INDICE

1. **INTRODUCCIÓN**
   BREVE HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ARQUITECTURA HASTA NUESTRO DIAS

2. **ESPACIO GEOMÉTRICO Y ARQUITECTÓNICO**

3. **LA GEOMETRÍA DE LA ARQUITECTURA**

4. **LA SIMETRÍA Y LA ARQUITECTURA**

   4.1 Movimientos en el plano

   4.2 Grupo de simetría de una figura plana

   4.3 Grupos de simetría de Leonardo

   4.4 Grupos de simetrías de los frisos

   4.5 Grupos de simetría en el plano

   4.6 Teoría de mosaicos

   4.7 Arabescos de la Alhambra de Granada

   4.8 Mosaicos de Escher

5. **PROPORCIÓN**

   5.1 El problema armónico

   5.2 La proporción del rectángulo

      5.2.1 Proporciones conmensurables o estáticas

      5.2.2 Proporciones inconmensurables o dinámicas

6. **LA SECCIÓN AÚREA**

   6.1 Construcción geométrica de la sección aúrea

   6.2 La sección aúrea en los polígonos

   6.3 Semejanzas y espirales

7. **EL MODULOR**

8. **BIBLIOGRAFÍA**

LAS MATEMATICAS Y LA ARQUITECTURA

1. INTRODUCCIÓN. BREVE HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ARQUITECTURA HASTA NUESTROS DÍAS

No es mi intención desarrollar aquí, ni siquiera de forma esquemática, un compendio de Historia de la Matemática, ni profundizar en todos sus conceptos, sino que me limitaré a apuntar algunos datos relacionados con la materia propia de este trabajo, **"las matemáticas y la arquitectura".**

La **arquitectura** se revela como una de las más complejas actividades de síntesis del pensamiento humano; opera en el espacio mediante la construcción y su fin último es dotar al hombre de un escenario para su vida. Es una disciplina autónoma, integradora, con un lenguaje propio en el que se barajan el Arte, la Ciencia, el Humanismo, la Tecnología...

Hay un paralelismo innegable entre las concepciones matemáticas y el pensamiento arquitectónico: la geometría euclidiana, configurando el ser sensible según dimensiones mensurables y precisas, acompaña a la sensibilidad griega. Si **Leibniz** no hubiera trabajado en el Cálculo Integral y no se hubiera desarrollado la Geometría Descriptiva, **Guarini** no hubiera podido construir la cúpula de San Lorenzo en Turín. Sin la cuarta dimensión del cubismo, surgida de la revolución de la física contra la concepción absoluta de **Newton** y de la convergencia declarada por la ciencia moderna de las entidades espacio y tiempo, junto con la contribución de **Einstein** al concepto de simultaneidad, no habría tenido **Le Corbusier** la idea de igualar las cuatro fachadas de la Ville Savoie, rompiendo la distinción entre fachada principal, laterales y posterior, implícita en la representación en perspectiva, donde el punto de vista establece una jerarquía...

Por ello es evidente que la arquitectura se verá beneficiada de cada paso que da el hombre en el progreso científico, como bagaje común de la sociedad, y así cada etapa de la civilización posee su propia arquitectura y utiliza unos medios materiales específicos para llevar a cabo sus realizaciones, por lo que la Historia de la Arquitectura es tan antigua como la de la humanidad misma, desde el punto de vista en que ésta abandonó los refugios naturales y preparó o construyó refugios artificiales para protegerse del entorno.

En las civilizaciones orientales existe el sabio, el hombre "que sabe", el hombre que conoce los secretos de la divinidad y, como depositario de ellos, actúa de mago, taumaturgo, poeta... De las prácticas de los agrimensores del antiguo Egipto nación la geometría mediterránea**. Demócrito de Abdera** se jacta de "no haber encontrado a nadie que lo supere en el arte de trazar líneas en las figuras y demostrar sus propiedades... ni aún entre los agrimensores egipcios". Entre los sumerios y los propios egipcios se dan también los primeros sistemas de numeración escrita, encontrados en papiros o tablillas, de los que hoy conservamos el sistema sexagesimal de medida de ángulos y del tiempo. En Mesopotamia aparece además un cierto matiz abstracto, lo que podíamos llamar precedente del Álgebra, en el tratamiento de adivinanzas y recreaciones matamáticas, que incluyen casos de proporcionalidad, regla de tres y progresoines aritméticas y geométricas, que en el caso egipcio adoptan una forma más aritmética.

En Egipto se conocían ya casos particulares del Teorema de Pitágoras (el 3-4-5). Debido a la importancia religiosa que atribuían a la orientación de sus tumbas y templos, recurrieron a un "círculo de orientación", trazado sobre el mismo terreno, en el que marcaban la sombra de alcance mínimo de un mástil colocado en su centro. Con una cuerda dividida por medio de nudos en 3 + 4 + 5 = 12 segmentos iguales, trazaban una perpendicular rigurosa a esta línea que les daba exactamente la dirección Este-Oeste.

Por otra parte el investigador **Moessel** observó que el círculo director se dividía, para el trazado de planos, tanto de planta como de alzados, en diversas combinaciones o bien de la segmentación natural astronómica (4, 8, 16 partes), o bien en otra más sutil (5 o 10 partes), de manera que las distintas variaciones sugeridas por los puntos y líneas así obtenidas suministraban la armazón del plano, mediante la inscripción en uno o varios círculos directores de polígonos regulares. Incluso se encuentran en determinados casos dos círculos directores concéntricos, el mayor de los cuales, que corresponde al trazado exterior del edificio, esta dividido en 8 o 16 partes, mientras el correspondiente al núcleo se divide en 5 o 10 segmentos. El trazado vertical está regido por el método pentagonal, pero en uno de sus elementos lineales está suministrado por el círculo exterior, lo que crea un en lace orgánico entre los dos temas. La segmentación relacionada con elementos rectangulares o hexagonales se ha venido llamando estética, mientras que la que hace intervenir relaciones pentagonales se denomina dinámica.

En los diversos cánones sugeridos para descifrar la compleja geometría de la arquitectura egipcia, y más tarde la griega e incluso la gótica, aparece, según **Matila C. Ghyka**, un hecho relevante: el empleo de superficies de un número de encuadramientos rectangulares cuya razón entre los lados o módulo **(a/b)** no es ya un número racional, sino números irracionales, "conmensurables en potencia", que aparecieron en cuanto se trató de intercalar una media geométrica entre dos puntos. La Cámara del Rey en la Gran Pirámide de Kéops tiene por base un doble cuadrado, y por altura la mitad de la longitud de la base, lo que significa una proporcionalidad respecto a las magnitudes 4, $\sqrt{5}$ y 2, es decir la presencia de un irracional.

La partición asimétrica más sencilla de un segmento en dos partes a y b viene dada por la proporción "**a + b** es a **a**, como **a** es a **b**", lo que nos da un valor para el módulo **a/b** = $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$= 1,618....

Esta razón aparece en todas las figuras pentagonales y en los poliedros formados con caras poligonales de cinco, diez, etc. lados, por lo que todo trazado, toda proyección que represente esos cuerpos, requiere la partición inicial según esa sección, denominada por **Leonardo da Vinci sección aúrea**. **Kepler** cita como segunda joya de la Geometría la sección aúrea (la primera es el Teorema de Pitágoras). Los sistemas vitales de materia organizada, el crecimiento de los seres vivos, que actúa de dentro a fuera, por impulso de turgencia, no de aglutinación, tiende a producir formas homotéticas con base en la proporción asimétrica de la razón aúrea (disposición folicular, composición pentameral en las flores, así como en las proporciones del cuerpo humano), mientras la materia inerte, los sistemas cristalinos, se ordenan en sistemas de tipo cúbico o hexagonal.

La civilización griega crea un tipo nuevo de personalidad: el pensador, el hombre "que piensa", que tiene ideas propias o sabe imprimir un sello personal a los conocimientos que adquiere de otros. Ese ser "pensador", suplanta al "sabedor de cosas", encuentra el camino de la demostración para asegurar la viabilidad de un sistema, cuyos miembros se encadenan de manera lógica, e inventa la Episteme, la Ciencia tal y como hoy la concebimos.

No obstante, esta ciencia, y en particular la "ciencia por excelencia", la Matemática, está intrínsecamente unida a lo mágico, a lo esotérico, al secretismo y al mito, cuya muestra más genuina se dan en la escuela pitagórica. Trata de la mística del número que se entremezcla tanto con la Metafícia de la armonía del gran todo, como con la música y la euritmia en general. El concepto matemático director de esta síntesis es la analogía o proporción, la equivalencia o concordancia de dos o más relaciones, la conmensurabilidad del todo y sus partes: la proporción geométrica, en suma. Esta concordancia, esta simetría (en un sentido completamente distinto al que nosotros damos al término), se da en forma perfecta en el cuerpo humano y resulta del vínculo que, mediante el prototipo de medida común o módulo, une los distintos elementos entre sí y con el todo.

Esta concepción de la armonía pitagórica llega a **Platón**, quien a pesar de no pertenecer a la Escuela del maestro de Samos, mantuvo, como sus miembros, el secreto de sus enseñanzas:
"Entonces fue cuando todos los géneros, constituidos de esta manera recibieron de él su figura, por la acción de las ideas y los números. Pues en la medida que era posible, de estos géneros el Demiurgo ha hecho un conjunto, el más bello y mejor." Platón, Timeo-53,b

En este ritual de silencio y secreto, la contraseña fue un símbolo, el **pentagrama**, el pentágono estrellado, emblema de la armonía, cuya transmisión se produjo por las técnicas ocultas de los arquitectos y las sociedades secretas de carácter mágico, continuando con la logia masónica, que veneraba en el centro de sus altares la letra G, inicial de geometría.

Según palabras de **Bertrand Rusell** “lo más curioso de la ciencia moderna sea tal vez su retorno a Pitágoras” La vuelta a una pura ley del número de la que ya es posible deducir el Análisis, la Lógica, las Geometrías... y que marcó una nueva forma de entender la Matemática como un absoluto a comienzos de este siglo.

Pero regresando al hilo conductor, **Vitruvio**, que si bien no hizo aportaciones originales a la Arquitectura, sí hizo una recopilación de conocimientos desde varios siglos anteriores a él, se ocupa mucho de esta cuestión, esta sinfonía perfecta de las proporciones en el cuerpo humano, y de proporciones análogas, idénticas a veces, que el arquitecto debe establecer en los planos de los edificios sagrados.

Así, en esta combinación de superficies, unidas por relaciones racionales, en las que figuras semejantes, pero de distinta magnitud, se agrupan rítmicamente reflejando a diversas escalas la forma fundamental, entiende **Vitruvio** la conmodulatio o juego de proporciones en la simetría. **Euclides**, cuya Teoría de las proporciones fue copiada por **Eudoxio de Cnido**, heredero directo del sistema de **Platón**, no lo entendía de otro modo cuando distinguía entre las proporciones racionales que se expresan por números y “las otras” que se representan por líneas, superficies o sólidos.

No en vano el problema de la duplicación del cubo había dejado al descubierto lo que hoy denominamos una ecuación de tercer grado, no resoluble por métodos euclidianos y que se podía expresar en términos de proporciones como el problema de intercalar dos medias continuas entre dos longitudes, la segunda de las cuales es el doble que la primera.

En Grecia, y en el Oriente helénico existían cofradías de técnicos de la construcción que, aún después de que Constantino estableciera el culto cristiano, continuaron manteniendo las tradiciones técnicas y el mismo ritual de secreto profesional iniciático. Los principios de composición arquitectónica eran asimismo transmitidos como secretos de familia de padres a hijos, y así aparecen los símbolos y trazados geométricos de la escuela pitagórica, y en particular todo lo concerniente a la proporción aúrea, a través del Imperio de Carlomagno y en la época de las grandes construcciones religiosas de las magníficas abadías benedictinas. Estos monjes conservaron y transmitieron los textos matemáticos de la antigüedad griega o bizantina que han llegado hasta nosotros, incluyendo el propio tratado de **Vitruvio.**

Diseñándose ya en esa época la lenta Reconquista de España, se llegó a un nuevo contacto, debido a los intercambios con los arquitectos árabes que aportaron fórmulas y soluciones arquitectónicas evolucionadas en la cuenca oriental del Mediterráneo, bajo la triple influencia helenística, persa y egipcia. En la misma época, las Cruzadas, crearon otra vía de comunicación entre los guardianes de la tradición geométrico-arquitectónica occidental, tanto laica como eclesiástica y la oriental. Fue entonces cuando los arquitectos y maestros constructores se reagruparon en sociedades casi secretas, puramente laicas y constituyeron en el Sacro Imperio Germánico, que persistió hasta el siglo XVII, la Bauhütte, Federación de las Logias de los talladores de piedra, cuyo primer gran maestre fue el arquitecto de la Catedral de Estrasburgo, **Erwin de Steinbach**. De una u otra forma estas agrupaciones de arquitectos-constructores funcionaron en toda Europa, siendo para todos ellos la Geometría una Ciencia fundamental y mantuvieron una relación mútua que se evidencia en los “signos lapidarios” que aparecen en todas las construcciones del románico y el gótico, y que son pequeños tratados de geometría, concedidos únicamente a los oficiales y maestros, para los que constituía una marca o firma.

