KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِالرَّحْمٰنِ الرَّحِيْم

Segala puji bagi Allah SWT yang telah memberikan kehidupan bagi kita dan memberkahi kita dengan hidayah dan karunia-Nya yang begitu melimpah.Shalawat serta salam tetap tercurah kepada Nabi Besar Muhammad SAW yang selalu menjadi panutan untuk kehidupan semua umat Islam.

Bahan ajar inimerupakanbahan ajar berbasismasalah yang diharapkan dapat membantu mahasiswa dalam perkuliahan matematika ekonomi. Bahan ajar ini disusun dengan menyajikan berbagai masalah yang disertai altefnatif solusi penyelesaiannya. Bahan ajar ini juga dilengkapi dengan soal latihan yang akan melatih kemampuan pemecahan masalah mahasiswa. Pada bahan ajar ini terdiri dari materi diffrensial dan integral yang disertai dengan aplikasi dalam bidang ekonomi.

Penulis berharap buku ini dapat bermanfaat dan digunakan dengan sebagaimana mestinya. Penulis mengharapkan kritik dan saran sebagai perbaikan untuk penulis kedepannya.

Metro, Agustus 2016

Penyusun

DAFTAR ISI

Petunjuk Penggunaan Bahan Ajar

Bahan ajar ini merupakan bahan ajar berbasis masalah. Sebelum memahami definisi yang akan digunakan, pembaca terlebih dahulu harus memahami beberapa masalah yang diberikan beserta cara penyelesaian yang digunakan.

Dalam bahan ajar ini, akan lebih mengutamakan kemampuan mendasar yang mencakup materi diferensial dan integral. Selanjutnya, pemahaman mendasar ini akan diterapkan dalam beberapa kegunaan diferensial dan integral dalam bidang ekonomi.

Agar bisa menggunakan bahan ajar ini dengan optimal, pembaca harus memahami langkah-langkah penyelesaian pada beberapa masalah yang diberikan. Selanjutnya, pembaca akan menyelesaikan secara mandiri masalah yang serupa dengan contoh masalah yang telah diberikan.

Selamat membaca dan berusaha menyelesaikan soal-soal yang diberikan.

I. Diferensial

Sebelum memahami diferensial, materi yang menjadi hal penting dan mendasar adalah materi limit. Setelah pembahasan mengenai limit, akan dilanjutkan pembahasan definisi diferensial dan quation diferensial.

Untuk memahami mengenai materi limit, perhatikan beberapa masalah di bawah ini:

1.1 DEFINISI DIFERENSIAL

Masalah 1

Diketahui

Hitunglah: $\lim_{x \to 2^-} f(x)$, $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ dan $\lim_{x \to 2} f(x)$

Apakah $f(x)$ mempunyai limit?

Limit kiri: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1}$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots?$

Limit kanan: $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x-1}$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots?$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{untuk } x \leq 2 \\ x+1, & \text{untuk } x > 2 \end{cases}$$

Perhatikan bahwa $x \leq 2$, berarti x bernilai

pada $x =$ ……………..?

dan $x =$ ……………..?

Sedangkan x > 2 , berarti x bernilai

pada x = ……………..?

- Perhatikan hasil limit kanan dan kiri fungsi tersebut. Apakah $\lim_{x \to 1} f(x)$ memiliki limit kanan kiri yang sama atau tidak………………………………………………………..?

  Apakah $\lim_{x \to 1} f(x)$ dapat dikatakan memiliki limit … … … … … … … … … … … … …..……………………………?

  jika ada, nilai limitnya adalah … … … … … … … … … … … … ?

- Maka, simpulkan adakah nilai limit dari fungsi tersebut?

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots?$$

Masalah 2

Diberikan fungsi $f(x) = \begin{cases} x, jika\ x < 0 \\ x^2, jika\ 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, jika\ x > 1 \end{cases}$

a. Gambar grafik$f$

b. Tentukan $\lim_{x \to -1} f(x)$jika ada

c. Tentukan $\lim_{x \to -1} f(x)$jika ada

Penyelesaian

a. Untuk menggambarkan grafik:

1. Ada berapa macam persamaan fungsi pada masalah tersebut?

   ………………………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………………………

- Berdasarkan langkah pertama, dapat dilihat dengan jelas batas nilai x setiap fungsi. Berapakah masing-masing fungsi $f(x)$ yang sesuai limit fungsi berdasarkan nilai x yang telah diketahui ?

  $\lim_{x \to 0^-} f(x)$, maka $f(x) =$..?

  $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, maka $f(x) =$ ....?

  $\lim_{x \to 0} f(x)$, maka $f(x) =$ ....?

  Kemudian, berapakah nilai limit masing-masing fungsi tersebut?

  $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$..? (limit kiri)

  $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

  $=$..? (limit kanan)

  $\lim_{x \to 0} f(x) \ =$..?

- Perhatikan hasil limit masing-masing fungsi tersebut. apakah nilai limit masing-masing fungsi bernilai sama?

  $$\lim_{x \to 0-} f(x) \ \ \ldots \ \ \lim_{x \to 0^+} f(x) \ \ \ldots \ \ \lim_{x \to 0} f(x) = \cdots \ldots \ldots \ ?$$

  Apakah $\lim_{x \to 0} f(x)$ dapat dikatakan memiliki limit................?

  jika ada, nilai limitnya adalah ....?

b. maka, simpulkan Apakah $f(x)$ mempunyai limit? Dengan memandang limit kanan dan kiri nya, yaitu:

2. Gambarkan masing-masing fungsi kemudian gabungkan gambar dari fungsi-fungsi tersebut

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

b. Untuk mencari limit fungsi tersebut dapat diperhatikan :

1. Amati batas limit (batas nilai x) dari masing-masing fungsi tersebut. setiap fungsi memiliki batas limit (batas nilai x) yang berbeda, yaitu:

- Pada $y = x^2$, dengan $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} < 1$ maka x pada selang (……. , ……)
- Pada $y = 2 - x$, dengan $\boldsymbol{x} > 1$ maka x pada selang (……. , ……)

2. Berdasarkan langkah diatas, dapat dilihat dengan jelas batas nilai x setiap fungsi. berapakah masing-masing fungsi $f(x)$ yang sesuai limit fungsi berdasarkan nilai x yang telah diketahui.

$\lim\limits_{x \to -1} f(x)$, maka $f(x) =$ … … … … … … … … … … … … … … … … … ?

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, maka $f(x) =$ … … … … … … … … … … … … … … … … … … ?

3. selesaikan limit masing-masing fungsi tersebut berdasarkan dengan memandang batas x. Dengan menggunakan definisi limit, dapat ditunjukkan bahwa pada titik x=-1maka:
   - Limit kiri: $\lim_{x \to -1^-} f(x)$, $= \cdots$ … … … … … … … … … … … … ?
   - Limit kanan:

   $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \cdots$ … … … … … … … … … … … … ?

   Apakah $\lim_{x \to -1} f(x)$ memiliki limit kanan kirinya sama atau tidak … ?

   Apakah $\lim_{x \to -1} f(x)$ dapat dikatakan memiliki limit …

   …

   jika ada, nilai limit nya adalah … … … … … … … … … … … … … … ?

c. Untuk selanjutnya yaitu:

$\lim_{x \to 1} f(x)$, dapat dicari dengan cara yang sama.

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

- Dari penyelesaian diatas apa yang dapat kamu ketahui? Apakah fungsi-fungsi tersebut memiliki nilai limitnya?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

- Dari penyelesaian diatas apakah yang dapat disimpulkan?

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

Dari beberapa masalah di atas, dapat dilihat bahwa:

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Berdasarkan masalah-masalah diatas, maka dapat disimpulkan bahwa **Suatu fungsi dapat dideferensialkan apabila**

1. Nilai limit dari fungsi f(x) tersebut :……………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………
2. Jika f'(c) atau turunan fungsi pada c ada, maka fungsi f : ……………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………

Masalah 3

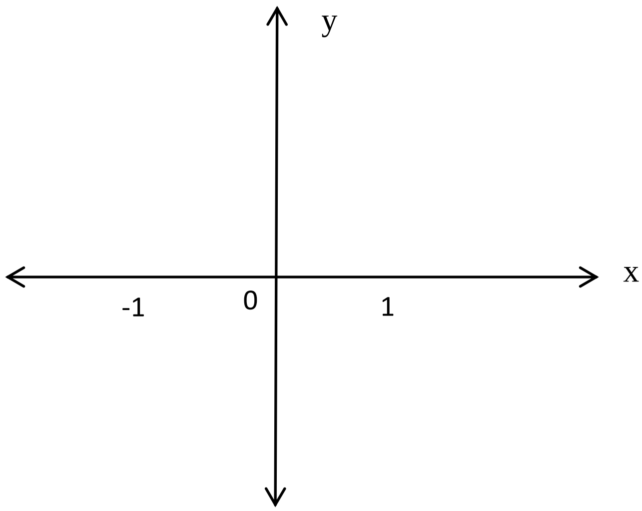
Perhatikan turunan fungsi $f(x) = |x|$ pada titik O(0,0). Apakah nilai limitnya ada? Apakah fungsi tersebut dapat terdeferensialkan? Sketsakan dalam gambar kurva.

