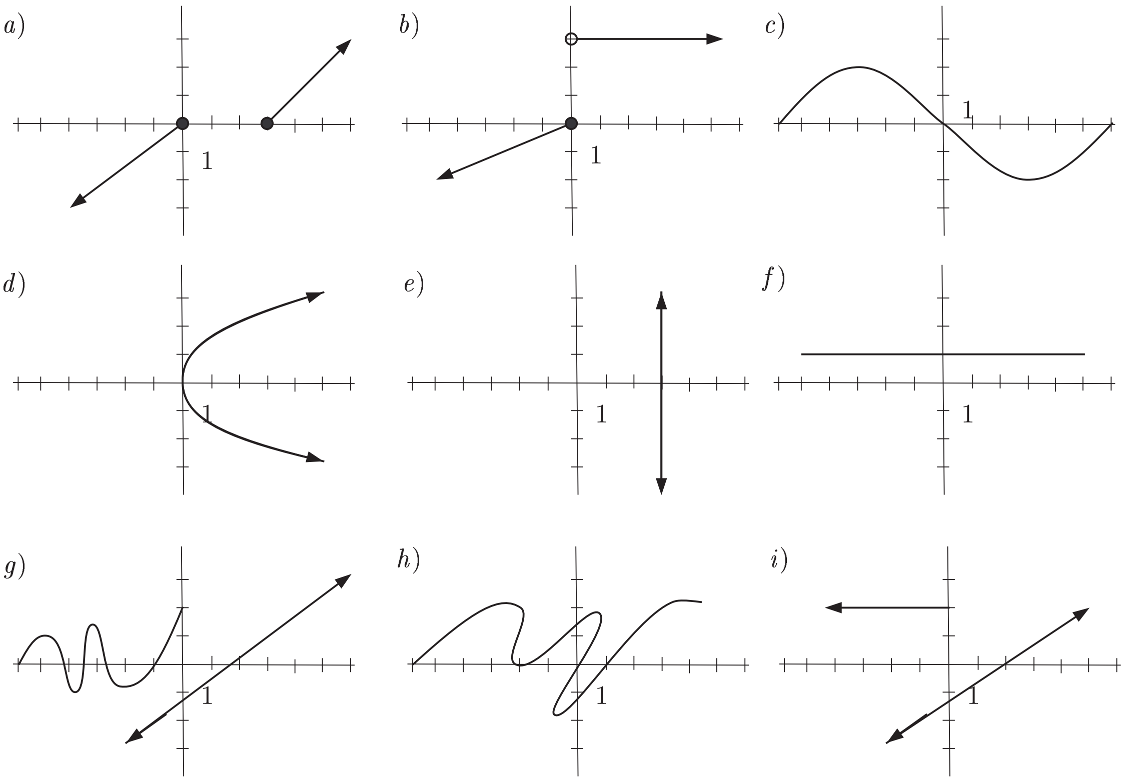
63. Las rectas $ax-y-4=0$ y $x-y+b=0$ son perpendiculares y cortan al eje de abscisas en dos puntos que distan entre sí 5 unidades. Halla a y b.

Tema 4

Funciones reales de variable real. Familias de funciones

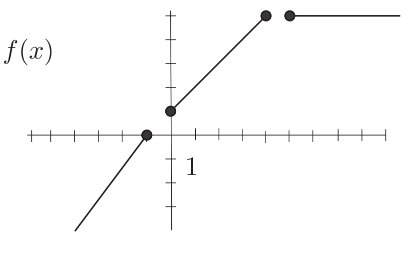
4.1. Concepto de función

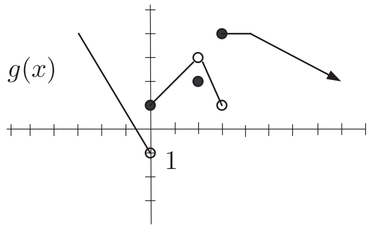
1. De las siguientes gráficas, ¿cuáles de ellas no corresponden a una función?



2. Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Indica de cada una de ellas:

   a) Dominio e imagen b) $f(2)$ y $f(0)$ c) $g(0)$, $g(2)$ y $g(3)$





4.2. Funciones polinómicas

3. Representa las siguientes rectas, calculando dominio, conjunto imagen y puntos de cortes con los ejes:

   a) $y = -5$ *b*) $y = 0$ *c*) $y = \dfrac{5}{2}$ *d*) $y = 3x$

   e) $y = -\dfrac{1}{2}x$ *f*) $y = -5x + 3$ *g*) $y = \dfrac{-x-3}{2}$ *h*) $y = 4x - 3$

4. Representa las siguientes parábolas calculando dominio, imagen, vértice y puntos de cortes.

   a) $y = x^2$ *b*) $y = x^2 - 4$ *c*) $y = x^2 - 3x$ *d*) $y = x^2 - 4x + 1$

   e) $y = -x^2 + 9$ *f*) $y = x^2 - 3x + 2$ *g*) $y = -x^2 + 3x - 2$ *h*) $y = -x^2 - 9$

5. Representa las siguientes funciones:

   a) $f(x) = x^2 - 2x$ para $x \in [-2, 3]$

   b) $f(x) = -2x + 1$ para $x \in (0, +\infty)$

   c) $f(x) = -5$ para $x \in [4, 7)$

6. Representa gráficamente la función $f(x) = 2x^2$ y a partir de ella representa:

   a) $f(x) = 2x^2 + 3$ *b*) $f(x) = 2x^2 - 4$ *c*) $f(x) = 2(x+1)^2$

   d) $f(x) = 2(x-3)^2$ *e*) $f(x) = -2x^2$ *f*) $f(x) = -2x^2 + 2$

4.3. Funciones racionales

7. Representa gráficamente las siguientes funciones, calculando dominio, imagen, puntos de cortes y asíntotas:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *b*) $f(x) = \dfrac{2}{x-2}$ *c*) $f(x) = \dfrac{-1}{x+3}$

   d) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ *e*) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$ *f*) $f(x) = \dfrac{-x}{x+2}$

8. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 5x + 2}$ *b*) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + x + 1}$ *c*) $f(x) = \dfrac{7x - 1}{x^3 - 3x^2 + x}$

   d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x}$ *e*) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 2x + 1}$ *f*) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$

   g) $f(x) = \dfrac{3x}{x^3 - x^2 - 6x}$ *h*) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x^4 - 5x^2 + 4}$ *i*) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + x^2 + 4x + 4}$

4.4. Funciones irracionales

9. Representa gráficamente las siguientes funciones, calculando dominio, imagen y puntos de cortes con los ejes:

   a) $f(x) = \sqrt{x}$ *b*) $f(x) = -\sqrt{x}$ *c*) $f(x) = \sqrt{x+7}$

   d) $f(x) = \sqrt{2x+4}$ *e*) $f(x) = x + \sqrt{x}$ *f*) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

   g) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ *h*) $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$ *i*) $f(x) = 2 + \sqrt{x}$

10. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x+3}$ *b)* $f(x) = \sqrt[4]{9-4x^2}$ *c)* $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

d) $f(x) = \sqrt{2x^2-5x+2}$ *e)* $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$ *f)* $f(x) = \sqrt{x^3-4x}$

g) $f(x) = \sqrt{2x+5}$ *h)* $f(x) = \sqrt{x^2-2x+1}$ *i)* $f(x) = \sqrt{5x-2}$

j) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ *k)* $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$ *l)* $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+3}}$

m) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-4}}$ *n)* $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-7}}$ *ñ)* $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+3x}{x+6}}$

4.5. Funciones a trozos

11. Representa gráficamente las siguientes funciones y calcula su dominio,conjunto imagen, puntos de cortes con los ejes, monotonía y acotación:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -x+6 & \text{si } 3 < x \leq 6 \\ 0 & \text{si } 6 < x \end{cases}$ *b)* $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ *d)* $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } x \in [0,1] \\ 2x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 5x-2 & \text{si } x \leq 1 \\ -2 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{1}{2}x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ *f)* $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -1 \\ 1-2x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 3x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ x^2+x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ *h)* $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1-x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1-x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ *j)* $f(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x < -3 \\ x+3 & \text{si } -3 < x < 0 \\ -x+3 & \text{si } 0 < x < 3 \\ x-3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

4.6. Función valor absoluto

12. Representa gráficamente las siguientes funciones, haciendo el desglose como funciones a trozos y estudia el dominio, recorrido y puntos de cortes:

a) $f(x) = |x-2|$ *b)* $f(x) = |2x+4|$ *c)* $f(x) = |x| + x$

d) $f(x) = |3x|$ *e)* $f(x) = x + |x-1|$ *f)* $f(x) = x - |x|$

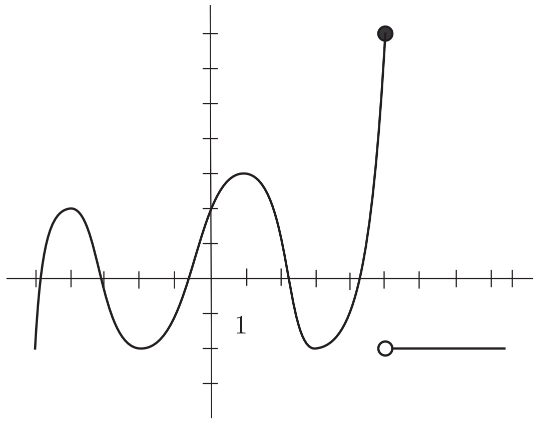
g) $f(x) = |1-x^2|$ *h)* $f(x) = |x^2-x-2|$ *i)* $f(x) = |x-3| + |x+2|$

13. Representa gráficamente el valor absoluto de las siguientes funciones, representando previamente la función sin valor absoluto:

a) $f(x) = |x^2-5x+6|$ *b)* $f(x) = |x-3|$ *c)* $f(x) = |x^2-4|$

14. Sea la función $f(x)$ dada por su gráfica, calcula:

a) $y = |f(x)|$ *b*) $y = -f(x)$ *c*) $y = f(x) + 2$ *d*) $y = f(x-2)$



4.7. Funciones exponenciales y logarítmicas

15. Calcula el dominio de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:

a) $f(x) = \log_3 x$ *b*) $f(x) = \log_3 |x|$ *c*) $f(x) = |\log_3 x|$

d) $f(x) = \log_3 x^2$ *e*) $f(x) = 2 + \log_3 x$ *f*) $f(x) = \log_3(x+2)$

g) $f(x) = 2 + \log_3(x+2)$ *h*) $f(x) = 3^x$ *i*) $f(x) = 2 + 3^x$

j) $f(x) = 3^{x-1}$ *k*) $f(x) = 3^{x-1} - 2$ *l*) $f(x) = -3^x$

16. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log_2(x-1)$ *b*) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ *c*) $f(x) = \log(x^2 - 5x)$

d) $f(x) = \log_3(x^2 + x - 6)$ *e*) $f(x) = \dfrac{2^x}{1 - \ln x}$ *f*) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x-3}}$

g) $y = \log(x^2 - 4)$ *h*) $y = \log(x^2 - 6x + 8)$ *i*) $y = \log \dfrac{1-x}{1+x}$

j) $y = \log \dfrac{1-x^2}{x+3}$ *k*) $y = \log |4x^2 - 9|$ *l*) $y = \dfrac{\log_3(x-1)}{3^x - 9}$

4.8. Funciones trigonométricas

17. Representa gráficamente las siguientes funciones e indica si son periódicas y que periodo tienen:

a) $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$ *b*) $f(x) = -\cos x$ *c*) $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

d) $f(x) = \cos 2x$ *e*) $f(x) = 2\cos x$ *f*) $f(x) = |\cos x|$

18. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *b*) $f(x) = \operatorname{tg}(2x-3)$ *c*) $f(x) = \dfrac{2}{\operatorname{sen} x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ *e*) $f(x) = \sqrt{\cos x}$ *f*) $f(x) = 1 + \operatorname{tg} 2x$

g) $f(x) = 2\,\text{sen}(2x) + 1$ *h*) $f(x) = \log(\text{sen}\, x)$ *i*) $f(x) = \dfrac{1}{\text{sen}\, x - 1}$

4.9. Funciones en general

19. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 3x + 3$ *b*) $f(x) = \dfrac{x-4}{x+2}$ *c*) $f(x) = \dfrac{3x-1}{4}$

d) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-8}$ *e*) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ *f*) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$

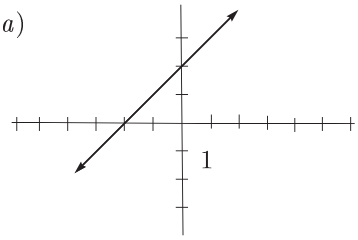
g) $f(x) = e^{x^2-4}$ *h*) $f(x) = e^{(x+3)/(x-2)}$ *i*) $f(x) = |x^2-2|$

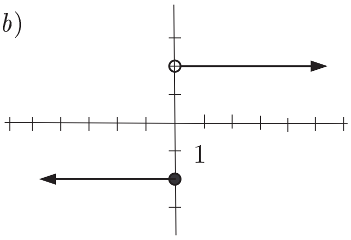
j) $f(x) = \log(x^2-16)$ *k*) $f(x) = \log\sqrt{x^2-25}$ *l*) $f(x) = x^2 \cdot e^{1/x}$

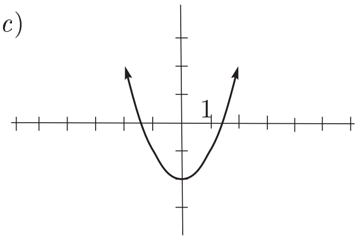
m) $f(x) = \log(x^2-3x+2)$ *n*) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2-4}\right)$ *ñ*) $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{5-x}$

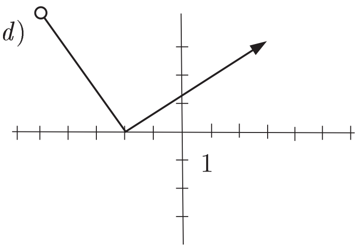
o) $f(x) = \cos x^2$ *p*) $f(x) = e^{(2x+3)/x}$ *q*) $f(x) = \sec 2x$

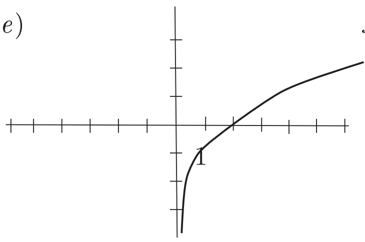
20. Determina el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

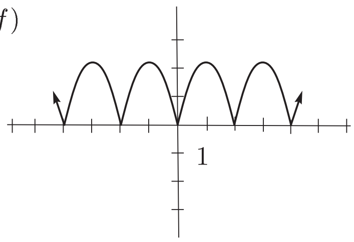
a)


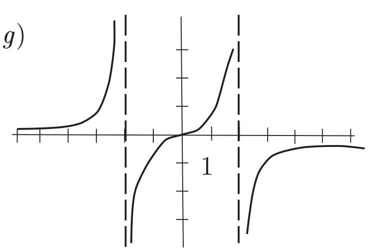
b)


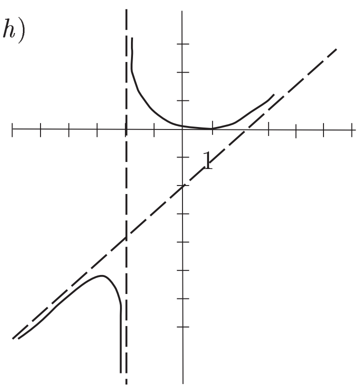
c)


d)


e)


f)


g)


h)


21. Representa gráficamente las siguientes funciones y calcula su dominio,conjunto imagen, puntos de cortes con los ejes, monotonía y acotación:

   a) $f(x) = -2x$ *b*) $f(x) = -4$ *c*) $f(x) = x^2 - 2x$

   d) $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ *e*) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ *f*) $f(x) = 2 + \sqrt{x-3}$

   g) $f(x) = |2x+3|$ *h*) $f(x) = |2x| - x$ *i*) $f(x) = E(x)$

22. Representa gráficamente las siguientes funciones y calcula su dominio,conjunto imagen, puntos de cortes con los ejes, monotonía y acotación:

   a) $y = 2^{x-1}$ *b*) $y = 3^{x-2} - 4$ *c*) $y = 1 + 2^x$

   d) $y = 2^{-x}$ *e*) $y = \log_2(x+3)$ *f*) $y = 1 + \log_3(x+5)$

   g) $y = \log_2(x+1)$ *h*) $y = 3 + \log_2 x$ *i*) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x > 0 \\ x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

23. Representa gráficamente las siguientes funciones y calcula su dominio,conjunto imagen, puntos de cortes con los ejes, monotonía y acotación:

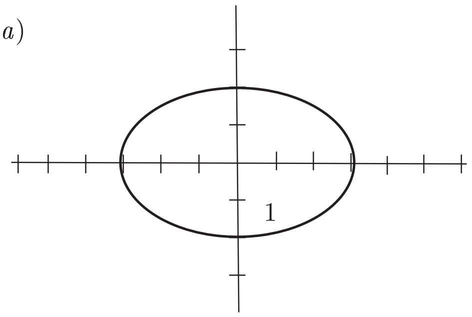
   a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 1 \\ 1/x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ *b*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 1 + x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ *d*) $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \geq 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

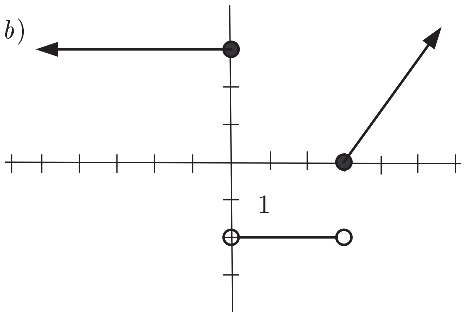
   e) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ -2x + 10 & \text{si } 4 < x \leq 5 \end{cases}$ *f*) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 2 \\ -x + 4 & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$

24. De las siguientes gráficas. ¿cuáles corresponden a una función? De ellas indica su dominio y recorrido.

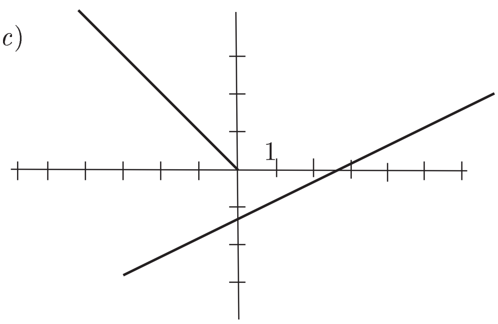
a)



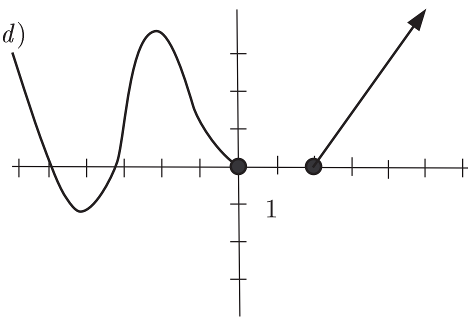
b)



c)



d)



Tema 5

Álgebra de funciones

5.1. Operaciones. Composición

1. A partir de las funciones $f(x) = x + 1$ y $g(x) = \dfrac{2-x}{3x-6}$ realiza las siguientes operaciones y sus respectivos dominios:

   a) $(f+g)(x)$ *b)* $(f \cdot g)(x)$ *c)* $(f/g)(x)$

2. Si $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = x + 1$, averigua $(f/g)(x)$ y su dominio.

3. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{2x}$ y $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x+1}$, calcula $(f \cdot g)(x)$ y su dominio.

4. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{3+x}{x^2-3x}$ y $g(x) = \dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$, calcula $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$ y $f/g)(x)$ y sus dominios.

5. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x+3}$ y $g(x) = \sqrt{25-x^2}$,calcula $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $f/g)(x)$,$f \cdot g$ y $g \circ f$. y sus dominios.

6. Halla $f + g$ y su dominio, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{1-x}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -2 \\ 2 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ \dfrac{1}{5-x} & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

7. Dadas las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x-1} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1 \\ 2+x & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ \dfrac{1}{5+x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

   Calcula $f + g$ y su dominio.

8. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{2-x}{x+1}$ y $g(x) = \sqrt{2x-1}$, calcula f compuesta con g y su dominio.

9. Halla $(f \circ g)(3)$ siendo $f(x) = \dfrac{3-x^2}{x+1}$ y $g(x) = \dfrac{x-1}{2}$ y calcula $g \circ f$ y $f \circ g$ y, así como sus respectivos dominios.

10. A partir de los siguientes pares de funciones halla $g \circ f$ y $f \circ g$, indicando sus dominios.

    a) $f(x) = 2x^2 + x - 3$ y $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ *b)* $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ y $g(x) = 3$

11. Si $f(x) = 2x - x^2$ y $g(x) = \sqrt{x-2}$, calcula $g \circ f$ y $f \circ g$ y, así como sus respectivos dominios. ¿Qué se observa? ¿Es siempre posible componer funciones?

12. Expresa las siguientes funciones como composición de funciones, indicando éstas últimas:

    a) $h(x) = 5\sqrt{x} + 5$ *b)* $h(x) = \sqrt{x^2+3}$ *c)* $h(x) = 5x^4 + 2x^2 + 6$

13. Dadas las funciones $f(x) = 3x - 7$ $g(x) = 2x + k$, determinar k para que $f \circ g = g \circ f$.

14. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ y $g(x) = \sqrt{x + 2}$, escribe los criterios y dominios de las funciones: $f \cdot g$, f/g, $g \circ f$, $f \circ g$, $g \circ g$ y $f \circ f$.

15. Halla las funciones compuestas $g \circ f$ y $f \circ g$ siendo:

    a) $f(x) = x^2$ y $g(x) = \ln x$
    b) $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln(x + 1)$
    c) $f(x) = \log_2 x$ y $g(x) = (\sqrt{2})^x$
    d) $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \log_4 x$

5.2. Correspondencia inversa

16. Calcula si es posible, la correspondencia inversa respecto de la composición de las siguientes funciones y su dominio:

    a) $f(x) = \dfrac{1 - 3x}{6}$
    b) $f(x) = \dfrac{3 - x}{4 + 5x}$
    c) $f(x) = \dfrac{7 - x}{x}$
    d) $f(x) = -3x^2 + 27$
    e) $f(x) = x^2 - 2x$
    f) $f(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

17. Halla la inversa de las siguientes funciones y su dominio:

    a) $f(x) = \log_2(x + 1)$
    b) $f(x) = 2^{x+1}$
    c) $f(x) = \ln \sqrt{x - 1}$
    d) $f(x) = e^{x^2 - 1}$
    e) $f(x) = 2 + 3^x$
    f) $f(x) = 2 \cdot 3^{x-1}$
    g) $y = \log_2 3x - 1$
    h) $y = 3^{x+2}$
    i) $y = 2 + \log_3 x$
    j) $y = 1 - 2^{x+3}$
    k) $y = \dfrac{\log_4(x - 1)}{2}$
    l) $y = 1 - \log_3 \dfrac{x}{5}$
    m) $y = \dfrac{4 - 3\log(x^2 + 4)}{5}$

18. Dadas las funciones $f(x) = \log_2(x^2 - 3)$, $g(x) = 1 + 2^x$ y $h(x) = \log_3(2^x - 3)$, halla:

    a) $(g \circ f)(x)$
    b) $(g \circ h)(x)$
    c) $(f \circ g)(x)$
    d) $(h \circ g)(x)$
    e) $(h \circ f)(x)$
    f) $(f \circ h)(x)$
    g) $(f \circ g^{-1})(x)$
    h) $(h \circ g^{-1})(x)$

19. Halla la composición de f y g en los siguientes casos:

    a) $f(x) = \cos 2x$; $g(x) = \arccos x$
    b) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$; $g(x) = \arccos x$

20. Halla la correspondencia inversa de las funciones:

    a) $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$
    b) $f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}$
    c) $f(x) = \cos(x + 1)$
    d) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x^2$

21. Dadas las funciones f y g. Calcula $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $f/g)(x)$, $1/f$, f^{-1}, g^{-1} y $g \circ f$, especificando sus dominios:

    a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $g(x) = \dfrac{2}{x - 3}$
    b) $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$, $g(x) = x^2 - 5$
    c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
    d) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$, $g(x) = x^2 + 3$
    e) $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = \dfrac{x + 1}{1 - x}$
    f) $f(x) = \dfrac{2}{x - 2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

Tema 6

Límite de funciones. Continuidad

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - x + 5)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x - 1)$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-x^2 + 5x + 7)$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2 + 1)$

e) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x+1}{x-2}$

f) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+1}{x-2}$

g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{2x-4}$

h) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+x+14}{x^3+x^2+2}$

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+6}{x^4-x^3+x-1}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4}{x^3+x^2}$

k) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}$

l) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+7x^2+15x+9}$

m) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-6x^2+8x-3}{x^4-2x^3+2x-1}$

n) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}-\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)$

ñ) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-2}$

o) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$

p) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^5-1}{x^7-1}$

q) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-3x+5}{3x^3-4}$

r) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}}$

s) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\cdot\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$

t) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+4}{1-x}\cdot\dfrac{x+3}{x^2}\right)$

u) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^5-7x^3+2x^2}{3x^4+6x^2}\right)$

2. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{2x+7}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^3-x^2+1}-\sqrt{x^3-x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x^2-2}-x)$

h) $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})$

3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2\sqrt{x^2+x}+3\sqrt[3]{x^3-1}}{4x^2-4x}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{4x^4+2}+3\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{2x^2-x+1}+\sqrt{x^4-1}}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x\sqrt{x^2-1}+x^2}{\sqrt{x^4-4}+2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x^2-7}-\sqrt{4x+1}}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2}}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+4}}$

4. Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x+1}{2x}\right)^{x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{2x^2}\right)^{x^2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)^{x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{1-x}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{x+1}\right)^{x+5}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{5x-3}\right)^{x+3}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}$

5. Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\log_{1/2}(x)+\log_2\frac{1}{x}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\log_{1/2}(x)+\log_2\frac{1}{x}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{x^2+x}{x}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\left(\log_{1/2}(x-1)+\frac{2x+1}{x+1}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}$

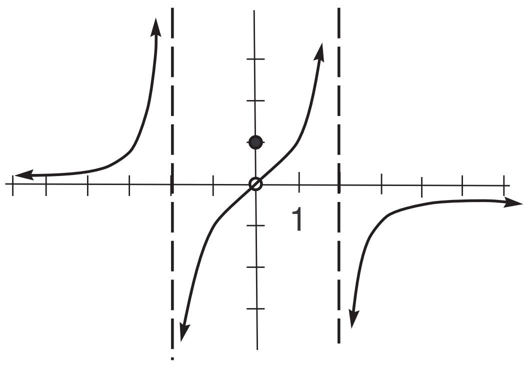
f) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\log x^2$

6. Calcula:

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to-2}f(x)$ *c)* $\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x)$ *d)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)$ *e)* $\displaystyle\lim_{x\to 2}f(x)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$ *g)* $f(0)$ *h)* $f(-1)$ *i)* $Dom(f)$ *j)* $Im(f)$

k) Las ecuaciones de las asíntotas



7. Calcular los siguientes límites en los puntos en que se indican:

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\geq 0\\ -x+1 & \text{si } x<0\end{cases}$ en $x=0$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x>2\\ 0 & \text{si } x=2\\ x+2 & \text{si } x<2\end{cases}$ en $x=2$

c) $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x<3\\ x-1 & \text{si } 3\leq x<5\\ -x-3 & \text{si } x\geq 5\end{cases}$ en $x=3$ y $x=5$

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x+2} & \text{si } x\geq 0\\ 3x+2 & \text{si } x<0\end{cases}$ en $x=0$

8. Halla $\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 2}f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$ y $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$, siendo: $f(x)=\begin{cases} 3x-5 & \text{si } x\leq 1\\ \dfrac{x^2-1}{x^2-3x} & \text{si } x>1\end{cases}$

9. Halla $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to -\infty} f(x)$, siendo: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{2x-2} & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}}{2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

10. Halla k Para que $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-4x^2-x+4}{3x^3+kx^2+2x-2} = -\dfrac{3}{7}$

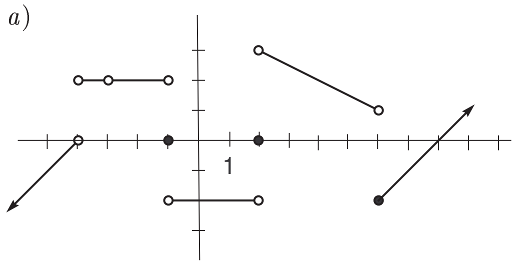
11. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones y estudia la posición de la gráfica con respecto a la asíntota:

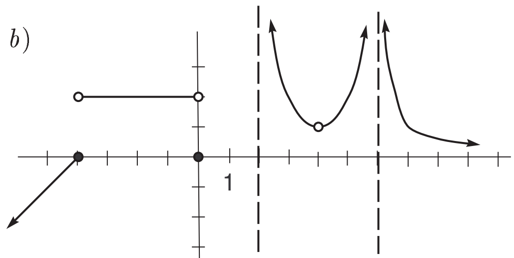
a) $f(x) = \dfrac{2x^2-8}{x^2+x-6}$
b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$
c) $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+x+1}{-x^2+x+2}$
d) $f(x) = \arctan x$
e) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$
f) $f(x) = \dfrac{3}{x} - e^{-x}$
g) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-4}$
h) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+2x+1}$
i) $f(x) = \dfrac{3}{e^x}$

12. Representa gráficamente funciones que satisfagan las siguientes condiciones:

a) $\lim_{x\to 2} f(x) = -2$, $f(2) = 5$, $Dom(f) = \mathbb{R}$ y $Rec(f) = (-2, +\infty)$
b) $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$, f estrictamente creciente en $(-\infty, 1)$ y $Rec(f) = (-\infty, 4]$
c) $f(x) > 0 \forall x > 2$, $f(x) \leq 0 \forall x < 2$ y $\nexists \lim_{x\to 2} f(x)$

13. Clasifica los puntos donde son discontinuas las funciones:

a)


b)


14. Se define la función por la expresión: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$. Representarla gráficamente y decir en qué puntos es discontinua.

15. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$. Se pide:

a) Dominio de f.
b) ¿Es discontinua en algún punto?
c) En $x = 2$ la función no está definida. ¿Es posible definir f en $x = 2$ de modo que la función resultante sea continua en toda la recta real?

16. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2-3 & \text{si } x < 2 \\ x-1 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 2x+3 & \text{si } 4 < x \end{cases}$.

a) Calcular el dominio de f.
b) Calcular $\lim_{x\to 3} f(x)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$ y $\lim_{x\to 4} f(x)$.

c) Localiza los puntos de discontinuidad.

17. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x+2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x^2 - 9 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Represéntala gráficamente.

18. Estudia la continuidad de las siguientes funciones clasificando las discontinuidades:

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq 0 \\ x-1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 3 \\ x^2 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{1-e^x} & \text{si } x < 0 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} |3-x| & \text{si } x \leq 5 \\ \ln e^2 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

19. La función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ no está definida en $x = 1$. Halla k de modo que la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$ sea continua.

20. Ídem para la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ k & \text{si } x = 1 \\ 2x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

21. Probar que la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+7x-8}$, para $x \neq 1$, $f(1) = 34$, no es continua en $x = 1$, e indicar qué tipo de discontinuidad presenta en dicho punto.

22. Calcular el valor de a y b para que las siguientes funciones sean continuas?

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2+ax & \text{si } x \leq 2 \\ a-x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ x+2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+bx+c & \text{si } x > 0 \end{cases}$

23. Construye gráficas que cumplan las siguientes condiciones:

a) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = [-1, +\infty)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $f(3) = 3$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$; $f^{-1}(0) = \{0, 2\}$

b) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0, 2\}$; $Rec(f) = [-\infty, 0) \cup \{1\} \cup (3, +\infty)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$

24. Estudia la continuidad de las siguientes funciones clasificando las discontinuidades:

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ *b*) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ *c*) $f(x) = \dfrac{3x+5}{2x^2-5x+2}$

d) $f(x) = \sqrt{x-5}$

e) $f(x) = x^3 + 5x - 3$

f) $f(x) = |x-1| + |x-4|$

g) $f(x) = \dfrac{1}{2 - \ln x}$

h) $f(x) = \ln(1 - \cos x)$

i) $f(x) = \ln(1 + e^x)$

j) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + 2)$

k) $f(x) = \arctan \dfrac{1}{x}$

l) $f(x) = \cos(\operatorname{sen} x^2)$

Álgebra de límites

Suma

$\lim_{x\to a} f(x)$	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	M	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x))$	$L+M$	$L\pm\infty=\pm\infty$	$+\infty+\infty=+\infty$	$-\infty-\infty=-\infty$	$\infty-\infty=?$

Producto

$\lim_{x\to a} f(x)$	L	$L\neq 0$	∞	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	M	∞	∞	∞
$\lim_{x\to a} (f(x)\cdot g(x))$	$L\cdot M$	$L\cdot\infty=\infty$	$\infty\cdot\infty=\infty$	$0\cdot\infty=?$

Cociente

$\lim_{x\to a} f(x)$	L	$L\neq 0$	L	∞	0	∞
$\lim_{x\to a} g(x)$	$M\neq 0$	0	∞	M	0	∞
$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{L}{M}$	$\frac{L}{0}=\infty$	$\frac{L}{\infty}=0$	$\frac{\infty}{M}=\infty$	$\frac{0}{0}=?$	$\frac{\infty}{\infty}=?$

Potencia

$\lim_{x\to a} f(x)$	L	$L\neq 0,1$	$L\neq 0,1$	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	M	$+\infty$	$-\infty$	$M\neq 0$
$\lim_{x\to a} \left(f(x)^{g(x)}\right)$	L^M	$L^{+\infty}=\begin{cases}+\infty \text{ si } L>1\\ 0 \text{ si } 0<L<1\end{cases}$	$L^{-\infty}=\begin{cases}0 \text{ si } L>1\\ +\infty \text{ si } 0<L<1\end{cases}$	$0^M=\begin{cases}0 \text{ si } M>0\\ +\infty \text{ si } M<0\end{cases}$

$\lim_{x\to a} f(x)$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	M	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} \left(f(x)^{g(x)}\right)$	$0^{+\infty}=0$	$0^{-\infty}=+\infty$	$(+\infty)^M=\begin{cases}+\infty \text{ si } M>0\\ 0 \text{ si } M<0\end{cases}$	$(+\infty)^{+\infty}=+\infty$	$(+\infty)^{-\infty}=0$

$\lim_{x\to a} f(x)$	0	$+\infty$	1
$\lim_{x\to a} g(x)$	0	0	∞
$\lim_{x\to a} \left(f(x)^{g(x)}\right)$	$0^0=?$	$(+\infty)^0=?$	$1^\infty=?$

Tema 7

Introducción al cálculo diferencial. Derivadas

7.1. Definición de derivada

1. Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, calcula la derivada en $x = 3$ para la función $f(x) = 5x^2 - x + 2$.

2. Calcula, la derivada de $f(x) = x^2$ en $x = 3$.

3. Demuestra, aplicando la definición de derivada, que si $f(x) = x^3$, entonces $f'(2) = 12$.

4. Calcula mediante la definición de derivada de una función en un punto, las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

   a) $f(x) = -3; \quad f'(2)$

   b) $f(x) = -\dfrac{5}{x}; \quad f'(1)$

   c) $f(x) = 3x^2 - 2x + 2; \quad f'(-1)$

   d) $f(x) = (2x-1)^2; \quad f'(2)$

   e) $f(x) = \sqrt{x+3}; \quad f'(6)$

   f) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}; \quad f'(0)$

   g) $f(x) = \ln(x+1); \quad f'(1)$

   h) $f(x) = \ln x; \quad f'(2)$

7.2. Continuidad y derivabilidad

5. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

   a) f(x)=|x|

   b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

   c) $f(x) = x|x|$

   d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \le 1 \\ x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

   e) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x \le 3 \\ 6x & \text{si } x > 3 \end{cases}$

6. Di si son derivables las funciones siguientes en los puntos que se indican. Da el valor de la derivada o, en caso negativo, di cuánto valen las derivadas laterales.

   a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - x + 3 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ en $x = 2$

   b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \le 1 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

   c) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

   d) $f(x) = |x^2 - x - 6|$ en $x = -2$ y $x = 3$

7. Calcula a y b para que la función sea derivable en todo $\mathbb{R}$:

   a) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & si \quad x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & si \quad x > 2 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} ax + 5 & si \quad x \le 2 \\ bx^2 + x - 1 & si \quad x > 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax+4 & si \quad x \leq 1 \\ bx^2+x-3 & si \quad x > 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a/x & si \quad x > 1 \\ x^2+bx & si \quad x \leq 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2ax+4 & si \quad x \leq 2 \\ b/x & si \quad x > 2 \end{cases}$

8. Estudia la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-|x|} & \text{si } x \neq -1 \text{ y } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \text{ o } x = 1 \end{cases}$$

9. Sea la función $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2+b & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 6x+c & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

   a) Estudia si es continua en $[0, +\infty)$ para $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$.
   b) Estudia si es derivable para esos valores.

7.3. Funciones derivadas

10. Calcula las funciones derivadas de las siguientes:

a) $f(x) = x^4$
b) $f(x) = x^{-2}$
c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$
d) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 7$
e) $f(x) = 6x^3 + 5x^2 - 1$
f) $f(x) = 5x^4 + 2x^2 - 5x$
g) $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{2}{3}x^3 - 8x$
h) $f(x) = 3x^{-2} + \dfrac{1}{x}$
i) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + x^{-3} + 2x^{-1}$
j) $f(x) = 4x^{-4} + 2x^{-2} + \dfrac{1}{3}x^{-3}$
k) $f(x) = (x^2-1)(x^3+3x)$
l) $f(x) = (x^3+1)(x+2)$
m) $f(x) = (x^2-3)(x^2+x-1)$
n) $f(x) = (2x^3+3)x^{-2}$
ñ) $f(x) = x^{-4}(x+2)$
o) $f(x) = \dfrac{x^3-3}{5}$
p) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2x+1}$
q) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^3+3x^2}$
r) $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1}$
s) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-3}$
t) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+4}$

11. Calcula las funciones derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x \cdot 4^x$
b) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$
c) $f(x) = \operatorname{sen} x + 2e^x$
d) $f(x) = 3^x \cdot \ln x$
e) $f(x) = (2x^3+x)^4$
f) $f(x) = \left(x^{-2} + \dfrac{1}{x}\right)^{-2}$
g) $f(x) = (x^2-3)^5$
h) $f(x) = (e^{2x}+3)^4$
i) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$
j) $f(x) = x^2 \cdot 2^x \cdot a^{2x}$
k) $f(x) = \operatorname{sen} 4x$
l) $f(x) = \operatorname{sen}^4 x$
m) $f(x) = \operatorname{sen} x^4$
n) $f(x) = \operatorname{tg} 2x^2$
ñ) $f(x) = \ln(\cos 2x)$
o) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}$
p) $f(x) = e^{\cos x}$
q) $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
r) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$
s) $f(x) = \ln\left(\cos \dfrac{x^2}{2}\right)$
t) $f(x) = \ln(\operatorname{tg}(1-2x))$

12. Calcula las funciones derivadas utilizando la derivación logarítmica:

a) $f(x) = x^x$
b) $f(x) = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$
c) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^x$

d) $f(x) = (\ln x)^{lnx}$ *e*) $f(x) = (\sqrt{x})^{\operatorname{tg} x}$ *f*) $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{x}}$

g) $f(x) = (\cos x)^{\operatorname{sen} 2x}$ *h*) $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{x}$ *i*) $f(x) = \left(\operatorname{arc\,sen} x^2\right)^{2x}$

13. Calcula las derivadas sucesivas que se indican:

    a) $f(x) = 2^{3x}$ $\quad f'''(x)$ *b*) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ $\quad f^{\,4)}(x)$

    c) $f(x) = \operatorname{sen} 3x$ $\quad f^{\,10)}(x)$ *d*) $f(x) = \ln(x+2)$ $\quad f^{\,5)}(x)$

14. Obtén las derivadas n-ésimas de las siguientes funciones:

    a) $f(x) = \ln(x-1)$ *b*) $f(x) = e^x + e^{-x}$ *c*) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

15. Calcula las funciones derivadas de las siguientes:

    a) $y = \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^3}{3} - 5x + 2$ *b*) $y = 3x^{-2} + 2x^{-3} - 5x^{-1}$ *c*) $y = 5\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)$

    d) $y = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x} + \sqrt[4]{x^3}$ *e*) $y = \dfrac{x^2+x}{3}$ *f*) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

    g) $y = \sqrt{x^2+1}$ *h*) $y = (x^2+1)^{10}$ *i*) $y = \dfrac{(1-x)^3}{(1+x)^4}$

    j) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ *k*) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$ *l*) $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

    m) $y = \ln(\ln x)$ *n*) $y = \ln(1-x^2)^2$ *ñ*) $y = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

    o) $y = \ln\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ *p*) $y = x \cdot \operatorname{sen} x$ *q*) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}$

16. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

    a) $y = \operatorname{sen} x^2 + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} 2x$ *b*) $y = (1+\cos^2 x)^3$ *c*) $y = e^x \cos x$

    d) $y = \ln \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$ *e*) $y = \ln(\cos^2 e^x)$ *f*) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

    g) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ *h*) $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1+x}{1-x}$ *i*) $y = \dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$

    j) $y = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{2}$ *k*) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{arc\,cos} x}}$ *l*) $y = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

    m) $y = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{1-x^2}$ *n*) $y = \dfrac{e^x}{\operatorname{arc\,tg} x}$ *ñ*) $y = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

    o) $y = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$ *p*) $y = \operatorname{arc\,sen}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ *q*) $y = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

    r) $y = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}}\right)$

REGLAS PARA EL CÁLCULO DE FUNCIONES DERIVADAS

Suma /Diferencia	**Producto**	**Cociente**
$y = u \pm v \Rightarrow y' = u' \pm v'$	$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$	$y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
Constante por función	**Composición**	**Recordatorio**
$y = k \cdot u \Rightarrow y' = k \cdot u'$	$y = (u \circ v)(x) = u(v(x))$ $\Rightarrow y' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

FUNCIONES ELEMENTALES | **FUNCIONES COMPUESTAS**

Función	**Derivada**	**Función**	**Derivada**
$y = k$	$y' = 0$		
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$y = u^n$	$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x} \cdot \log_a e$	$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{1}{u} \cdot \log_a e \cdot u' \quad a > 0$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \ln u$	$y' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y = a^u$	$y' = u' \cdot a^u \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$	$y = \operatorname{sen} u$	$y' = u' \cdot \cos u$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$	$y = \cos u$	$y' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$	$y = \operatorname{tg} u$	$y' = u'(1 + \operatorname{tg}^2 u) = u' \cdot \sec^2 u$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x) = -\operatorname{cosec}^2 x$	$y = \operatorname{cotg} u$	$y' = -u'(1 + \operatorname{cotg}^2 u) = -u' \cdot \operatorname{cosec}^2 u$
$y = \operatorname{cosec} x$	$y' = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x$	$y = \operatorname{cosec} u$	$y' = -u' \cdot \operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u$
$y = \sec x$	$y' = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$	$y = \sec u$	$y' = u' \cdot \sec u(x) \cdot \operatorname{tg} u$
$y = \operatorname{arc\,sen} x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = \operatorname{arc\,sen} u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
$y = \operatorname{arc\,cos} x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = \operatorname{arc\,cos} u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
$y = \operatorname{arc\,tg} x$	$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$	$y = \operatorname{arc\,tg} u$	$y' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$
$y = \operatorname{arccotg} x$	$y' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$	$y = \operatorname{arccotg} u$	$y' = \dfrac{-u'}{1 + u^2}$
$y = \operatorname{arcsec} x$	$y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$	$y = \operatorname{arcsec} u$	$y' = \dfrac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2 - 1}}$
$y = \operatorname{arccosec} x$	$y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$	$y = \operatorname{arccosec} u$	$y' = \dfrac{-u'}{u \cdot \sqrt{u^2 - 1}}$

Tema 8

Aplicaciones de las derivadas

Método para representar una función

Para hacer la representación gráfica de una función seguiremos el siguiente esquema, aunque no es obligatorio seguir el mismo orden, ni estudiar todos los pasos que se indican.

Como norma general estudiaremos y calcularemos:

1. **Dominio.**
2. **Continuidad y derivabilidad.**
3. **Puntos de cortes con los ejes**:
   a) Corte con el eje OX: calculamos los valores de x para los cuales $y = 0$.
   b) Corte con el eje OY: le damos a $x = 0$ y calculamos el valor correspondiente de y.
4. **Simetría**:
   a) Si $f(x) = f(-x)$, diremos que la función es **par** y será simétrica con respecto al eje de ordenadas.
   b) Si $f(x) = -f(-x)$, diremos que la función es **impar** y será simétrica respecto al origen de coordenadas.
5. **Signo de la función** Los intervalos donde f es positiva o negativa vienen determinados por los valores de x que verifican $f(x) = 0$ y por las discontinuidades de la función.
6. **Asíntotas**
   a) Asíntotas verticales: son las rectas $x = a$ que cumplen una de estas condiciones:
   $$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \qquad o \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$
   Conviene hallar el signo del infinito para situar la gráfica con respecto a la asíntota.
   b) Asíntotas horizontales: son las rectas $y = b$ que cumplen una de estas condiciones:
   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \qquad o \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$
   c) Asíntotas oblicuas: Son las rectas $y = mx + n$ que cumplen uno de estos pares de condiciones:
   $$\left.\begin{array}{l} m = \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \\ n = \displaystyle\lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} m = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \\ n = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) \end{array}\right\}$$
   Oblicua por la izquierda   Oblicua por la derecha
7. **Monotonía. Máximos y mínimos relativos:** Se estudia el signo de $f'(x)$. Se verifica:
   - $f(x)$ es creciente en aquellos intervalos donde $f'(x) > 0$.
   - $f(x)$ es decreciente en aquellos intervalos donde $f'(x) < 0$.

- Los máximos y mínimos relativos de la función se encuentran entre aquellos puntos x_0 que verifican $f'(x_0) = 0$. Si además:

  $f''(x_0) > 0$, en x_0 hay un mínimo relativo.

  $f''(x_0) < 0$, en x_0 hay un máximo relativo.

  $f''(x_0) = 0$ entonces hay que recurrir a nuevas derivadas.

8. **Concavidad-convexidad. Puntos de inflexión:** Se estudia el signo de $f''(x)$. Se verifica:

   - Si $f''(x) > 0$ la función es $\cup$
   - Si $f''(x) < 0$ la función es $\cap$
   - Los puntos de inflexión se encuentran entre los valores de x_0 que verifican $f''(x_0) = 0$. Si $f'''(x_0) \neq 0$ el punto es de inflexión. Si $f'''(x_0) = 0$ se estudian las derivadas sucesivas.

9. **Tabla de valores:** A veces es conveniente calcular algunos valores más de la función para trazarla, basta para ello construir una tabla con los puntos que creamos conveniente calcular.

$$\boxed{f(x) = x^4 - 2x^2}$$

1. **Dominio:** Es una función de tipo polinómica, y por tanto, su dominio son todos los números reales.

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

2. **Continuidad y derivabilidad:** Al ser polinómica es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

3. **Puntos de cortes con los ejes**

   a) Corte con el eje OX: hacemos $y = 0$

$$x^4 - 2x^2 = 0 \Longrightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x^2 = 2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

   Puntos de cortes con OX: $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$.

   b) Corte con el eje OY:
   hacemos $x = 0 \Longrightarrow$tenemos el punto $(0, 0)$

4. **Simetría:** $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x) \Longrightarrow$ la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas. Basta estudiarla en el intervalo $(0, +\infty)$.

5. **Signo de la función:**

	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Signo de f		$+$		$-$		$-$		$+$	

Tomamos un punto de cada intervalo para ver el signo que toma la función en dicho intervalo, aunque en este caso por ser simétrica con respecto al eje OY, basta mirar los intervalos correspondientes a la parte positiva.

$$x = 1; \qquad f(1) = -1 < 0$$
$$x = 2; \qquad f(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^2 = 16 - 8 = 8 > 0$$

Por tanto:

- f es positiva en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
- f es negativa en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$

6. **Asíntotas:**

   a) Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (x^4 - 2x^2) = +\infty$, por tanto no tiene asíntotas horizontales.

   b) Asíntotas verticales: no tiene.

   c) Asíntotas oblicuas: $m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4 - 2x^2}{x} = \infty$, por tanto no tiene asíntotas oblicuas.

7. **Monotonía. Máximos y mínimos relativos:**

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \Longrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Longrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Signo de f'	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
		$-$		$+$		$-$		$+$	

$$\begin{array}{ll}
x = -2; & f'(-2) = 4(-2)^3 - 4 \cdot (-2) = -32 + 8 = -24 < 0 \\
x = -0{,}5; & f'(-0{,}5) = 4 \cdot (-0{,}5)^3 - 4 \cdot (-0{,}5) = -0{,}5 + 2 > 0 \\
x = 0{,}5; & f'(0{,}5) = 4 \cdot (0{,}5)^3 - 4 \cdot (0{,}5) = 0{,}5 - 2 < 0 \\
x = 2; & f'(2) = 4 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 = 32 - 8 = 24 > 0
\end{array}$$

Por tanto:

- f es creciente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
- f es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Se deduce de lo anterior que la función alcanza mínimos relativos en $x = -1$ y $x = 1$ y un máximo relativo para $x = 0$.

- Mínimos relativos en los puntos $(-1, -1)$ y $(1, -1)$.
- Máximo relativo en el punto $(0, 0)$.

8. **Concavidad-convexidad. Puntos de inflexión.**

$$f''(x) = 12x^2 - 4 \Longrightarrow 12x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Signo de f''	$-\infty$		$-\sqrt{3}/3$		$\sqrt{3}/3$		$+\infty$
		$+$		$-$		$+$	

$$\begin{array}{ll}
x = -1; & f''(-1) = 12(-1)^2 - 4 = 12 - 4 = 8 > 0 \\
x = 0; & f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 4 = -4 < 0 \\
x = 1; & f''(1) = 12 \cdot 1^2 - 4 = 12 - 4 > 0
\end{array}$$

Por tanto:

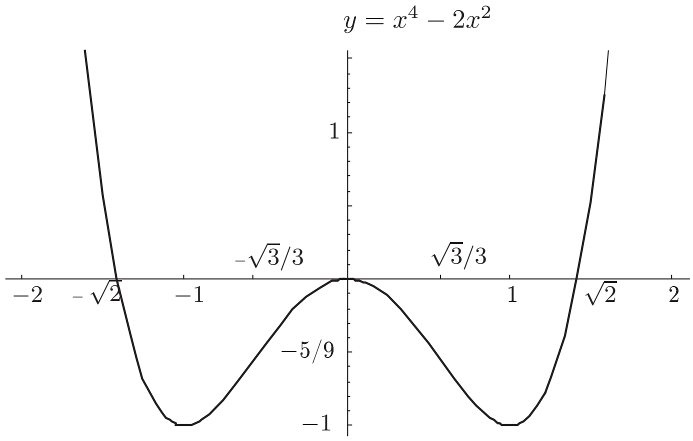
- En $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ f es $\cup$
- En $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ f es $\cap$

Se deduce de lo anterior que para $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ la función tiene puntos de inflexión.