Lucca Pacioli, en 1494, publica en Venecia la Summa de Arithmética, Geometría, Proportione et proportionalità en cuyo prefacio insiste ya en el carácter fundamental de la Ciencia Matemática, cuyos principios deben servir como guía de todas las ciencias y las artes. La élite de artistas-matemáticos de la época refleja sin duda el ambiente que el Renacimiento había creado en el último tercio del siglo XV: **Alberti, Piero della Francesca**, **Giovanni Bellini, Mantegna, Boticelli, Perugino, Ghirlandaio, Verrochio**, **Leonardo**... maestros en las artes del “dissegno”, pintura, escultura, arquitectura, etc. pusieron de manifiesto la preocupación que les movía para sacar conclusiones prácticas de la Teoría matemática de la visión. La perspectiva matemática constituyó una garantía para lograr la corrección y verosimilitud en la representación del espacio, y lo que es más, una garantía de perfección estética. El uso riguroso de la regla y el compás confiere la proporción que hace perfectas y admirables las obras de estos artistas.

Las partes de la Summa dedicadas al Álgebra, la Geometría y la Aritmética se apoyan fundamentalmente en **Euclides** y, sobre todo, en los escritos de **Leonardo de Pisa**, conocido con el sobrenombre de **Fibonacci**, considerado el más grande matemático de la Edad Media, que introdujo en el Occidente cristiano el cálculo aritmético árabe, de enorme repercusión en la matemática europea. Más tarde, **Gerolamo Cardano** denunció grandes errores en la Summa de Pacioli, sin dejar de reconocer que sin ella nunca habría podido llegar a escribir su Ars Magna.

Es en 1498 cuando termina **Luca Pacioli** su obra mas universal, el tratado De Divina Proportione, ilustrado con sesenta dibujos coloreados "de mano de Leonardo da Vinci", su amigo en la corte de Ludovico el Moro. La edición impresa en 1509 incluye un Tractato de la Architectura de inspiración netamente vituviana: "Quien de Vitruvio se aparta, cava enn el agua y cimienta en la arena y muy pronto malogra el arte", dice refiriéndose a los arquitectos que se alejan de las reglas matemáticas, con peligro de que sus construcciones no se sostengan en pie. La rectitud moral y el deseo de renovación de la arquitectura se ligan en Pacioli a la esmerada preparación matemática, a la exaltación del ángulo recto, sin el cual no es posible "distinguir el bien del mal, ni en modo alguno se puede dar medida cierta". La arquitectura debe reflejar la estructura matemática del universo. La proporción matemática, principio universal y objetivo de belleza son el punto de referencia obligado del arte.

El carácter inconmensurable de la proporción aúrea fue la causa de su restringida aplicación real en la arquitectura del Renacimiento, pues sus propiedades irracionales son difíciles de conciliar con una anotación fidedigna y conmensurable de las dimensiones. El atractivo de la divina proporción era de una especie más intelectual, y no será hasta el siglo XIX, con el renovado interés por el estudio de las proporciones irracionales, cuando la sección aúrea será de nuevo pieza clave en las especulaciones artísticas y estéticas.

En el tratado de Luca Pacioli son especialmente interesantes los capítulos destinados a la construcción de los cinco poliedros platónicos, demostrando mediante razonamientos filosóficos-matemáticos por qué no puede haber más de cinco. Su característica más sugerente es la inclusión progresiva de cada uno en el siguiente, culminando en la esfera. A partir de ellos y, haciendo uso de la proporción aúrea, se pueden obtener otros, como aparecen en las ilustraciones de Leonardo. Hace referencia especial al poliedro de 72 caras y asegura que el Panteón romano, la capilla de San Scettro de Milán y el altar mayor de Santa María de Gracia de la misma ciudad, están inspirados en este cuerpo, aunque un examen de estas construcciones no permite la constatación literal de este hecho. Miguel Angel encargó al orfebre Giovanni di Baldassarre una "bola" con la forma de este cuerpo para que coronara su capilla Médici, identificándose con las tendencias platónicas del maestro Pacioli.

En arquitectura hay que construir con ciencia: "Ars sine Sciencia nihil", decía el arquitecto parisiense **Jean Vignot**, que en 1398 fue consultado por el consejo de constructores de la catedral de Milán. Una composición arquitectónica debe ser geométrica, pero esta geometría ha de ser una concepción consciente, no una mera red de líneas. El hecho de que los puntos de un trazado se escojan entre las intersecciones de líneas de un diagrama no basta para hacer que un plano sea "geométrico", es necesario que el diagrama y la elección tengan un sentido.

Existe además un nuevo problema, ya detectado desde antiguo: Una edificación perfecta, en cuanto a su planificación geométrica eurítmica, proyectada para proporcionar placer estético por su armonía, ha de contar con el observador, con el sujeto que la contempla. Esa sensación rítmica sigue siendo percibida, aunque para el observador permanezca oculta alguna de sus partes, pues éste puede reconstruirlas automáticamente en su espíritu. Pero no es así si el edificio se contempla desde una posición anormal, muy cerca por ejemplo, pues entonces, dado que el proceso de visión no es instantáneo, sino compuesto de imágenes sucesivas en las que el ojo examina la obra en sentido vertical, o bien horizontalmente, no existe ya un plano vertical de proyección, sino una serie de planos perpendiculares a los ejes momentáneos de visión. Todo ello ha dado lugar a profundos estudios matemáticos, conocidos como correcciones ópticas, que se inician ya en Grecia, donde Vitruvio denomina explícitamente Escenografía a la parte de la ciencia que, una vez realizado el plano teórico, se ocupa de determinar esas correcciones, utilizando para ello rigurosas soluciones matemáticas, como arcos de parábola, hipérbola, etc., mientras que los arquitectos bizantinos o góticos las realizaron de modo más empírico.

Las deformaciones ópticas, entre ellas la ley de reducción aparente de los segmentos lineales, fue descubierta de nuevo por el arquitecto **Violet-le-Duc,** que explica: "cuando se trata de proyectar un edificio hay que tener muy en cuenta el punto o los puntos desde donde será posible verlo, las disminuciones producidas por las alturas, las descargas y los salientes." Ni que decir tiene que en el Renacimiento, con su obsesión racionalista, se dedicaron grandísimos esfuerzos a luchar contra este elemento de imperfección introducido por el subjetivismo de la visión humana. Más próxima a nuestros días ha surgido por parte de los arquitectos de grandes edificios, de volúmenes rigurosamente geométricos, una nueva idea a este respecto, ya que se atribuye al ojo, o más bien a la conciencia visual, la capacidad de percibir directamente el esquema deseado, es decir de efectuar automáticamente las correcciones ópticas necesarias, sin que el arquitecto tenga que preocuparse de ellas.

Una ayuda inesperada para el estudio de las perspectivas viene dada por los avances desarrollados en la trigonometría, gracias a los estudios astronómicos de **Copérnico** o **Rhaeticus**, (el nombre mismo de esta especialidad se utiliza por primera vez en esta época, en la segunda mitad del siglo XVI), aunque los progresos más decisivos se deben a **François Viète**, que trabaja en las principales relaciones entre las funciones circulares, tanto en trigonometría plana como esférica. Inicia también el simbolismo, mediante lo que llama "logístico speciosa" o especies que representan no un número o cantidad, sino todos los números, todas las cantidades, estos es, da comienzo lo que hay llamamos Álgebra.

Descartes, ya en 1620, siendo oficial voluntario en el ejército del Duque de Baviera, compone sus Progymnasmata de Solidorum elementis en los que analiza, después de pasar por el intermedio de los números piramidales, los números sólidos contenidos en poliedros regulares y semirregulares. Una de las características del pensamiento cartesiano es su afán cosmico, el intento de realizar una síntesis de la ciencia por concatenación o encadenamiento de símbolos, considerando a las Matemáticas (ya en plural) como modelo de la ciencia, a la que dicta sus preceptos lógicos y su método. En su tercer escrito o apéndice del discurso del Método, su primer libro trata de "Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de la Geometría", dando nacimiento a la Geometría Analítica que produce una auténtica revolución en el estudio de esta ciencia, que durante siglos había sido subsidiaria de los descubrimientos helénicos.

Quizá fueron **Palladio** y **Miguel Angel** los últimos arquitectos que utilizaron conscientemente en sus composiciones las proporciones nacidas de la armonía pitagórico-platónica. A fines del siglo XVII, el sentido exacto de la palabra simetría es olvidado y reemplazado por la acepción que utilizamos hoy: repartición de elementos idénticos a una y otra parte de un eje o plano, lo que produce un equilibrio estático, no teniendo ya ninguna relación con la simetría dinámica de las figuras semejantes, no idénticas. La arquitectura se mecaniza y sólo el barroco, tan maltratado en ocasiones, continúa presentando una geometría catártica en piedra o estuco.

Nace con el siglo XVII lo que podemos llamar la Matemática Clásica. Los nombres de **Newton, Leibniz, Fermat, Barrow o Pascal** nos indican el florecimiento de nuevas concepciones de la Matemática, de los principios del Análisis o de la Teoría de las Probabilidades. No sería posible describir aquí sus aportaciones al mundo, no ya de la propia Ciencia Matemática, sino al progreso de las actividades del pensamiento humano en general. La Historia de la Cultura y del Conocimiento inicia un proceso de aceleración que impida cualquier intento de compilación en un breve espacio. La Técnica comienza a ser beneficiaria de las aportaciones de los matemáticos: desde el célebre problema de la “capacidad de los toneles” de **Kepler**, que le hace estudiar los volúmenes de más de 90 cuerpos de revolución, hasta la construcción de relojes de sol, que llevó a **Jean Desargue** a iniciar la Geometría Proyectiva. El mismo Desargue (no olvidemos su condición de arquitecto) confesaba no interesarse por las investigaciones científicas más que en la medida en que “puedan ofrecer al espíritu un medio de lograr algún conocimiento de las cosas, o que puedan traducirse en actos para la conservación de la salud o en las aplicaciones o prácticas de algún arte”, a pesar de lo cual su teoría proyectiva es ciertamente en gran medida abstracta, de tal forma que ni fue comprendida ni continuada hasta casi después de un siglo.

Si con pocas palabras quisiéramos caracterizar la Matemática del siglo de las luces diríamos que es la etapa algorítmica por excelencia, donde el análisis, tanto algebraico como infinitesimal, adquiere vida propia y tiñe toda la matemática de un marcado carácter formal. Mientras en el siglo anterior la geometría analítica y los métodos infinitesimales habían servido como instrumentos para solucionar problemas geométricos o para la investigación de las leyes de la naturaleza, ahora, el análisis, aún persiguiendo los mismos fines, se estudia además a sí mismo. El máximo exponente en esta corriente es **Leonhard Euler**, formado en el ambiente de la familia de los **Bernouilli**. En este período la Geometría queda relegada y eclipsada, y como venimos observando a lo largo de toda su historia, su suerte corre pareja a la de la Arquitectura que, en este período neoclásico, decide no correr riesgos aventurados. Su resurgimiento se verá ya a fines del siglo con **Gaspar Monge** y muy especialmente con el auténtico creador de la Geometría Proyectiva, **Jean Victor Poncelet**, que en 1820 dio a conocer un "Ensayo sobre las propiedades proyectivas de las secciones cónicas" enunciando el principio de dualidad.

El proceso de rigorización de la Matemática toma cuerpo en la figura de **Karl Friedrich Gauss**, y con él y la gran pléyade de matemáticos que se ocuparon de dar forma, tal y como hoy las conocemos, a las distintas ramas de la Matemática clásica, se construyó el consistente edificio que parecía no aceptar grieta alguna. Todo aparecía perfecto, lógico y cohesionado. En este ambiente de segura tranquilidad solo restaba la profundización y la expansión de los conocimientos, ensanchar sus límites y extender su ámbito a un número creciente de casos y cuestiones pendientes.

No obstante, fue el propio Gauss, quién primero vio que los cimientos no eran tan inamovibles cuando percibió que el sistema euclidiano había de ser revisado, que el V postulado era "prescindible". No publicó sus resultados por temor a la "gritería de los beocios" y cuando tuvo noticia de que **Bolyai** y **Lobachewski** trabajaban en idéntico sentido, decidió no hacerlo, aunque a su muerte se encontraron sus deducciones, absolutamente rigurosas, que le condujeron a la Geometría no euclidiana, la geometría hiperbólica, que más tarde se completaría con la incorporación por **Riemann** de la geometría elíptica. A fines del siglo XIX se vivió por tanto un período crítico de revisión de los fundamentos de esta ciencia, de la que hable al comienzo del trabajo.

En el tema que nos importa realmente, las aplicaciones a las técnicas de la Arquitectura nos encontramos con la cristalización de la actual Geometría Descriptiva, gracias a los trabajos de **Wilhem Fiedler**, sobre cuya influencia en la Arquitectura o la Ingeniería, así como en la Técnica en general no es preciso insistir, pues desde su aparición es una de las materias básicas en la formación académica de todos los profesionales de la construcción en sus distintas facetas, mientras nacía, también fundada en la Geometría Proyectiva, la Estática Gráfica, cuyos métodos bien pronto superaron a los de la Estática Analítica y cuya primera sistematización se deba a **Karl Cullman**.