Penyelesaian

"fungsi nilai mutlak adalah kontinu di setiap bilangan riil c dan aturan-aturannya memuat nilai mutlak". Bentuk dasar fungsi bernilai mutlak dinyatakan oleh $f(x) = |x|$, grafik fungsi f(x) simetris terhadap sumbu Y dan terletak diatas atau pada sumbu X. Secara umum dapat dinyatakan :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ jika } x \geq 0 \\ -x \text{ jika } x < 0 \end{cases}$$

Masalah ini dapat diselesaikan dengan mengamati kurva grafiknya. Jika diketahui titik O(0,0) dengan fungsi $f(x) = |x|$, maka gambarkan pada grafik cartesius berikut:



Perhatikan fungsi tersebut kontinu dimana ?

Berdasarkan teorema *keterdiferensialan menunjukkan kekontinuan*, jika $f'(c)$ ada, maka f kontinu di c, maka $f'(c) = \lim_{\Delta x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$, sehingga (substitusikan nilai c yang telah didapat):

a. Jika x $\geq$ c atau x$\rightarrow$ $\boldsymbol{c}^{+}$berarti x mendekati c dari kanan (x bernilai positif) maka $f(x) = x$ sehingga:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to \boldsymbol{c}^{+}} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{\Delta x \to \boldsymbol{c}^{+}} \frac{(x) - (c)}{x - c} = \cdots ?$$

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

b. Jika x $<$ c atau x$\rightarrow \boldsymbol{c}^{-}$berarti x mendekati c dari kiri (x bernilai negatif) maka $f(x) = -x$ sehingga:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to \boldsymbol{c}^{-}} = \frac{f(x) - f(c)}{x - (-c)} = \lim_{\Delta x \to \boldsymbol{c}^{-}} \frac{-(x) - (-c)}{x} = \ \dots \ ?$$

……………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

- **Dari penyelesaian diatas apa yang kamu ketahui?**

  ………………………………………………………………………………………

- Dari hasil-hasil diatas, simpulkan apakah fungsi tersebut dapat terdiferensialkan dengan memandang :

  1. Nilai limitnya (jika ada) :

     ………………………………………………………………………………

  2. Kekontinuan :

     ………………………………………………………………………………

  3. Apakah terdiferensialkan :

     ………………………………………………………………………………

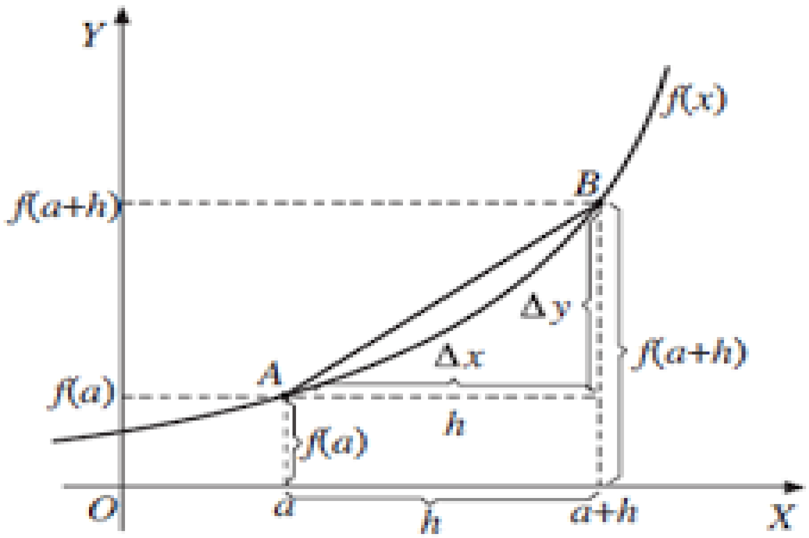
KESIMPULAN :

Suatu fungsi dikatakan dapat dideferensial jika:

1. Fungsi tersebut memiliki nilai limit pada titik limit yang ditentukan.
2. Fungsi tersebut merupakan fungsi kontinu

Menemukan Konsep Turunan Suatu Fungsi

Proses penurunan sebuah fungsi disebut juga proses pendiferensialan atau diferensiasi, yang pada dasarnya merupakan penarikan limit atas suatu kuosien diferensial dalam hal tambahan variabel bebasnya mendekati nol. Hasil yang diperoleh dari diferensiasi tersebut dinamakan turunan atau derevativ (*derevative*).



Gambar 1.1 Laju perubahan nilai fungsi f di x = a

Coba kamu amati gambar diatas. Dari gambar diketahui bahwa nilai x mengalami perubahan, yang besarnya (a + h) - a = h,

$$y = f(a)$$

$$\frac{y}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{\mathrm{h}}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{y}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{\mathrm{h}}$$

$$y' = f'(a)$$

$$\frac{dy}{dh} = \frac{d\,f(a)}{dh}$$ sehingga:

$$\frac{dy}{dh} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{\mathrm{h}}$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\mathrm{x} + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

- $y = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,f(x)}{dx} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Angka pembagi selisih atau perbandingan antara perubahan nilai y dengan perubahan nilai x ($\frac{dy}{dx}$) disebut **Differesial Quotient (Qoutien Diferensial).**

1.2 Kaidah-kaidah Diferensial

$$\boldsymbol{y = k}, \qquad \boldsymbol{maka}\ \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\boldsymbol{y = ax^n}, \qquad \boldsymbol{maka}\ \frac{dy}{dx} = n.ax^{n-1}$$

$$\boldsymbol{y = u \pm v}, \qquad \boldsymbol{maka}\ \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$\boldsymbol{y = u\,v}, \qquad \boldsymbol{maka}\ \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\,\frac{dv}{dx}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{u}{v}}, \qquad \boldsymbol{maka}\ \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}v - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\boldsymbol{y = f\,(u), u = g(x)}\ \ \boldsymbol{maka}\ \frac{dy}{dx} = f\{g(x)\}$$

$$y = \boldsymbol{\ln x}, \qquad \boldsymbol{maka}\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\boldsymbol{y = a^x}, \qquad \boldsymbol{maka}\ \frac{dy}{dx} = a^x \ln a$$

$$\boldsymbol{y =\ {}^a\log x}, \qquad \boldsymbol{maka}\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\mathrm{x} \ln\ a}$$

$$\boldsymbol{y = e^x}, \qquad \boldsymbol{maka}\ \frac{dy}{dx} = e^x$$

Contoh:

Seorang pembalap F1 ingin mengetahui kecepatannya pada suatu waktu tertentu. Berapakah kecepatan rata-rata pembalap saat dari posisi diam pada t = 3,8 detik, dimana $f(t) = 16t^2$

Penyelesaian:

- Apakah pengertian kecepatan rata-rata? Kecepatan rata-rata adalah jarak antara posisi pertama keposisi kedua dibagi dengan waktu tempuh. Apabila pembalap melaju dari posisi diam maka kontinu di 0, sehingga:

$$v = f(t)$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{16(t + \Delta t)^2 - 16t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{16t^2 + 32t.\Delta t + 16\Delta t^2 - 16\Delta t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} (32t + 16\Delta t) = 32t$$

Substitusikan nilai t = 3,8 detik

$v = 32t \quad = 32(3{,}8\ ) = 121{,}6$ meter/detik

- Penyelesaian diatas apa yang kamu ketahui? Apa yang dapat dikembangkan dari penyelesaiaan diatas?

  Penyelesaian diatas merupakan penyelesaian menggunakan kuision diferensial, sehingga hal ini juga dapat berarti masalah tersebut dapat dikembangkan menggunakan penyelesaian kaidah-kaidah diferensial.

  Berdasarkan kaidah-kaidah diferensial bahwa:

  $y = ax^n$, maka $\dfrac{dy}{dx} = n.ax^{n-1}$, sehingga:

  $f(t) = 16t^2$ maka diketahui: $a = 16$; $x = t$; $n = 2$

  $\frac{dy}{dx} = n.ax^{n-1}, = (2)(16t^{2-1}) = 32t$

  Substitusikan nilai t = 3,8 detik

  $v = 32t = 32(3{,}8\ ) = 121{,}6$ meter/detik

Masalah 4

Sebuah bisnis berhasil baik sedemikian sehingga biaya total yang dikeluarkan (terakumulasi) setelah t tahun adalah $1000t^2$ rupiah. Berapa biaya yang dikeluarkan bisnis tersebut pada tahun kedua?