- Puntos de inflexión: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-5}{9}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-5}{9}\right)$

9. **Tabla de valores** En este caso no es necesario calcular otros valores de la función.

Trazamos la gráfica con los datos obtenidos:



$$\boxed{f(x) = x^3 + x^2 - x - 1}$$

1. **Dominio:** Es una función de tipo polinómica, y por tanto, su dominio son todos los números reales.

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

2. **Continuidad y derivabilidad:** Al ser polinómica es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

3. **Puntos de cortes con los ejes**

   a) Corte con el eje OX: hacemos $y = 0$; $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$. Al ser una ecuación de tercer grado, buscamos primero las raíces enteras entre los divisores del término independiente, que en este caso son 1 y -1.

$$1^3 + 1^2 - 1 - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1 \quad \text{es raíz del polinomio.}$$

   Dividimos $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ entre $x - 1$ y lo hacemos aplicando Ruffini.

	1	1	-1	-1
1		1	2	1
	1	2	1	0

Por tanto las otras raíces las obtenemos de resolver $x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Puntos de cortes con OX: $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

b) Corte con el eje OY:
hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ obtenemos el punto $(0, -1)$

4. **Simetría:**
$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - (-x) - 1 = -x^3 + x^2 + x - 1 \neq f(x) \Longrightarrow$ La función no es par.
$-f(-x) = -[(-x)^3 + (-x)^2 - (-x) - 1] = x^3 - x^2 - x + 1 \neq f(x) \Longrightarrow$ la función no es impar.

5. **Signo de la función:**

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signo de f		$-$		$-$		$+$	

Tomamos un punto de cada intervalo para ver el signo que toma la función en dicho intervalo.

$$x = -2; \qquad f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - (-2) - 1 = -8 + 4 + 2 - 1 = -3 < 0$$
$$x = 0; \qquad f(0) = -1 < 0x = 2; \qquad f(2) = 2^3 + 2^2 - 2 - 1 = 8 + 4 - 2 - 1 = 9 > 0$$

Por tanto:

- f es positiva en $(1, +\infty)$
- f es negativa en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$

6. **Asíntotas:**

a) Asíntotas horizontales: No tiene asíntotas horizontales, pues:

$$\lim_{x\to+\infty} (x^3 + x^2 - x - 1) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} (x^3 + x^2 - x - 1) = -\infty$$

b) Asíntotas verticales: no tiene.

c) Asíntotas oblicuas: $m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x} = \infty$, por tanto no tiene asíntotas oblicuas.

7. **Monotonía. Máximos y mínimos relativos:** $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

$$3x^2 + 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \begin{cases} \dfrac{-2+4}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-2-4}{6} = \dfrac{-6}{6} = -1 \end{cases}$$

	$-\infty$		-1		$1/3$		$+\infty$
Signo de f'		$+$		$-$		$+$	

$$x = -2; \qquad f'(-2) = 3(-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 1 = 12 - 4 - 1 = 7 > 0$$
$$x = 0; \qquad f'(0) = -1 < 0$$
$$x = 1; \qquad f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 3 + 2 - 1 = 4 > 0$$

Por tanto:

- f es creciente en $(-\infty,-1)\cup\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$
- f es decreciente en $\left(-1,\dfrac{1}{3}\right)$

Se deduce de lo anterior que la función alcanza un mínimo relativo en $x=\dfrac{1}{3}$ y un máximo relativo para $x=-1$.

- Mínimo relativo en el punto $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{-32}{27}\right)$.
- Máximo relativo en el punto $(-1,0)$.

8. **Concavidad-convexidad. Puntos de inflexión.**

$$f''(x)=6x+2\Longrightarrow 6x+2=0\Longrightarrow x=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}$$

	$-\infty$	$-1/3$	$+\infty$
Signo de f''	$-$		$+$

$$\begin{array}{ll} x=-1; & f''(-1)=6(-1)+2=-6+2=-4<0 \\ x=0; & f''(0)=2>0 \end{array}$$

Por tanto:

- En $\left(\infty,\dfrac{-1}{3}\right)$ f es $\frown$
- En $\left(\dfrac{-1}{3},+\infty\right)$ f es $\smile$

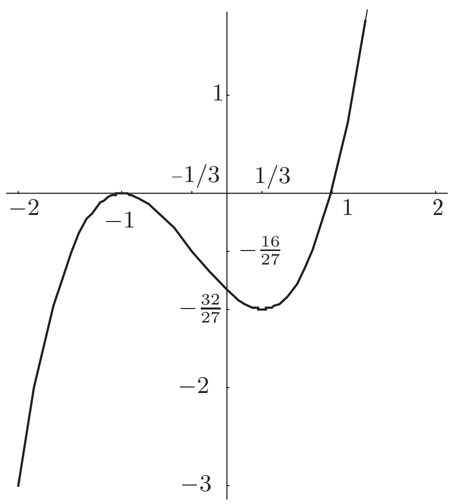
Se deduce de lo anterior que para $x=\dfrac{-1}{3}$ y la función tiene un punto de inflexión.

- Puntos de inflexión: $\left(\dfrac{-1}{3},\dfrac{-16}{27}\right)$

9. **Tabla de valores** En este caso no es necesario calcular otros valores de la función.

Trazamos la gráfica con los datos obtenidos:

$y=x^3+x^2-x-1$



$$\boxed{f(x) = \frac{x}{x^2+1}}$$

1. **Dominio:** Es una función de tipo racional. Su dominio son todos los números reales salvo aquellos que anulan al denominador. En este caso, x^2+1 nunca es cero y por tanto el dominio son todos los números reales.
$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

2. **Continuidad y derivabilidad:** Al ser racional es continua y derivable en su dominio,en nuestro caso, en $\mathbb{R}$.

3. **Puntos de cortes con los ejes**

   a) Corte con el eje OX: hacemos $\quad y = 0$
   $$\frac{x}{x^2+1} = 0 \Longrightarrow x = 0.$$
   Puntos de cortes con OX: $(0,0)$,

   b) Corte con el eje OY:
   hacemos $x = 0 \Longrightarrow$obtenemos nuevamente el punto $(0,0)$

4. **Simetría:** $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2+1} = \dfrac{-x}{x^2+1} = -f(x) \Longrightarrow$ la función es impar, y por tanto simétrica con respecto al origen.

5. **Signo de la función:**

	$-\infty$	0	$+\infty$
Signo de f	$-$		$+$

   Tomamos un punto de cada intervalo para ver el signo que toma la función en dicho intervalo.
   $$x = 1; \qquad f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2} > 0$$
   $$x = -1; \qquad f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = \frac{-1}{2} < 0$$
   Por tanto:

   - f es positiva en $(0,+\infty)$
   - f es negativa en $(-\infty,0)$

6. **Asíntotas:**

   a) Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$, por tanto la recta $x = 0$ es asíntota horizontal.

   b) Asíntotas verticales: no tiene.

   c) Asíntotas oblicuas: Al tener asíntota horizontal, no tiene oblicua.

7. **Monotonía. Máximos y mínimos relativos:**
$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1) - 2x\cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$
$$\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow 1-x^2 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$$

Signo de f'	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
		$-$		$+$		$-$	

$$
\begin{array}{ll}
x=-2; & f'(-2)=\dfrac{1-(-2)^2}{((-2)^2+1)^2}=\dfrac{1-4}{(25)}=\dfrac{-3}{25}<0 \\
x=0; & f'(0)=1>0 \\
x=2; & f'(2)=\dfrac{1-2^2}{(2^2+1)^2}=\dfrac{1-4}{(25)}=\dfrac{-3}{25}<0
\end{array}
$$

Por tanto:

- f es creciente en $(-1,1)$
- f es decreciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Se deduce de lo anterior que la función alcanza un mínimo relativo en $x=-1$ y un máximo relativo para $x=1$.

- Mínimo relativo en el punto $\left(-1,\dfrac{-1}{2}\right)$.
- Máximo relativo en el punto $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$.

8. **Concavidad-convexidad. Puntos de inflexión.**

$$
f''(x)=\frac{-2x\cdot(x^2+1)^2-2(x^2+1)2x(1-x^2)}{(x^2+1)^4}=\frac{-2x\cdot(x^2+1)-2\cdot 2x(1-x^2)}{(x^2+1)^3}=
$$

$$
\frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{(x^2+1)^3}=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}
$$

$$
\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}=0\Longrightarrow 2x^3-6x=0\Longrightarrow 2x(x^2-3)=0\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3=0\Longrightarrow x^2=3\Longrightarrow x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.
$$

Signo de f''	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
		$-$		$+$		$-$		$+$	

$$
\begin{array}{ll}
x=-2; & f''(-2)=\dfrac{2(-2)^3-6(-2)}{((-2)^2+1)^3}=\dfrac{-16+12}{125}=\dfrac{-4}{125}<0 \\[2ex]
x=-1; & f''(-1)=\dfrac{2(-1)^3-6(-1)}{((-1)^2+1)^3}=\dfrac{-2+6}{8}=\dfrac{1}{2}>0 \\[2ex]
x=1; & f''(1)=\dfrac{2\cdot 1^3-6\cdot 1}{(1^2+1)^3}=\dfrac{2-6}{8}=\dfrac{-1}{2}<0 \\[2ex]
x=2; & f''(2)=\dfrac{2\cdot 2^3-6\cdot 2}{(2^2+1)^3}=\dfrac{16-12}{125}=\dfrac{4}{125}>0
\end{array}
$$

Por tanto:

- En $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$ f es $\smile$
- En $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$ f es $\frown$

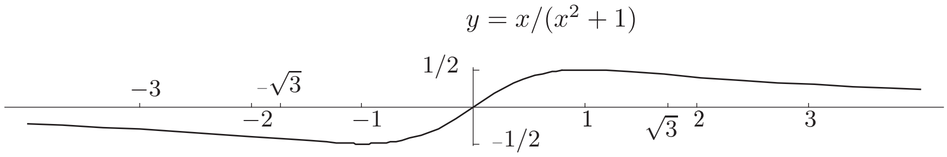
Se deduce de lo anterior que para $x=-\sqrt{3}$, $x=0$ y $x=\sqrt{3}$ la función tiene puntos de inflexión.

- Puntos de inflexión: $\left(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0,0)$ y $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

9. **Tabla de valores** Calculemos algunos valores de la función:

x	0	1	-1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	2	-2	3	-3
y=f(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{-2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{-3}{10}$

Trazamos la gráfica con los datos obtenidos:



$$\boxed{f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}}$$

1. **Dominio:** Es una función de tipo racional. Su dominio son todos los números reales salvo aquellos que anulan al denominador. En este caso:

$$x - 5 = 0 \Longrightarrow x = 5$$

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{5\}$$

2. **Continuidad y derivabilidad:** Al ser racional es continua y deribable en su dominio, en nuestro caso, en $\mathbb{R} - \{5\}$.

3. **Puntos de cortes con los ejes**

   a) Corte con el eje OX: hacemos $y = 0$

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} = 0 \Longrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Longrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

   Puntos de cortes con OX: $(4, 0)$ y $(1, 0)$.

   b) Corte con el eje OY:
   hacemos $x = 0 \Longrightarrow y = \frac{-4}{5}$obtenemos el punto $\left(0, \frac{-4}{5}\right)$

4. **Simetría:**
$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 5(-x) + 4}{-x - 5} = \frac{x^2 + 5x + 4}{-x - 5} \neq f(x) \Longrightarrow$ la función no es par.
$f(-x) \neq -f(x) \Longrightarrow$ la función no es impar. No hay, pues, ninguna simetría.

5. **Signo de la función:** En este caso, añadimos el punto de discontinuidad de la función para determinar los intervalos donde la función mantiene el signo constante.

$$\begin{array}{c|ccccccccc} & -\infty & & 1 & & 4 & & 5 & & +\infty \\ \text{Signo de } f & & - & & + & & - & & + & \end{array}$$

Tomamos un punto de cada intervalo para ver el signo que toma la función en dicho intervalo.

$$x = 0; \qquad f(0) = \frac{-4}{5} < 0$$

$$x = 2; \qquad f(2) = \frac{2^2 - 5 \cdot 2 + 4}{2 - 5} = \frac{4 - 10 + 4}{-3} = \frac{2}{3} > 0$$

$$x = 4,5; \qquad f(4,5) = \frac{(4,5)^2 - 5 \cdot 4,5 + 4}{4,5 - 5} = \frac{20,25 - 22,5 + 4}{-0,5} = \frac{1,75}{-0,5} < 0$$

$$x = 6; \qquad f(6) = \frac{6^2 - 5 \cdot 6 + 4}{6 - 5} = \frac{36 - 30 + 4}{1} = 10 > 0$$

Por tanto:

- f es positiva en $(1, 4) \cup (5, +\infty)$
- f es negativa en $(-\infty, 1) \cup (4, 5)$

6. **Asíntotas:**

   a) Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} = \infty \Longrightarrow$ no hay asíntotas horizontales.

   b) Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} = \infty = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} = -\infty \end{cases} \Longrightarrow$$

   la recta $x = 5$ es una asíntota vertical.

   c) Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 5x} = 1 \Longrightarrow m = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} - x \right) =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5x + 4 - x^2 + 5x}{x - 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x - 5} = 0 \Longrightarrow n = 0 \Longrightarrow$$

   la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.

7. **Monotonía. Máximos y mínimos relativos:**

$$f'(x) = \frac{(2x - 5) \cdot (x - 5) - (x^2 - 5x + 4)}{(x - 5)^2} = \frac{2x^2 + -10x - 5x + 25 - x^2 + 5x - 4}{(x - 5)^2} =$$

$$\frac{x^2 - 10x + 21}{(x - 5)^2} \frac{x^2 - 10x + 21}{(x - 5)^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2} = \frac{10 \pm 4}{2} = \begin{cases} \dfrac{10 + 4}{2} = \dfrac{14}{2} = 7 \\ \dfrac{10 - 4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Signo de f'	$-\infty$		3		5		7		$+\infty$
		$+$		$-$		$-$		$+$	

$$x = 0; \qquad f'(0) = \frac{21}{25} > 0$$

$$x = 4; \qquad f'(4) = \frac{16 - 40 + 21}{(4-5)^2} = -3 < 0$$

$$x = 6; \qquad f'(6) = \frac{36 - 60 + 21}{(6-5)^2} = -3 < 0$$

$$x = 8; \qquad f'(8) = \frac{64 - 80 + 21}{(8-5)^2} = \frac{5}{9} > 0$$

Por tanto:

- f es decreciente en $(3,5) \cup (5,7)$
- f es creciente en $(-\infty, 3) \cup (7, +\infty)$

Se deduce de lo anterior que la función alcanza un mínimo relativo en $x = 7$ y un máximo relativo para $x = 3$.

- Mínimo relativo en el punto$(7,9)$.
- Máximo relativo en el punto $(3,1)$.

8. **Concavidad-convexidad. Puntos de inflexión.**

$$f''(x) = \frac{(2x-10)\cdot(x-5)^2 - 2(x-5)(x^2-10x+21)}{(x-5)^4} =$$

$$\frac{(2x-10)\cdot(x-5) - 2\cdot(x^2-10x+21)}{(x-5)^3} =$$

$$\frac{2x^2 - 10x - 10x + 50 - 2x^2 + 20x - 42}{(x-5)^3} = \frac{8}{(x-5)^3}$$

$\dfrac{8}{(x-5)^3}$ nunca se hace cero. Los intervalos donde f es cóncava o convexa lo va a determinar únicamente el punto donde f es discontinua, que es el 5.

Signo de f''	$-\infty$		5		$+\infty$
		$-$		$+$	

$$x = 0; \qquad f''(0) = \frac{8}{(0-5)^3} = \frac{-8}{125} < 0$$

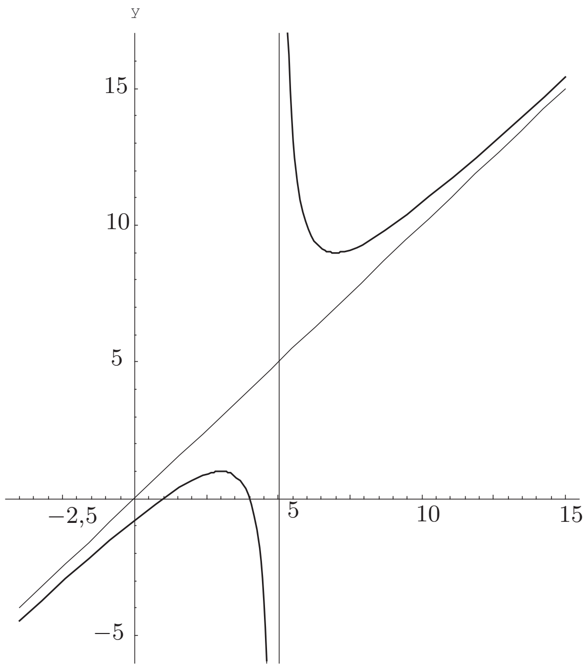
$$x = 6; \qquad f''(6) = \frac{8}{(6-5)^3} = 8 > 0$$

Por tanto:

- En $(5, +\infty)$ f es $\cup$
- En $(-\infty, 5)$ f es $\cap$

Se deduce de lo anterior que no hay puntos de inflexión.

Trazamos la gráfica con los datos obtenidos:



$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$$

8.1. Recta tangente y normal

1. Halla las rectas tangente y normal a las siguientes curvas en el punto que se indica:

   a) $f(x) = -x^2 + 2x + 5 \qquad x = -1$

   b) $f(x) = x^3 + 4x \qquad x = 2$

   c) $f(x) = x^5 - 3x^4 - 2x + 1 \qquad x = 1$

   d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} \qquad x = 4$

   e) $f(x) = \ln(\operatorname{tg} 2x) \qquad x = \pi/8$

   f) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}^3 5x} \qquad x = \pi/6$

2. De todas las rectas tangentes a la curva $f(x) = e^{x-1}$, halla la que pasa por el origen de coordenadas.

3. Escribe la ecuación de la recta tangente a $y = x^2 + 4x + 1$ que tiene una inclinación de 30°.

4. Halla la tangente a la curva $y = \dfrac{8}{x-3}$ en el punto de ordenada $y = 4$.

5. La recta de pendiente 3 que pasa por el punto $(0, -2)$ es tangente a la curva $y = x^3$. Calcula las coordenadas del punto de tangencia.

6. Halla la tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 + 2x + 2$ que es paralela a la recta $8x + 2y - 3 = 0$

7. Halla dos rectas paralelas a $5x - y + 10 = 0$ que sean tangentes a $y = \dfrac{x^3}{2} - x$. Escribe la ecuación de ambas rectas.

8. Escribe la tangente a la gráfica de $f(x) = 6 \ln x - 5$ cuya pendiente sea $m = 3$.

9. Busca la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $P(2, 1)$ y pasa por el punto $A(5, -2)$.

10. ¿En qué punto la tangente a la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ es paralela a la recta $y = -5x + 3$.

11. Halla a para que la función $y = 2x^2 - 3x + a$ y la recta $y = 2x - 3$ sean tangentes.

12. Dada la curva $y = 3x^2 + 5$ y la recta $y = 4x + k$. Halla k para que la recta sea tangente a la curva.

13. La ecuación del espacio recorrido por un móvil en función del tiempo es $s(t) = 3t^2 - t + 1$. Halla la velocidad en el instante $t = 2$.

14. Se ha lanzado verticalmente hacia arriba una piedra. La altura en metros alcanzada al cabo de t segundos viene dada por la expresión $e = f(t) = 20t - t^2$.

    a) Halla la velocidad media en el intervalo comprendido entre $t = 0$ y $t = 5$.

    b) ¿En algún momento la velocidad de la piedra ha sido de 15 m/s?. Si es así, ¿a qué altura sucedió?

8.2. Monotonía. Extremos relativos

15. Estudia la monotonía de las siguientes funciones:

    a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

    b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

    c) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 7x - 6)e^x$

    d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

    e) $f(x) = \operatorname{cotg} x$

    f) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

    g) $f(x) = x^4 - 2x^2$

    h) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

    i) $f(x) = \ln[(x-1)(x+1)]$

16. Halla los extremos locales (indicando cuales son máximos y cuáles son mínimos).

   a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12$
   b) $f(x) = x^4 - 2x^2$
   c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
   d) $f(x) = \cos x - \operatorname{sen} x; \quad x \in [0, 2\pi)$
   e) $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x; \quad x \in [0, 2\pi)$
   f) $f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 10x + 8$
   g) $f(x) = x^5 + x + 1$
   h) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

17. Estudia la monotonía y halla los extremos absolutos y relativos de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ en $[0, 2\pi]$
   b) $f(x) = x + 5 - 2\operatorname{sen} x$ en $[0, 2\pi]$

18. Sea la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determina sus coeficientes sabiendo:

   a) Que pasa por el origen de coordenadas tangencialmente a la bisectriz del primer cuadrante.
   b) Tiene un extremo en $x = -0,5$. Determina la naturaleza del extremo anterior.

8.3. Curvatura. Puntos de inflexión

19. Determina los intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{7}x^7 - \dfrac{3}{5}x^5 - 8x^3 + x$
   b) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2-1}$
   c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
   d) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 1$
   e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
   f) $f(x) = \dfrac{x^6}{x-1}$

20. Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Halla a, b, c y d sabiendo que la ecuación de la tangente a la curva en el punto de inflexión $(1, 0)$ es $y = -3x + 3$ y que tiene un extremo en el punto de abscisa $x = 0$.

21. Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Halla a, b, c y d sabiendo que la función tiene un máximo en el punto $(0, 3)$, un mínimo para $x = 2$ y un punto de inflexión en $(1, 1)$.

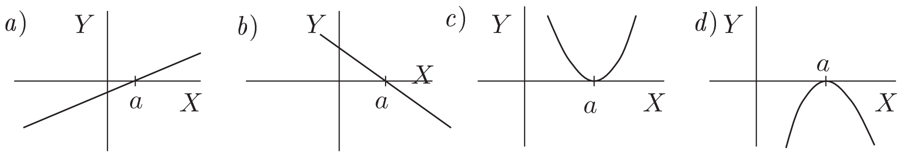
8.4. Representación gráfica de funciones

22. Representa gráficamente las siguientes funciones calculando:

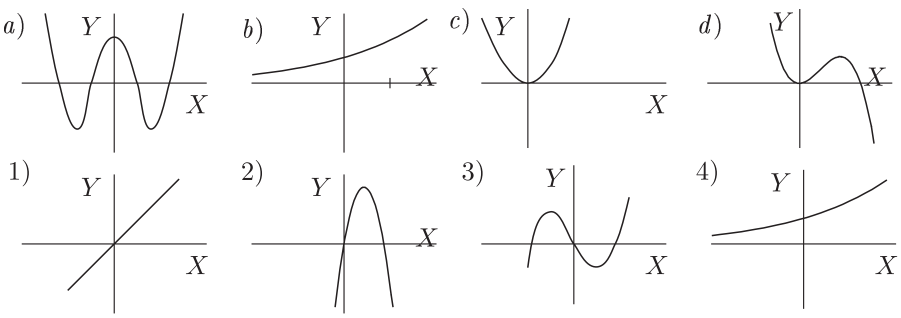
   a) Dominio de definición.
   b) Continuidad.
   c) Puntos de cortes con los ejes.
   d) Simetría.
   e) Signo.
   f) Asíntotas.
   g) Monotonía. Máximos y mínimos relativos.
   h) Curvatura y puntos de inflexión.

   a) $y = x^3 - 3x + 2$
   b) $y = \dfrac{5x+8}{x^2+x+1}$
   c) $y = \dfrac{x^4+4x^3}{9}$
   d) $y = \dfrac{x^2}{x^2-4x+3}$
   e) $y = \dfrac{x^2-1}{x}$
   f) $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$

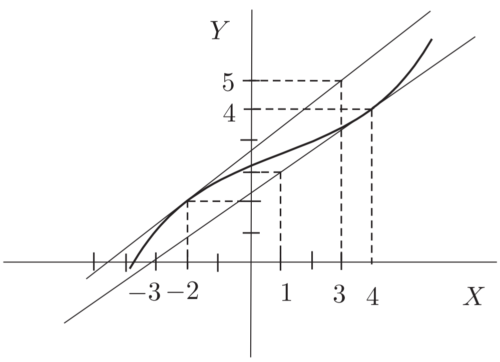
23. ¿Cuál de estas gráficas corresponden a la derivada de una función que tiene un máximo en el punto de abscisa $x = a$. Razona la respuesta.



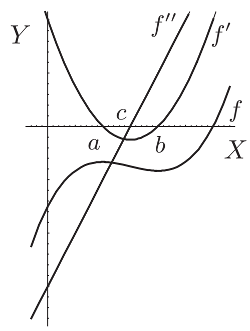
24. Asocia a cada una de las funciones que se dibujan la que se cree es su derivada, dando alguna explicación.



25. Observa la siguiente gráfica. Teniendo en cuenta que las rectas trazadas son tangentes a la función $f(x)$, halla $f'(-2)$ y $f'(4)$.