En nuestros días ha desaparecido prácticamente la figura del arquitecto que reúne a la vez las figuras del artista, del geómetra y del calculista. Hoy los cálculos se dejan para el ingeniero, el verdadero técnico en el manejo de estructuras; el geómetra simplemente ha desaparecido de este escenario, y son protagonistas el hecho de la edificación el arquitecto-compositor que diseña los planos, (al cual es de esperar no le sea totalmente ajeno el Arte) y el responsable de que el constructor realice fidedignamente lo que fue previamente proyectado, es decir, el Arquitecto Técnico. Esta organización es del todo eficaz, pero resta una oportunidad a la unidad orgánica del resultado. El criterio generalmente aceptado es el de la adaptación al fin (fitness), que comprende la solidez y la economía.

Pero aún así existen dos vías de elección para el arquitecto: si es un creador auténtico, provisto de inspiración, pero no compone geométricamente, si no medita sobre las proporciones... podrá hacer cosas magníficas, pero también podrá abortar en un solo detalle su obra perfecta, como **Soufflot**, al no espaciar suficientemente las columnas del tambor que soporta la cúpula del Panteón de Hombres Ilustres de París. De igual modo, entre dos arquitectos sin brillante inspiración, será más tolerable aquél que componga geométricamente, valiéndose de una técnica armónica, porque esta geometría lo guiará de manera automática a un resultado aceptable. Esto tiene su importancia pues los mediocres son la mayoría, y han sido la mayoría hasta en las grandes épocas, pero si trabajan con moldes bien proporcionados, transmitidos por conceptos geométricos, en último caso el resultado será, no genial, pero si “bueno”.

Cito como máximo apóstol de estas tendencias a **Le Corbusier**, utilizando lo que él llama trazados reguladores, y que a propósito de su proyecto para el Mundaneum de Ginebra dice:

"El Mundaneum fue concebido como una ciudad rectangular. La razón entre la longitud y profundidad está dada por la sección aúrea, reinando así una gran unidad y una proporción armoniosa"

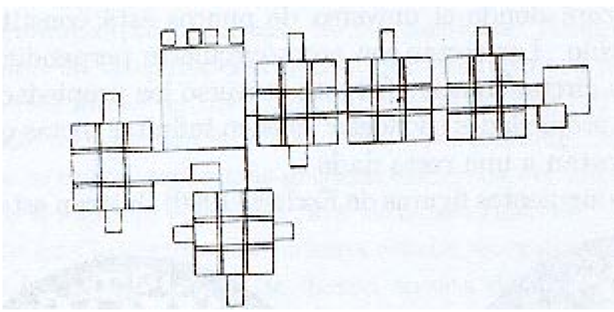
Y actualmente, ¿como se manifiestan las tendencias de la Geometría?. Observamos la invasión creciente de la geometría por las técnicas: analíticas, topológicas, algebraicas, informáticas... Esto ha llevado a campos de una elevada abstracción. Sin volver a la Geometría Euclídea, se piensa en una geometría actual que preste más atención a las ideas que engendra que a los métodos que las desarrollan. Se lamenta la pérdida de la visión y del goce de las configuraciones geométricas. Lo expresa Guggenheimer:

"He encontrado la fuerza esencial de la geometría y temo que nuestros jóvenes hayan sido privados demasiado tiempo de este placer"

¿Volveremos a una geometría figurativa? ¿Apuntará en esa dirección *la Geometría Fractal*? ¿Se podrá encontrar orden y regularidad en formas geométricas aparentemente caóticas? ¿Podremos construir una geometría para las formas irregulares?.

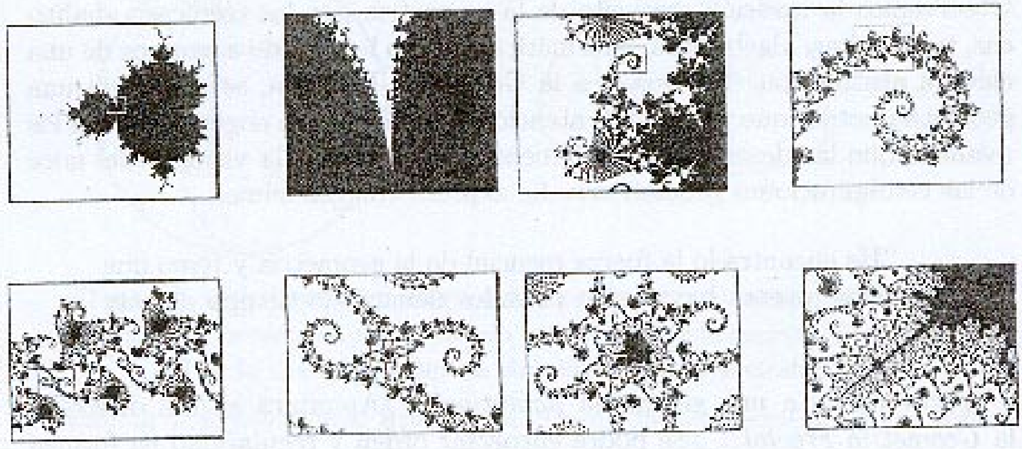
La matemática, una vez mas, no se deja asustar por el reto y nace la Geometría Fractal, abriendo paso incluso a una arquitectura fractal.

Louis Kahn interpreta la idea fractal en alguna de sus obras.



La voluntad de trascendencia y permanencia que expresa su arquitectura va ligada a la influencia del pensamiento de Platón, y es expresión de su convencimiento de que la recuperación de la dignidad humana se puede producir a través de la dignificación de la arquitectura de las instituciones humanas.

El término fractal ha sido acuñado recientemente por **Mandelbrot** y designa objetos geométricos de estructura irregular que están presentes en muchos comportamientos y formas de la naturaleza, aunque ya habían sido tratados desde finales del siglo XIX dentro de la Teoría Geométrica de la Medida.



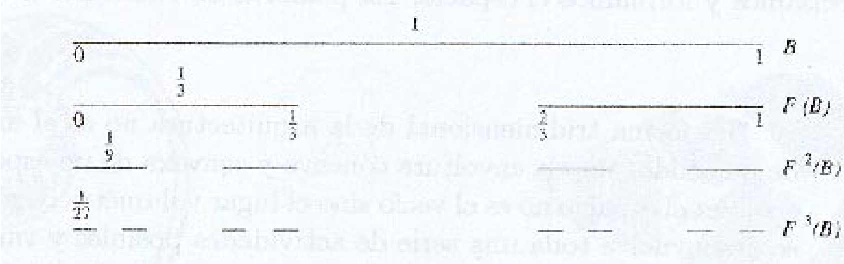
Profundizando en la frontera del conjunto de Mandelbrot se observa la gran belleza visual de este conjunto.

Los fractales son objetos matemáticos encuadrados en el campo de la teoría geométrica de la medida, si bien su delimitación exacta aún está por establecer. La mejor forma de describirlos consiste en señalar lo que tienen en común los procesos matemáticos que los generan.

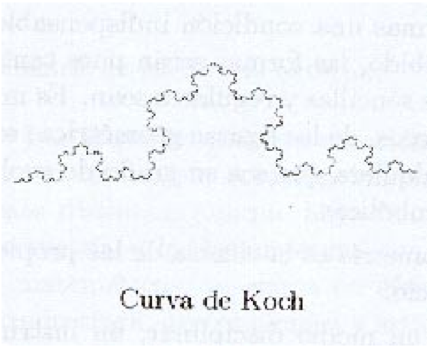
Sus rasgos característicos son la simplicidad de su construcción y la aparente complejidad del producto final.

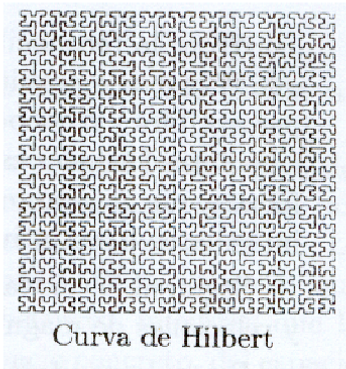
El fractal típico con el que surgieron las especulaciones en este campo el el conjunto de Cantor.

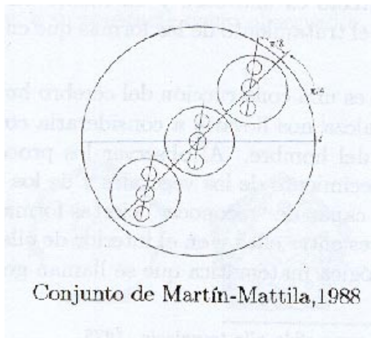
Para construirlo se toma un segmento. Se divide en tres partes iguales. Se elimina el segmento central. Con cada uno de los dos restantes se procede del mismo modo... y asÍ infinitas veces. Lo que queda es el conjunto de Cantor.



Como hemos visto, para describirlo y construirlo se requiere muy poco información. Lo característico de las estructuras fractales es la iteración infinita de este simple proceso. Otros ejemplos de fractales del tipo de Cantor son la curva de Koch, la curva de Hilbert y el conjunto de Martín-Mattila:


Curva de Koch


Curva de Hilbert


Conjunto de Martín-Mattila,1988

2. ESPACIO GEOMÉTRICO Y ARQUITECTÓNICO

El concepto de espacio no es unívoco. Debe abordarse con una gran apertura de ideas. Es espacio arquitectónico no puede reducirse ni al espacio físico ni a la dualidad espacio interior-exterior, ni siquiera al concepto de parcelación habitable.

“El espacio arquitectónico posee un rasgo absolutamente diferencial: es creado por el hombre para el uso del hombre”

Por otro lado, la Geometría elabora modelos matemáticos capaces de describir parcelas concretas del espacio. Cabe considerar así el espacio geométrico, como una aportación teórica, sugerente y clara al estudio de ciertas facetas formales del espacio arquitectónico.

La realización de un proyecto arquitectónico introduce en el ambiente una alteración, una alteración espacial. Volúmenes, superficies, líneas y sus articulaciones plásticas y cromáticas concurren juntas al crear, tanto en el interior como en el exterior del edificio, espacios cuya calidad dependerá también de la relación dimensional con el hombre. El espacio es siempre, en alguna medida, dinámico, precisamente porque es visible y disfrutable desde diferentes puntos de vista, y porque nunca es posible hablar de un solo espacio: por lo menos son dos, el exterior y el interior; pero habitualmente son muchos más, porque hasta un edificio sencillo presenta numerosas articulaciones. En el exterior, Kahn defiende que se debe buscar la capacidad evocativa que las formas geométricas puras poseen intrínsicamente. El significado debe dejarse implícito, latente, con voluntad de permanecer y nunca quedar del todo explicado. En este sentido es heredero de Wright y de su predilección por las formas y volúmenes elementales.

Para entrar en la definición del concepto de espacio arquitectónico, expondré la definición de Nikolaus Pevsner:

"Un cobertizo para guardar bicicletas es un edificio. La catedral de Lincoln es una obra de arquitectura. Todas o casi todas las estructuras que delimitan un espacio de medida suficiente para que se mueva un ser humano, son un edificio... Un edificio puede provocar sensaciones estéticas de tres maneras: La primera de estas maneras es en dos dimensiones; es la manera propia del pintor. Son sensaciones producidas por el tratamiento de la superficie, por las proporciones, por las relaciones de los vacíos con los llenos y por la ornamentación. La segunda, en tres dimensiones, trata el edificio como un volumen, es la manera del escultor. Es estéticamente significativo el tratamiento exterior de un edificio en su conjunto, sus contrastes, los efectos. La tercera manera también es en tres dimensiones, pero se refiere al espacio; mas que las anteriores es propia del arquitecto. Las sensaciones estéticas se provocan por el efecto en nuestros sentidos del tratamiento del interior, la sucesión de los ambientes, el ensanchamiento de una nave en el crucero, el movimiento majestuoso de una escalinata barroca. Lo que distingue la arquitectura de la pintura y de la escultura es su característica espacialidad. En este campo, y sólo en este campo, ningún otro artista puede emular al arquitecto. Por tanto, la historia de la Arquitectura es, ante todo, la historia del hombre que modela el espacio".

La definición la recoge también Bruno Zevi

"... la pintura actúa en dos dimensiones, aunque pueda sugerir tres o cuatro. La escultura actúa en tres dimensiones, pero el hombre se queda en el exterior, separado. En cambio, la arquitectura es como una gran escultura excavada en cuyo interior el hombre penetra y camina"

Volviendo al proceso proyectual de un edificio, para formular su esquema, el arquitecto deberá emplear un medio de representación preciso y fiable. Este medio se lo proporciona la GEOMETRÍA DESCRIPTIVA, y sobre todo, la GEOMETRÍA EUCLIDEA, que es la geometría base del arquitecto al tratar la economía del espacio, aunque también puede recibir ayuda de otra geometría, la GEOMETRÍA PROYECTIVA, que es la base matemática de la descriptiva.

La arquitectura no puede expresarse ni comunicarse más que con medios gráficos y éstos tienen gran importancia porque, convenientemente elegidos y usados con maestría, pueden efectivamente representar y simular la deseada realidad proyectual. Es muy dificil, por ejemplo, proponer soluciones si no se conoce la geometría de una estructura, por ejemplo. Para el técnico, la forma es una ecuación matemática; para el arquitecto es además proporción, espacio y armonía.

La Chapelle de Ronchamps (1952) y el Museo de Chandigahr.Le Corbusier.

3. LA GEOMETRÍA DE LA ARQUITECTURA

Para proyectar se necesita poseer un método gráfico de proyección: la geometría. Una geometría del diseño arquitectónico, en la que la palabra "diseño" reviste el doble significado de invención-proyectación y de operación gráfica para la construcción de la propia invención.