Penyelesaian

- ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

RANGKUMAN

- **Suatu fungsi dapat dideferensialkan apabila:**
  1. Limit dari fungsi f(x) tersebut ada
  2. Jika f memiliki turunan pada x = c, maka fungsi f(x) kontinu pada x = c, sehingga turunan mengakibatkan kekontinuan
  3. Jika f kontinu di c, maka f harus memiliki turunan pada x = c, karena kekontinuan tidak menjamin adanya turunan.
- Proses penurunan sebuah fungsi disebut juga proses **pendiferensian atau diferensiasi**, yang pada dasarnya merupakan penarikan limit atas suatu kuosien diferensi dalam hal tambahan variabel bebasnya mendekati nol. Hasil yang diperoleh dari diferensiasi tersebut dinamakan turunan atau derevativ (*derevative*). Dengan kuosien diferensial nya:

  $$\frac{dy}{dh} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ Jika nilai limitnya ada
- Kecepatan rata-rata adalah jarak antara posisi pertama keposisi kedua dibagi dengan waktu tempuh.
- Dalam mencari kecepatan rata-rata maupun kecepatan sesaat dapat menggunakan kuision diferensial maupun kaidah diferensial
- Kuision dalam mencari kecepatan dengan t adalah waktu dan c sebagai jarak yaitu:

  $$\frac{dv}{dt} = \lim_{t \to c} \frac{f(c+t) - f(c)}{t}$$

LATIHAN

1. Andaikan y = $(x^2 - 4)(2x - 6)$. Bandingkan $\frac{dy}{dx}$ pada kedudukan $x = -5$!
2. Sebuah partikel bergerak sepanjang garis koordinat dan s, jarak berarah dalam sentimeter yang diukur dari titik asal ke titik yang dicapai setelah t detik, yang diberikan oleh $\boldsymbol{s} = \sqrt{\mathbf{5}\boldsymbol{t} + \mathbf{1}}$. Hitunglah kecepatan partikel pada akhir 3 detik.
3. Tentukan $\frac{d^2y}{dx^2}$ untuk fungsi berikut:
   a. $y = (x^2 - 4)(2x - 6)$
   b. $y = (3x^2 - x)(2 + x^{-1})$
4. Tentukan apakah $y = 0{,}5\, x^2 - 4x + 15$ merupakan fungsi menaik atau fungsi menurun pada $x = 3$ dan $x = 6$!
5. Tentukan $\frac{d^3y}{dx^3}$ untuk fungsi berikut:
   a. $y = (\frac{5x+2}{x})^2$
   b. $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$

Aplikasi Dalam Bidang Ekonomi

1.3 Elastisitas

Masalah 5

Pada saat harga suatu barang Rp 5000,00 pe unit, jumlah barang yang ditawarkan 20 unit. Kemudian harga turun menjadi Rp 4500,00 per unit dan jumlah barang yang ditawarkan menjadi 10 unit. Berdasarkan data tersebut berapakah koefisien elastisitasnya?

Penyelesaian

- Dalam hal ini akan ditentukan perubahan penawaran dan harga
  $\Delta P =$ ....
  $\Delta Q =$ ....
  Karena dalam soal diketahui suatu penawaran, maka dapat dianalis bahwa koefisien elastisitas yang dicari adalah koefisien elastisitas penawaran, sehingga:

  Substitusikan data dalam rumus elastisitas

$$E_s = \frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

....
....
....
....

- Setelah didapatkan koefisien elastisitasnya, perhatikan hasilnya. apakah penawaran bersifat elastis atau bukan? Mengapa?

....
....
....
....
....
....

DEFINISI ELASTISITAS

Elastisitas (pemuluran) adala angka perbandingan antara perubahan relatif dari jumlah dengan perubahan relatif dari harga. Dengan kata lain, elastisitas adalah tingkat kepekaan (perubahan) suatu gejala ekonomi terhadap perubahan gejala ekonomi lainnya. Elastisitas dari suatu fungsi *y = f(x)* berkenaan dengan x dapat didefinisikan sebagai :

$$\eta = \frac{\%\Delta Ey}{\%Ex} = \frac{Ey}{Ex} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta y}{y}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$$

Ini berarti bahwa elastisitas *y = f(x)* merupakan limit dari rasio antara perubahan relative dalam y terhadap perubahan relative dalam x, untuk perubahan x yang sangat kecil atau mendekati nol. Dengan kata lain, elastisitas y terhadap x dapat juga dikatakan sebagai rasio antara pesentase perubahan y terhadap perubahan x.

Elastisitas dibedakan menjadi: elastisitas permintaan, elastisitas penawaran dan elastisitas produksi.

CONTOH

Bila harga Rp 10,- terdapat jumlah/kuantitas 150 unit sedangkan jika harga Rp 12,50 maka terdapat jumlah/kuantitas 200 unit.

Tentukan elastisitasnya !

PENYELESAIAN:

Dalam hal ini dapat ditentukan perubahan harga naik yaitu

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 12{,}50 - 10 = 2{,}50$$

Sedangkan perubahan jumlah yaitu naik sebesar

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 200 - 150 = 50 \text{ unit.}$$

Sehingga dapat ditentukan elastisitas yang terjadi.

Elastistias = angka perbandingan antara perubahan relatif dari jumlah dengan perubahan relatif dari harga

$$\eta = \frac{\Delta x}{x} : \frac{\Delta p}{p}$$

$$= \frac{50}{150} : \frac{2{,}50}{10}$$

$$= \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Masalah 6

Pada saat harga Rp 4000,00 jumlah barang yang diminta 30 unit, kemudian harga turun menjadi Rp 3600,00 jumlah barang yang diminta 60 unit. Hitunglah besarnya koefisien elastisitasnya !

$Perhatikan : \left(E_d = \frac{P_1}{Q_1} . \frac{\Delta Q}{\Delta P}\right)$

Penyelesaian:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Elastisitas Permintaan

Elastisitas permintaan ialah suatu koefisien yang menjelaskan besarnya pengaruh perubahan jumlah barang yang diminta (Q) akibat adanya perubahan harga (P). Jadi merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah barang yang diminta terhadap persentase perubahan harga.

Jika fungsi permintaan dinyatakan dengan $Q_d = f(p)$, maka elastisitas permintaannya

:

$$e_d = \frac{\%\Delta Q_d}{\%\Delta P} = \frac{E\ Q_d}{E\ P} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta Q_d}{Q_d}\right)}{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)} = \frac{d\ Q_d}{d\ P} \cdot \frac{P}{Q_d}$$

dimana $\frac{E\ Q_d}{E\ P}$ tak lain adalah Q'_d atau $f'(P)$

Permintaan akan suatu barang dikatakan bersifat elastic apabila $|\eta d| > 1$, elastic-uniter jika $|\eta d| = 1$, dan inelastic bila $|\eta d| < 1$. Barang yang permintaannya elastic mengisyaratkan bahwa jika harga barang tersebut berubah sebesar persentase tertentu, maka permintaan terhadapnya akan berubah (secara berlawanan arah) dengan persentase yang lebih besar dari pada persentase perubahan harga.

Contoh :

Fungsi permintaan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $Q_d = 25 - 3P^2$, tentukan elastisitas permintaannya pada tingkat harga P = 5.

PENYELESAIAN:

$$Q_d = 25 - 3P^2$$

Dalam hal ini akan tentukan dahulu

$$Q_d = 25 - 3P^2$$

$$Q'_d = \frac{dQ_d}{dP} = -6P$$

Substitusikan data dalam rumus elastisitas

$$E_d = \frac{dQ_d}{dP}.\frac{P}{Q_d} = -6P.\frac{P}{25 - 3P^2}$$

$$= -6(5).\frac{5}{25 - 75} = 3$$

Setelah didapatkan koefisien elastisitasnya, perhatikan hasilnya. apakah permintaannya bersifat elastis atau bukan? Mengapa?

Karena hasil elastisitas permintaannya adalah 3, maka elastisitas permintaanya termasuk elastis, karena Permintaan akan suatu barang dikatakan bersifat elastic apabila $|E_d| > 1$. Dengan kata lain $3 > 1$

Dari hasil $E_d = 3$ berarti bahwa apabila dari kedudukan P = 5 , harga naik (turun) sebesar 1 persen maka jumlah barang yang diminta akan berkurang (bertambah) sebanyak 3 persen

Masalah 7

Suatu fungsi permintaan pada perusahaan motor ditunjukkan oleh persamaan $Q_d = 3600 - 4P^3$. Hitunglah elastisitas permintaan pada tingkat $\mathrm{P} = 10$.