26. El gráfico que acompaña representa una función, su derivada y su derivada segunda. Explica el comportamiento de la función en los puntos cuya abscisa se han marcado en la gráfica con letras.



27. En las siguientes gráficas están dibujadas las funciones derivadas de $f(x)$ y $g(x)$. Se pide hacer un esbozo de las mismas a partir de la información que proporcionan las derivadas.

Apéndice A

Solucionario

A.1. Solucionario del tema 1: Trigonometría

1. *a*) $\frac{5\pi}{36}$ *b*) $\frac{2\pi}{3}$ *c*) $\frac{4\pi}{3}$ *d*) $\frac{23\pi}{12}$ *e*) $\frac{11\pi}{6}$ *f*) $\frac{7\pi}{6}$

2. *a*) $210°$ *b*) $400°$ *c*) $36°$ *d*) $57,2958° = 57°17'44''$
   e) $135°$ *f*) $630°$

3. *a*) $2 \cdot 360°$ *b*) $-120° - 8 \cdot 360°$ *c*) $180° + 2 \cdot 360°$ *d*) $20 \cdot 360°$

4. *a*) 10π rad $= (0 + 5 \cdot 2\pi)$ rad *b*) 60π rad $= (0 + 30 \cdot 2\pi)$ rad *c*) $\frac{-13\pi}{4}$ rad $= \left(\frac{-5\pi}{4} - 2\pi\right)$ rad

5. *a*) 22cm *b*) 11, 88cm *c*) 16, 89cm *d*) 55, 68cm

6. 2/3rad$= 38,18° = 38°10'48''$

7. 1/8rad$= 7,16° = 7°9'43''$

8. No procede poner la solución.

9. *a*) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\operatorname{cosec} x = 2$, $\sec x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\operatorname{cotg} x = \sqrt{3}$

   b) $\operatorname{sen} x = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$, $\cos x = \frac{-\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} x = 2$ $\operatorname{cosec} x = \frac{-\sqrt{5}}{2}$, $\sec x = -\sqrt{5}$ $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{2}$

10. $\operatorname{sen} x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\cos x = \frac{-1}{2}$, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ $\operatorname{cosec} x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$, $\sec x = -2$ $\operatorname{cotg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

11. $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

12. $\operatorname{sen} \alpha = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$

13. No procede poner la solución.

14. No procede poner la solución.

15. *a*) $\operatorname{sen} x$ *b*) $1 + \operatorname{sen} x$ *c*) $-\operatorname{tg} x$ *d*) $\operatorname{cotg} a$

16. *a*) $\cos\alpha$ *b*) $1+\operatorname{sen}\alpha$ *c*) $\dfrac{1+\cos^4\alpha}{1-\cos^4\alpha}$

    d) $\operatorname{sen}\alpha$ *e*) $\operatorname{sen}\alpha$ *f*) $\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha$

17. Es cierto el apartado d) ya que el coseno de cualquier ángulo siempre es un número comprendido entre 1 y -1.

18. No es posible, ya que tendría que verificarse:

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{9}{25}+\frac{4}{25}=\frac{13}{25}\neq 1$$

19. No, pues pueden ser ángulos que se diferencien en múltiplos de 180°, que tienen el mismo valor para la cotangente.

20. *a*) I y II cuadrante *b*) I y IV cuadrante *c*) I y III cuadrante *d*) I y III cuadrante
    e) I y IV cuadrante *f*) I y II cuadrante *g*) I y II cuadrante *h*) I y IV cuadrante

21. *a*)

$$\operatorname{sen}240^\circ=-\operatorname{sen}60^\circ=\frac{-\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{cosec}240^\circ=-\operatorname{cosec}60^\circ=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$$
$$\cos240^\circ=-\cos60^\circ=\frac{-1}{2} \qquad \sec240^\circ=-\sec60^\circ=-2$$
$$\operatorname{tg}240^\circ=\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3} \qquad \operatorname{cotg}240^\circ=\operatorname{cotg}60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

b)

$$\operatorname{sen}330^\circ=-\operatorname{sen}30^\circ=\frac{-1}{2} \qquad \operatorname{cosec}330^\circ=-\operatorname{cosec}30^\circ=-2$$
$$\cos330^\circ=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec330^\circ=\sec30^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$\operatorname{tg}330^\circ=-\operatorname{tg}30^\circ=\frac{-\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{cotg}330^\circ=-\operatorname{cotg}30^\circ=-\sqrt{3}$$

c)

$$\operatorname{sen}-240^\circ=\operatorname{sen}60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{cosec}-240^\circ=\operatorname{cosec}60^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$\cos-240^\circ=-\cos60^\circ=\frac{-1}{2} \qquad \sec-240^\circ=-\sec60^\circ=-2$$
$$\operatorname{tg}-240^\circ=-\operatorname{tg}60^\circ=-\sqrt{3} \qquad \operatorname{cotg}-240^\circ=-\operatorname{cotg}60^\circ=\frac{-\sqrt{3}}{3}$$

d)

$$\operatorname{sen}600^\circ=-\operatorname{sen}60^\circ=\frac{-\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{cosec}600^\circ=-\operatorname{cosec}60^\circ=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$$
$$\cos600^\circ=-\cos60^\circ=\frac{-1}{2} \qquad \sec600^\circ=-\sec60^\circ=-2$$
$$\operatorname{tg}600^\circ=\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3} \qquad \operatorname{cotg}600^\circ=\operatorname{cotg}60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

e)

$$\operatorname{sen}930^\circ=-\operatorname{sen}30^\circ=\frac{-1}{2} \qquad \operatorname{cosec}930^\circ=-\operatorname{cosec}30^\circ=-2$$
$$\cos930^\circ=-\cos30^\circ=\frac{-\sqrt{3}}{2} \qquad \sec930^\circ=-\sec30^\circ=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$$
$$\operatorname{tg}930^\circ=\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{cotg}930^\circ=\operatorname{cotg}30^\circ=\sqrt{3}$$

f)

$$\operatorname{sen}1140^\circ=\operatorname{sen}60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{cosec}1140^\circ=\operatorname{cosec}60^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$\cos1140^\circ=\cos60^\circ=\frac{1}{2} \qquad \sec1140^\circ=\sec60^\circ=2$$
$$\operatorname{tg}1140^\circ=\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3} \qquad \operatorname{cotg}1140^\circ=\operatorname{cotg}60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

g) $\operatorname{sen} -1830° = -\operatorname{sen} 30° = \dfrac{-1}{2}$ $\quad$ $\operatorname{cosec} -1830° = -\operatorname{cosec} 30° = -2$

$\cos -1830° = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\sec -1830° = \sec 30° = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\operatorname{tg} -1830° = -\operatorname{tg} 30° = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$ $\quad$ $\operatorname{cotg} -1830° = -\operatorname{cotg} 30° = -\sqrt{3}$

h) $\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen} 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\operatorname{cosec} 135° = \operatorname{cosec} 45° = \sqrt{2}$

$\cos 135° = -\cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\sec 135° = -\sec 45° = -\sqrt{2}$

$\operatorname{tg} 135° = -\operatorname{tg} 45° = -1$ $\quad$ $\operatorname{cotg} 135° = -\operatorname{cotg} 45° = -1$

22. *a*) $\operatorname{sen} 135° = \sqrt{2}/2$, $\quad \cos 135° = -\sqrt{2}/2$, $\quad \operatorname{tg} 135° = -1$

    $\operatorname{cosec} 135° = \sqrt{2}$, $\quad \sec 135° = -\sqrt{2} \quad \operatorname{cotg} 135° = -1$

    b) $\operatorname{sen} 270° = -1$, $\quad \cos 270° = 0$, $\quad \operatorname{tg} 270°$ no existe

    $\operatorname{cosec} 270° = -1$, $\quad \sec 270°$ no existe $\quad \operatorname{cotg} 270° = 0$

    c) $\operatorname{sen} 11\pi = \operatorname{sen} \pi = 0$, $\quad \cos 11\pi = -1$, $\quad \operatorname{tg} 11\pi = 0$

    $\operatorname{cosec} 11\pi$ no existe, $\quad \sec 11\pi = -1 \quad \operatorname{cotg} 11\pi$ no existe

    d) $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, $\quad \cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

    $\operatorname{cosec} \dfrac{\pi}{6} = 2$, $\quad \sec \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \quad \dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

23. *a*) $-\sqrt{3}/2$ $\quad$ *b*) $\sqrt{3}/2$ $\quad$ *c*) $\sqrt{3}$ $\quad$ *d*) $-\sqrt{2}/2$ $\quad$ *e*) 2 $\quad$ *f*) 1

24. *a*) 4/3 $\quad$ *b*) −3/4 $\quad$ *c*) 4/3 $\quad$ *d*) −3/4
    e) −4/3 $\quad$ *f*) 3/4 $\quad$ *g*) −4/3 $\quad$ *h*) 3/4

25. $\operatorname{sen} x = 0,6 \quad \cos x = 0,8 \quad \operatorname{sen} y = 0,4 \quad \cos y = -0,92$

    a) $\operatorname{sen}(x+y) = -0,256 \quad \cos(x+y) = -0,976 \quad \operatorname{tg}(x+y) = 0,262$

    b) $\operatorname{sen}(x-y) = -0,872 \quad \cos(x-y) = -0,496 \quad \operatorname{tg}(x-y) = 1,758$

    c) $\operatorname{sen} 2x = 0,96 \quad \cos 2x) = 0,28 \quad \operatorname{tg} 2x = 3,43$

    d) $\operatorname{sen} 2y = -0,74 \quad \cos 2y = 0,69 \quad \operatorname{tg} 2y = -1,07$

    e) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0,32 \quad \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0,73 \quad \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0,39$

    f) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{y}{2}\right) = 0,98 \quad \cos\left(\dfrac{y}{2}\right) = 0,2 \quad \operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{2}\right) = 4,9$

    El valor de la secante, cosecante y cotangente se calcula a partir de las anteriores.

26. $\operatorname{sen} 22,5° = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \cos 22,5° = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \operatorname{tg} 22,5° = \sqrt{2} - 1$

27. $\operatorname{sen}(x+y+z) = \operatorname{sen} x \cos x \cos z + \cos x \operatorname{sen} y \cos z + \cos x \cos y \operatorname{sen} z - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$

28. *a*) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ $\quad$ *b*) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ *c*) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ $\quad$ *d*) $\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ *e*) 4 $\quad$ *f*) $2\sqrt{3}$

29. $\operatorname{sen} 3x = 0,568$

30. $\sqrt{2}/2$

31. $\sqrt{2}/2$

32. *a*) $\dfrac{1}{2}(\operatorname{sen} 110° - \operatorname{sen} 30°)$ *b*) $\dfrac{1}{2}(\operatorname{sen} 110° + \operatorname{sen} 30°)$
c) $\dfrac{1}{2}(\cos 110° + \cos 30°)$ *d*) $\dfrac{-1}{4}(\operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x)$

33. *a*) -1 *b*) $-\operatorname{tg} 2x$

34. *a*) Cierta *b*) Cierta *c*) No es cierta.
d) Cierta *e*) No es cierta *f*) Cierta

35. *a*) $x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ *b*) $x = \begin{cases} 120° + 360°k \\ 240° + 360°k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$ *c*) $x = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot \pi;\ k \in \mathbb{Z}$

36. *a*) $x = \begin{cases} 30° + 360°k \\ 150° + 360°k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$ *b*) $x = \begin{cases} 180°k \\ 45° + 180°k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$ *c*) $x = 360°k;\ k \in \mathbb{Z}$

d) $x = \begin{cases} 180°k \\ 45° + 180°k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$ *e*) $x = \begin{cases} 90° + 180°k \\ 240° + 360°k \\ 300° + 360°k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$ *f*) $x = \begin{cases} 180° + 360°k \\ 60° + 360°k \\ 300° + 360°k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

g) $x = \begin{cases} 15° + 180°k \\ 180°k \\ 90° + 180°k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$ *h*) $x = \begin{cases} 180°k \\ 60° + 360°k \\ 180° + 360°k \\ 300° + 360°k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$ *i*) $x = \begin{cases} 210° + 360°k \\ 330° + 360°k \\ 199,5° + 360°k \\ 350,5° + 360°k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

j) $x = \begin{cases} 70°31' + 360°k \\ 289°29' + 360°k \end{cases}$ *k*) $x = \begin{cases} 30° + 180°k \\ 150° + 180°k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$ *l*) $x = \begin{cases} 90° + 180°k \\ 30° + 360°k \\ 150° + 360°k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

m) $x = 45° + 180°k$ *n*) $x = \begin{cases} 60° + 180°k \\ 120° + 180°k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$ *ñ*) $x = 180°k; k \in \mathbb{Z}$

o) $x = \begin{cases} 60° + 720°k \\ 300° + 720°k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$ *p*) $x = \begin{cases} 30° + 360°k \\ 150° + 360°k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$ *q*) $x = \begin{cases} 90° + 360°k \\ 360°k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

37. *a*) $x = 45° + 180°k$ *b*) $x = \begin{cases} 180°k \\ 60° + 180°k \\ 120° + 180°k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$ *c*) $x = \begin{cases} 30° + 360°k \\ 150° + 360°k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

$d)\ x = \begin{cases} 30° + 180°k \\ 150° + 180°k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$ $\quad e)\ x = \begin{cases} 60° + 180°k \\ 120° + 180°k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$ $\quad f)\ x = \begin{cases} 210° + 360°k \\ 330° + 360°k \\ 19°28'16'' + 360°k \\ 166°31'43'' + 360°k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

$g)\ x = 180°k$ $\quad h)\ x = \begin{cases} 30° + 60°k \\ 90° + 180°k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$ $\quad i)\ \begin{cases} 180°k \\ 60° + 180°k \\ 120° + 180°k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

$j)\ x = 360°k$ $\quad k)\ x = \begin{cases} 60°k \\ 360°k \\ 120° + 360°k \\ 240° + 360°k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$ $\quad l)\ x = 270° + 360°k$

$m)\ x = \begin{cases} 60°k \\ 90°k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$ $\quad n)\ x = \begin{cases} 48°35'25'' + 360°k \\ 131°24'34'' + 360°k \\ 210° + 360°k \\ 330° + 360°k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

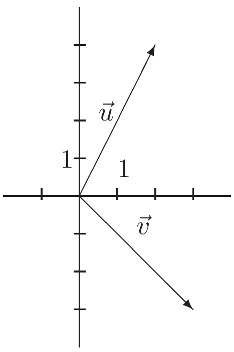
$ñ)\ x = \begin{cases} 120° + 360°k \\ 240° + 360°k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$ $\quad o)\ x = \begin{cases} 60°k \\ 120° + 360°k \\ 240° + 360°k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

38. *a*) $x = 30°$ $\quad y = 45°$ $\qquad$ *b*) $x = 90°$ $\quad y = 1$
    c) $x = 45°$ $\quad y = 15°$ $\qquad$ *d*) $x = 90°$ $\quad y = 30°$
    e) $x = 135°$ $\quad y = 45°$ $\qquad$ *f*) $x = -30°$ $\quad y = 0°$
    g) $x = 30°$ $\quad y = 0°$ $\qquad$ *h*) $x = 30°$ $\quad y = 90°$

A.2. Solucionario del tema 2: Vectores en el plano

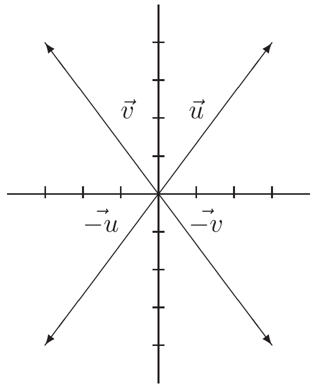
1. *a*) $(11, 19)$ $\qquad$ *b*) $(11, 18)$ $\qquad$ *c*) $(-15, -24,)$

2. *a*)



b) $2\vec{u} = (4, 8)$, $\quad \frac{1}{2}\vec{u} = (1, 2)$, $\quad -\vec{u} = (-2, -4)$, $\quad \vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} = (1, 5)$

3. *a*) $-\vec{u} = (-3, -4)$ $\quad -\vec{v} = (3, -4)$ *b*)



4. *a*) Si *b*) No *c*) No

5. Si es base.

6. $(19/7, 1/7)$

7. $\vec{v}(-4, -1)$

8. $\vec{x}(4, 2)$

9. *a*) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$ *b*) $|\vec{u}| = \sqrt{5}$, $|\vec{v}| = \sqrt{13}$ *c*) $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 119,74°$

   d) $\vec{v}(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ *e*) No son ortogonales, $\vec{x} = (2, -1)$ es ortogonal a $\vec{u}$

10. *a*) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -14$ *b*) $|\vec{a}| = \sqrt{17}$ *c*) $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 160°20'$ *d*) $|\vec{b'}| = \dfrac{-14\sqrt{17}}{17}$

11. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$

12. *a*) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$ *b*) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ *c*) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 13$ *d*) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$

13. *a*) No *b*) Si *c*) Si *d*) Si

14. $\left(\dfrac{4}{\sqrt{65}}, \dfrac{-7}{\sqrt{65}}\right)$ y $\left(\dfrac{-4}{\sqrt{65}}, \dfrac{7}{\sqrt{65}}\right)$

15. $(-8/5, 6/5)$

16. $(-6/\sqrt{10}, 2/\sqrt{10})$

17. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

18. $a = 2$

19. $h = 4$

20. El módulo de $\vec{v}$ queda multiplicado por k.

21. $\vec{x} = (-2, -4/3)$

22. $h = 3/4$

23. Hay dos soluciones para m: $m_1 = 12$ y $m_2 = -12$

24. Hay dos soluciones para b: $b_1 = -9$ y $b_2 = 1$

25. $a = -3/5$

26. $\vec{x} = (0, 3)$

27. $7/5$

28. 0 y 1

29. $\vec{x} = (-1, 6)$

30. $x = -3$

31. *a*) $x = -12/5$ *b*) $x = 5/12$

32. $x = -3$ y $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{26}$

33. No procede la solución.

34. $|\vec{u} - \vec{v}| = 4$.

35. $\vec{v} = (-1, 3)$

36. $\vec{x} = (2, -1)$ e $\vec{y} = (3, 4)$

37. $|\vec{v}| = 8$

38. $90°$

A.3. Solucionario del tema 3: Geometría analítica en el plano

1. *a*) $\overrightarrow{AB}(2, 8,);\quad M(3, 3)$ *b*) $\overrightarrow{PQ}(3, 1);\quad M\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

   c) $\overrightarrow{AB}(-3, 2\sqrt{2});\quad M\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ *d*) $\overrightarrow{PQ}(-\sqrt{3} - \sqrt{2}, \sqrt{2} + \sqrt{3});\quad M\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}\right)$

2. $A(5, -2)$

3. $A(3, 3)$, $B(1, 5)$ y $C(1, -3)$

4. $C\left(\frac{15}{4}, \frac{15}{2}\right)$, $D\left(\frac{9}{2}, 10\right)$ y $E\left(\frac{21}{4}, \frac{25}{2}\right)$

5.

Punto y vector	Ecuación vectorial	Paramétricas	Continua	General
$A(0, 2)$ y $\vec{v}(4, 3)$	$(x, y) = (0, 2) + \lambda(4, 3)$	$\begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \end{cases}$	$\frac{x}{4} = \frac{y-2}{3}$	$3x - 4y + 8 = 0$
$A(2, 7)$ y $\vec{v}(-1, 2)$	$(x, y) = (2, 7) + \lambda(-1, 2)$	$\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \end{cases}$	$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-7}{2}$	$2x + y - 11 = 0$
$A(5, -4)$ y $\vec{v}(2, -2)$	$(x, y) = (5, -4) + \lambda(2, -2)$	$\begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -4 - 2\lambda \end{cases}$	$\frac{x-5}{2} = \frac{y+4}{-2}$	$x + y - 1 = 0$
$A(0, 3)$ y $\vec{v}(2, 0)$	$(x, y) = (0, 3) + \lambda(2, 0)$	$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 \end{cases}$	$\frac{x}{2} = \frac{y-3}{0}$	$y - 3 = 0$
$A(-1/2, \pi)$ y $\vec{v}(0, -2)$	$(x, y) = (-1/2, \pi) + \lambda(0, -2)$	$\begin{cases} x = -1/2 \\ y = \pi - 2\lambda \end{cases}$	$\frac{x+1/2}{0} = \frac{y-\pi}{-2}$	$x + 1/2 = 0$
$A(0, 0)$ y $\vec{v}(-1/3, 1/2)$	$(x, y) = (0, 0) + \lambda(-1/3, 1/2)$	$\begin{cases} x = -\frac{1}{3}\lambda \\ y = \frac{1}{2}\lambda \end{cases}$	$\frac{x}{-1/3} = \frac{y}{1/2}$	$3x + 2y = 0$

6. *a*) $2x - y + 1 = 0$ *b*) $y = -3$ *c*) $x - 3y + 9 = 0$

7. *a*) $3x + 2y - 6 = 0$ *b*) $y = -2$ *c*) $x + y = 0$

8. $y = \sqrt{3}x + 2, \quad y = -\sqrt{3}x + 2$

9. Vector de dirección: $\vec{v}$; vector normal: $\vec{n}$

   a) $\vec{v}(5,2)$ y $\vec{n}(2,-5)$ *b*) $\vec{v}(-2,3)$ y $\vec{n}(3,2)$ *c*) $\vec{v}(1,4)$ y $\vec{n}(4,-1)$ *d*) $\vec{v}(3,1)$ y $\vec{n}(1,-3)$

10. Recta paralela: $\|$; recta perpendicular: $\perp$

    a) $\begin{array}{l} \| : 2x + y - 3 = 0 \\ \perp : x - 2y + 1 = 0 \end{array}$ *b*) $\begin{array}{l} \| : x - 2y + 6 = 0 \\ \perp : 2x + y - 3 = 0 \end{array}$ *c*) $\begin{array}{l} \| : 3x - y = 0 \\ \perp : x + 3y = 0 \end{array}$

11. Paralela: $x + 2y + 7 = 0$; perpendicular: $2x - y - 1 = 0$

12. No, ya que los puntos medios de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ no coinciden.

13. $PM_{AB} = (3,5)$, $PM_{BC} = \left(\frac{11}{2}, 3\right)$, recta que une los puntos medios anteriores: $4x + 5y - 37 = 0$. Las dos rectas son paralelas.

14. *a*) $x = 5$ *b*) $y = 4$

15. $2x + y - 6 = 0$

16. *a*) $m = -1/2$ *b*) $m = 5/4$ *c*) $m = -3$

17. $x - 2y + 10 = 0$

18. $a = 0$

19. *a*) Paralelas *b*) Secantes; $\left(-\frac{2}{5}, \frac{33}{5}\right)$ *c*) Coincidentes

    d) Paralelas *e*) Secantes; $(9, 13)$ *f*) Secantes; $\left(\frac{17}{2}, \frac{3}{2}\right)$

20. $\left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}\right)$

21. $y = x + 2$

22. $y = -1$

23. $(2, 1)$

24. $(-1, -5)$

25. $B(2, 3)$

26. *a*) $m = -10$ *b*) $m = 18/5$ *c*) No hay solución *d*) $m = -7$

27. *a*) $a = 3/2$ *b*) -6

28. $90°$

29. $71,57°$

30. $81^\circ 52' 11,6''$

31. Hay dos soluciones: $k = -10/3$ y $k = 6/5$

32. $k = \sqrt{3}$

33. *a*) 5 unidades *b*) 10 unidades *c*) 2 unidades

34. *a*) $\sqrt{89}$ unidades *b*) $\sqrt{10}$ unidades *c*) $\sqrt{145}$ unidades

35. *a*) Isósceles *b*) Escaleno *c*) Escaleno

36. 28/5 unidades.

37. $\dfrac{3\sqrt{13}}{26}$ unidades.

38. $\sqrt{5}$ unidades.

39. $C\left(\dfrac{6}{11}, \dfrac{47}{11}\right)$, altura: $\sqrt{\dfrac{3665}{242}}$ unidades, área: $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{47645}{121}}$ u^2

40. $C(-1, 5)$

41. $D(2, 4)$, área: 9u^2

42. 4u^2

43. $\left(\dfrac{15}{4}, \dfrac{29}{4}\right)$

44. Son dos rectas paralelas a la recta r separadas 2 unidades: $3x - 2y + (4 - 2\sqrt{13}) = 0$ y $3x - 2y + (4 + 2\sqrt{13}) = 0$

45. $B\left(\dfrac{29}{2}, 0\right)$ y $D\left(\dfrac{-19}{2}, 6\right)$

46. Hay dos soluciones: $y = x + 4\sqrt{2}$, $y = x - 4\sqrt{2}$

47. Hay dos soluciones: $y + 3 = -\dfrac{7}{3}(x - 2)$, $y + 3 = \dfrac{3}{7}(x - 2)$

48. *a*) $5\sqrt{2}$u, $5\sqrt{2}$u, $2\sqrt{5}$u
    b) $2\sqrt{10}$u, $2\sqrt{5}$u, $2\sqrt{10}$u
    c) $H(1, -5)$ y $G\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-11}{3}\right)$

49. Mediatriz: $x + y - 1 = 0$, ángulo: 135°

50. $x - y - 2 = 0$

51. $B(3, 4)$

52. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$unidades.

53. Hay dos soluciones: $\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$ y $(-2, 0)$

54. Hay dos soluciones: $2x - y + (2\sqrt{5} - 5) = 0$ y $2x - y + (-2\sqrt{5} - 5) = 0$

55. Hay dos soluciones: $\left(-\dfrac{29}{11}, \dfrac{31}{11}\right)$ y $(1,1)$

56. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$unidades.