La geometría es pues el instrumento con el que delimitamos, cortamos, precisamos y formamos el espacio. En palabras de Giancarlo De Carlo:

"La forma tridimensional de la arquitectura no es el exterior de un sólido, sino la envoltura cóncava y convexa de un espacio; y a su vez el espacio no es el vacío sino el lugar volumétrico en el que se desenvuelve toda una serie de actividades posibles y variadas. En consecuencia, en el caso de la arquitectura, la "invención" se refiere a un "sistema espacial organizado" que experimentamos a través de su utilización y que percibimos a través de su forma".

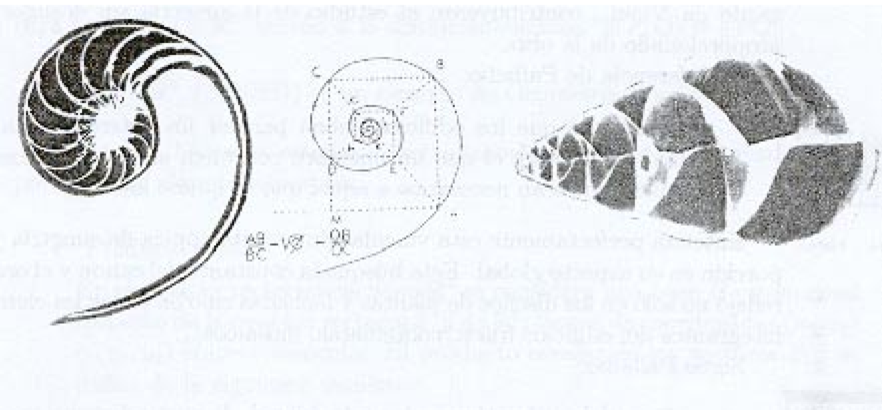
Al ser la reconocibilidad de las formas una condición indispensable para que el mensaje arquitectónico sea recibido, las formas serán pues tanto más perceptibles y reconocibles cuanto más sencillas y regulares sean. Es más, los caracteres formales específicos, intrínsecos, de las figuras geométricas son tan fuertes que generan en el hombre, cualquiera que sea su grado de evolución, inmediatas e instintivas referencias simbólicas.

Según el Diccionario de Oxford la geometría es la ciencia de las propiedades y relaciones de magnitudes en el espacio.

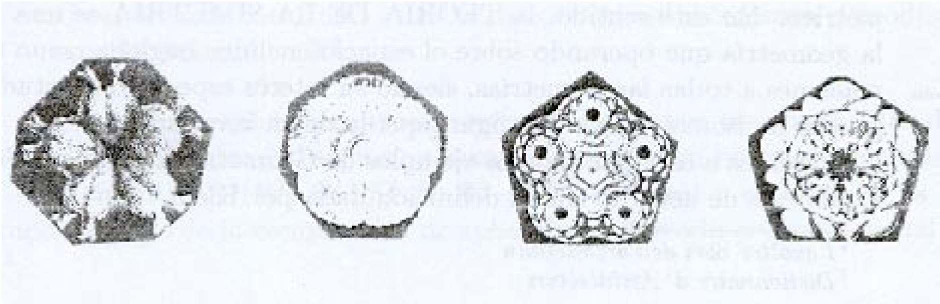
Para el arquitecto es una base y un medio disciplinar, un instrumento indispensable en el tratamiento de las formas que entran en la "composición" de los espacios.

La geometría es una construcción del cerebro humano, si bien la observación de la naturaleza nos llevaría a considerarla como un conjunto de leyes que están fuera del hombre. Al observar los procesos de formación de los minerales y el crecimiento de los vegetales y de los animales, la racionalidad humana, ha sido capaz de "reconocer" ciertas formas sencillas, hallando relaciones particulares entre ellas y el interior de ellas, es decir, construyendo los sistemas de lógica matemática que se llaman geometrías.

"Lo que el hombre hace no puede hacerlo la naturaleza, si bien el hombre, para hacerlo, se vale de todas las leyes de la naturaleza. Lo que preside la creación, el deseo de hacerlo, no existe en toda la naturaleza" (Louis Kahn).



Simetría en las formas naturales. "The geometry of art and life" Matila Ghyka.

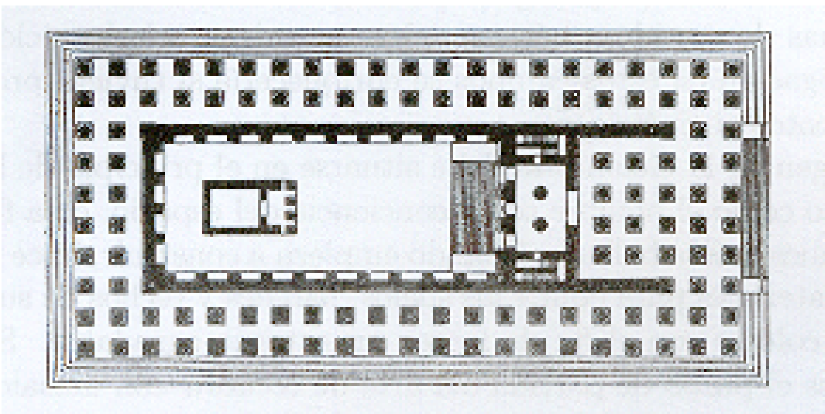


Las arquitecturas son creaciones de las que sólo el hombre es capaz, del mismo modo que creación humana es la geometría; pero se trata de dos cosas distintas, aunque haya muchas relaciones recíprocas entre ellas. La Geometría y la Arquitectura son creaciones distintas. La Geometría, que es matemáticas, se ocupa en efecto del espacio abstracto, mientras que la Arquitectura, que es técnica y arte, se ocupa del espacio concreto, del espacio en relación al hombre, a su presencia como observador, a su dimensión como beneficiario de ella.

4. SIMETRÍA Y ARQUITECTURA

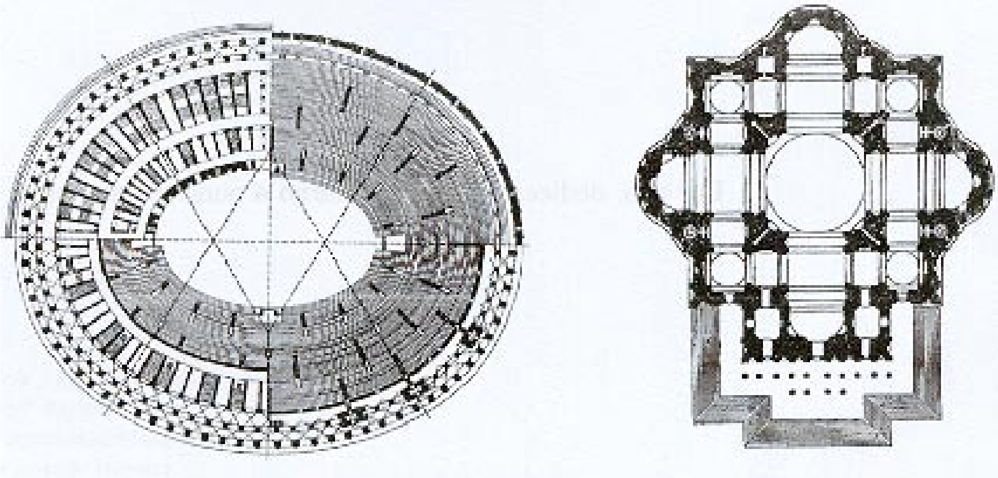
"La simetría es una idea por medio de la cual, el hombre de todas las épocas ha tratado de comprender y crear la belleza, el orden y la perfección" (Weyl)

Las primeras concepciones sobre simetría arquitectónica identificaban simetría con la proporción, el equilibrio y la belleza.



Templo de Apolo Didimeo en Mileto (335-320 a.d.C.)

Vitruvio la define como el "vínculo armónico de cada uno de los miembros del edificio respecto a la figura global de la obra". Esta concepción influyó notablemente en el Renacimiento: Durero, Miguel Angel, Piero de la Francesca, Paccioli, Leonardo da Vinci... contribuyeron al estudio de la simetría sin desligarla del proporcionado de la obra.



Izda: Planta del Coliseo de Roma (70-82 d.d.C.)
Dcha: Planta de San Pedro en el Vaticano, Miguel Angel (1546)

La referencia de Palladio:

"entiendo que los edificios deben parecer un entero y bien definido cuerpo en el que un miembro convenga al otro y todos los miembros sean necesarios a aquel que se quiere hacer",

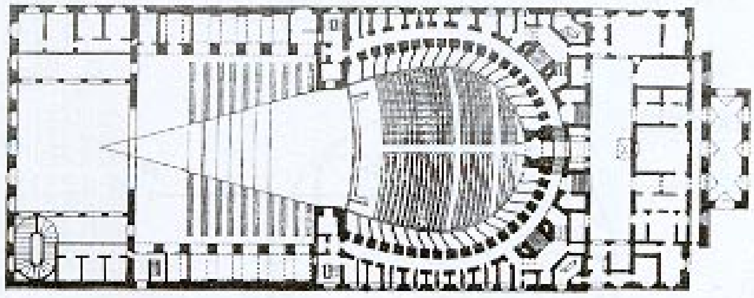
sintetiza perfectamente esta vinculación arquitectónica de simetría y proporción en su aspecto global. Esta búsqueda constante del canon y el orden se reflejó no sólo en los diseños de plantas y fachadas sino en todos los elementos integrantes del edificio: frisos, columnatas, mosaicos....

Sigue Palladio

"y se debe advertir que las estancias de la parte derecha respondan y sean iguales a las de la izquierda a fin de que la fábrica sea así en una parte como en la otra."

En Viollet le Duc encontramos un nuevo concepto:

"simetría significa hoy, en el lenguaje de los arquitectos, no un equilibrio ni relación armoniosa de las partes con el todo, sino una similitud de partes opuestas, la reproducción exacta a la izquierda de un eje, de lo que hay a la derecha".



Planta del Teatro en la Scala de Milán, Piermarini (1774)

En el fondo, esta definición desmarca la teoría de la proporción de la teoría de la simetría, reduciendo ésta a su aspecto euclídeo puramente geométrico. En este sentido, la TEORÍA DE LA SIMETRÍA es una parte de la geometría que, operando sobre el espacio euclídeo, engloba como transformaciones a todas las isometrías, siendo su interés específico el estudio de los grupos de isometrías que dejan invariantes las figuras.

4.1 MOVIMIENTOS EN EL PLANO

Consideramos el espacio afín euclídeo R^2. Un movimiento f: $R^2 \rightarrow R^2$ es una transformación afín que se caracteríza por conservar la distancia, es decir,

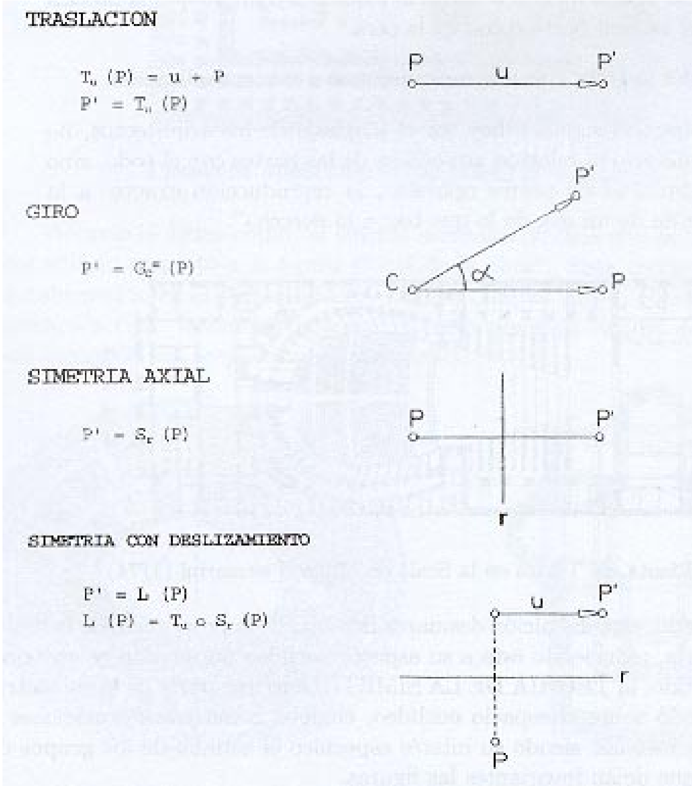
$$D[f(P),f(Q)] = d(P,Q)$$

Para todo P, Q $\in R^2$ siendo la distancia euclídea: $d(P,Q) = \|PQ\|$

Los movimientos en el plano afín reciben también el nombre de isometrías; la palabra isometría proviene del griego y significa "igual medida".

Recordemos que las traslaciones, los giros y las simetrías son movimientos en el plano, y cualquier otro movimiento que se realice es composición de ellos.

Descripción de los movimientos en el plano.



Todo movimiento en un plano es o bien la identidad o una traslación o una rotación (movimientos directos, que no cambian la orientación del objeto después de aplicarle el movimiento), o bien una simetría o una simetría deslizante (movimientos indirectos, que cambian la orientación).

El conjunto de los movimientos del plano $GM(R^2)$ tiene estructura de Grupo con la composición de aplicaciones.

La transformación identidad es el elemento neutro de este grupo. Es el movimiento que deja invariantes todos los puntos del plano.