Penyelesaian:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Elastisitas Penawaran

Masalah 8

Pada saat harga Rp 50.000,00 jumlah barang yang ditawarkan 4000 unit, kemudian harga turun menjadi Rp 30.000,00 jumlah barang yang ditawarkan 3200 unit. Hitunglah besar koefisien elastisitas penawarannya !

Penyelesaian

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Elastisitas Penawaran

Elastisitas penawaran (istilahnya yang lengkap : elastisitas harga-penawaran, *price elasticity of supply*) ialah suatu koefisen yang menjelaskan besarnya pengaruh perubahan jumlah barang yang ditawarkan akibat adanya perubahan harga. Jadi merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah barang yang ditawarkan terhadap persentase perubahan harga.

Jika fungsi penawaran dinyatakan dengan $Q_s = f(p)$, maka elastisitas penawarannya:

$$e_s = \frac{\%\Delta Q_s}{\%\Delta P} = \frac{E\ Q_s}{E\ P} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta Q_s}{Q_s}\right)}{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)} = \frac{d\ Q_s}{d\ P} \cdot \frac{P}{Q_s}$$

Dimana $\frac{E\ Q_s}{E\ P}$ tak lain adalah Q'_s atau $f'(P)$

penawaran suatu barang dikatakan bersifat elastis apabila $\eta_s > 1$, elastis-uniter jika $\eta_s = 1$, dan inelastis bila $\eta_s < 1$. Barang yang penawarannya inelastisitas mengisyaratkan bahwa jika harga barang tersebut (secara searah) dengan persentase yang lebih kecil dari pada persentase perubahan harganya

CONTOH:

Fungsi penawaran suatu barang dicerminkan oleh $Q_s = -200 + 7P^2$. Berapa elastisitas penawarannya pada tingkat harga P = 10 dan P = 15

Penyelesaian:

$$Q_s = -200 + 7P^2$$

$$Q_s = -200 + 7P^2$$

$$Q'_s = \frac{dQ_s}{dP} = 14P$$

Substitusikan data dalam rumus elastisitas

$$E_s = \frac{dQ_s}{dP}.\frac{P}{Q_s} = 14P.\frac{P}{-200 + 7P^2}$$

Pada P = 10

$$E_s = 140.\frac{10}{-200 + 700} = 2{,}8$$

Pada P = 15

$$E_s = 210.\frac{15}{-200 + 1575} = 2{,}3$$

Setelah didapatkan koefisien elastisitasnya, perhatikan hasilnya. apakah penawaran bersifat elastis atau bukan? Mengapa?

Karena hasil elastisitas penawarannya adalah 2,8 dan 2,3 maka elastisitas penawarannya termasuk elastis, karena penawaran akan suatu barang dikatakan bersifat elastic apabila $\left|E_s\right| > 1$. Dengan kata lain 3> 1

$E_s = 2{,}8$ berarti bahwa apabila dari kedudukan P = 10, harga naik (turun) sebesar 1% maka jumlah barang yang ditawarkan akan bertambah (berkurang) sebanyak 2,8%.
Dan $E_s = 2{,}3$ berarti bahwa apabila dari kedudukan P = 15, harga naik (turun) sebesar 1% maka jumlah barang yang ditawarkan akan bertambah (berkurang) sebanyak 2,3%

Masalah 9

Fungsi penawaran suatu barang dicerminkan oleh $Q_s = -250 + 3P^2$. Berapa elastisitas penawarannya pada tingkat harga P = 12 dan P = 20

Penyelesaian

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Elastisitas Produksi

Masalah 10

Fungsi produksi suatu komoditi ditunjukkan oleh persamaan $P = 6X^2 - X^3$. Hitunglah elastisitas produksinya pada tingkat input sebanyak 3 unit dan 7 unit

Penyelesaian

$P' = \frac{dP}{dX} = \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

Substitusikan data dalam rumus elastisitas

$E_p = \frac{dP}{dX} \cdot \frac{X}{P} = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

Pada X $= \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$E_p = \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

Pada X $= \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$E_p = \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

Setelah didapatkan koefisien elastisitasnya, perhatikan hasilnya. apakah produksinya bersifat elastis atau bukan? Mengapa?

....

....

....

Elastisitas Produksi

Elastisitas produksi ialah suatu koefisien yang menjelaskan besarnya pengaruh perubahan jumlah output yang dihasilkan akibat adanya perubahan jumlah input yang digunakan. Jadi merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah output terhadap persentase perubahan jumlah input.

Jika P melambangkan jumlah output yang dihasilkan dan X melambangkan jumlah input yang digunakan, serta fungsi produksi dinyatakan dengan P = f (X), maka elastisitas produksinya:

$$e_p = \frac{\%\Delta P}{\%\Delta X} = \frac{EP}{EX} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)}{\left(\frac{\Delta X}{X}\right)} = \frac{dP}{dX} \cdot \frac{X}{P}$$

Dimana $\frac{dP}{dX}$ adalah marginal product (P')

1.4 Biaya Marginal

Masalah 11

Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan ditunjukkan oleh persamaan $C = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 4$. Tentukan nilai minimum biaya marginal dan pada jumlah output berapa? berapa biaya total pada output tersebut?

Penyelesaian

$$C = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 4$$

$$MC = C' = \frac{dC}{dQ} = 3Q^2 - 6Q + 4$$

Kurva biaya marginal (MC) selalu mencapai minimumnya tepat pada saat kurva biaya total (C) berada pada posisi titik beloknya.

Besarnya nilai minimum MC dapat dicari dengan (MC)' = 0 atau derevatif dari biaya marginal (MC) sama dengan nol, sehingga:

$$MC = 3Q^2 - 6Q + 4$$

$$(MC)' = \frac{d(MC)}{dQ} = 6Q - 6$$

- Sehingga dengan nilai minimum MC pada :

  (MC)' = 0

  (MC)' = $6Q - 6 = 0$

  Q = 1
- Dengan mensubstitusikan hasil Q ini kedalam persamaan MC, diperoleh minimum MC:

  $MC = 3(1)^2 - 6(1) + 4 = 1$
- Selanjutnya diperoleh titik belok kurva C dengan mensubstitusikan hasil Q adalah :

$$C = (1)^3 - 3(1)^2 + 4(1) + 4 = 6$$

Biaya marginal (*marginal cost*, MC) ialah biaya tambahan yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit tambahan output. Secara matematis, fungsi biaya marginal adalah derevatif pertama dari fungsi biaya total.

Jika fungsi biaya total dinyatakan dengan C = f(Q) dimana C adalah total cost dan Q melambangkan output, maka biaya marginalnya:

$$MC = C' = \frac{dC}{dQ}$$

Karena fungsi biaya total yang non-linear pada umumnya berbentuk fungsi kubik, fungsi biaya marginalnya akan berbentuk fungsi kuadrat

RANGKUMAN

- Elastisitas *y = f(x)* merupakan limit dari rasio antara perubahan relative dalam y terhadap perubahan relative dalam x, untuk perubahan x yang sangat kecil atau mendekati nol, dapat didefinisikan sebagai :

$$\eta = \frac{Ey}{Ex} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta y}{y}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$$

- Elastisitas permintaan merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah barang yang diminta terhadap persentase perubahan harga. Elastisitas permintaan dinyatakan dengan $Q_d = f(p)$, maka elastisitas permintaannya

$$e_d = \frac{\%\Delta Q_d}{\%\Delta P} = \frac{E\ Q_d}{E\ P} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta Q_d}{Q_d}\right)}{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)} = \frac{d\ Q_d}{d\ P} \cdot \frac{P}{Q_d}$$

- Elastisitas penawaran merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah barang yang ditawarkan terhadap persentase perubahan harga. Jika fungsi penawaran dinyatakan dengan $Q_s = f(p)$, maka elastisitas penawarannya

$$e_s = \frac{\%\Delta Q_s}{\%\Delta P} = \frac{E\ Q_s}{E\ P} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta Q_s}{Q_s}\right)}{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)} = \frac{d\ Q_s}{d\ P} \cdot \frac{P}{Q_s}$$

- Elastisitas produksi merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah output terhadap persentase perubahan jumlah input. Jika P melambangkan jumlah output yang dihasilkan dan X melambangkan jumlah input yang digunakan, serta fungsi produksi dinyatakan dengan P = *f* (X), maka elastisitas produksinya

$$e_p = \frac{\%\Delta P}{\%\Delta X} = \frac{EP}{EX} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)}{\left(\frac{\Delta X}{X}\right)} = \frac{dP}{dX} \cdot \frac{X}{P}$$

- Pada konsep elastisitas dikatakan bersifat elastic apabila $|\eta| > 1$, elastic-uniter jika $|\eta| = 1$, dan inelastic bila $|\eta| < 1$.