57. 12u^2

58. $3x + y + 3 = 0$

59. $4\sqrt{2}\text{u}$

60. Baricentro: $(3,2)$, ortocentro: $\left(2, \dfrac{5}{3}\right)$, circuncentro: $\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{13}{6}\right)$

61. Hay dos soluciones: $y = x + 2$, $y = x - 2$

62. $X\left(\dfrac{9}{5}, -\dfrac{1}{5}\right)$

63. $a = -1$ y $b = -1$ o $b = -9$

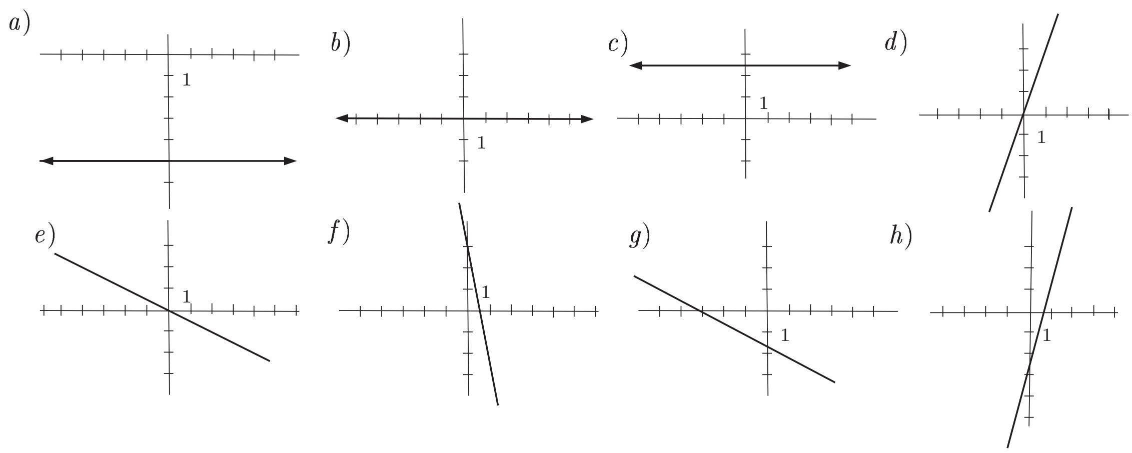
A.4. Solucionario del tema 4: Funciones reales de variable real. Familia de funciones

1. No corresponden a una función los apartados *d), e), g), h)* e *i)*.

2. *a)* $Dom(f) = (-\infty, -1] \cup [0,4] \cup [5, +\infty)$, $\quad Rec(f) = (-\infty, 0] \cup [1,5]$, $\quad Dom(g) = \mathbb{R}$ y $Rec(f) = \mathbb{R}$

   b) $f(2) = 3$ y $f(0) = 1$ $\qquad$ *c)* $g(0) = 1$, $g(2) = 2$ y $g(3) = 4$

3.



- Todas las funciones son polinómicas y por tanto su dominio es $\mathbb{R}$.

a) $Rec(f) = \{5\}$, Puntos de cortes: $(0,5)$

b) $Rec(f) = \{0\}$, Puntos de cortes: $\{(a,0), a \in \mathbb{R}\}$

c) $Rec(f) = \{5/2\}$, Puntos de cortes: $(0, 5/2)$

d) $Rec(f) = \mathbb{R}$, Puntos de cortes: $(0,0)$

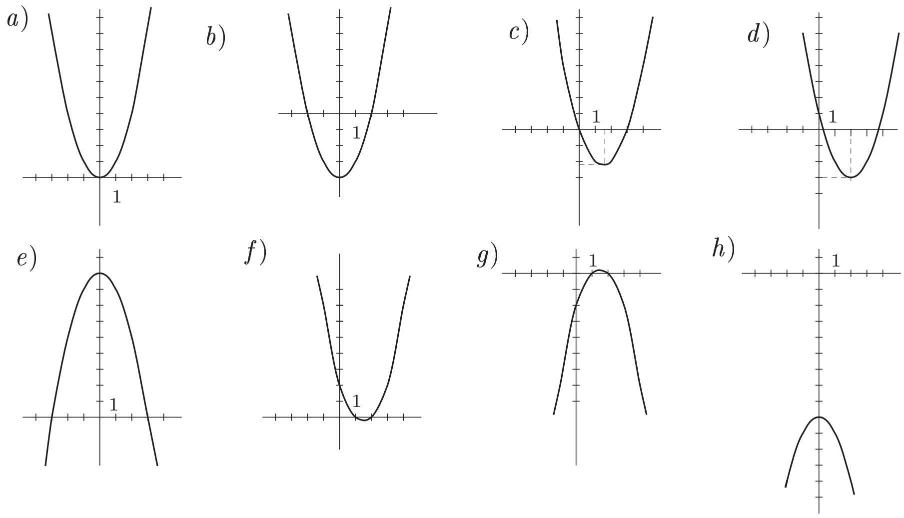
e) $Rec(f) = \mathbb{R}$, Puntos de cortes: $(0,0)$

f) $Rec(f) = \mathbb{R}$, Puntos de cortes: $(0,3)$, $(3/5, 0)$

g) $Rec(f) = \mathbb{R}$, Puntos de cortes: $(-3,0)$, $(0, -3/2)$

h) $Rec(f) = \mathbb{R}$, Puntos de cortes: $(0,-3)$, $(3/4, 0)$

4.



- Todas las funciones son polinómicas y por tanto su dominio es $\mathbb{R}$.

  a) $Rec(f) = [0, +\infty)$; Vértice: $(0, 0)$; Puntos de cortes con los ejes: $(0, 0)$

  b) $Rec(f) = [0, +\infty)$; Vértice: $(0, -4)$; Puntos de cortes con los ejes: $(0, -4)$, $, (-2, 0)$, $(2, 0)$

  c) $Rec(f) = [-9/4, +\infty)$; Vértice: $(3/2, -9/4)$; Puntos de cortes con los ejes: $(0, 0)$, $(3, 0)$

  d) $Rec(f) = [-3, +\infty)$; Vértice: $(2, -3)$; Puntos de cortes con los ejes: $(0, 1)$, $(2 + \sqrt{3}, 0)$, $(2 - \sqrt{3}, 0)$

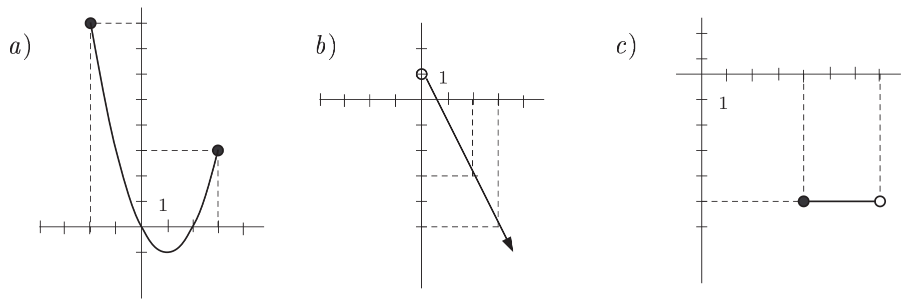
  e) $Rec(f) = (-\infty, 9]$; Vértice: $(0, 9)$; Puntos de cortes con los ejes: $(0, 9)(-3, 0)$, $(3, 0)$

  f) $Rec(f) = [-1/4, +\infty)$; Vértice: $(3/2, -1/4)$; Puntos de cortes con los ejes: $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$

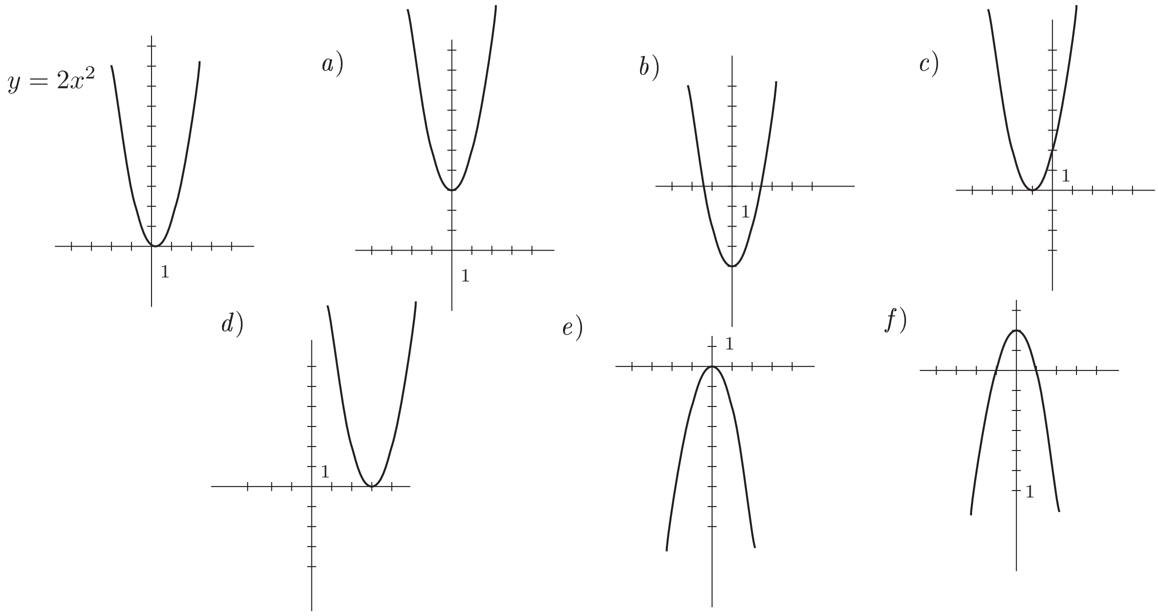
  g) $Rec(f) = (-\infty, 1/4]$; Vértice: $(3/2, 1/4)$; Puntos de cortes con los ejes: $(0, -2)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$

  h) $Rec(f) = (-\infty, -9]$; Vértice: $(0, -9)$; Puntos de cortes con los ejes: $(0, -9)$

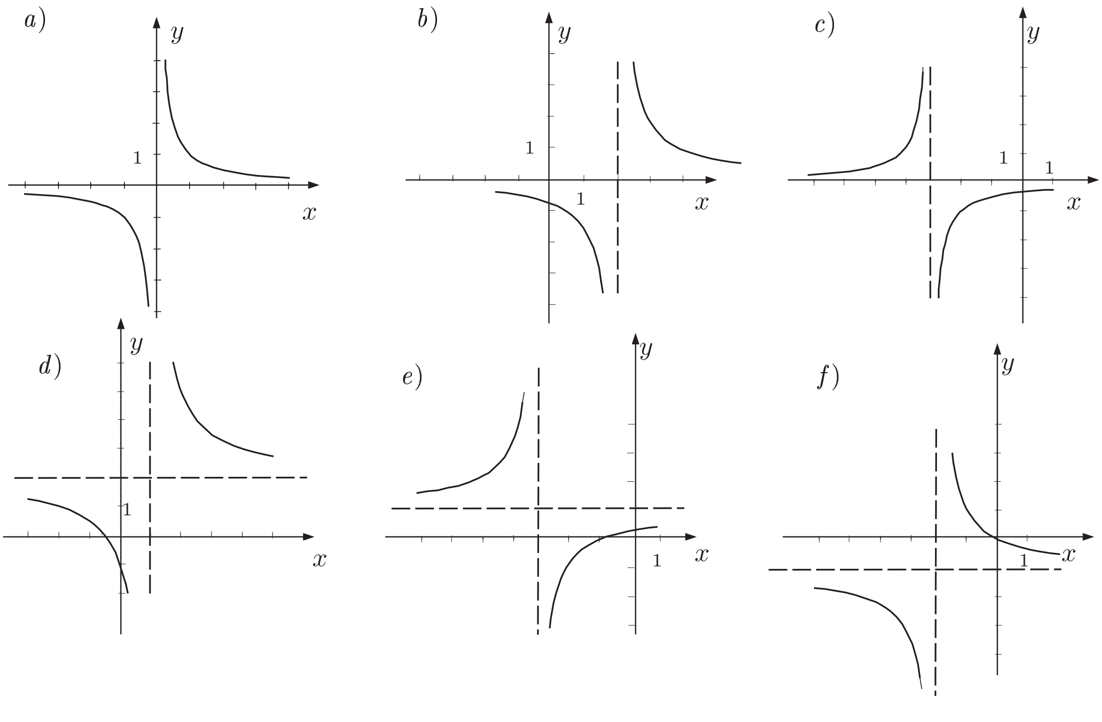
5.



6.



7.



a) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; $Rec(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; Asíntotas: $x = 0$ e $y = 0$; Puntos de cortes con los ejes: no tiene.

b) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$; $Rec(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; Asíntotas: $x = 2$ e $y = 0$; Puntos de cortes con los ejes: $(0, -1)$.

c) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$; $Rec(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; Asíntotas: $x = -3$ e $y = 0$; Puntos de cortes con los ejes: $(0, -1/3)$.

d) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$; $Rec(f) = \mathbb{R} - \{2\}$; Asíntotas: $x = 1$ e $y = 2$; Puntos de cortes con los ejes: $(-1/2, 0)$ y $(0, -1)$.

e) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$; $Rec(f) = \mathbb{R} - \{1\}$; Asíntotas: $x = -3$ e $y = 1$; Puntos de cortes con los ejes: $(-1, 0)$ y $(0, 1/3)$.

f) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$; $Rec(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$; Asíntotas: $x = -2$ e $y = -1$; Puntos de cortes con los ejes: $(0, 0)$.

8. *a*) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1/2, 2\}$

b) $Dom(f) = \mathbb{R}$

c) $Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

d) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0, 2\}$

e) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

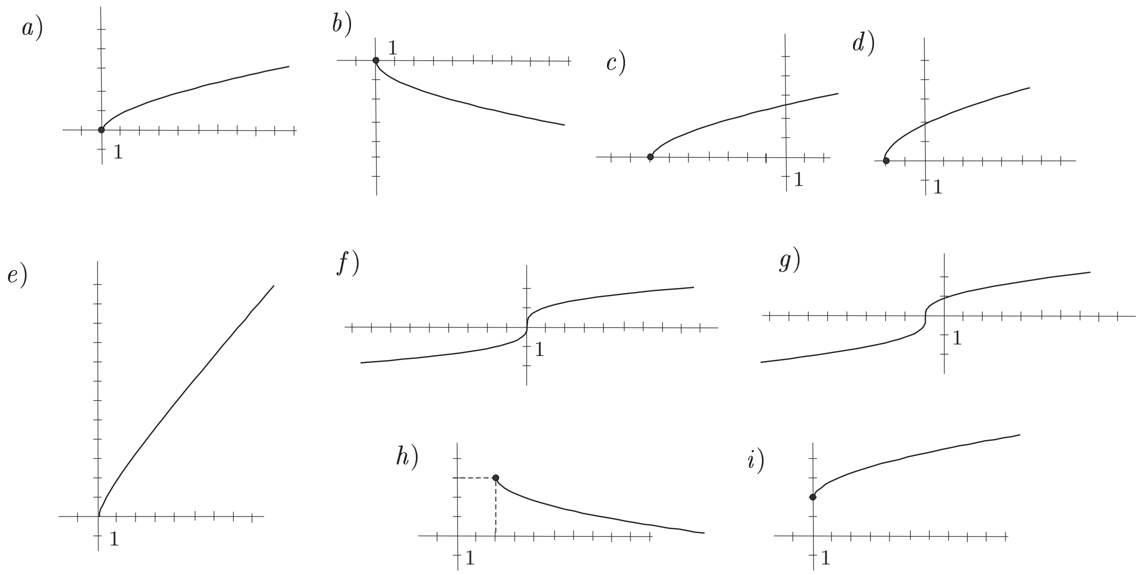
f) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2, 3\}$

g) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0, -2, 3\}$

h) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2, \pm 1\}$

i) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

9.



a) $Dom(f) = [0, +\infty)$; $Rec(f) = [0, +\infty)$; Puntos de cortes con los ejes: $(0, 0)$.

b) $Dom(f) = [0, +\infty)$; $Rec(f) = (-\infty, 0]$; Puntos de cortes con los ejes: $(0, 0)$.

c) $Dom(f) = [-7, +\infty)$; $Rec(f) = [0, +\infty)$; Puntos de cortes con los ejes: $(-7, 0)$ y $(0, \sqrt{7})$.

d) $Dom(f) = [-2, +\infty)$; $Rec(f) = [0, +\infty)$; Puntos de cortes con los ejes: $(-2, 0)$ y $(0, 2)$.

e) $Dom(f) = [0, +\infty)$; $Rec(f) = [0, +\infty)$; Puntos de cortes con los ejes: $(0, 0)$.

f) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = \mathbb{R}$; Puntos de cortes con los ejes: $(0, 0)$.

g) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = \mathbb{R}$; Puntos de cortes con los ejes: $(-1, 0)$ y $(0, 1)$.

h) $Dom(f) = [2, +\infty)$; $Rec(f) = (-\infty, 3]$; Puntos de cortes con los ejes: $(11, 0)$.

i) $Dom(f) = [0, +\infty)$; $Rec(f) = [2, +\infty)$; Puntos de cortes con los ejes: $(0, 2)$.

10. *a*) $Dom(f) = [-3, +\infty)$

b) $Dom(f) = \left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$

c) $Dom(f) = \mathbb{R}$

d) $Dom(f) = \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty)$

e) $Dom(f) = [-1, 5]$

f) $Dom(f) = [-2, 0] \cup [2, +\infty)$

g) $Dom(f) = \left[-\dfrac{5}{2}, +\infty\right]$

h) $Dom(f) = \mathbb{R}$

i) $Dom(f) = \left[\dfrac{2}{5}, +\infty\right]$

j) $Dom(f) = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$

k) $Dom(f) = [1, 2)$

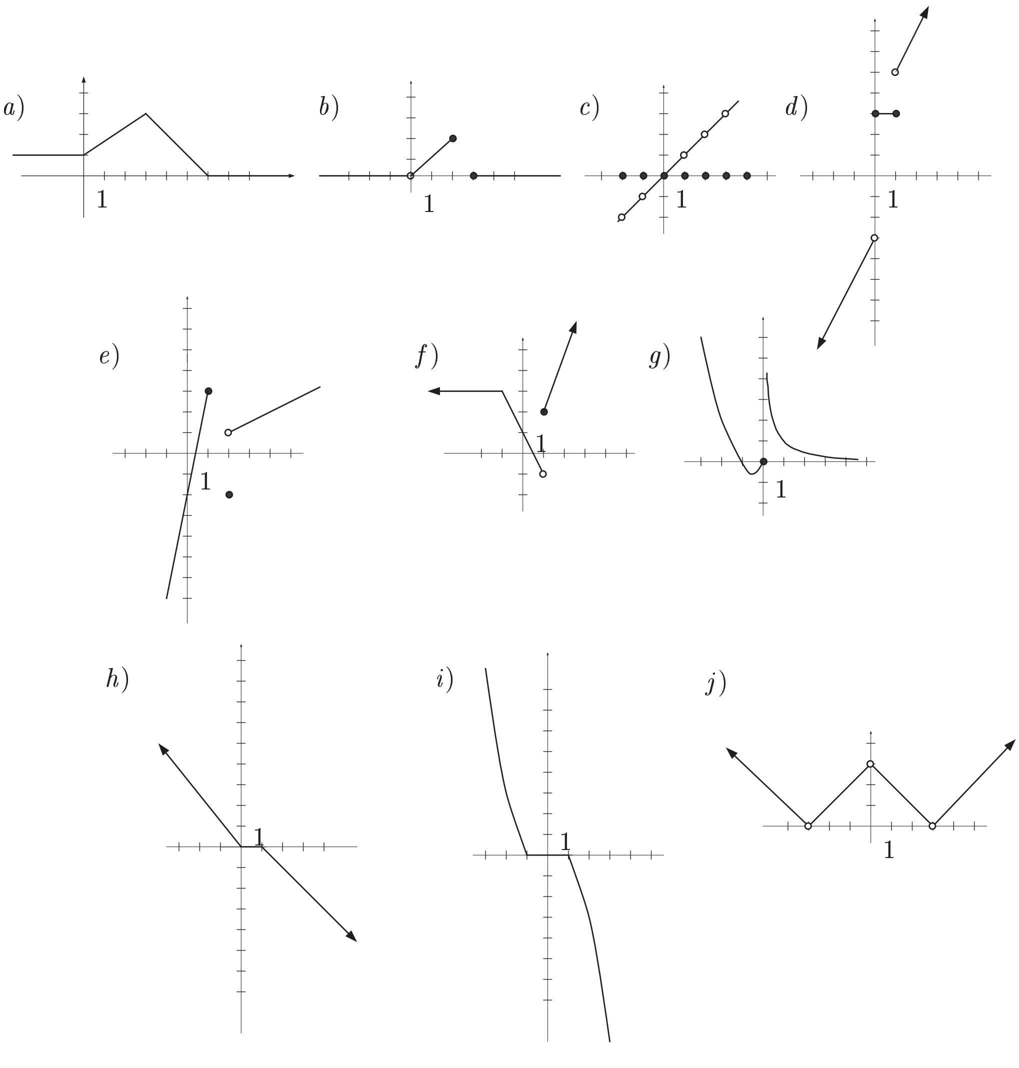
l) $Dom(f) = (-\infty, -3) \cup [3, +\infty)$

m) $Dom(f) = [3, +\infty) \cup (-2, 2) \cup \cup$

n) $Dom(f) = (-\infty, -2] \cup (7, +\infty)$

ñ) $Dom(f) = (-6, 3] \cup [0, +\infty)$

11.



a) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = [0, 3]$; **Puntos de corte**: $(0, 1), (a, 0)$ con $a \geq 6$; **Monotonía**: Creciente en $(1, 3)$, decreciente en $(3, 6)$ y constante en $(-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$; **Acotación**: acotada.

b) $Dom(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 2] \cup [3, +\infty)$; $Rec(f) = [0, 2]$; **Puntos de corte**: $(a, 0)$ con $a < 0$ ó $a \geq 3$; **Monotonía**: Creciente en $(0, 2)$ y constante en $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$; **Acotación**: acotada.

c) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = (\mathbb{R} - \mathbb{Z}) \cup \{0\}$; **Puntos de corte**:$(a, 0)$ con $a \in \mathbb{Z}$; **Monotonía**: Creciente en cada intervalo de la forma $(a, a+1)$ con $a \in \mathbb{Z}$; **Acotación**: no está acotada.

d) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = (-\infty, -3) \cup (5, +\infty) \cup \{3\}$; **Puntos de corte**: $(0, 3)$; **Monotonía**: Creciente en $(1, +\infty)$, decreciente en $(-\infty, 0)$ y constante en $(0, 1)$; **Acotación**: no está acotada.

e) $Dom(f) = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$; $Rec(f) = \mathbb{R}$; **Puntos de corte**: $(0, -2)$ y $(2/5, 0)$; **Monotonía**: Creciente $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$; **Acotación**: no está acotada.

f) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = (-1, +\infty)$; **Puntos de corte**: $(0, 1)$ y $(1/2, 0)$; **Monotonía**: Creciente en $(-1, +\infty)$, decreciente en $(-1, 1)$ y constante en $(-\infty, -1)$; **Acotación**: acotada inferiormente.

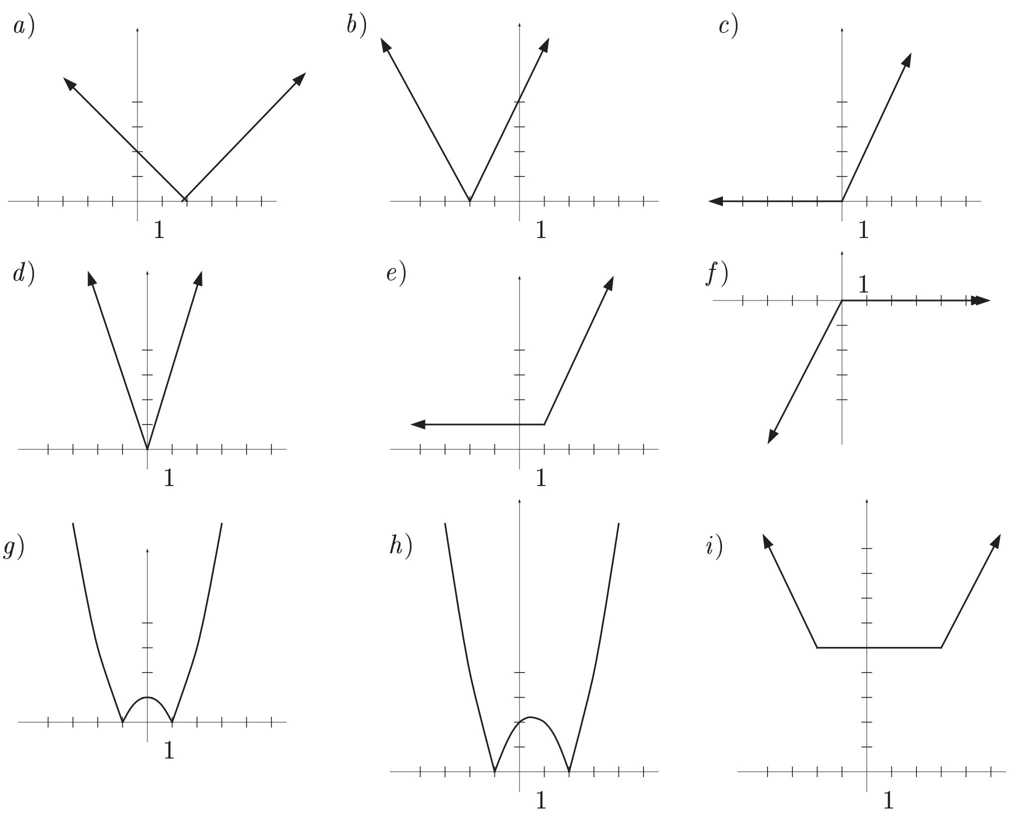
g) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = (-1/4, +\infty)$; **Puntos de corte**: $(0, 0)$ y $(-1, 0)$; **Monotonía**: Creciente en $(-1/2, 0)$, decreciente en $(-\infty, -1/2) \cup (0, +\infty)$; **Acotación**: acotada inferiormente.

h) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = \mathbb{R}$; **Puntos de corte**: $(a, 0)$ con $0 \leq a \leq 1$; **Monotonía**: decreciente en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$; **Acotación**: no está acotada.

i) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = \mathbb{R}$; **Puntos de corte**: $(a, 0)$ con $-1 \leq a \leq 1$; **Monotonía**: decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; **Acotación**: no está acotada.

j) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-3, 0, 3\}$; $Rec(f) = (0, +\infty)$; **Puntos de corte**: no tiene; **Monotonía**: Creciente en $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$, decreciente en $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$; **Acotación**: acotada inferiormente.