$Id(P) = P$

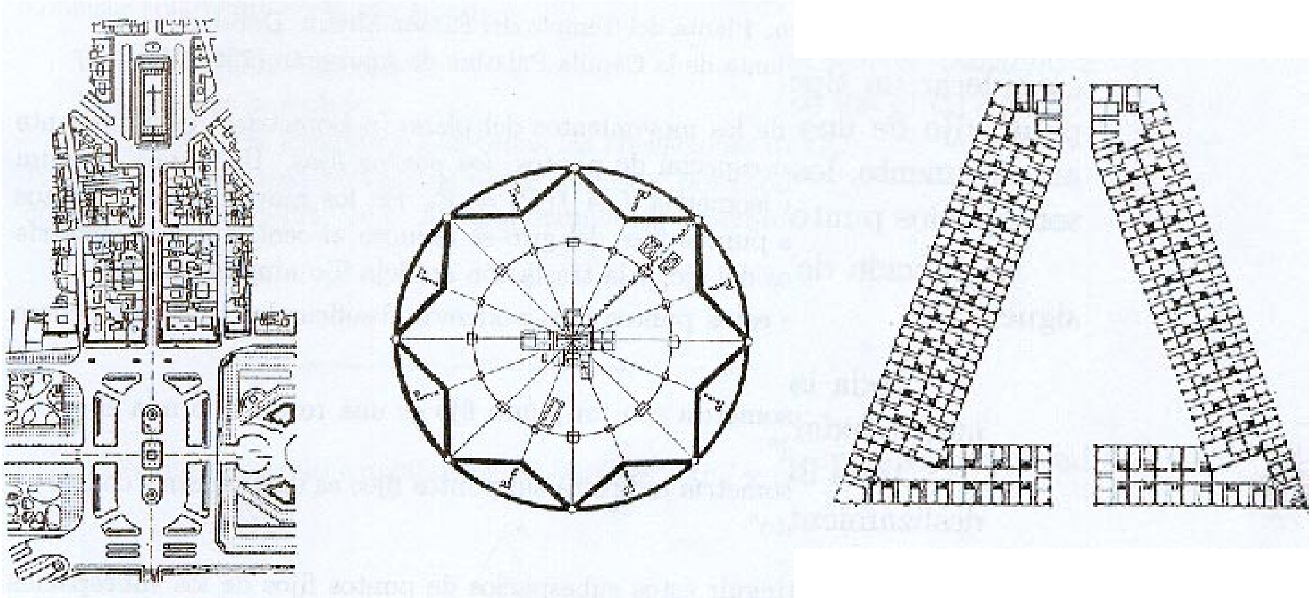
Todo movimiento tiene movimiento inverso. El movimiento inverso del giro $G_{c,\alpha}$ es el giro $G_{c,-\alpha}$, ya que la composición de ambos nos da la identidad. En el caso de una simetría S_r, es ella misma. Por último, el movimiento inverso de una traslación T_α es la traslación $T_{-\alpha}$.

$(G_{c,-\alpha} \circ G_{c,\alpha})(P) = Id(P) = P$

$(S_r \circ S_r)(P) = Id(P) = P$

$(T_{-\alpha} \circ T_\alpha)(P) = Id(P) = P$

Isometrías en la organización de ciudades

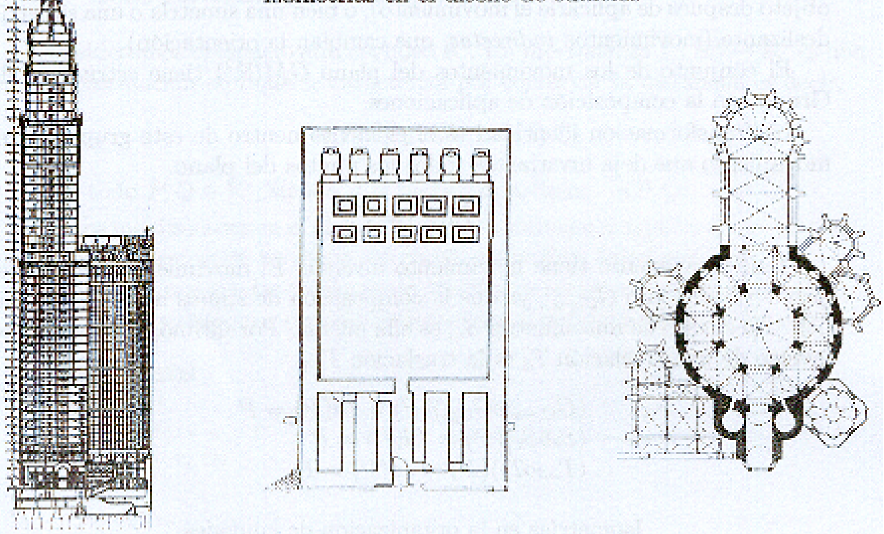


Izda.: Place de la Concorde, París

Centro: Planta de Sforzinda, Filarete (hacia 1465)

Dcha.: Planta de Place Dauphine, París (1607)

Isometrías en el diseño de edificios



Izda: Sección del Woolworth Building, Gilbert (1911)
Centro: Planta del Templo del Faraón Snefru, Dahshur
Dcha: Planta de la Capilla Palatina de Aquisgrán (796-804)

En el estudio de los movimientos del plano (o isometrías) es interesante considerar un tipo especial de puntos, los puntos fijos. Un punto P es un punto fijo de una isometría f si f(P) = P. En los movimientos descritos anteriormente, los puntos fijos del giro se reducen al centro. En la simetría son fijos los puntos del eje, y la traslación no deja fijo ningún punto.

En función de estos puntos fijos podemos clasificar las isometrías como sigue:

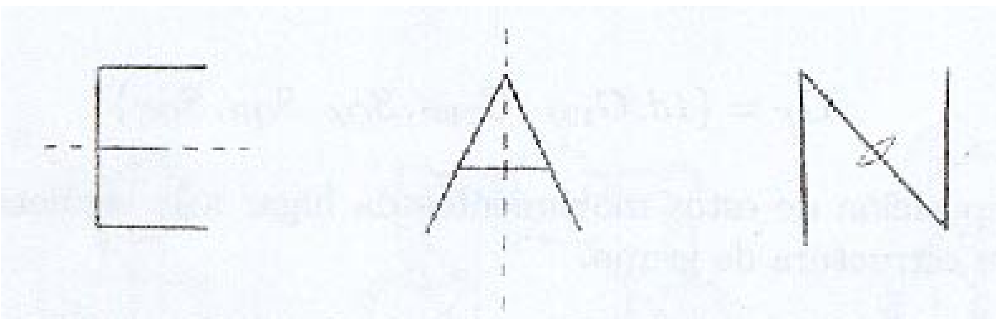
- Toda isometría con un punto fijo es una rotación o una simetría axial.
- Toda isometría indirecta sin puntos fijos es una simetría con deslizamiento.

Conviene distinguir estos subespacios de puntos fijos de los subespacios afines invariantes. Un subespacio afín M es invariante por un movimiento f si f(M) = M, es decir, el conjunto se transforma globalmente en sí mismo, aunque no tenga puntos fijos. Por ejemplo, una traslación de vector deja invariante cualquier recta paralela a ese vector, pero ningún punto de la recta permanece fijo.

4.2 GRUPO DE SIMETRÍA DE UNA FIGURA PLANA

Entendemos por figura plana cualquier subconjunto de R^2. Una figura plana F puede ser estudiada "estéticamente", analizando sus propiedades métricas, o bien "dinámicamente", analizando bajo qué isometrías permanece invariante.

Observando las letras E y A encontramos inmediatamente su simetría bilateral; en el primer caso el eje de simetría (reflexión) es horizontal y el segundo caso, vertical. La letra N es simétrica por un giro de amplitud π

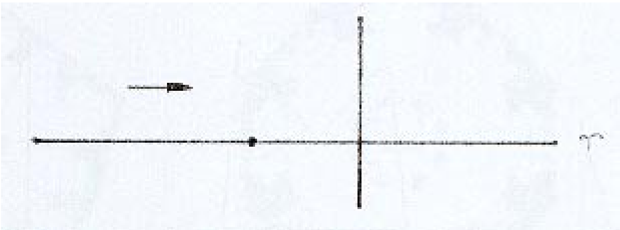


Consideramos todos los movimientos que transforman la figura en sí misma, Gf = {f Є GM(R²) │ f(F) = F}. Pues bien, Gf con la composición de aplicaciones tiene estructura de grupo que llamaré grupo de simetría de la figura F. Si la figura es completamente irregular, su grupo de simetría consiste solamente en la identidad.

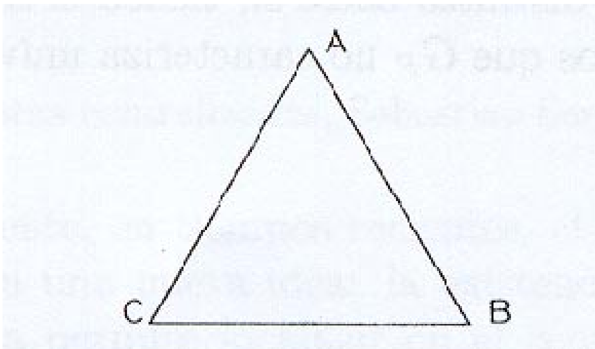
Algunos ejemplos:

- Tomamos una recta r

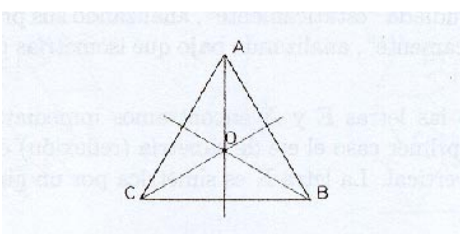
Esta recta es invariable por todas las traslaciones de vector paralelo a r, por todas las simetrías con eje ortogonal a r y por todos los giros de 180º con centro en un punto de r. Estos movimientos generan Gr.



- Sea un triángulo equilátero F de vértices ABC y centro de gravedad O.



Gf, grupo de simetría del triángulo, está formado por los siguientes movimientos: Los giros de centro O y amplitud 120º y 240º, las simetrías de ejes OA, OB y OC y la identidad Id que coincide con el giro de centro O amplitud 360º.

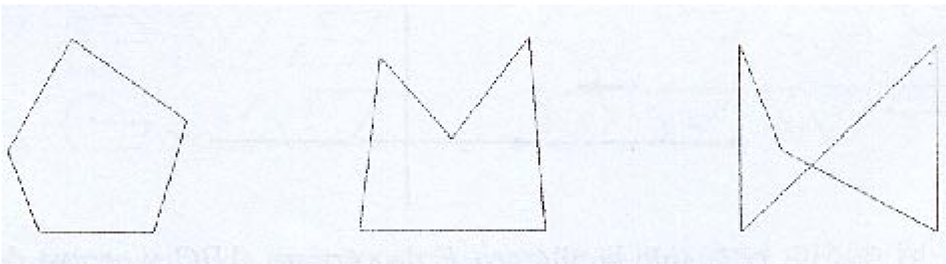


$$G_F = \{Id, G_{120^\circ}, G_{240^\circ}, S_{OA}, S_{OB}, S_{OC}\}$$

La composición de esos movimientos da lugar a la siguiente tabla, que muestra su estructura de grupo.

o	Id	$G_{120°}$	$G_{240°}$	S_{OA}	S_{OB}	S_{OC}
Id	Id	$G_{120°}$	$G_{240°}$	S_{OA}	S_{OB}	S_{OC}
$G_{120°}$	$G_{120°}$	$G_{240°}$	Id	S_{OB}	S_{OC}	S_{OA}
$G_{240°}$	$G_{240°}$	Id	$G_{120°}$	S_{OC}	S_{OA}	S_{OB}
S_{OA}	S_{OA}	S_{OC}	S_{OB}	Id	$G_{240°}$	$G_{120°}$
S_{OB}	S_{OB}	S_{OA}	S_{OC}	$G_{120°}$	Id	$G_{240°}$
S_{OC}	S_{OC}	S_{OB}	S_{OA}	$G_{240°}$	$G_{120°}$	Id

- Analizando las siguientes figuras observamos que el único movimiento que las deja invariante es la identidad.



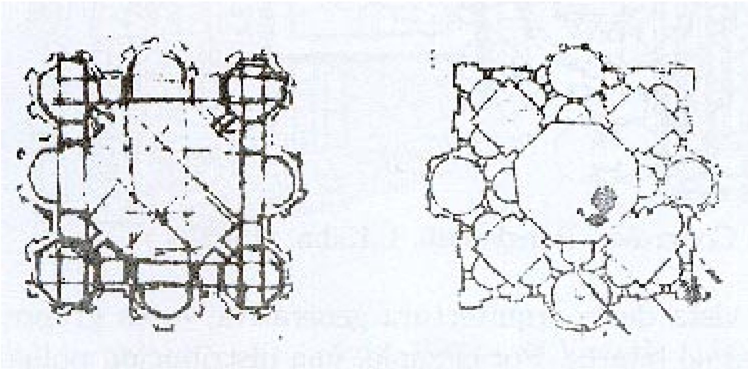
Estas figuras, bien distintas entre sí, tienen el mismo grupo de simetría Gf = Id. Vemos que Gf no caracteriza unívocamente a la figura F.