- Biaya marginal marginal (*marginal cost*, MC) ialah biaya tambahan yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit tambahan output. Jika fungsi biaya total dinyatakan dengan C = f(Q) dimana C adalah total cost dan Q melambangkan output, maka biaya marginalnya:

$$\boldsymbol{MC = C' = \frac{dC}{dQ}}$$

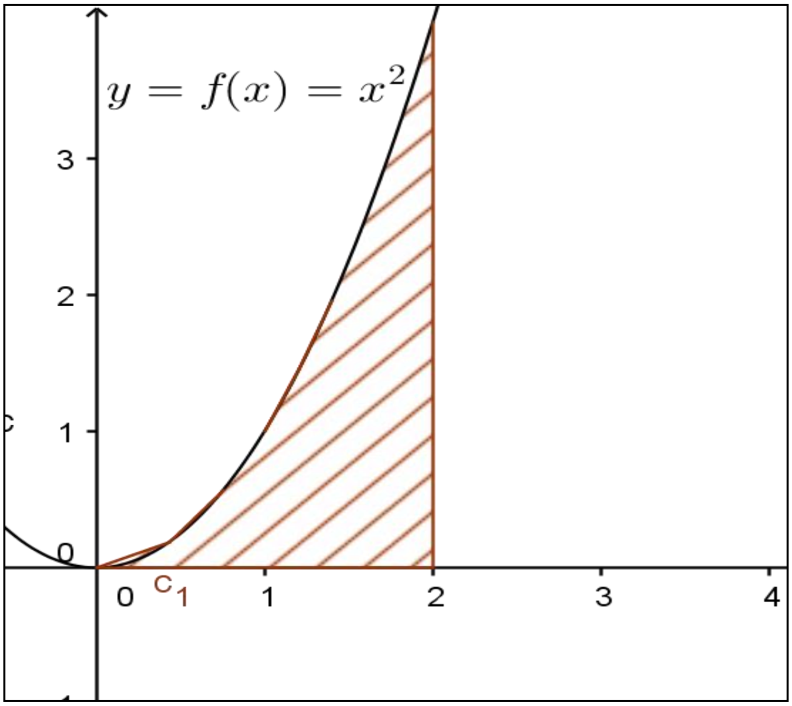
LATIHAN

1. Suatu fungsi permintaan pada perusahaan motor ditunjukkan oleh persamaan $Q_d = 3(P+3)(P-1)$. Hitunglah elastisitas permintaan pada tingkat $\mathrm{P} = 3$.
2. Fungsi penawaran suatu barang dicerminkan oleh $Q_s = \frac{2x^2-3}{3x}$. Berapa elastisitas penawarannya pada tingkat harga $\mathrm{P} = 2$
3. Fungsi produksi suatu komoditi ditunjukkan oleh persamaan $P = 12X\sqrt{6X-5}$. Hitunglah elastisitas produksinya pada tingkat input sebanyak 5 unit
4. Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan elektronik ditunjukkan oleh persamaan $C = -3Q^3 + 45Q^2 - 8Q - 700$. Tentukan nilai minimum biaya marginal dan pada jumlah output berapa? berapa biaya total pada output tersebut? Gambarkan grafiknya !
5. Suatu pabrik sepatu memproduksi x sepatu setiap harinya dengan biaya produksi $f(x) = 3x - 180 + \frac{3000}{x}$ ribu rupiah per pasang. Berapakah biaya total minimum perhari ?

II. INTEGRAL

Masalah 1.

R adalah daerah yang dibatasi oleh parabol $y = f(x) = x^2$, sumbu x, dan garis tegak $x = 2$. R merupakan daerah di bawah kurva $y = x^2$ diantara $x = 0$ dan $x = 2$. Hitunglah luas daerah R !

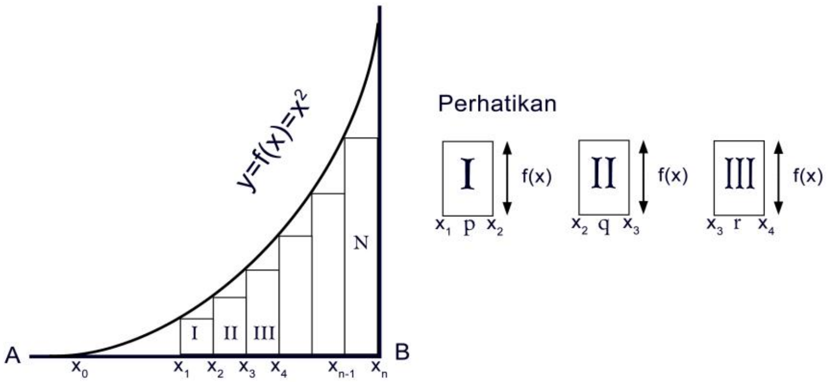


Penyelesaian

Untuk mengitung luas daerah R kita dapat partisikan R dengan selang [0,2] menjadi n selang bagian, masing-masing dengan panjang x $= \frac{2}{n}$,

memakai ttik-titik $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 2$

Gambar partisi-partisi R



Perhatikan bentuk setiap partisi ! Setiap partisi berbentuk persegi panjang .Jadi, luas daerah I adalah luas persegi panjang I dimana rumus umum persegi panjang adalah:

Dalam hal ini, panjang dan lebar persegi panjang adalah alas dan tingginya.

L_I = tinggi x alas = $f(x_1)$. p = …… x …… = …… x ……

L_{II} = tinggi x alas = $f(x_2)$. q = …… x …… = …… x ……

L_{III} = ………………………………………………………………………………

.

.

Luas = panjang x lebar

.

L_N = ………………………………………………………………………………

Luas daerah R = ……. + ………. + …………. + ……… + ………

= ………………………………………………………………

= ………………………………………………………………

= ………………………………………………………………

= ………………………………………………………………

Perhatikan !

$x_2 - x_1 = \Delta x$; $x_3 - x_2 = \Delta x$ dan seterusnya.

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Jadi, $\left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_n) \right) . \Delta x$ = …… x ……

Ingat pula ! $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Untuk mencari hasil akhir gunakan rumus $\lim_{n\to\infty}(luas\ R)$!

Luas daerah R = = $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) . \Delta x$

Substitusikan nilai x = $\frac{2}{n}$, $f(x) = x^2$ maka $f(x_i) = {x_i}^2 = \left(\frac{2i}{n}\right)^2$

dan $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$ hingga diperoleh:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) . \Delta x = \sum_{i=1}^{n} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .$$

= ……………………………………………………………

= ……………………………………………………………

= ……………………………………………………………

Gunakan rumus limit mendekati tak hingga

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,.\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$= \lim_{n\to\infty} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$

= ……………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………

Masalah 2

P adalah sebuah daerah yang dibatasi oleh $y = f(x) = x + 2$, antara $x = 0$ dan $x = 3$! Gambarlah grafik tersebut ! Gambarkan pula partisi-partisinya kemudian tentukan luas daerah P !

Penyelesaian

F(x) merupakan fungsi linear, maka untuk menggambar grafiknya mengikuti langkah-langkah menggambar fungsi linear. Sedangkan untuk menggambar partisi-partisi daerah P dan mencari luasnya.

- Gambar grafik dengan langkah sebagai berikut:

  Titik potong x = ...

  Titik potong y = ...

  Titik bantu

X	1	2	3	4
Y				

- isikan P menjadi selang [0,3] menjadi n selang bagian, masing-masing dengan panjang $x = \frac{3}{n}$, memakai ttik-titik $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 3$

- Gunakan rumus sigma dan rumus barisan dan deret aritmetika !

$$\sum_{i=1}^{n} a = a\,.\,n\,; a = konstanta$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = S_n$$

a = ……   b = ……

U_n= ………………………. = …………………………. = …………..

S_n= ………………………. = …………………………. = …………..

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Luas daerah P = ………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

2.1 Definisi Integral

Integral adalah suatu konsep yang digunakan dalam proses pencarian luas sebuah daerah yang terletak di antara kurva y = f(x) dan sumbu x dalam suatu rentangan wilayah yang dibatasi oleh selang x = a dan x = b atau [a,b].

Jika nilai a dan b diketahui atau sudah tertentu maka disebut **Integral Terntetu.** Dan jika nilai a dan b belum diketahui maka disebut **Integral Tak Tentu.**

Integral Tertentu :

$$\int_a^b f(x)dx = [F\ (x)]_a^b = F(b) - \ F(a)$$

Integral Tertentu :

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ ; n \neq 1$$

$$C\ =\ konstanta$$

Contoh

Tentukan luas sebuah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = (x+2)^2$ dan sumbu x !

Tentukan pula luasnya jika daerah tersebut berada antara x = 0 dan x = 3 !