12.



a) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = [0, +\infty)$; Puntos de cortes con los ejes: $(2, 0)$ y $(0, 2)$.

b) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = [0, +\infty)$; Puntos de cortes con los ejes: $(-2, 0)$ y $(0, 4)$.

c) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = [0, +\infty)$; Puntos de cortes con los ejes: $(a, 0)$ con $a \leq 0$.

d) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = [0, +\infty)$; Puntos de cortes con los ejes: $(0, 0)$.

e) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = [1, +\infty)$; Puntos de cortes con los ejes: $(0, 1)$.

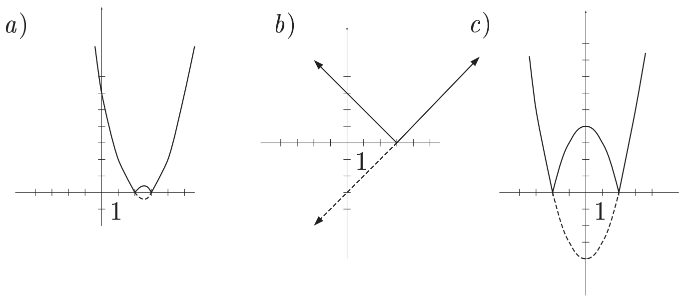
f) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = (-\infty, 0)$; Puntos de cortes con los ejes: $(a, 0)$ con $a \geq 0$.

g) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = [0, +\infty)$; Puntos de cortes con los ejes: $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

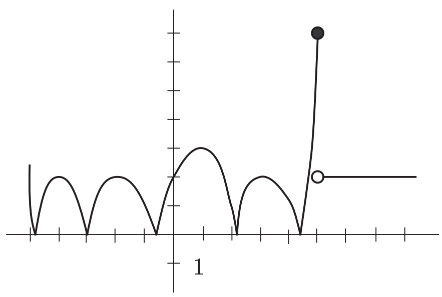
h) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = [0, +\infty)$; Puntos de cortes con los ejes: $(-1, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 2)$.

i) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = [5, +\infty)$; Puntos de cortes con los ejes: $(0, 5)$.

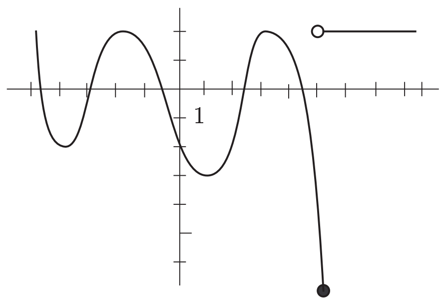
13.



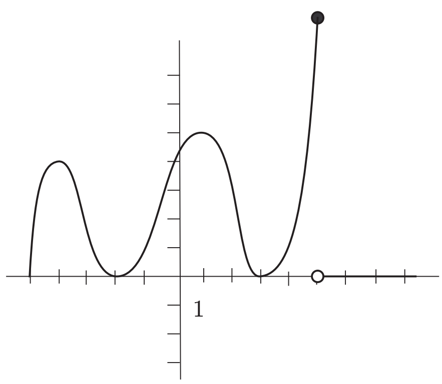
14.



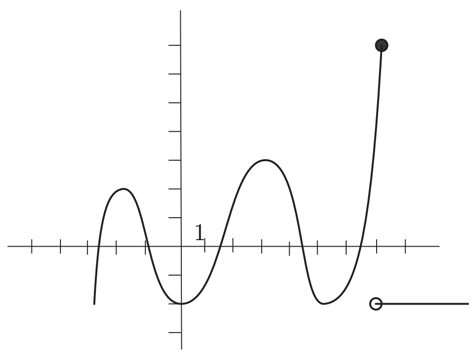
$y = |f(x)|$



$y = -f(x)$

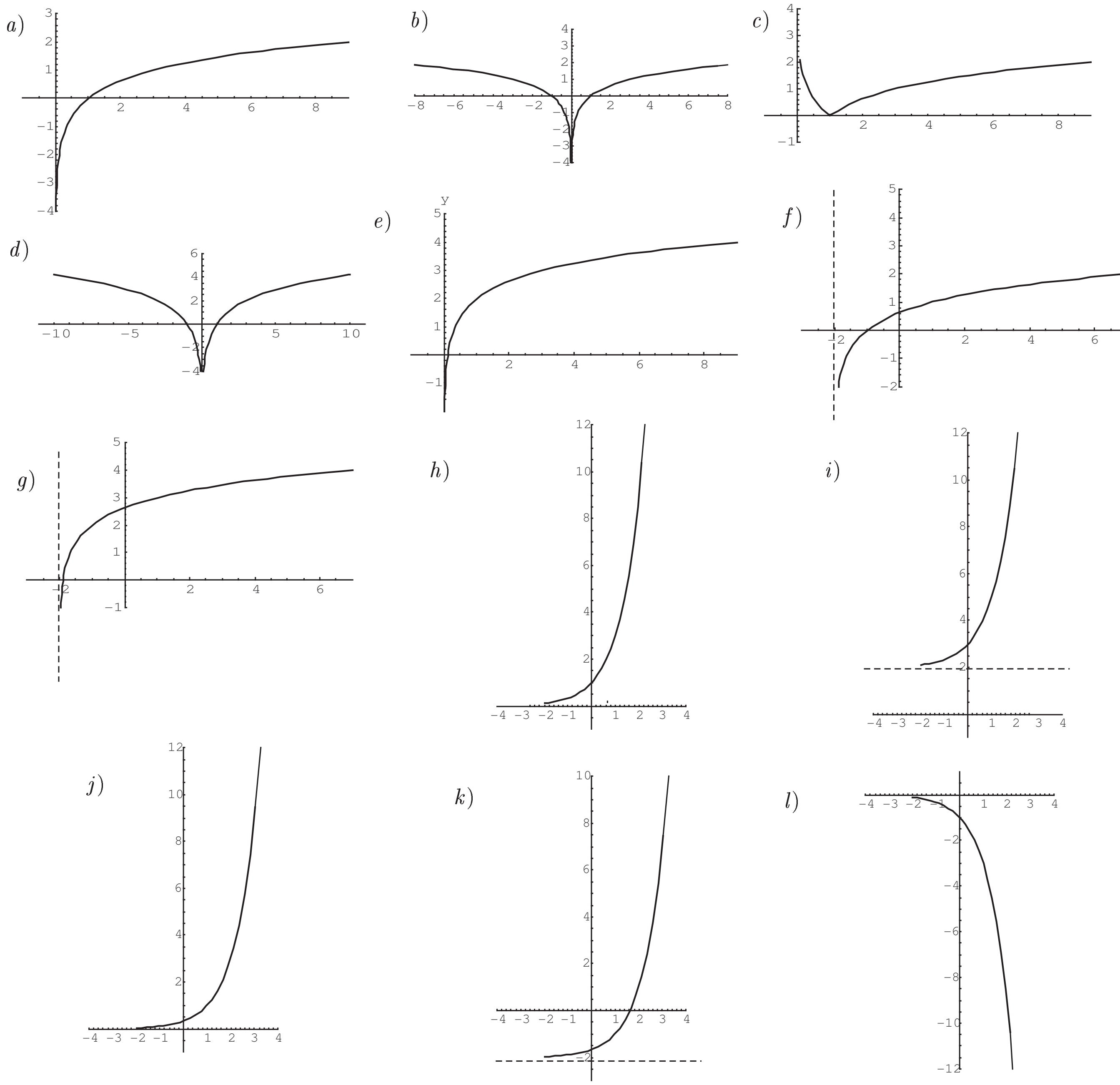


$y = f(x) + 2$



$y = f(x - 2)$

15.



$a)\ Dom(f) = (0, +\infty)$ $\quad b)\ Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ $\quad c)\ Dom(f) = (0, +\infty)$

$d)\ Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ $\quad e)\ Dom(f) = (0, +\infty)$ $\quad f)\ Dom(f) = (-2, +\infty)$

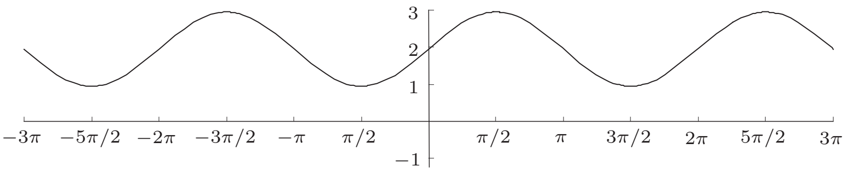
$g)\ Dom(f) = (-2, +\infty)$ $\quad h)\ Dom(f) = \mathbb{R}$ $\quad i)\ Dom(f) = \mathbb{R}$

$j)\ Dom(f) = \mathbb{R}$ $\quad k)\ Dom(f) = \mathbb{R}$ $\quad l)\ Dom(f) = \mathbb{R}$

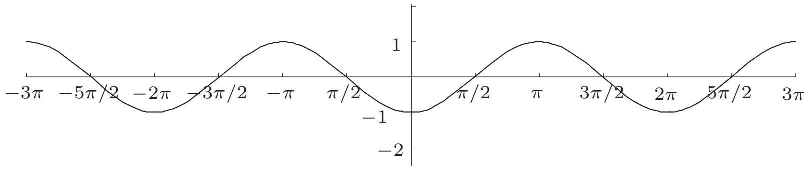
16. *a*) $Dom(f) = (1, +\infty)$
b) $Dom(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
c) $Dom(f) = (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$
d) $Dom(f) = (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$
e) $Dom(f) = (0, e) \cup (e, +\infty)$
f) $Dom(f) = (3, +\infty)$
g) $Dom(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
h) $Dom(f) = (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$
i) $Dom(f) = (-1, 1)$
j) $Dom(f) = (-\infty, -3) \cup (-1, 1)$
k) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{\pm 3/2\}$
l) $Dom(f) = (1, +\infty) - \{2\}$

17.

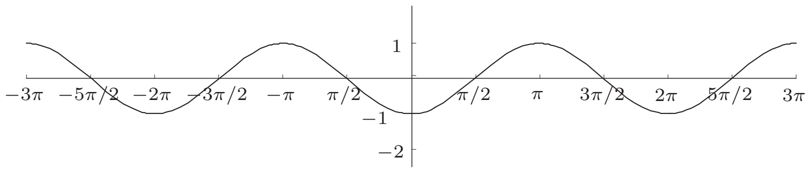
a)



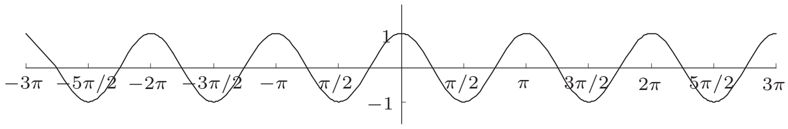
b)



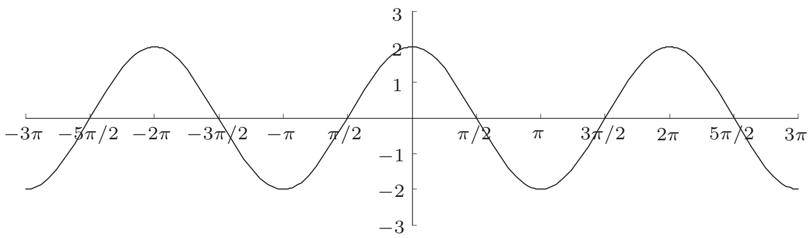
c)



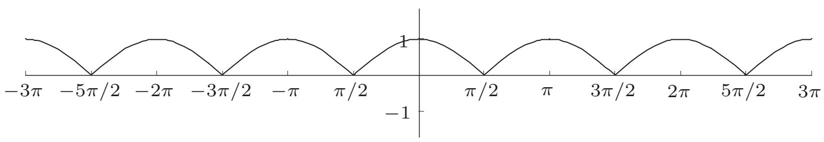
d)



e)



f)



Todas son periódicas de periodo:

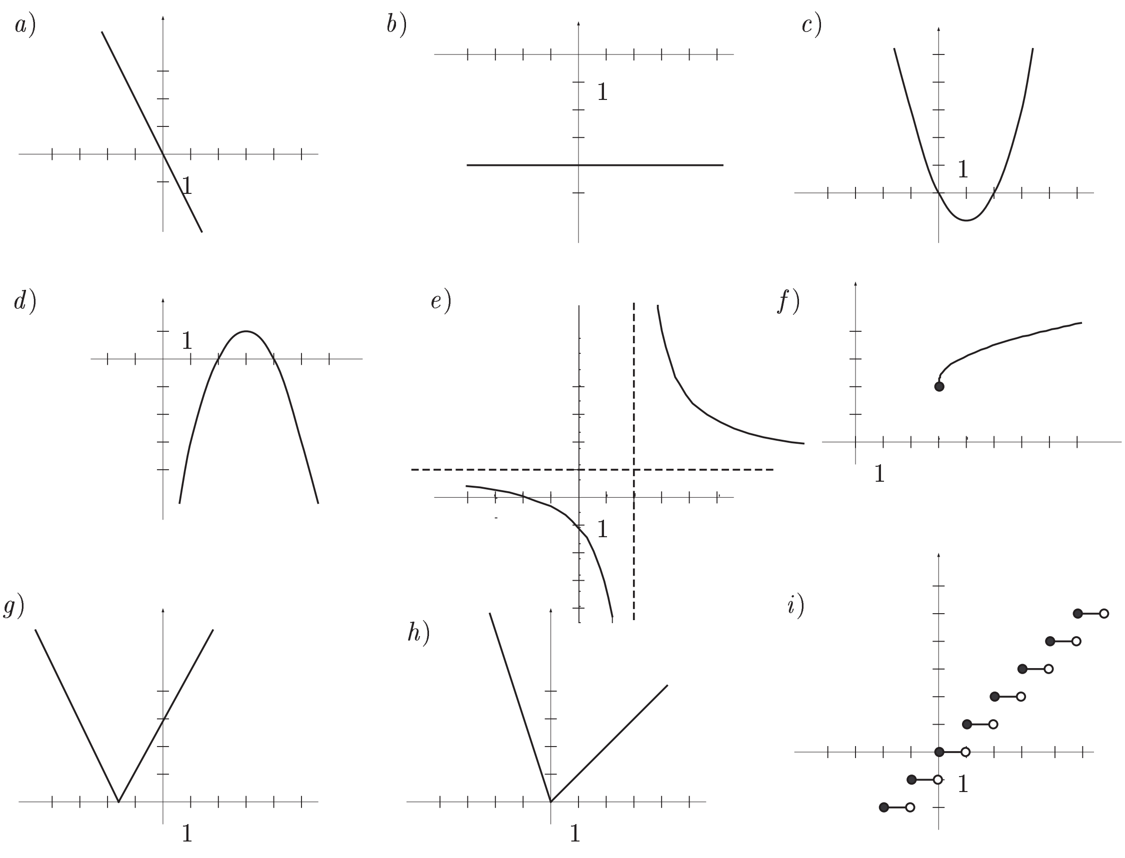
a) 2π *b*) 2π *c*) 2π *d*) π *e*) 2π *f*) π

18. *a*) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
b) $Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2} + (2k+1)\dfrac{\pi}{4}\right\}, \quad k \in \mathbb{Z}$
c) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{k\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z}$
d) $Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{(4k-1)\dfrac{\pi}{4}\right\}, \quad k \in \mathbb{Z}$
e) $Dom(f) = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
f) $Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{4}\right\}, \quad k \in \mathbb{Z}$

19. *a)* $Dom(f) = \mathbb{R}$
b) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$
c) $Dom(f) = \mathbb{R}$
d) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{2}\}$
e) $Dom(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
f) $Dom(f) = (-\infty, -3) \cup [1, +\infty)$
g) $Dom(f) = \mathbb{R}$
h) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
i) $Dom(f) = \mathbb{R}$
j) $Dom(f) = (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$
k) $Dom(f) = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$
l) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
m) $Dom(f) = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
n) $Dom(f) = (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$
ñ) $Dom(f) = [-1, 5]$
o) $Dom(f) = \mathbb{R}$
p) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
q) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{x = \pi/4 + k\pi/2, k \in \mathbb{R}\}$

20. *a)* $Dom(f) = \mathbb{R}; \quad Rec(f) = \mathbb{R}$
b) $Dom(f) = \mathbb{R}; \quad Rec(f) = \{-2, 2\}$
c) $Dom(f) = \mathbb{R}; \quad Rec(f) = [-2, +\infty)$
d) $Dom(f) = (-5, +\infty); \quad Rec(f) = [0, +\infty)$
e) $Dom(f) = (0, +\infty); \quad Rec(f) = \mathbb{R}$
f) $Dom(f) = \mathbb{R}; \quad Rec(f) = [0, 2]$
g) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}; \quad Rec(f) = \mathbb{R}$
h) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-2\}; \quad Rec(f) = (-\infty, -5] \cup [0, +\infty)$

21.



a) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = \mathbb{R}$; **Puntos de corte**: $(0, 0)$; **Monotonía**: Decreciente en $\mathbb{R}$; **Acotación**: no está acotada.

b) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = \{-4\}$; **Puntos de corte**: $(0, 4)$; **Monotonía**: Constante en $\mathbb{R}$; **Acotación**: está acotada.

c) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = [-1, +\infty)$; **Puntos de corte**: $(0, 0), (2, 0)$; **Monotonía**: Creciente en $(1, +\infty)$, decreciente en $(-\infty, 1)$; **Acotación**: acotada inferiormente.

d) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = (-\infty, 1]$; **Puntos de corte**: $(2, 0), (4, 0), (0, -8)$; **Monotonía**: Creciente en $(-\infty, 3)$, decreciente en $(3, +\infty)$; **Acotación**: acotada superiormente.

e) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$; $Rec(f) = \mathbb{R} - \{1\}$; **Puntos de corte**: $(0, -1), (-2, 0)$; **Monotonía**: Decreciente en todo su dominio; **Acotación**: no está acotada.

f) $Dom(f) = [3, +\infty)$; $Rec(f) = [2, +\infty)$; **Puntos de corte**: No tiene; **Monotonía**: Creciente en su dominio; **Acotación**: acotada inferiormente.

g) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = [0, +\infty)$; **Puntos de corte**: $(0, 3), (-3/2, 0)$; **Monotonía**: Creciente en $(-3/2, +\infty)$, decreciente en $(-\infty, -3/2)$; **Acotación**: acotada inferiormente.

h) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = [0, +\infty)$; **Puntos de corte**: $(0, 0)$; **Monotonía**: Creciente en $(0, +\infty)$, decreciente en $(-\infty, 0)$; **Acotación**: acotada inferiormente.

i) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = \mathbb{Z}$; **Puntos de corte**: $(a, 0)$ con $0 \leq a < 1$; **Monotonía**: Constante en cada intervalo de la forma $(a, a + 1)$ con $a \in \mathbb{Z}$; **Acotación**: no está acotada.

22. *a*) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = (0, +\infty)$; **Puntos de corte**: $(0, 1/2)$; **Monotonía**: Creciente en $\mathbb{R}$; **Acotación**: acotada inferiormente.

b) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = (-4, +\infty)$; **Puntos de corte**: $(0, -35/9)$ y $(2+\log_3 4, 0)$; **Monotonía**: Creciente en todo $\mathbb{R}$; **Acotación**: está acotada inferiormente.

c) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = (1, +\infty)$; **Puntos de corte**: $(0, 2)$; **Monotonía**: Creciente en $\mathbb{R}$; **Acotación**: acotada inferiormente.

d) $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = (0, +\infty)$; **Puntos de corte**: $(0, 1)$; **Monotonía**: Decreciente en $\mathbb{R}$; **Acotación**: acotada inferiormente.

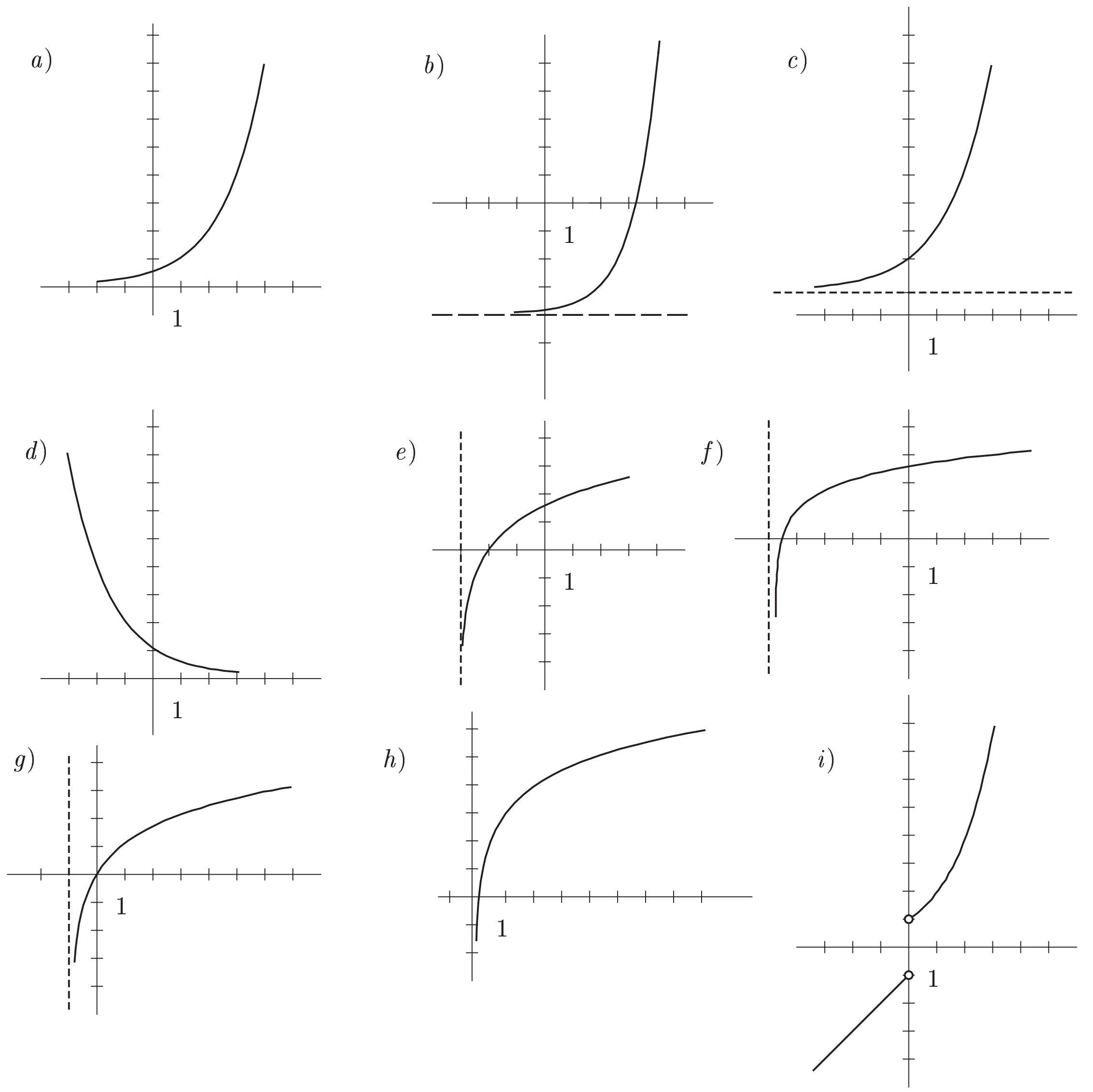
e) $Dom(f) = (-3, +\infty)$; $Rec(f) = \mathbb{R}$; **Puntos de corte**: $(0, \log_2 3), (-2, 0)$; **Monotonía**: creciente en todo su dominio; **Acotación**: no está acotada.

f) $Dom(f) = (-5, +\infty)$; $Rec(f) = \mathbb{R}$; **Puntos de corte**: $(0, 1+\log_3 5)$ y $(-14/3, 0)$; **Monotonía**: Creciente en su dominio; **Acotación**: no está acotada.

g) $Dom(f) = (-1, +\infty)$; $Rec(f) = \mathbb{R}$; **Puntos de corte**: $(0, 0)$; **Monotonía**: Creciente en su dominio; **Acotación**: no está acotada.

h) $Dom(f) = (0, +\infty)$; $Rec(f) = \mathbb{R}$; **Puntos de corte**: $(1/8, 0)$; **Monotonía**: Creciente en su dominio; **Acotación**: no está acotada.

i) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; $Rec(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; **Puntos de corte**: no tiene; **Monotonía**: Creciente en su dominio; **Acotación**: no está acotada.