4.3 GRUPOS DE SIMETRÍA DE LEONARDO

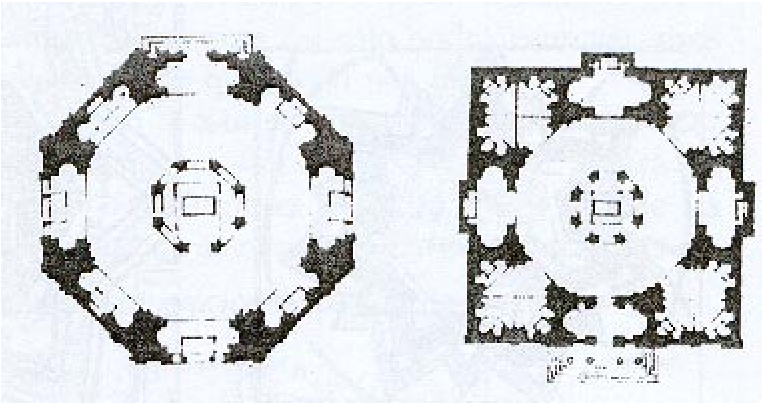
Estos grupos tuvieron gran interés en el Renacimiento para diseñar plantas de capillas adyacentes a un núcleo central sin romper la simetría central de ese núcleo. Leonardo hizo un estudio sistemático con vistas a establecer los métodos óptimos para realizarlo.

Un grupo de simetría Lf de una figura plana F se llama grupo puntual o de Leonardo si es un grupo finito y existe un punto P de F que es fijo para todos los elementos de Lf.

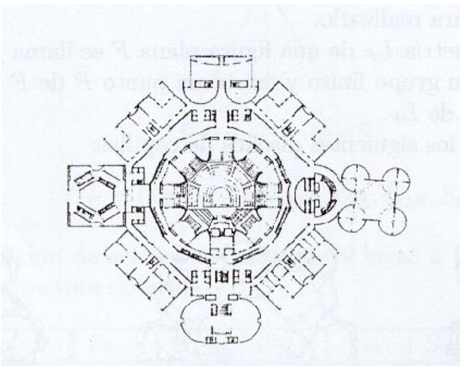
Así lo demuestran las siguientes capillas:



Un diseño donde se hace más evidente la organización central son estos estudios de Sebastiao Serlio en los que utiliza polígonos regulares.

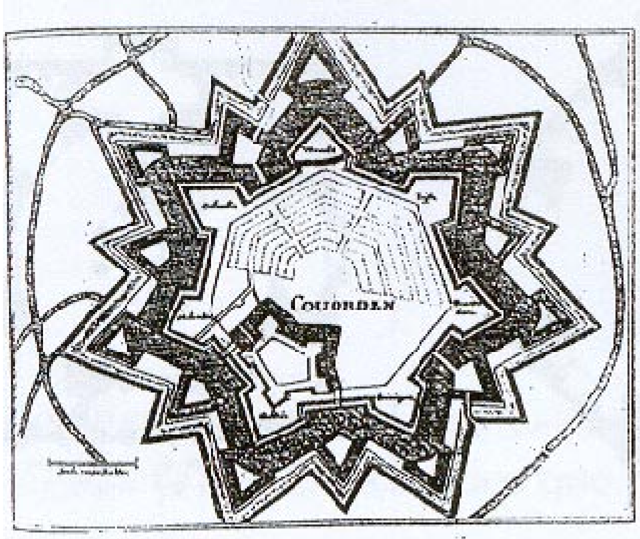


Arquitectónicamente, en tiempos recientes, el uso de estos grupos se ha visto enriquecido con una nueva idea: la existencia de un punto central de simetría en la planta permite localizar en el centro todos los servicios comunes e instalaciones de interés general (escaleras, ascensores, conducciones eléctricas, de agua, luz, patios...). Esta centralización geométrica aporta un notable ahorro económico, y sobre todo, un encubrimiento natural de esas instalaciones..

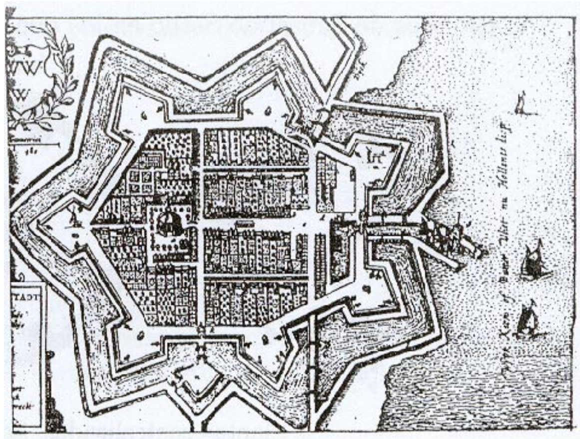


Edificio Congresos, Bangladesh, L.Kahn,

Desde el punto de vista de la arquitectura generativa, estos grupos de Leonardo tienen el máximo interés. Por ejemplo, una distribución poligonal con edificios en los vértices o en las aristas, permite generar en el centro un espacio común susceptible de contener una plaza o zona ajardinada o un edificio de uso comunitario.

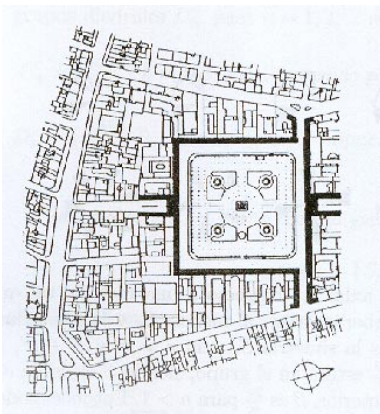


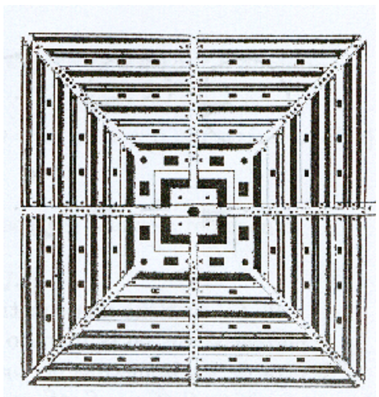
Plano de Coerworden (1659)



Plano de Willemstad (1632)

Ejemplos de distribución poligonal





Izda.: Planta de Victoria (1849)

Dcha.: Place des Bosgues, París (1610)

Puesto que los grupos de Leonardo se caracterizan por dejar un punto fijo, voy a hacer un estudio de aquellas isometrías que cumplen esta propiedad.

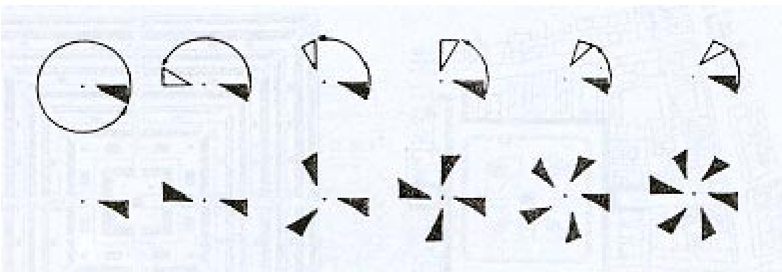
En primer lugar, si Lf es un grupo con un punto fijo P estamos seguros de que en Lf no hay traslaciones. Entonces Lf sólo podrá contener giros con centro P y simetrías axiales con ejes que pasan por P.

- Si el giro de centro P y ángulo α está en Lf, también deberán estar todos los giros de centro P y ángulo kα. Por ser un grupo finito, llegará un momento para k = n, que nα = 2π. Entonces α valdrá 2π/n. Si una de las isometrías de Lf es un giro, éste será de ángulo 2π/n, y Lf contendrá también a los n giros que se obtienen por composición reiterada de G:

$$G_P^{\frac{2\pi}{n}}, G_P^{\frac{2\pi}{n}2}, G_P^{\frac{2\pi}{n}3}, \ldots G_P^{\frac{2\pi}{n}(n-1)}, G_P^{\frac{2\pi}{n}n} = G_P^{2\pi} = Id.$$

  A este grupo, que llamaremos Cn, se le llama Grupo cíclico generado por G, y diremos que tiene orden n.

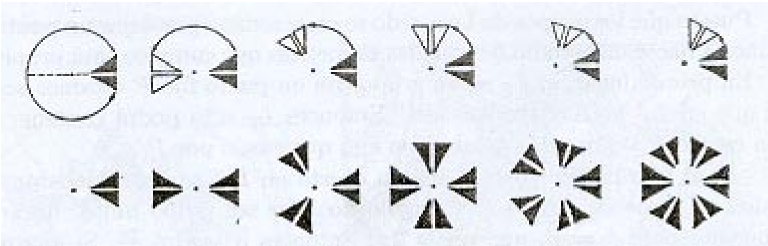
  Partiendo de un motivo y aplicándole las isometrías de un grupo cíclico Ck, obtenemos una figura cuyo grupo de simetría de Leonardo es precisamente Ck.



- Si Lf contiene una simetría axial Sr, respcto a una recta r, tal que P pertenece a r, en este grupo debarán estar, al menos, Sr y la identidad.
  Si otra de las isometrías Lf es la simetría Sr´ con r ≠ r´ y P Є r´, la composición Sr o Sr´ = Sr´o Sr = Gβ estará en el grupo, siendo β el doble del ángulo formado por r y r´. Por lo anterior, β es 2π/n para n > 1. Entonces todos los elementos del grupo

cíclico Cn más todas las n simetrías axiales obtenicas al girar la recta r según los ángulos 2πk/n, para k = 1, 2,...n, pertenecen a Lf.

A este grupo lo llamaremos Dn, grupo diedral.



Según Wiyl, se debe a Leonardo el descubrimiento de que los únicos grupos finitos de isometrías en el plano son los Cn y los Dn. Los grupos predominantes en arquitectura han sido principalmente D_1 y D_2. En las pirámides de Egipto se exhibe el grupo D_4, en el Pentágono de Washington el D_5...

Teorema de Leonardo

Los únicos grupos puntuales de simetría son los grupos cíclicos Cn o los grupos diedrales Dn, para n = 1, 2,.... siendo:

$$C_n = \{G_P^{\frac{2\pi}{n}k}, k = 1, 2, \ldots n\}, \textit{ generado por el giro de centro } P \textit{ y ángulo} \frac{2\pi}{n}\}$$

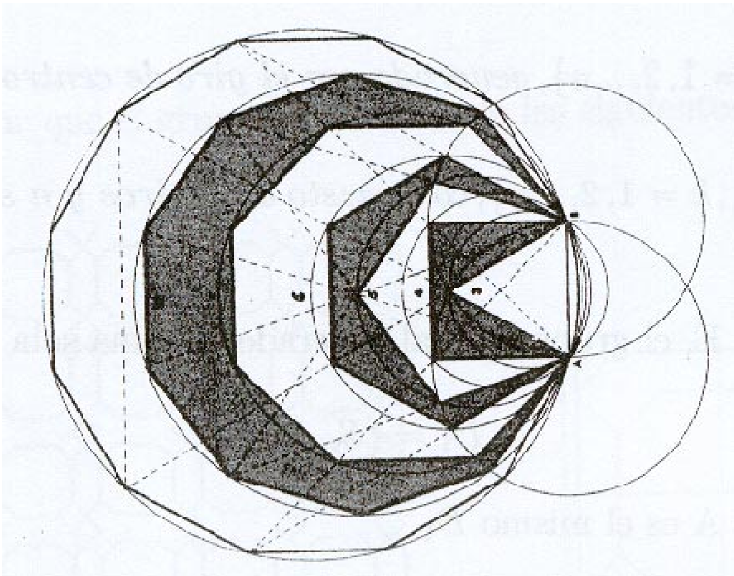
$$D_n = \{G_P^{\frac{2\pi}{n}k}, S_{r_k}, k = 1, 2, \ldots n\}, \textit{ compuesto de } n \textit{ giros y } n \textit{ simetrías axiales}\}$$

Para la letra E, el grupo diedral generado por una sola reflexión es:

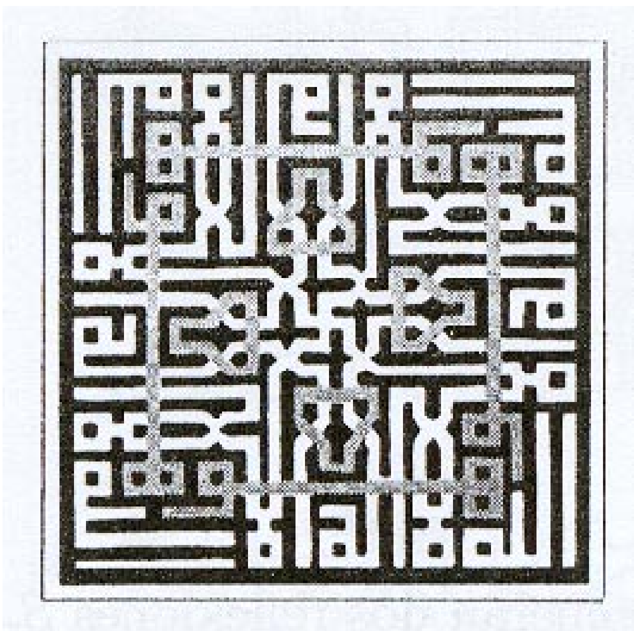
$D_1 = \{Sr_1, Id\}$

Para la letra A es el mismo D_1, el grupo de simetría de la letra n está generado por un giro de 180º y el de la letra H es D_2, el grupo diedral que generan dos reflexiones Sr_1 y Sr_2.