Penyelesaian

Berdasarkan definisi 1.1 dapat diketahui bahwa untuk mencari luas sebuah daerah yang dibatasi oleh kurva y=f(x) adalah dengan menggunakan konsep integral. Maka, untuk mencari luas daerah tersebut adalah dengan mengintegralkan $y = f(x) = (x+2)^2$.

a. Luas $= \int f(x)dx$

$$= \int (x+2)^2\, dx$$

$$= \int x^2 + 4x + 4\, dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + C$$

b. $a = 0, b = 3$

Luas $= \int_a^b f(x)dx$

$$= \int_0^3 (x+2)^2\, dx$$

$$= \int_0^3 x^2 + 4x + 4\ \ dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x\right]_0^3$$

$$= \left[\frac{1}{3}(3)^3 + 2(3)^2 + 4(3)\right] - \left[\frac{1}{3}(0)^3 + 2(0)^2 + 4(0)\right]$$

$= 39$ -0

$= 39$ satuan luas

Jadi, luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x) = (x+2)^2$ adalah $\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + C$ dan luas daerah tersebut dengan selang [0,3] adalah 39 satuan luas.

2.2 Kaidah Integral

Integrak Tak Tentu :

- $\int u^n \, dx = \frac{1}{n+1} u^{n+1} . \frac{1}{u'} + C, dimana\; u = f(x)$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int e^u du = e^u + C$
- $\int \{f(x) + g(x)\} \, dx = \int f(x)dx + g(x)dx = f(x) + g(x) + C$
- $\int nf(x)dx = n \int f(x)dx$

Integral Tertentu :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b k\, f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Contoh

Tentukan luas sebuah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x}$, sumbu x diantara x = 1 dan x = 2 !

Berdasarkan definisi 1.1 , luas daerah yang dibatasi kurva y=f(x) dapat dicari dengan konsep integral. Jadi rumus yang digunakan adalah integral dari f(x) dengan batas 1 sampai 2.

Luas = $\int_a^b f(x)dx$

$$= \int_1^2 \frac{x^3 + 2x^2 - 4}{x}$$

$$= \int_1^2 x^2 + 2x - \frac{4}{x}\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4\ln x\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{1}{3}(2)^3 + (2)^2 - 4\ln 2\right] - \left[\frac{1}{3}(1)^3 + (1)^2 - 4\ln 1\right]$$

$$= \frac{8}{3} + 4 - 4\ln 2 - \frac{1}{3} - 1 + 4\ln 1$$

$$= \frac{16}{3} + 4\ln 1 - 4\ln 2$$

$$= \frac{16}{3} + 4(\ln 1 - \ln 2) = \frac{16}{3} + 4\ln\frac{1}{2}$$

Masalah 3

A adalah sebuah daerah yang berada di bawah kurva $y = 2x(x^2+1)^3$ antara x = -1 dan x = 2. Tentukan luas daerah A !

Penyelesaian

Apakah soal tersebut dapat diintegralkan secara langsung ? jika tidak maka kita harus mencari hubungan antara u(x) dan g(x).

Luas A = $\int_a^b f(x)\ dx$

$$= \int_{-1}^{2} 2x(x^2+1)^3\, dx$$

Karena kita tidak bisa mengintegralkan f(x) secara langsung maka,

u(x) = $x^2 + 1$

$\frac{du}{dx}$ = ……………………

dx = …………………

adakah hubungan antara u’ $\left(\frac{du}{dx}\right)$ dengan g(x) ?

Apakah nilai keduanya sama ? jika iya maka soal di atas menjadi

$$\int_{-1}^{2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$$

Selanjutnya cari luas A dengan menggunakan kaidah integral !

Luas A =………………………………………………………………………………

= …………………………………………………………………………………

= …………………………………………………………………………………

= …………………………………………………………………………………

LATIHAN

1. Hitunglah $\int_2^5 (3x^2 - 4x)(x^3 - 2x^2)^3$!
2. Andaikan $\int_0^1 f(x)\, d(x) = 2,\ \int_1^2 f(x)\, d(x) = 3,$ $\int_0^1 g(x)\, d(x) = -1,$ dan $\int_1^2 g(x)\, d(x) = 4.$ Tentukan nilai dari :
   a. $\int_0^2 (2f(x) - 3g(x))\, d(x)$
   b. $\int_0^1 (2f(x) + 3g(x) - 4)\, d(x)$
   c. $\int_1^2 f(x) + \int_2^0 f(x)\, d(x)$
3. Diberikan fungsi:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, jika\ 0 \leq x \leq 2 \\ x, jika\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Tentukan nilai dari $\int_0^4 f(x)\, d(x).$!

2.3 Integral Substitusi

Teknik integral substitusi adalah teknik yang digunakan untuk mencari integral dari perkalian fungsi-fungsi dan salah satu fungsi tersebut adalah turunan dari fungsi yang lainnya.

Rumus integral substitusi pada Integral Tak Tentu

$$\int f\big(g(x)\big)\,.\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C$$

Rumus integral substitusi pada Integral Tertentu

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Contoh

Tentukan luas sebuah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 6x(x^2 - 3)^3$, sumbu x diantara x = 1 dan x = 3 !

Penyelesaian

Luas = $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$

$$= \int_1^3 6x(x^2 - 3)^3\, dx$$

Missal u = $x^2 - 3$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

Luas = $\int_1^3 6x(x^2 - 3)^3\, dx$

$$= \int_1^3 6x\, u^3 \frac{du}{2x}$$

$$= \int_1^3 3u^2\, du$$

$$= [u^4]_1^3 = [x^2 - 3]_1^3$$

$$= [(3)^2 - 3] - [(1)^2 - 3] = 6 + 2 = 8$$

Masalah 4

K adalah sebuah daerah dibawah kurva $y = x\,(2x+1)^3$ untuk $0 \leq x \leq 2$. Tentukan luas daerah K !

Penyelesaian

Luas daerah K = $\int_a^b y\,dx$

$$= \int_0^2 x\,(2x+1)^3\,dx$$

Pada soal tersebut, y terdiri dari perkalian dua fungsi , yaitu fungsi $f(x) = x$ dan $g(x) = (2x+1)^3$, tapi apakah soal di atas dapat dikerjakan dengan integral substitusi ? ....

Mengapa ? ....

Jika soal diatas tidak bisa dikerjakan dengan substitusi maka kita perlu mengubahnya ke bentuk lain agar dapat diintegralkan.

Misalkan x = u dan $(2x+1)^3 dx$ = dv

$\frac{du}{dx}$ = ... v = $\int dv$

Selanjutnya gunakan rumus $\int u\, dv = u \,.\, v - \int v\, du$

Dari soal di atas maka dapat kita peroleh

$\int x\,(2x+1)^3\, dx =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

Luas K $= \int_0^2 x\,(2x+1)^3\, dx$

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

LATIHAN

1. Hitunglah nilai dari $\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2} d(x)$!

2. Tentukanlah:

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{t^4+9}}\, dx$$

3. Hitunglah $\int \frac{y^3-1}{(y^3-3y)^2}\, dx$!

4. Tentukan nilai dari $\int_0^1 x^2(x^3+5)^9\, dx$!

5. Hitung nilai dari $\int_1^2 \frac{(\sqrt{t}+4)^3}{\sqrt{t}} dt$!

2.4 Integral Parsial

Teknik integral parsial adalah teknik yang mengubah integral perkalian fungsi menjadi bentuk lain yang lebih sederhana jika salah satu fungsi tersebut bukan turunan dari fungsi lainnya, atau tidak dapat diselesaikan dengan integral substitusi.

Rumus Integral Parsial

$$\boxed{\int u\,dv = u\,v - \int v\,du}$$

Contoh

P adalah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x\sqrt{1+x}$ dan sumbu x. Carilah luas daerah P !

Penyelesaian !

Diketahui bahwa y merupakan perkalian dari dua fungsi, dan salah satu fungsinya bukan turunan dari fungsi yang lainnya jadi tidak dapat diselesaikan dengan integral substitusi.

Luas daerah P = $\int x\sqrt{1+x}\ dx = \int x(1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$$u = x \qquad\qquad dv = (1+x)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$du = dx \qquad\qquad v = \int (1+x)^{\frac{1}{2}}dx = \tfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}.\ 1 = \tfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}$$

$$\int x(1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

$$= x\,.\left(\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right) - \int \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\,.\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x\,(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\,.\,\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}x\,(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C$$

Latihan

1. Tentukan luas sebuah daerah dibawah kurva $y = \frac{x-1}{x+1}$!
2. Hitung jarak keseluruhan sebuah benda yang bergerak dengan kecepatan pada saat t adalah $v(t) = 3t^2 - 24t + 36$ kaki per detik untuk $-1 \leq t \leq 9$!
3. Hitung luas daerah yang dibatasi kurva $y = \frac{x^2}{(9-x^3)^{\frac{3}{2}}}$ pada selang [0,2] !
4. M adalah sebuah daerah yang dibatasi oleh sebuah kurva $y = f(x) = x\sqrt{5 - x^2}$ dan sumbu x untuk $1 \leq x \leq 2$!
5. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = (x - 2)\sqrt{x}$!