23. *a)* $Dom(f) = \mathbb{R}$; $Rec(f) = (-\infty, 3)$; **Puntos de corte**: $(-2, 0)$ y $(0, 2)$; **Monotonía**: Creciente en todo $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$; **Acotación**: está acotada superiormente.

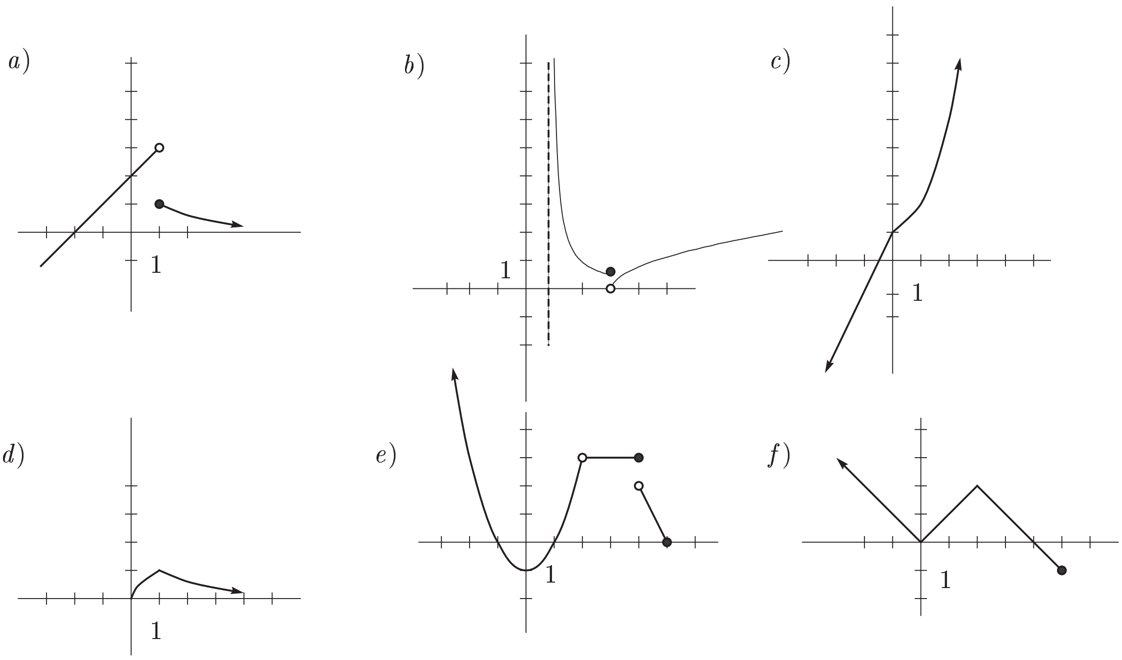
b) $Dom(f) = (1, +\infty)$; $Rec(f) = 0(0, +\infty)$; **Puntos de corte**: no tiene; **Monotonía**: Creciente en $(3, +\infty)$ y decreciente en $(1, 3)$; **Acotación**: acotada inferiormente.

c) $Dom(f) = (\mathbb{R}$; $Rec(f) = \mathbb{R}$; **Puntos de corte**: $(0, 1), (-1/2, 0)$; **Monotonía**: creciente en todo su dominio; **Acotación**: no está acotada.

d) $Dom(f) = [0, +\infty)$; $Rec(f) = [0, 1]$; **Puntos de corte**: $(0, 0)$; **Monotonía**: Creciente en $(0, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$; **Acotación**: está acotada.

e) $Dom(f) = (-\infty, 2) \cup (2, 5]$; $Rec(f) = (-1, +\infty)$; **Puntos de corte**: $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(5, 0)$ y $0, -1$; **Monotonía**: Creciente en $(0, 2)$, decreciente en $(-\infty, 0) \cup (4, 5)$ y constante en $(2, 4)$; **Acotación**: acotada inferiormente.

f) $Dom(f) = (-\infty, 5])$; $Rec(f) = [-1, +\infty)$; **Puntos de corte**: $(0, 0)$ y $(4, 0)$; **Monotonía**: Creciente en $(0, 2)$ y decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, 5)$; **Acotación**: acotada inferiormente.



24. *a*) No es una función.
   b) Si es función. $Dom(f) = \mathbb{R}$ y $Rec(f) = [0, +\infty) \cup \{-2\}$.
   c) No es una función.
   d) Si es función. $Dom(f) = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ y $Rec(f) = [-1, +\infty)$.

A.5. Solucionario del tema 5: Álgebra de funciones

1. *a*) $(f+g)(x) = \dfrac{3x^2-4x-4}{3x-6}, \quad Dom(f+g) = \mathbb{R} - \{2\}$

   b) $(f \cdot g)(x) = \dfrac{-x^2+x+2}{3x-6}, \quad Dom(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{2\}$

   c) $(f/g)(x) = \dfrac{3x^2-3x-6}{2-x}, \quad Dom(f/g) = \mathbb{R} - \{2\}$

2. $(f/g)(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x+1}, \quad Dom(f/g) = (-1, +\infty)$

3. $(f \cdot g)(x) = \dfrac{x-1-2\sqrt{x+1}}{2x(x+1)}, \quad Dom(f \cdot g) = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

4. *a*) $(f+g)(x) = \dfrac{4x^2-3x-3}{x(x-3)(x-1)}, \quad Dom(f+g) = \mathbb{R} - \{0, 1, 3\}$

   b) $(f-g)(x) = \dfrac{-2x^2+7x-3}{x(x-3)(x-1)}, \quad Dom(f-g) = \mathbb{R} - \{0, 1, 3\}$

   c) $(f/g)(x) = \dfrac{(3+x)(x^2-4x+3)}{(x^2-3x)(3x-5)}, \quad Dom(f/g) = \mathbb{R} - \{0, 1, 3, 5/3\}$

5. *a*) $(f \pm g)(x) = \sqrt{x+3} \pm \sqrt{25-x^2}, \quad Dom(f \pm g) = [-3, 5]$

   b) $(f/g)(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{25-x^2}}, \quad Dom(f/g) = [-3, 5)$

c) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{(x+3)(25-x^2)}$, $\quad Dom(f \cdot g) = [-3, 5]$

d) $(f \circ g)(x) = \sqrt{22 - x}$, $\quad Dom(f \circ g) = [-3, 22]$

6. $(f+g)(x) = \begin{cases} -x^2+2x+2 & \text{si } x < -2 \\ -x^2+3 & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ \dfrac{-x+5}{2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{x^2-6x+7}{2(5-x)} & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ $\qquad Dom(f+g) = \mathbb{R} - \{5\}$

7. $(f+g)(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}+2+x & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{5+x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ $\qquad Dom(f+g) = [-1, +\infty)$

8. $(g \circ f)(x) = \sqrt{\dfrac{-3x+3}{x+1}}$ $\qquad Dom(f \circ g) = (-1, 1]$

9. *a*) $(f \circ g)(3) = 1$

   b) $(g \circ f)(x) = \dfrac{-x^2-x+2}{2(x+1)}$, $\qquad Dom(g \circ f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

   c) $(f \circ g)(x) = \dfrac{-x^2+2x+11}{2(x+1)}$, $\qquad Dom(f \circ g) = \mathbb{R} - \{-1\}$

10. *a*) $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{2x^2+x-2}$, $\qquad Dom(g \circ f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}\right\}$

    $(f \circ g)(x) = \dfrac{-3x^2-5x}{(x+1)^2}$, $\qquad Dom(f \circ g) = \mathbb{R} - \{-1\}$

    b) $(g \circ f)(x) = 3$, $\qquad Dom(g \circ f) = \mathbb{R}$; $\qquad (f \circ g)(x) = \sqrt{10}$, $\qquad Dom(f \circ g) = \mathbb{R}$

11. *a*) $(g \circ f)(x) = \sqrt{-x^2+2x-2}$, $\qquad Dom(g \circ f) = \emptyset$. El dominio no tiene elementos y por tanto no hay función, por tanto, no siempre es posible componer funciones.

    b) $(f \circ g)(x) = 2\sqrt{x-2} - x + 2$, $\qquad Dom(f \circ g) = [2, +\infty)$

12. *a*) $h = g \circ f$, donde $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 5x + 5$

    b) $h = g \circ f$, donde $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = \sqrt{x}$

    c) $h = g \circ f$, donde $f(x) = x^2$ y $g(x) = 5x^2 + 2x + 6$

13. $k = -7/2$

14. *a*) $(f \cdot g)(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2-1}$, $\qquad Dom(f \cdot g) = [-2, +\infty) - \{\pm 1\}$

    b) $(f/g)(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)\sqrt{x+2}}$, $\qquad Dom(f/g) = (-2, +\infty) - \{\pm 1\}$

    c) $(g \circ f)(x) = \sqrt{\dfrac{2x^2-1}{x^2-1}}$, $\qquad Dom(g \circ f) = (-\infty, -1) \cup \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup (1, +\infty)$

    d) $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $\qquad Dom(f \circ g) = [-2, +\infty) - \{-1\}$

    e) $(g \circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}+2}$, $\qquad Dom(g \circ g) = [-2, +\infty)$

    f) $(f \circ f)(x) = \dfrac{x^2-1}{2-x^2}$, $\qquad Dom(f \circ f) = \mathbb{R} - \{\pm 1, \pm\sqrt{2}\}$

15. *a*) $(g \circ f)(x) = \ln x^2$, $\quad (f \circ g)(x) = \ln^2 x)$ $\quad$ *b*) $(g \circ f)(x) = \ln(e^x + 1)$, $\quad (f \circ g)(x) = x + 1$

c) $(g \circ f)(x) = (\sqrt{2})^{\log_2 x}$, $\quad (f \circ g)(x) = \dfrac{x}{2}$ $\quad$ *d*) $(g \circ f)(x) = \log_4 2^x$, $\quad (f \circ g)(x) = 2^{\log_4 x}$

16. *a*) $f^{-1}(x) = \dfrac{1-6x}{3}$, $\quad Dom(f^{-1}) = \mathbb{R}$

b) $f^{-1}(x) = \dfrac{3-4x}{1-5x}$, $\quad Dom(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{1/5\}$

c) $f^{-1}(x) = \dfrac{7}{x+1}$, $\quad Dom(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{-1\}$

d) $f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{27-x}{3}}$ ó $f^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{27-x}{3}}$, $\quad Dom(f^{-1}) = (-\infty, 27]$

e) $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$ ó $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x+1}$, $\quad Dom(f^{-1}) = [-1, +\infty)$

f) $f^{-1}(x) = x^2 + 3$, $\quad Dom(f^{-1}) = \mathbb{R}$

17. *a*) $f^{-1}(x) = 2^x - 1$, $\quad Dom(f^{-1}) = \mathbb{R}$

b) $f^{-1}(x) = \log_2 x - 1$, $\quad Dom(f^{-1}) = (0, +\infty)$

c) $f^{-1}(x) = 1 + e^{2x}$, $\quad Dom(f^{-1}) = \mathbb{R}$

d) $f^{-1}(x) = \sqrt{1 + \ln x}$, $\quad Dom(f^{-1}) = [e^{-1}, +\infty)$

e) $f^{-1}(x) = \log_(x - 2)$, $\quad Dom(f^{-1}) = (2, +\infty)$

f) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{3}$, $\quad Dom(f^{-1}) = \mathbb{R}$

g) $f^{-1}(x) = 1 + \log_3(x-2)$, $\quad Dom(f^{-1}) = (2, +\infty)$

h) $f^{-1}(x) = -2 + \log_3 x$, $\quad Dom(f^{-1}) = (0, +\infty)$

i) $f^{-1}(x) = 3^{x-2}$, $\quad Dom(f^{-1}) = \mathbb{R}$

j) $f^{-1}(x) = -3 + \log_2(1-x)$, $\quad Dom(f^{-1}) = (-\infty, 1)$

k) $f^{-1}(x) = 1 + 4^{2x}$, $\quad Dom(f^{-1}) = \mathbb{R}$

l) $f^{-1}(x) = 5 \cdot 3^{1-x}$, $\quad Dom(f^{-1}) = \mathbb{R}$

m) $f^{-1}(x) = \sqrt{10^{\frac{4-5x}{3}} - 4}$, $\quad Dom(f^{-1}) = \left(-\infty, \dfrac{4 - 3\log 4}{5}\right)$

18. *a*) $(g \circ f)(x) = x^2 - 2$ $\quad$ *b*) $(g \circ h)(x) = 1 + 2^{\log_3(2^x - 3)}$

c) $(f \circ g)(x) = \log_2\left[(1 + 2^x)^2 - 3\right]$ $\quad$ *d*) $(h \circ g)(x) = \log_3(2^{1+2^x} - 3)$

e) $(h \circ f)(x) = \log_3(x^2 - 6)$ $\quad$ *f*) $(f \circ h)(x) = \log_2\left[(\log_3(2^x - 3))^2 - 3\right]$

g) $(f \circ g^{-1})(x) = \log_2\left[(\log_2(x-1))^2 - 3\right]$ $\quad$ *h*) $(h \circ g^{-1})(x) = \log_3(x - 4)$

19. *a*) $(f \circ g)(x) = \cos(2 \arccos x)$; $\quad (g \circ f)(x) = 2x$

b) $(f \circ g)(x) = \operatorname{sen}(2 \arccos x)$; $\quad (g \circ f)(x) = \arccos(\operatorname{sen} 2x)$

20. *a*) $f^{-1} = 2 \operatorname{arc\,sen} x$ $\quad$ *b*) $f^{-1} = \operatorname{arc\,sen}(1 - x^2)$

c) $f^{-1} = -1 + \arccos x$ $\quad$ *d*) $f^{-1} = \sqrt{\operatorname{sen} x}$

21. *a*)

$(f+g)(x) = \dfrac{4x-6}{x^2-3x}; \qquad Dom(f+g) = \mathbb{R} - \{0,3\}$

$(f-g)(x) = \dfrac{-6}{x^2-3x}; \qquad Dom(f-g) = \mathbb{R} - \{0,3\}$

$(f/g)(x) = \dfrac{x-3}{x}; \qquad Dom(f/g) = \mathbb{R} - \{0,3\}$

$(1/f)(x) = \dfrac{x}{2}; \qquad Dom(1/f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{2}{x}; \qquad Dom(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{0\}$

$g^{-1}(x) = \dfrac{2+3x}{x}; \qquad Dom(g^{-1}) = \mathbb{R} - \{0\}$

$(f \circ g)(x) = \dfrac{4}{2-3x}; \qquad Dom(f \circ g) = \mathbb{R} - \{0, 2/3\}$

b)

$(f+g)(x) = \dfrac{x^3+2x^2-5x-9}{x+2}; \qquad Dom(f+g) = \mathbb{R} - \{-2\}$

$(f-g)(x) = \dfrac{-x^3-2x^2+5x+11}{x+2}; \qquad Dom(f-g) = \mathbb{R} - \{-2\}$

$(f/g)(x) = \dfrac{1}{(x+2)(x^2-5)}; \qquad Dom(f/g) = \mathbb{R} - \{-2, \pm\sqrt{5}\}$

$(1/f)(x) = x+2; \qquad Dom(1/f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{1-2x}{x}; \qquad Dom(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{0\}$

$g^{-1}(x) = \sqrt{x+5}; \qquad Dom(g^{-1}) =^{-} 5, +\infty)$

$(f \circ g)(x) = \dfrac{-5x^2-20x-19}{(x+2)^2}; \qquad Dom(f \circ g) = \mathbb{R} - \{-2\}$

c)

$(f+g)(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}; \qquad Dom(f+g) = (0, +\infty)$

$(f-g)(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}; \qquad Dom(f-g) = (0, +\infty)$

$(f/g)(x) = x; \qquad Dom(f/g) = (0, +\infty)$

$(1/f)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}; \qquad Dom(1/f) = (0, +\infty)$

$f^{-1}(x) = x^2; \qquad Dom(f^{-1}) = [0, +\infty)$

$g^{-1}(x) = \dfrac{1}{x^2}; \qquad Dom(g^{-1}) = (0, +\infty)$

$(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}; \qquad Dom(f \circ g) = (0, +\infty)$

d)

$$(f+g)(x)=\frac{x^3+x^2+4x+2}{x+1}; \qquad Dom(f+g)=\mathbb{R}-\{-1\}$$
$$(f-g)(x)=\frac{-x^3-x^2-2x-4}{x+1}; \qquad Dom(f-g)=\mathbb{R}-\{-1\}$$
$$(f/g)(x)=\frac{x-1}{(x+1)(x^2+3)}; \qquad Dom(f/g)=\mathbb{R}-\{-1\}$$
$$(1/f)(x)=\frac{x+1}{x-1}; \qquad Dom(1/f)=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$$
$$f^{-1}(x)=\frac{-x-1}{x-1}; \qquad Dom(f^{-1})=\mathbb{R}-\{1\}$$
$$g^{-1}(x)=\sqrt{x-3}; \qquad Dom(g^{-1})=[3,+\infty)$$
$$(f\circ g)(x)=\frac{4x^2+4x+4}{(x+1)^2}; \qquad Dom(f\circ g)=\mathbb{R}-\{-1\}$$

e)

$$(f+g)(x)=\frac{-x^3+x^2+5x-3}{1-x}; \qquad Dom(f+g)=\mathbb{R}-\{1\}$$
$$(f-g)(x)=\frac{-x^3+x^2+3x-5}{1-x}; \qquad Dom(f-g)=\mathbb{R}-\{1\}$$
$$(f/g)(x)=\frac{(x^2-4)(1-x)}{x+1}; \qquad Dom(f/g)=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$$
$$(1/f)(x)=\frac{1}{x^2-4}; \qquad Dom(1/f)=\mathbb{R}-\{\pm 2\}$$
$$f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}; \qquad Dom(f^{-1})=[-4,+\infty)$$
$$g^{-1}(x)=\frac{x-1}{x+1}; \qquad Dom(g^{-1})=\mathbb{R}-\{-1\}$$
$$(f\circ g)(x)=\frac{x^2-3}{-x^2+5}; \qquad Dom(f\circ g)=\mathbb{R}-\{\pm\sqrt{5}\}$$

f)

$$(f+g)(x)=\frac{3x}{x^2-x-2}; \qquad Dom(f+g)=\mathbb{R}-\{2,-1\}$$
$$(f-g)(x)=\frac{x+4}{x^2-x-2}; \qquad Dom(f-g)=\mathbb{R}-\{2,-1\}$$
$$(f/g)(x)=\frac{2}{x^2-x-2}; \qquad Dom(f/g)=\mathbb{R}-\{-1,2\}$$
$$(1/f)(x)=\frac{x-2}{2}; \qquad Dom(1/f)=\mathbb{R}-\{2\}$$
$$f^{-1}(x)=\frac{2+2x}{x}; \qquad Dom(f^{-1})=\mathbb{R}-\{0\}$$
$$g^{-1}(x)=\frac{1-x}{x}; \qquad Dom(g^{-1})=\mathbb{R}-\{0\}$$
$$(f\circ g)(x)=\frac{x-2}{x}; \qquad Dom(f\circ g)=\mathbb{R}-\{0,2\}$$

A.6. Solucionario del tema 6: Límite de funciones. Continuidad

1. *a*) 15   *b*) $+\infty$ *c*) $-\infty$ *d*) $+\infty$

   e) 2   *f*) $+\infty$ *g*) $\begin{cases} +\infty & \text{si } x\to 2^+ \\ -\infty & \text{si } x\to 2^- \end{cases}$ *h*) 0

   i) $\begin{cases} +\infty & \text{si } x\to 1^+ \\ -\infty & \text{si } x\to 1^- \end{cases}$ *j*) 0   *k*) 2   *l*) 2

   m) 2   *n*) $-15/4$ *ñ*) 1   *o*) $+\infty$

p) 0 *q*) $2/3$ *r*) $\sqrt{5}$ *s*) $-1/5$
t) 1 *u*) $1/3$

2. *a*) -2 *b*) $1/4$ *c*) 0 *d*) $1/3$
   e) 0 *f*) $-\infty$ *g*) 0 *h*) 0

3. *a*) 0 *b*) 2 *c*) 2
   d) 12 *e*) ∞ *f*) -2

4. *a*) $\begin{cases} +\infty & \text{si } x \to +\infty \\ 0 & \text{si } x \to -\infty \end{cases}$ *b*) 0 *c*) $\dfrac{1}{e^6}$ *d*) 1
   e) e *f*) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ *g*) $\dfrac{1}{e^2}$ *h*) $+\infty$
   i) 0 *j*) 1

5. *a*) $-\infty$ *b*) $+\infty$ *c*) 0 *d*) $+\infty$ *e*) 1 *f*) 0

6. *a*) 0 *b*) $\begin{cases} -\infty & \text{si } x \to -2^+ \\ +\infty & \text{si } x \to -2^- \end{cases}$ *c*) -1 *d*) 0
   e) $\begin{cases} -\infty & \text{si } x \to 2^+ \\ +\infty & \text{si } x \to 2^- \end{cases}$ *f*) 0 *g*) 1 *h*) -1
   i) $\mathbb{R} - \{2, -2\}$ *j*) $\mathbb{R} - \{0\}$

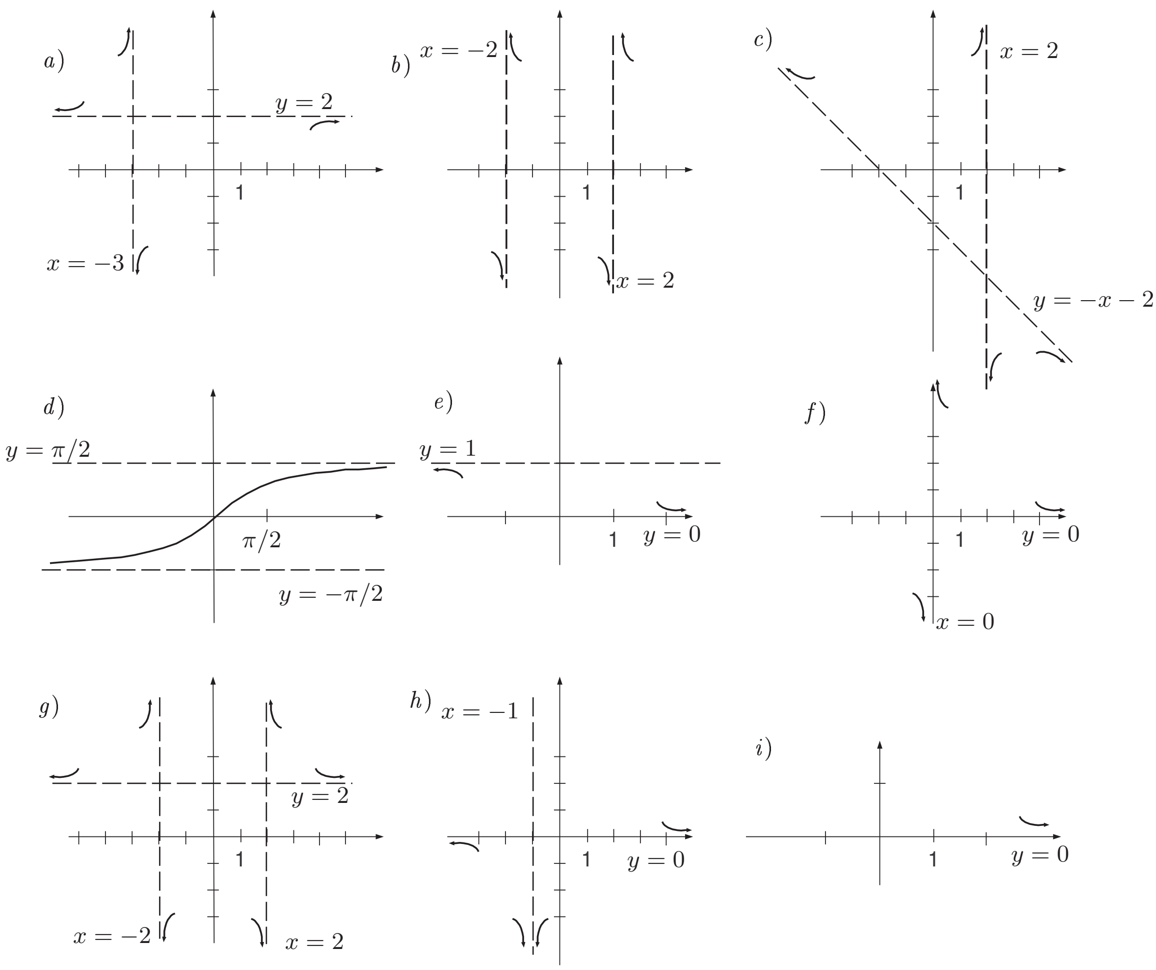
7. *a*) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ *b*) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$
   c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ no existe; $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 4$ y $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = -8$
   d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1/2$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$

8. *a*) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -2$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$
   b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -3/2$ *c*) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$ *d*) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

9. *a*) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1/2$
   b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ *d*) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

10. $k = -15/4$

11.