Para terminar con este apartado, aquí tenemos un resultado de interés geométrico: “Para todo $n \geq 3$, el grupo diedral de n es exactamente el grupo de simetría del polígono regular de n lados”.

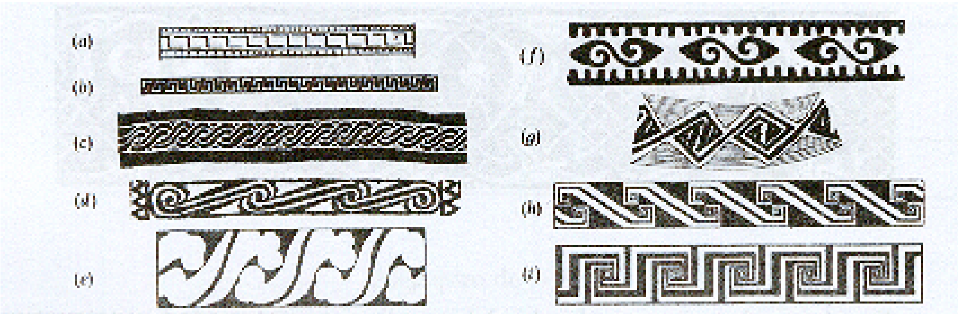


Como curiosidad, he encontrado un grupo de Leonardo, grabado en un azulejo vidriado con una inscripción que se repite sobre cada uno de los cuatro lados del cuadrado, que reza así: “Alá, no hay otro Dios que Él”.



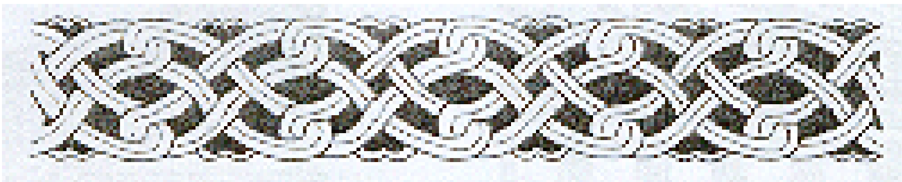
4.4 GRUPOS DE SIMETRÍAS DE LOS FRISOS

Los frisos, elementos sustanciales de la ornamentación clásica, constan de un determinado módulo, figura o motivo que se repite a lo largo de una banda rectangular, dándose siempre una periodicidad sistemática en la repetición del módulo, que es la base del ritmo que el friso comunica. Sorprende que motivos similares aparezcan en lugares y tiempos muy diferentes y distantes.

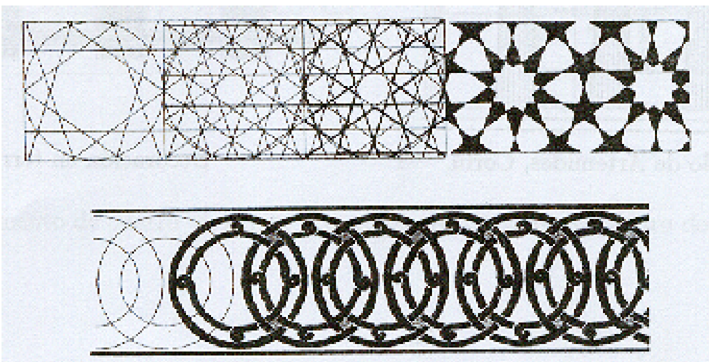


a) Grecia b) Túnez c) Egipto d) Nueva Guinea e) Japón f) México g) Arizona h) e i) actuales

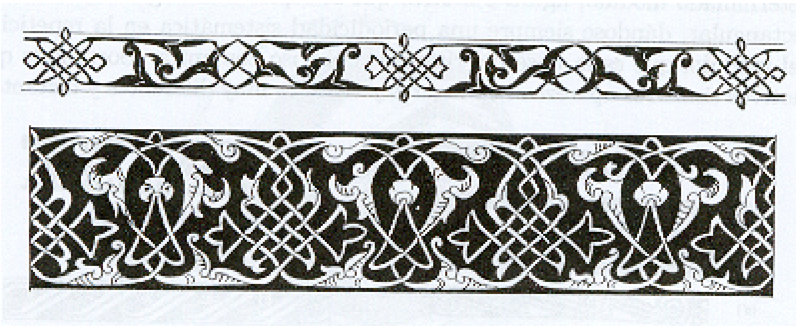
En el diseño del friso existen dos grados de libertad: la elección del motivo y la elección de las transformaciones que aplicadas al motivo inicial permiten llenar la banda horizontal que contiene al friso.



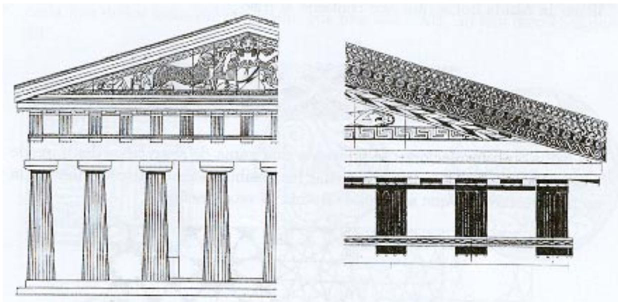
Estas transformaciones se limitan a una gama de siete tipos distintos de frisos. Esta limitación, lejos de frenar las posibilidades creativas, muestra la esencia geométrica que se esconde tras estos diseños.



Aparecen a lo largo de toda la historia, siendo notables por su riqueza ornamental los frisos árabes.

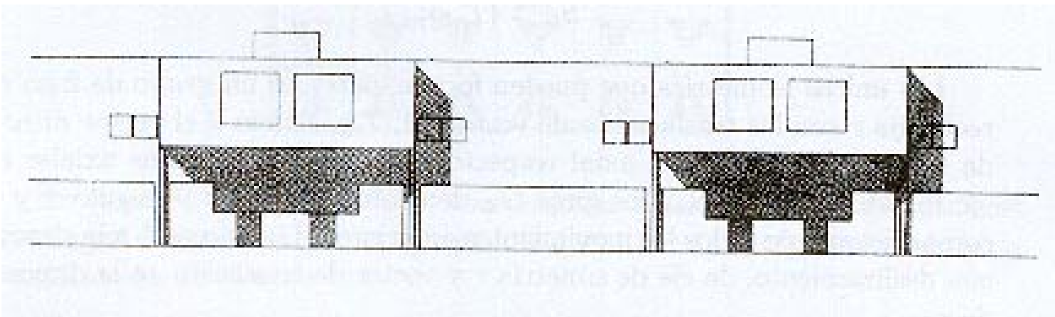


En el templo griego es donde el friso adquiere notoriedad constructiva: como banda que limita el acabamiento de los muros o las columnas sobre el arquitrabe, marcando la cornisa. Con ello comienza a desempeñar el doble papel de elemento arquitectónico y espacio susceptible de ornamentación.



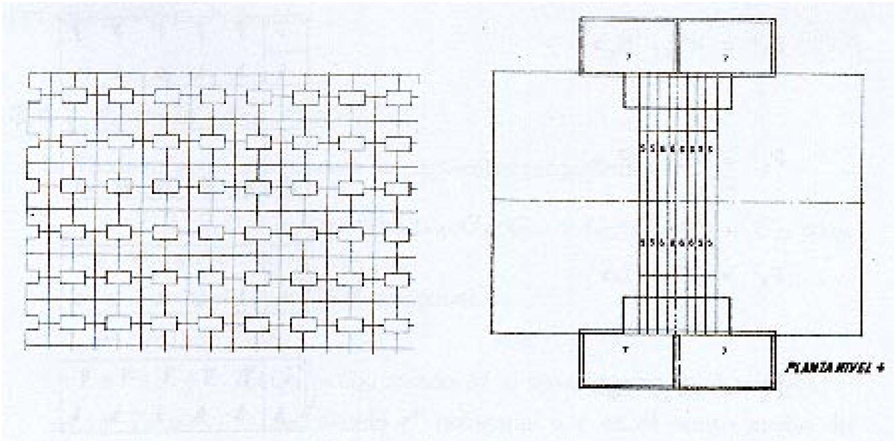
Templo de Artemides, Corfú. Decoración en terracota.

Actualmente surge el friso de edificaciones enlazadas. Con ello, el clásico motivo geométrico que se repite a lo largo de una banda, se sustituye por la planta de un edificio, capaz de generar, por traslación horizontal, edificios en hilera.



Alejandro de la Sota

A nivel conceptual, esta idea de frisos lleva directamente al problema de la coordinación modular.



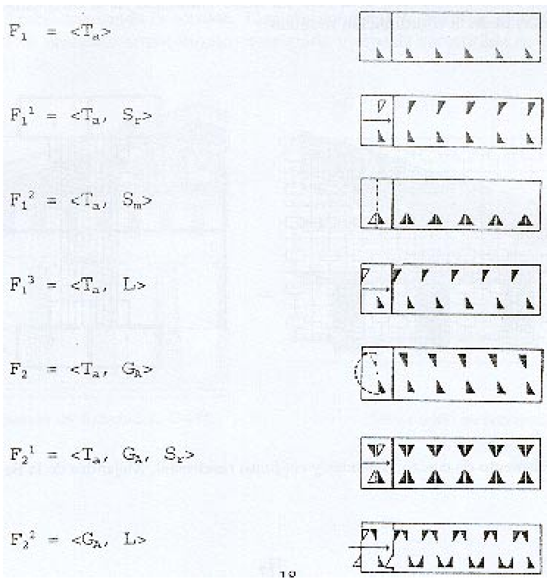
Pasemos ahora a hacer un estudio geométrico del friso:

Sea una recta r con vector director a. Un grupo de simetría de un friso es cualquier grupo de isometrías del plano que deje fija r y que contenga como únicas traslaciones al grupo generado por la traslación Ta.

Las únicas isometrías que pueden formar parte de un grupo de friso con recta fija r son las traslaciones del vector n x a, Tna, siendo a el vector director de la recta r, la simetría axial respecto de r, Sr, las simetrías axiales con eje m ortogonal a r, Sm, los giros Ga de centro en A Є r y ángulo π y las composiciones de todos los movimientos anteriores. Llamamos L a la simetría con deslizamiento, de eje de simetría r y vector de traslación en la dirección de r.

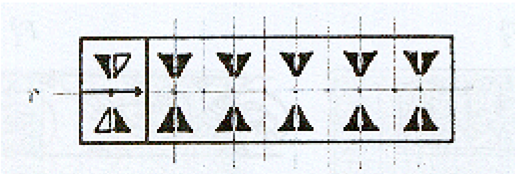
Teorema

Existen sólo siete grupos de frisos cuyos generadores son:

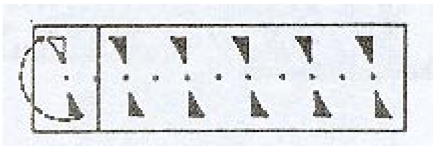


En el teorema anterior he indicado únicamente las isometrías que generan el grupo, a partir de las cuales por composición, obtenemos todas las isometrías que aparecen en el friso.

Por ejemplo, en el caso F_2, existen giros de amplitud π con centro en los puntos de la recta r que se indican en la siguiente figura

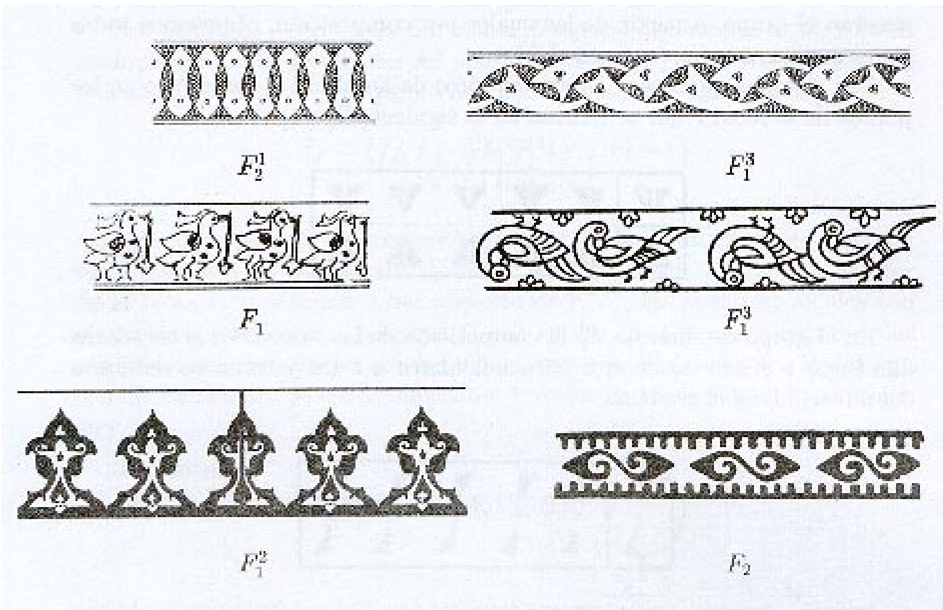


En el grupo de simetría F_{12} la composición de las isometrías generadoras dan lugar a simetrías de ejes perpendiculares a r tal y como se señala, a continuación en el esquema



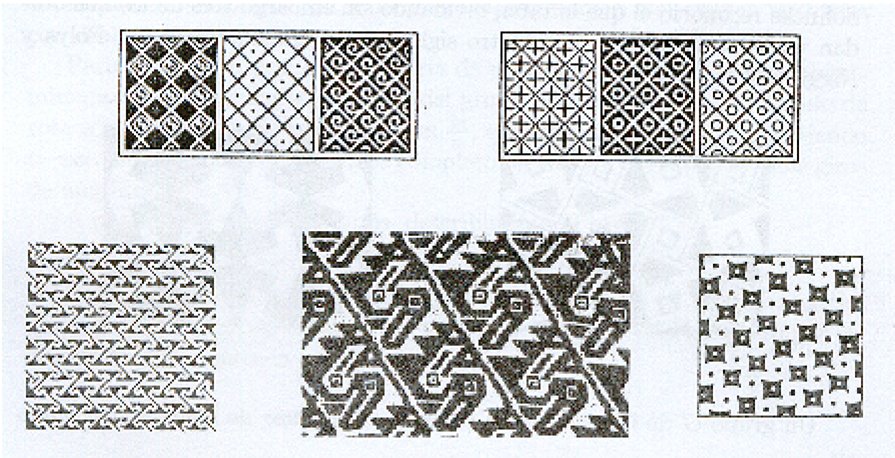
También podemos encontrar una simetría con deslizamiento que se obtiene por composición de Tn o Sr.