Rangkuman

1. Integral adalah suatu konsep yang digunakan dalam proses pencarian luas sebuah daerah yang terletak di antara kurva y = f(x) dan sumbu x dalam suatu rentangan wilayah yang dibatasi oleh selang x = a dan x = b atau [a,b].

2. Bentuk umum integral tak tentu

$$\int f(x)\, dx = F\ (x) + C$$

   Dimana C = konstanta

3. Bentuk umum integral tertentu

$$\int_a^b f(x)dx = [F\ (x)]_a^b = F(b) - \ F(a)$$

4. Kaidah-kaidah integral tak tentu
   - $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ ; n \neq 1$
   - $\int \frac{1}{x} dx\ = \ln x + C$
   - $\int e^x dx = e^x + C$
   - $\int e^u du = e^u + C$
   - $\int \{f(x) + g(x)\}\, dx = \int f(x)dx + g(x)dx = f(x) + g(x) + C$
   - $\int nf(x)dx = n\ \int f(x)dx$

5. Kaidah-kaidah integral tertentu
   - $\int_a^a f(x)dx = 0$
   - $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
   - $\int_a^b k\, f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
   - $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
   - $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$
6. Integral substitusi adalah rumus yang digunakan untuk mencari integral dari perkalian fungsi-fungsi dan salah satu fungsi tersebut adalah turunan dari fungsi yang lainnya.

$$\int f\big(g(x)\big)\,.\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C$$

7. Integral parsial adalah rumus yang mengubah integral perkalian fungsi menjadi bentuk lain yang lebih sederhana jika salah satu fungsi tersebut bukan turunan dari fungsi lainnya, atau tidak dapat diselesaikan dengan integral substitusi.

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

LATIHAN

1. Sebuah daerah R dibatasi oleh kurva $y = \frac{1}{x^2 - 4}$. Tentukan luas daerah dibawah kurva tersebut !

2. Sebuah benda bergerak disepanjang suatu garis lurus sedemikian rupa sehingga kecepatannya pada saat t adalah $v(t) = \frac{t}{(t^2 + 9)^2}$ kaki per detik. Carilah jarak keseluruhan yang ditempuh benda itu untuk $-1 \leq t \leq 3$!

3. Tentukan luas daerah dibawah kurva $y = f(x) = (x + 1)\sqrt{x^2 + 2x - 1}$ untuk $1 \leq x \leq 3$!

4. M adalah sebuah daerah yang dibatasi oleh sebuah kurva $y = f(x) = x\sqrt{3 + x}$ dan sumbu x antara $x = 1$ dan $x = 6$!

5. Carilah luas sebuah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2\sqrt{1 - x}$ untuk $0 \leq x \leq 1$!

APLIKASI INTEGRAL DALAM BIDANG EKONOMI

Selain dalam proses pencarian luas sebuah daerah, konsep integral juga memiliki penerapan dalam bidang ekonomi. Penerapan ekonomi konsep integral adalah Surplus Konsumen dan Surplus Produsen.

Masalah 5

Andi ingin membeli sebuah laptop dengan merk “A”. Andi mendapat informasi dari temannya bahwa harga laptop tersebut adalah Rp 3. 000.000,00. Ternyata, saat Andi pergi ke toko B, harga laptop yang Andi inginkan di toko tersebut adalah Rp 2.800.000,00.

Masalah 6

Bono berencana membeli sebuah sepeda motor di sebuah showroom. Berdasarkan katalog minggu lalu, harga sepeda motor yang diinginkan Bono adalah Rp 17.500.000,00 dan ia pun sudah menyiapkan uangnya untuk membeli sepeda motor tersebut. Namun saat Bono datang ke showroom tersebut, ternyata harga sepeda motor yang Bono inginkan berubah menjadi Rp 17.000.000,00.

- Dari masalah 1 diketahui bahwa harga yang bersedia dibayar oleh Andi adalah ………… dan harga pasarnya adalah ……………………… sehingga selisih harganya adalah ……………………….
- Dari masalah 2 diketahui bahwa harga yang bersedia dibayar oleh Bono adalah ……………… dan harga pasarnya adalah ……………………… sehingga selisih harganya adalah ………………

Berdasarkan uraian 1 dan 2, kita dapat mengetahui bahwa Andi dan Bono memperoleh keuntungan karena mereka membayar barang yang mereka beli dan harga yang lebih murah dari yang mereka perkirakan. Keuntungan inilah yang disebut dengan surplus konsumen

Jadi, surplus konsumen adalah ……………………………………………………

……

……

……

……

……

……

2.5 Surplus Konsumen

Surplus konsumen (*Consumers' surplus*) adalah selisih antara jumlah harga yang bersedia dibayar oleh konsumen untuk barang dan jasa dengan harga pasar yang sebenarnya.

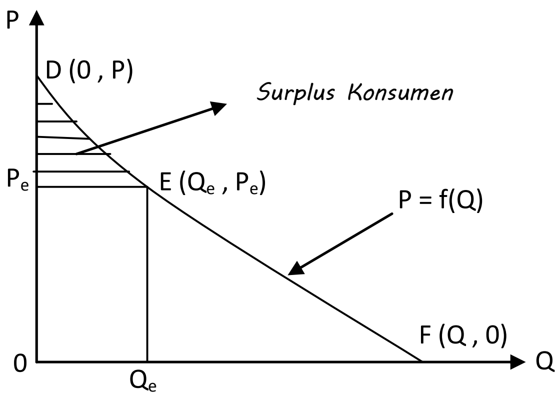
Jika fungsi permintaan P = f(Q) adalah jumlah suatu barang yang akan dibeli oleh konsumen dengan harga tertentu dan tingkat harga pasar adalah P_e maka besarnya surplus konsumennya adalah: $Cs = \int_0^{Q_e} f(Q)\, dQ - Q_e P_e$

Dan jika fungsi permintaannya dalam bentuk Q = f(P) maka besar surplus konsumennya adalah: $Cs = \int_{P_e}^{\hat{p}} f(P)\, dP$

Jadi besar surplus konsumen adalah

$$\boldsymbol{Cs = \int_0^{Q_e} f(Q)\, dQ - Q_e P_e = \int_{P_e}^{\hat{p}} f(P)\, dP}$$

Surplus konsumen ditunjukkan oleh grafik dibawah ini:



Contoh

Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan Q= 48 – 0,03P^2. Hitunglah surplus konsumen jika tingkat harga pasar adalah 30 !

Penyelesaian

Q = 48 – 0,03P^2

Jika P = 0, maka Q = 48

Jika P = P_e = 30, maka Q = Qe = 21

Surplus Konsumen

$$\int_{P_e}^{\hat{P}} f(P)\, dP = \int_{30}^{40} (48 - 0{,}03\ \mathrm{P}^2)\ dP$$

$$= \ [48P - \ 0{,}06P^3]_{30}^{40}$$

= [48(40) – 0,01 (40)^3] - [48(30) - 0,01(30)^3]

= (1920 – 640) – (1440 – 270)

= 110

Masalah 7

Diketahui fungsi permintaan $P = 30 - Q$ dan fungsi penawaran $P = \frac{1}{2}Q^2 \frac{1}{2}Q + 3$. Hitung surplus konsumen pada saat terjadi keseimbangan pasar !

Penyelesaian

Diketahui fungsi permintaan dan fungsi penawaran, maka sebelum mencari surplus konsumenny harus mencari harga dan jumlah keseimbangannya terlebih dahulu. Setelah diketahui harga dan jumlah keseimbangan maka selanjutnya mencari surplus konsumen.

Untuk memastikan tidak adanya kesalahan dalam menghitung surplus konsumen maka gunakan dua rumus yang telah diketahui sebelumnya.

Keseimbangan pasar

$P_d = P_s$

…………………… = ……………………

……………………………………………….

……………………………………………….

$Q_e =$ ………………

$P_e =$ ……………………………………………………

$P_d =$ …………………… $Q_d =$ ……………………..

Jika $P = 0$, $Q =$………………………………

Jika $Q = 0$, $P \equiv \hat{P} =$ ………………………..

Cara pertama

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

Cara Kedua

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

Masalah 8

Amir pergi ke pasar hewan untuk menjual sapi yang ia miliki dengan harga Rp 8.000.000,00. Ternyata ada seorang pembeli yang ingin membeli sapi Amir. Setelah terjadi proses tawar menawar akhirnya pembeli tersebut membeli sapi Amir dengan harga Rp 8.300.000,00. Berapakah selisih harganya ?