12. No procede a solución.

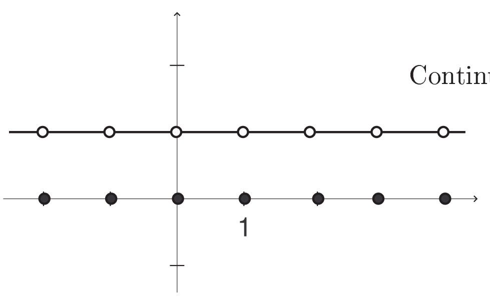
13. a) Discontinua en:

- $x = -4$ (Salto finito)
- $x = -3$ (Evitable)
- $x = -1$ (Salto finito)
- $x = 2$ (Salto finito)
- $x = 6$ (Salto finito)

b) Discontinua en:

- $x = -4$ (Salto finito)
- $x = 0$ (Evitable)
- $x = 2$ (Salto infinito)
- $x = 4$ (Evitable)
- $x = 6$ (Tipo infinito)

14.

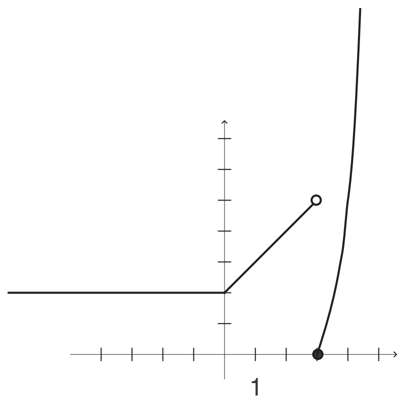


Continua en $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

15. *a*) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ *b*) En $x = 2$ *c*) Habría que definir $f(2) = 4$

16. *a*) $Dom(f) = \mathbb{R}$
    b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ no existe; $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 11$
    c) f es continua en $\mathbb{R} - \{4\}$

17.



Continua en $\mathbb{R} - \{3\}$

18. *a*) Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$. En $x = 0$ discontinuidad de salto finito, (salto $= 2$)
    b) Continua en $\mathbb{R}$
    c) Continua en $\mathbb{R} - \{3, 4\}$. En $x = 3$ discontinuidad de salto finito, (salto $= 5$) y en $x = 4$ discontinuidad de salto finito, (salto $= 16$)
    d) Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$. En $x = 0$ discontinuidad de salto infinito.
    e) Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$. En $x = 0$ discontinuidad de salto infinito.
    f) Continua en $\mathbb{R}$.

19. $k = 2$

20. Imposible.

21. Evitable.

22. *a*) $a = 1$ *b*) $a = -8$ *c*) $a = \dfrac{1}{2}$ *d*) $c = 1$, a y b cualquiera.

23. No procede la solución.

24. *a*) Continua en $\mathbb{R}$
    b) Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$. En $x = 0$ discontinuidad de salto finito, (salto $= 2$)
    c) Continua en $\mathbb{R} - \{2, 1/2\}$. En $x = 2$ discontinuidad de tipo infinito y en $x = 1/2$ discontinuidad de tipo infinito.
    d) Continua en $[5, +\infty)$
    e) Continua en $\mathbb{R}$
    f) Continua en $\mathbb{R}$
    g) Continua en $\mathbb{R} - \{e^2\}$. En $x = e^2$ discontinuidad de tipo infinito.
    h) Continua en $\mathbb{R} - \{x = 2k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}\}$. En $x = 2k\pi$ discontinuidad de tipo infinito.
    i) Continua $\mathbb{R}$
    j) Continua en $\mathbb{R}$
    k) Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$. En $x = 0$ discontinuidad de salto finito.
    l) Continua en $\mathbb{R}$

A.7. Solucionario del tema 7: Introducción al cálculo diferencial. Derivadas

1. $f'(3) = 29$

2. $f'(3) = 6$

3. No procede la solución.

4. *a*) $f'(2) = 0$ *b*) $f'(1) = 5$ *c*) $f'(-1) = -8$ *d*) $f'(2) = 12$ *e*) $f'(6) = \dfrac{1}{6}$

   f) $f'(0) = 0$ *g*) $f'(1) = \dfrac{1}{2}$ *h*) $f'(2) = \dfrac{1}{2}$

5. *a*) Continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$
   b) Continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$
   c) Continua y derivable en $\mathbb{R}$
   d) Continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$
   e) Continua y derivable en $\mathbb{R} - \{3\}$

6. *a*) Es derivable en $x = 2$, $f'(2) = 3$ *b*) Es derivable en $x = 1$, $f'(1) = 2$

   c) No es derivable en $x = 1$, $f'_-(1) = 3$ y $f'_+(1) = 2$

   d) No es derivable en $x = -2$, $f'_-(-2) = -5$ y $f'_+(-2) = 5$; $f'_-(3) = -5$ y $f'_+(3) = 5$

7. *a*) $a = \dfrac{3}{2}, \quad b = -2$ *b*) $a = -5, \quad b = -\dfrac{3}{2}$

   c) $a = -13, \quad b = -7$ *d*) $a = -\dfrac{1}{2}, \quad b = -\dfrac{3}{2}$

   e) $a = -\dfrac{1}{2}, \quad b = 4$

8. Continua y derivable en $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$

9. Continua y derivable en $[0, +\infty) - \{3\}$

10. *a*) $f'(x) = 4x^3$ *b*) $f'(x) = \dfrac{-2}{x^3}$

    c) $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ *d*) $f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 2x$

    e) $f'(x) = 18x^2 + 10x$ *f*) $f'(x) = 20x^3 + 4x - 5$

    g) $f'(x) = x^4 + 2x^2 - 8$ *h*) $f'(x) = -\dfrac{6}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}$

    i) $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3}{x^4} - \dfrac{2}{x^2}$ *j*) $f'(x) = -\dfrac{16}{x^5} - \dfrac{4}{x^3} - \dfrac{1}{x^4}$

    k) $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 - 3$ *l*) $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 1$

    m) $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 8x - 3$ *n*) $f'(x) = \dfrac{2x^3 - 6}{x^3}$

    ñ) $f'(x) = \dfrac{-3x - 8}{x^5}$ *o*) $f'(x) = \dfrac{3}{5}x^2$

    p) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^3}$ *q*) $f'(x) = \dfrac{-x^3 + 6x + 12}{x^3(x+3)^2}$

    r) $f'(x) = \dfrac{-4}{(2x-1)^2}$ *s*) $f'(x) = \dfrac{2x^3 - 9x^2}{(x-3)^2}$

t) $f'(x) = \dfrac{x^2+8x+1}{(x+4)^2}$

11. *a*) $f'(x) = 4^x(1 + x\ln 4)$ *b*) $f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$

c) $f'(x) = \cos x + 2e^x$ *d*) $f'(x) = 3^x(\ln 3 \cdot \ln x + \dfrac{1}{x})$

e) $f'(x) = 4(6x+1)(2x^3+x)^3$ *f*) $f'(x) = \dfrac{2x^3(x+2)}{(1+x)^3}$

g) $f'(x) = 10x(x^2-3)^4$ *h*) $f'(x) = 8e^{2x}(e^{2x}+3)^3$

i) $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ *j*) $f'(x) = x \cdot 2^x \cdot a^{2x}(2 + x\ln 2 + 2x\ln a)$

k) $f'(x) = 4\cos 4x$ *l*) $f'(x) = 4\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x$

m) $f'(x) = 4x^3 \cos x^4$ *n*) $f'(x) = \dfrac{4x}{\cos^2 2x^2}$

ñ) $f'(x) = -2\operatorname{tg} 2x$ *o*) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

p) $f'(x) = -\operatorname{sen} x \cdot e^{\cos x}$ *q*) $f'(x) = -\dfrac{1}{1-x^2}$

r) $f'(x) = \dfrac{\cos x}{(1-\operatorname{sen} x)^2}\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}}$

s) $f'(x) = -x\operatorname{tg}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$ *t*) $f'(x) = \dfrac{-2[1+\operatorname{tg}^2(1-2x)]}{\operatorname{tg}(1-2x)} = \dfrac{-4}{\operatorname{sen}(2-4x)}$

12. *a*) $f'(x) = x^x(1+\ln x)$ *b*) $f'(x) = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1+\ln\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)$

c) $f'(x) = (\operatorname{sen} x)^x(\ln(\operatorname{sen} x) + x\operatorname{cotg} x)$ *d*) $f'(x) = (\ln x)^{\ln x}\left[\dfrac{1+\ln(\ln x)}{x}\right]$

e) $f'(x) = (\sqrt{x})^{\operatorname{tg} x}\left[(1+\operatorname{tg}^2 x)\ln\sqrt{x} + \dfrac{\operatorname{tg} x}{2x}\right]$ *f*) $f'(x) = (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{x}}\left[\dfrac{\ln(\operatorname{tg} x)}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}(1+\operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg} x}\right]$

g) $f'(x) = (\cos x)^{\operatorname{sen} 2x}\,[2\cos 2x\ln(\cos x) - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} 2x]$

h) $f'(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right) + \dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right]$

i) $f'(x) = (\operatorname{arc\,sen} x^2)^{2x}\left[2\ln(\operatorname{arc\,sen} x^2) + \dfrac{4x^2}{\operatorname{arc\,sen} x^2 \cdot \sqrt{1-x^4}}\right]$

13. *a*) $f'''(x) = 3^3 \cdot \ln^3 2 \cdot 2^{3x}$ *b*) $f^{4)}(x) = \dfrac{2 \cdot 4!}{(x-1)^5}$

c) $f^{10)}(x) = -3^{10}\operatorname{sen} 3x$ *d*) $f^{5)}(x) = \dfrac{4!}{(x+2)^5}$

14. *a*) $f^{n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{(x-1)^n}$ *b*) $f^{n)}(x) = e^x + (-1)^n e^{-x}$ *c*) $f^{n)}(x) = \dfrac{(-1)^n(n+1)!}{x^{n+2}}$

15. *a*) $y' = 2x^3 + x^2 - 5$

b) $y' = -\dfrac{6}{x^3} - \dfrac{6}{x^4} + \dfrac{5}{x^2}$

c) $y' = 5\left(-\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3}{x^4}\right)$

d) $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{6\sqrt[6]{x^5}} + \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

e) $y' = \dfrac{2x+1}{3}$

f) $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

g) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

h) $y' = 20x(x^2+1)^9$

i) $y' = \dfrac{(-7+x)\cdot(1-x)^2}{(1+x)^5}$

j) $y' = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$

k) $y' = \dfrac{x^2-2x-1}{3(x^2+1)\sqrt[3]{(1+x^2)(1-x)^2}}$

l) $y' = \dfrac{2e^x}{(1-e^x)^2}$

m) $y' = \dfrac{1}{x\ln x}$

n) $y' = \dfrac{-4x}{1-x^2}$

ñ) $y' = \dfrac{2}{1-x^2}$

o) $y' = \dfrac{-1}{(1-x)\sqrt{x}}$

p) $y' = \operatorname{sen} x + x\cos x$

q) $y' = \dfrac{2}{e^{-2x}}$

16. *a*) $y' = 2x\cos x^2 + 2\operatorname{sen} x\cos x + 2\cos 2x$

b) $y' = -6(1+\cos^2 x)^2\cos x\cdot\operatorname{sen} x$

c) $y' = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$

d) $y' = \dfrac{2}{\cos x}$

e) $y' = -2e^x\operatorname{tg} e^x$

f) $y' = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

g) $y' = \dfrac{(1+\operatorname{tg}^2 x)x - \operatorname{tg} x}{x^2}$

h) $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

i) $y' = \dfrac{4\operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x)}{(1-\operatorname{tg}^2 x)^2}$

j) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

k) $y' = \dfrac{(\operatorname{arc\,cos} x)^{-4/3}}{3\sqrt{1-x^2}}$

l) $y' = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$

m) $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

n) $y' = \dfrac{e^x\left(\operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{1}{1+x^2}\right)}{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}$

ñ) $y' = \dfrac{-2}{1+x^2}$

o) $y' = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}$

p) $y' = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

q) $y' = \dfrac{-1}{2x(x-1)}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

r) $y' = \dfrac{-4}{e^{4x}+e^{-4x}}$

A.8. Solucionario del tema 8: Aplicaciones de las derivadas

1. *a*) Recta tangente: $4x - y + 6 = 0$, recta normal: $x + 4y - 7 = 0$
   b) Recta tangente: $16x - y - 16 = 0$, recta normal: $x + 16y - 258 = 0$
   c) Recta tangente: $9x + y - 6 = 0$, recta normal: $x - 9y - 28 = 0$
   d) Recta tangente: $9x - 125y + 64 = 0$, recta normal: $625x + 45y - 2536 = 0$

e) Recta tangente: $8x - 2y - \pi = 0$, recta normal: $8x + 32y - \pi = 0$

f) Recta tangente: $30\sqrt{6}x + 16y - 4\sqrt{2} + 5\pi\sqrt{6} = 0$, recta normal: $16\sqrt{6} - 180y - 16\pi + 45\sqrt{2} = 0$

2. $y = e^{-1}x$
3. $4\sqrt{3}x - 12y - 37 + 8\sqrt{3} = 0$
4. $2x + y - 14 = 0$
5. $(1, 1)$
6. $4x + y + 7 = 0$
7. $r \equiv 5x - y + 8 = 0$, $s \equiv 5x - y - 8 = 0$
8. $3x - y - 11 + \ln 64$
9. $y = -x^2 + 6x - 7$
10. $(1, -3)$
11. $a = 1/8$
12. $k = 11/3$
13. $v(2) = 11$ m/s
14. *a*) $v_m = 10$ m/s *b*) 21,87 m.

15. *a*) Decreciente en $\mathbb{R} - \{0\}$

b) Creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, decreciente en $(0, 2)$

c) Creciente en $(-1, +\infty)$, decreciente en $(-\infty, -1)$

d) Creciente en $(-\infty, 0)$, decreciente en $(0, +\infty)$

e) Decreciente en su dominio.

f) Creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

g) Creciente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$, decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

h) Creciente en $(0, +\infty)$, decreciente en $(-\infty, 0)$

i) Creciente en $(1, +\infty)$, decreciente en $(-\infty, -1)$

16. *a*) Máximos relativos: $(0, 12)$, mínimos relativos: $(4, -20)$

b) Máximos relativos: $(0, 0)$, mínimos relativos: $(1, -1)$ y $(-1, -1)$

c) Máximos relativos: $(0, -1)$

d) Máximos relativos: $\left(\frac{7\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$, mínimos relativos: $\left(\frac{3\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$

e) Máximos relativos: $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$, mínimos relativos: $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{-1}{2}\right)$

f) Mínimos relativos: $\left(-\frac{5}{2}, \frac{53}{16}\right)$ y $(-1, -5)$

g) No tiene extremos locales.

h) Máximos relativos: $(0, 1)$

17. *a*) Máximo absoluto: $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$, Máximo relativo: $(0, 1)$,

mínimo absoluto: $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$, mínimo relativo: $(2\pi, 1)$

b) Máximo absoluto: $\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} + 5 + \sqrt{3}\right)$, Máximo relativo: $(0, 5)$,

mínimo absoluto: $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + 5 - \sqrt{3}\right)$, mínimo relativo: $(2\pi, 2\pi + 5)$

18. $y = x^2 + x$

19. *a*) Cóncava: $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$, convexa: $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$, puntos de inflexión: $\left(-2, \frac{2202}{35}\right)$, $(0, 0)$ y $\left(2, -\frac{2202}{35}\right)$

b) Cóncava: $(-1, 1)$, convexa: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

c) Cóncava: $(0, +\infty)$, convexa: $(-\infty, 0)$, puntos de inflexión: $(0, 0)$

d) Cóncava: $(-\infty, 5/3)$, convexa: $(5/3, +\infty)$, puntos de inflexión: $\left(\frac{5}{3}, -\frac{187}{27}\right)$

e) Cóncava: $(-\infty, 1)$, convexa: $(1, +\infty)$

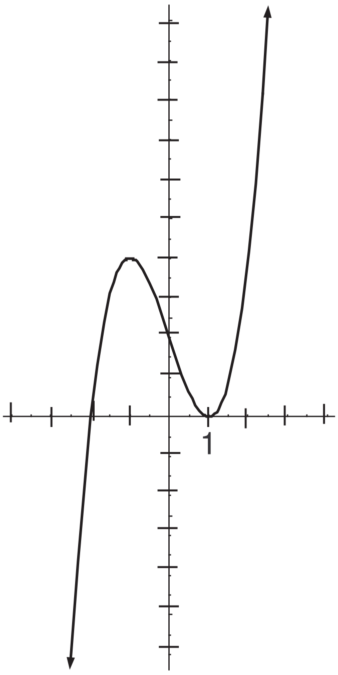
f) Cóncava: $(-\infty, 1)$, convexa: $(1, +\infty)$

20. $y = x^3 - 3x^2 + 2$

21. $y = x^3 - 3x^2 + 3$

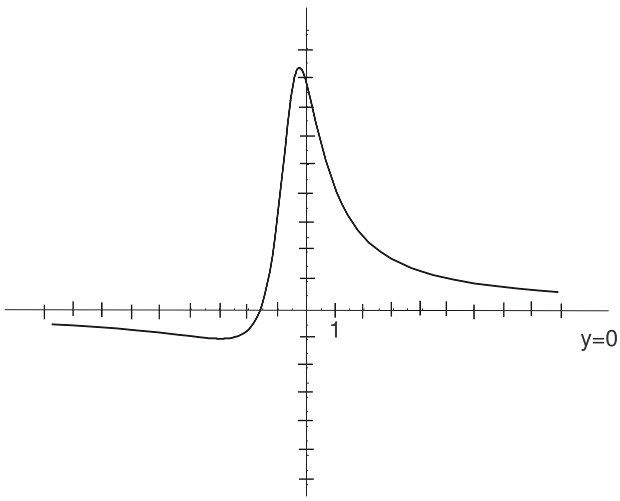
22. *a*)

- Dom(f)$= \mathbb{R}$
- Continua en $\mathbb{R}$
- Puntos de cortes: $(1, 0)$, $(-2, 0)$ y $(0, 2)$
- No es simétrica.
- No tiene asíntotas.
- Creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
  Decreciente en $(-1, 1)$
  Máximo relativo en $(-1, 4)$
  Mínimo relativo en $(1, 0)$
- Cóncava en $(-\infty, 0)$
  Convexa en $(0, +\infty)$
  Punto de inflexión en $(0, 2)$



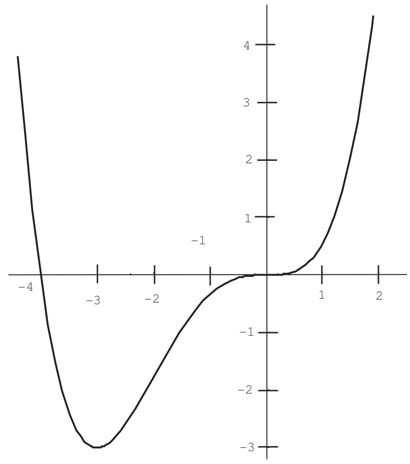
b)

- Dom(f)$= \mathbb{R}$
- Continua en $\mathbb{R}$
- Puntos de cortes: $(-8/5, 0)$ y $(0, 8)$
- No es simétrica.
- Asíntota horizontal: $y = 0$.
- Creciente en $(-3, -1/5$
  Decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-1/5, +\infty)$
  Máximo relativo en $(-1/5, 175/21)$
  Mínimo relativo en $(-3, -1)$
- $f''(x) = \dfrac{2(5x^3 + 24x^2 + 9x - 5)}{(x^2 + x + 1)^3}$



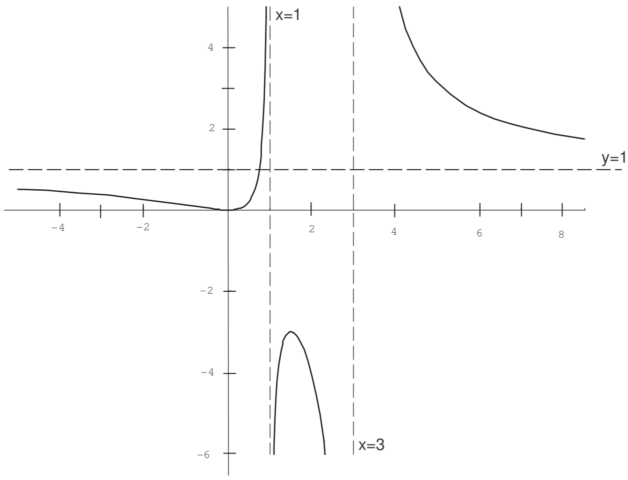
c)

- Dom(f)= $\mathbb{R}$
- Continua en $\mathbb{R}$
- Puntos de cortes: $(-4, 0)$ y $(0, 0)$
- No es simétrica.
- No tiene asíntotas.
- Creciente en $(-3, +\infty$
  Decreciente en $(-\infty, -3)$
  Mínimo relativo en $(-3, -3)$
- Cóncava en $(-2, 0)$
  Convexa en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
  Punto de inflexión en $(0, 0)$ y $(-2, -16/9)$



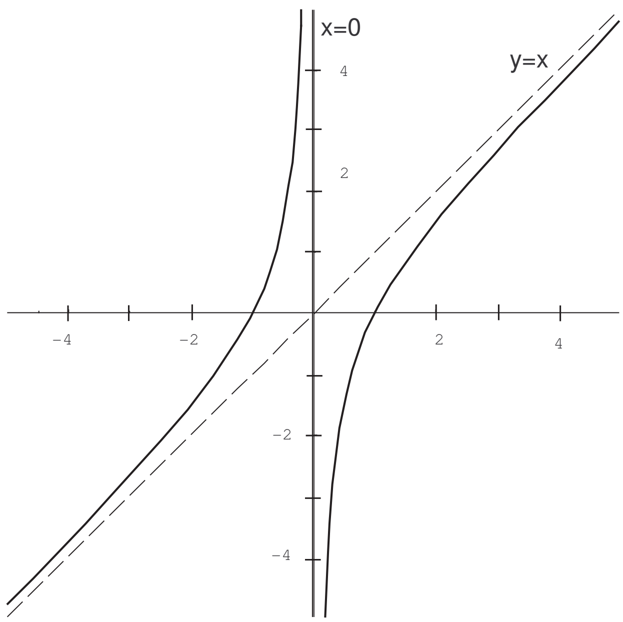
d)

- Dom(f)= $\mathbb{R} - \{1, 3\}$
- Continua en $\mathbb{R} - \{1, 3\}$
- Puntos de cortes: $(0, 0)$
- No es simétrica.
- Asíntota horizontal: $y = 1$.
  Asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = 3$
- Creciente en $(0, 1) \cup (1, 3/2)$
  Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (3/2, 3) \cup (3, +\infty)$
  Máximo relativo en $(3/2, -3)$
  Mínimo relativo en $(0, 0)$
- $f''(x) = \dfrac{2(4x^3 - 9x^2 + 9)}{(x^2 - 4x + 3)^3}$



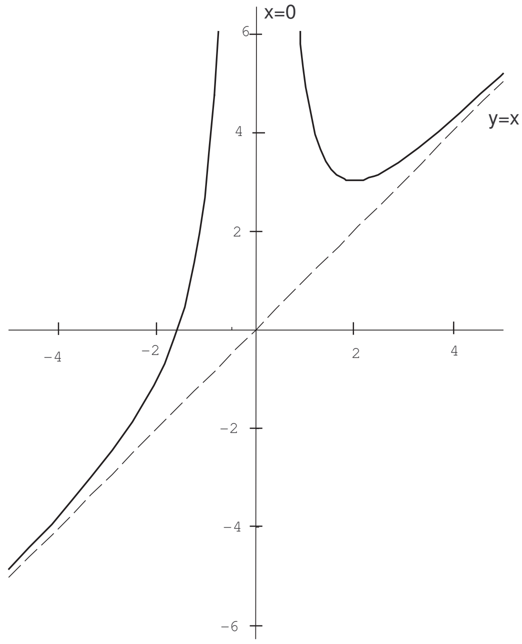
e)

- Dom(f)= $\mathbb{R} - \{0\}$
- Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$
- Puntos de cortes: $(-1, 0)$ y $(1, 0)$
- Es simétrica con respecto al origen (impar).
- Asíntotas verticales: $x = 0$
  Asíntota oblicua: $y = x$.
- Es creciente en su dominio.
  No tiene extremos relativos.
- Cóncava en $(0, +\infty)$
  Convexa en $(-\infty, 0)$
  No tiene puntos de inflexión.



f)

- Dom(f)$= \mathbb{R} - \{0\}$
- Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$
- Puntos de cortes: $(\sqrt[3]{-4}, 0)$
- No es simétrica.
- Asíntotas verticales: $x = 0$
  Asíntota oblicua: $y = x$.
- Creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
  Decreciente en $(0, 2)$
  Mínimo relativo en $(2, 3)$
- Es convexa en su dominio.
  No tiene puntos de inflexión.



23. La gráfica del apartado *b)*.

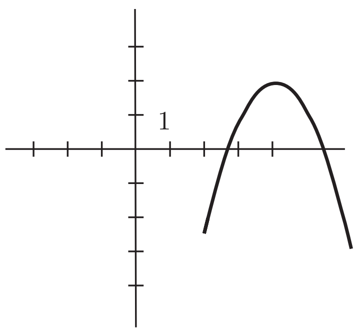
24. *a*) con 3) *b*) con 4) *c*) con 1) *d*) con 2)

25. $f'(-2) = \dfrac{4}{5}$ y $f'(4) = \dfrac{5}{7}$

26. $x = a$ es máximo relativo; $x = b$ es mínimo relativo y $x = c$ es punto de inflexión.

27.

a)



b)