Masalah 9

Ina memiliki sebuah toko sepatu. Seorang pembeli ingin membeli sepasang sepatu merk A. Harga minimum yang direncanakan Ina untuk sepasang sepatu tersebut adalah Rp 150.000,00. Namun, pembeli itu bersedia membeli sepasang sepatu tersebut dengan harga Rp 165.000,00. Berapakah selisih harganya ?

- Dari masalah 8 diketahui bahwa harga minimum yang direncanakan Amir adalah …………………………… dan harga yang amir terima adalah ……………………… sehingga selisih harganya adalah …………………………

- Dari masalah 9 diketahui bahwa harga minimum yang direncanakan Ina adalah …………………………… dan harga yang Ina adalah ……………………… sehingga selisih harganya adalah …………………………

Berdasarkan masalah 8 dan 9, kita dapat mengetahui Amir dan Ina memperoleh keuntungan karena mereka bisa menjual barang dengan harga yang lebih tinggi dari harga minimum yang direncanakan. Keuntungan inilah yang disebut dengan surplus produsen.

Jadi, surplus produsen adalah

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2.6 Surplus Produsen

Surplus produsen (*Producers' surplus*) adalah selisih antara jumlah harga minimum yang direncanakan atau disediakan oleh produsen dengan harga yang sebenarnya ia terima.

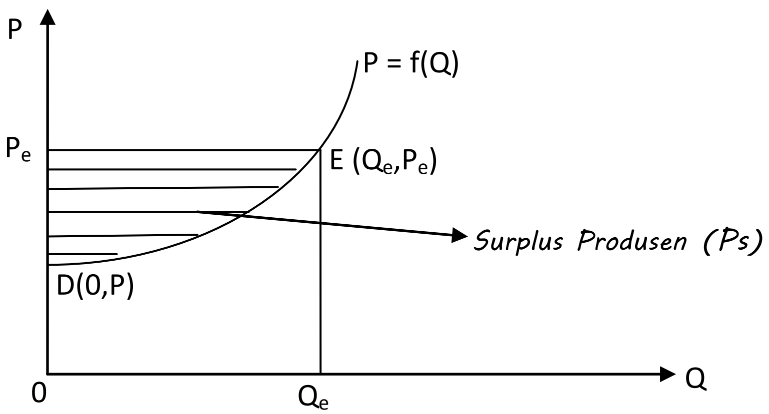
Jika fungsi penawaran P = f(Q) adalah jumlah suatu barang yang akan dijual oleh produsen dengan harga tertentu dan P_e adalah tingkat harga pasar yang sebenarnya maka besarnya surplus produsen adalah: $Ps = Q_eP_e - \int_0^{Q_e} f(Q)\, dQ$

Dan jika fungsi penawarannya dalam bentuk Q = f(P) maka besar surplus produsen adalah: $Ps = \int_{\hat{P}}^{P_e} f(P)\, dP$

Jadi besar surplus produsen adalah

$$\boxed{\boldsymbol{Ps = Q_eP_e - \int_0^{Q_e} f(Q)\, dQ = \int_{\hat{P}}^{P_e} f(P)\, dP}}$$

Berikut grafik surplus produsen :



Contoh

Seorang produsen memiliki fungsi penawaran suatu barang P = 0,50Q+3. Berapakah surplus produsen bila tingkat harga keseimbangan di pasar adalah 10 ?

Penyelesaian

$Ps = Q_e P_e - \int_0^{Q_e} f(Q)\, dQ$ atau $Ps = \int_{\hat{P}}^{P_e} f(P)\, dP$

P = 0,5QQ + 3

Q = -6 + 2P

Jika Q = 0, P = 3 $\equiv \hat{P}$

$P_e = 10$ $Q_e = -6 + 2\ (10) = 14$

Cara Pertama

$$Ps = Q_e P_e - \int_0^{Q_e} f(Q)\, dQ$$

$$= (14)(10) - \int_0^{14} (0{,}05Q + 3) dQ$$

$$= (140) – (0{,}25Q^2 + 3Q)_0^{14}$$

$$= 140 – (10{,}35 . 14^2 + 3. 14) – 0$$

$$= 140 – 91 = 49$$

Cara Kedua

Surplus Produsen

$$Ps = \int_{\hat{P}}^{P_e} f(P)\ dP$$

$$= \int_{3}^{10} (-6 + 2\mathrm{P})\ \mathrm{dP}$$

$$= [-6P + P^2]_3^{10}$$

$$= [-6(10) + (10)^2] - [-6(3) + (3)^2]$$

= 40 – (-9)

=49

Setelah menggunakan dua rumus, ternyata perhitungan di atas menghasilkan nilai yang sama. Jadi, surplus produsen pada fungsi penawaran P = 0,25Q + 7 dan harga pasar sebesar 10 adalah 49

Masalah 6

Jumlah permintaan pada saat harga ditawarkan Rp 1300,- adalah 80 unit, dengan adanya pertambahan permintaan menjadi 100 unit, selanjutnya produsen berusaha untuk menaikkan harga menjadi Rp 1500,-. Tentukan Surplus Produsennya saat harga keseimbangannya adalah Rp 1000,- !

Penyelesaian

Setelah diketahui fungsi penawarannya, kita dapat mencari surplus produsen

$$\frac{P - P_2}{Q - Q_2} = \frac{P_1 - P_2}{Q_1 - Q_2}$$

$$\frac{P - \ldots\ldots\ldots}{Q - \ldots\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots\ldots - \cdots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots - \cdots\ldots\ldots}$$

$$\frac{P - \ldots\ldots\ldots}{Q - \ldots\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$$

…………………………… = ……………………………

…………………………… = ……………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

P = …………………………………..

Q = …………………………………..

Jika Q = 0, $P \equiv \hat{P}$ = …………………

P_e = …………

maka Q_e = ……………………………………………………………………..

Cara Pertama

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Cara Kedua

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Rangkuman

1. Surplus konsumen (Consumers' surplus) adalah selisih antara jumlah harga yang bersedia dibayar oleh konsumen untuk barang dan jasa dengan harga pasar yang sebenarnya.

   Rumus surplus konsumen dengan fungsi permintaan $P = f(Q)$ adalah:

$$Cs = \int_{0}^{Q_e} f(Q)\,dQ - Q_e P_e$$

   Rumus surplus konsumen dengan fungsi permintaan $Q = f(P)$ adalah:

$$Cs = \int_{P_e}^{\hat{P}} f(P)\,dP$$

2. Surplus produsen (Producers' surplus) adalah selisih antara jumlah harga minimum yang direncanakan atau disediakan oleh produsen dengan harga yang sebenarnya ia terima.

   Rumus surplus produsen dengan fungsi permintaan $P = f(Q)$ adalah:

$$Ps = Q_e P_e - \int_{0}^{Q_e} f(Q)\,dQ$$

   Rumus surplus konsumen dengan fungsi permintaan $Q = f(P)$ adalah:

$$Ps = \int_{\hat{P}}^{P_e} f(P)\,dP$$

LATIHAN

1. Hitunglah surplus konsumen dengan dua macam cara untuk fungsi permintaan $Q = 40 - 2P$ pada tingkat harga pasar 10 !
2. Penawaran dan permintaan akan suatu barang di pasar masing-masing ditunjukkan oleh $Q = -30 + 5P$ dan $Q = 60 - 4P$. Hitunglah masing-masing surplus yang diperoleh oleh konsumen dan produsen !
3. Hitunglah surplus konsumen menggunakan dua cara jika diketahui fungsi permintaannya adalah $P = 14 - \frac{1}{3}Q$ dan harga pasarnya adalah 10 !
4. Suatu produk ditawarkan sebanyak 400 unit saat harganya Rp 2.000.000,00. Tetapi saat harga produk tersebut naik menjadi Rp 2.240.000,00, produk itu ditawarkan sebanyak 640 unit. Hitunglah besar surplus produsen saat harga pasar Rp 2.100.000,00 !
5. Diketahui fungsi permintaan dan penawaran suatu barang adalah $P_d = 10 - \frac{1}{2}Q$ dan $P_s = 4 + 0{,}5Q$. Tentukan surplus konsumen dan surplus produsen pada saat keseimbangan pasar !

DAFTAR PUSTAKA

Assauri, Sofjan. 2012. Matematika Ekonomi. Jakarta. Raja Grafindo Persada.

Dumairy.1988.*Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi.* Yogyakarta: BPFE

Gazali, Wikaria., Soedadyatmojo.2007.*Kalkulus*.Yogyakarta: Graha Ilmu

Purcell, Edwin J. dan Dale Varberg.2002.*Kalkulus dan Geometri Analisis Jilid 1*.Jakarta: Erlangga.

Supangat, Andi.2009.*Matematika untuk Ekonomi dan Bisnis.*Jakarta: Kencana