Aquí tenemos algunos ejemplos de frisos:

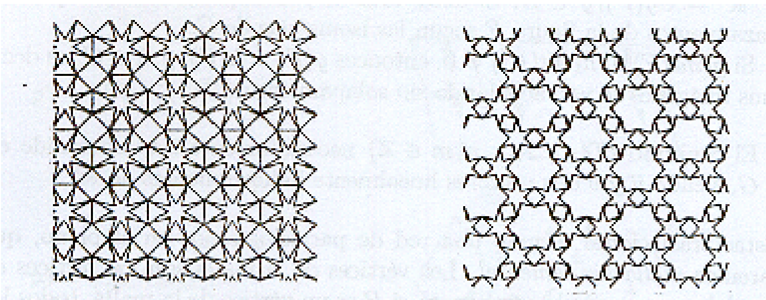


4.5 GRUPOS DE SIMETRÍA DEL PLANO

El recubrimiento del plano es una cuestión que ha suscitado gran interés en todos los tiempos. Esta inquietud, que ha dado lugar a diseños de gran belleza, ha surgido de problemas tan cotidianos como levantar muros, decorar paredes, pavimentar suelos, estampar tejidos....

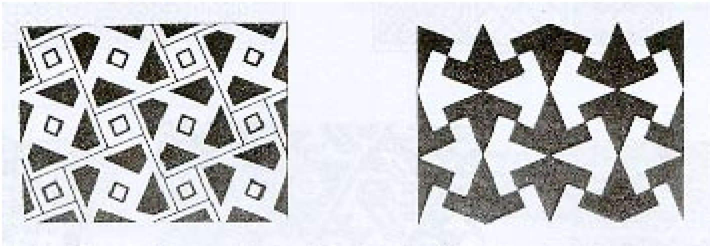


En todos los casos se observa que, a partir de una determinada figura, aplicando diversas isometrías, se genera un motivo que, por repetición, es susceptible de cubrir el plano.



El estudio matemático de este problema se conoce con el nombre de grupo de simetría del plano.

Aunque los artistas árabes tenían un conocimiento geométrico de los distintos grupos de simetría del plano, hasta el siglo XIX no se obtuvieron resultados matemáticos importantes. A raiz de la aparición de los rayos X se observó que estos grupos corresponden a la estructura de los cristales. Tras un estudio sistemático, el cristalógrafo Fedorov demostró en 1891 que existen únicamente 17. En 1869 Jordan había descrito 16 de los grupos y en 1874, Sohncke reconoció el que faltaba, olvidando sin embargo tres de los que Jordan ya había indicado. En nuestro siglo, fueron redescubiertos por Poyla y Niggli (1924).



Un grupo G de isometrías del plano se dice grupo de simetría del plano si:

- Existe una figura compacta y conexa (limitada por una curva cerrada) que verifique:

- $R^2 = \cup\, g(F)$, $g \in G$, es decir todo el plano queda cubierto por los desplazamientos de la figura F según las isometrías de G.
- Si $g[int(F)] \cap h[int(F)] \neq \emptyset$ entonces $g(F)$, g, $h \in G$, es decir F y sus imágenes se van acoplando sin solapamientos.

- El conjunto $\{Tnu \text{ o } Tmv, n, m \in Z\}$ necesariamente está contenido en G, siendo u y v dos vectores linealmente dependientes de R^2.

Estas traslaciones forman una red de paralelogramos en el plano, que llamaremos malla fundamental. Los vértices de la malla son los vértices de los paralelogramos que la componen: si P es un vértice de la malla, todos los puntos de la forma P + un + mv, con n, m $\in$ Z, también lo son. (u y v son los vectores linealmente independientes)

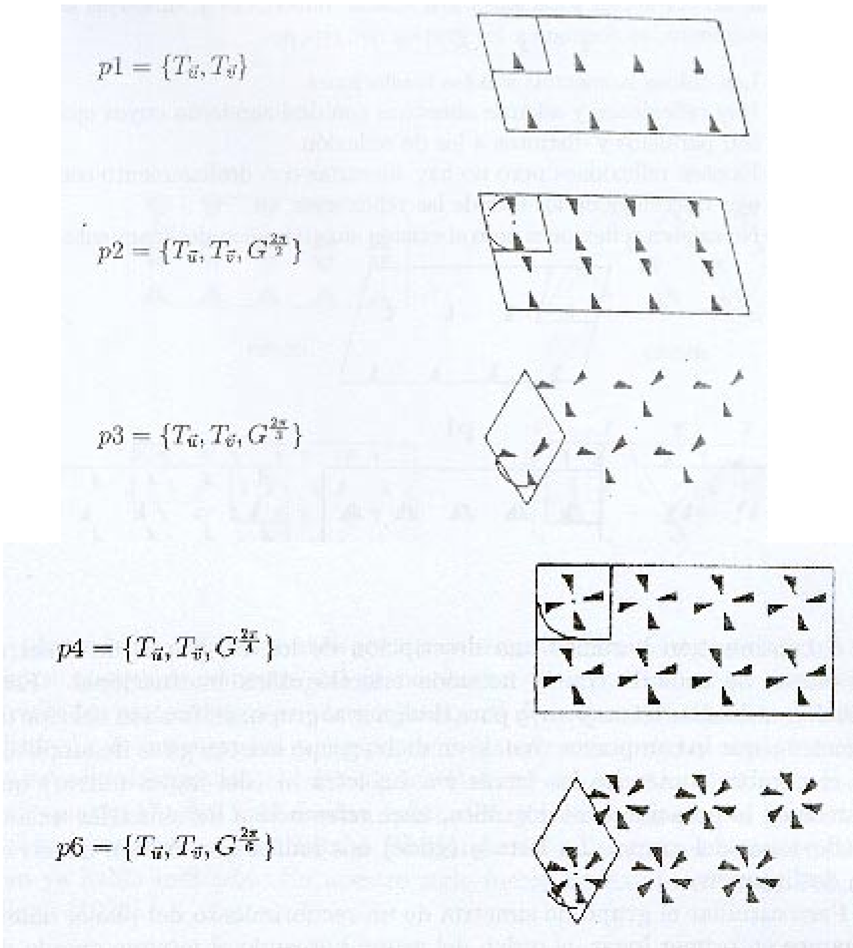
A continuación haré una descripción de los 17 grupos de simetría del plano, de acuerdo con la notación cristalográfica internacional. Esta notación utiliza las letras p, m, g para designar al grupo, en función del tipo de isometrías que lo componen. Así, si en dicho grupo existen giros de amplitud $2\pi/n$, el nombre contendrá las letras pn. La letra m (del inglés mirror) que aparece en la notación cristalográfica, hace referencia a las simetrías axiales o reflexiones del grupo. La letra g (glide) nos indica que existen simetrías con deslizamiento.

Para estudiar el grupo de simetría de un recubrimiento del plano, determinamos en primer lugar, el orden del grupo buscando el mínimo ángulo de rotación del diseño. Si este ángulo es $2\pi/n$, el orden del grupo es n (repitiendo n veces el giro obtenemos un giro completo de 360º).

A partir de 5 de estos grupos, describiremos el resto.

Teorema

Existen sólo 5 grupos de simetría del plano p1, p2, p3, p4 y p6 que contienen isometrías que conservan la orientación y cada uno está generado por las isometrías que aparecen entre llaves.

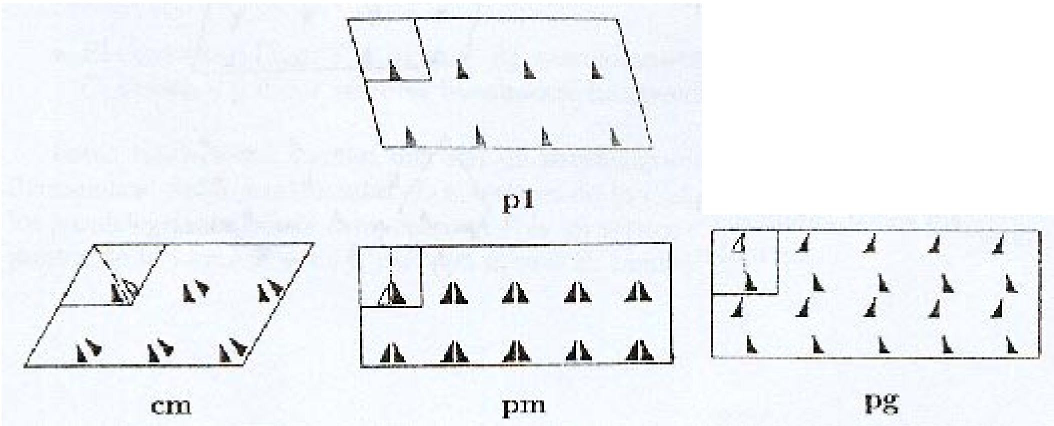


Los giros de los distintos grupos tiene sus centros en vértices de la malla fundamental.

En este teorema he indicado únicamente las isometrías que generan el grupo, a partir de las cuales por composición, obtenemos todas las isometrías que aparecen en el mosaico. Si consideramos la posibilidad de que el grupo de simetría contenga también reflexiones y simetrías con deslizamiento, aparecen 12 nuevos grupos.

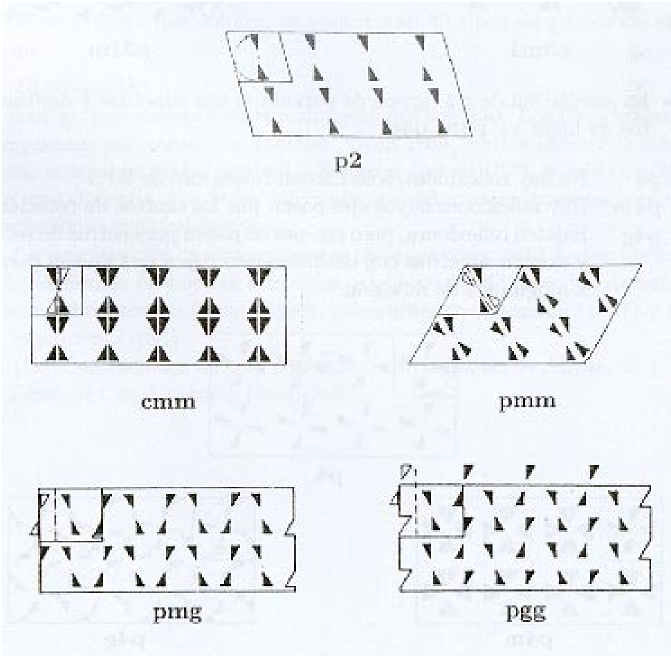
- La característica principal de los grupos que se obtienen a partir de p1 es que no contienen rotaciones. Al añadir reflexiones y simetrías con deslizamiento, se consiguen los grupos cm ,, pm y pg.

- p1: Las únicas isometrías son las traslaciones.
- cm: Hay reflexiones y además simetrías con deslizamiento cuyos ejes son paralelos y distintos a los de reflexión.
- pm: Existen reflexiones pero no hay simetrías con deslizamiento con ejes diferentes de los ejes de las reflexiones.
- pg: No existen reflexiones pero si existen simetrías con deslizamiento.



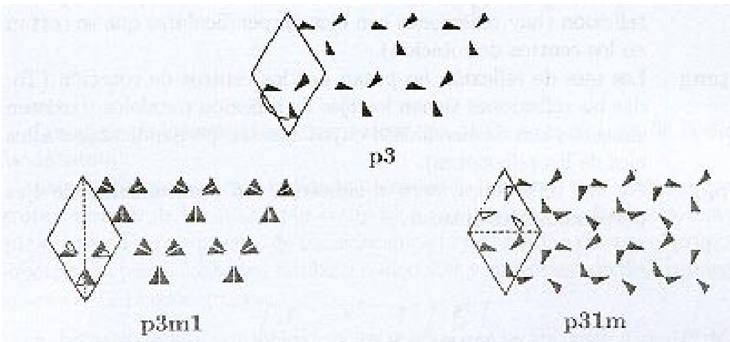
- Los grupos de período 2, que se obtienen a partir de p2 añadiendo reflexiones y simetrías con deslizamiento, son los siguientes

- p2: No hay reflexiones ni simetrías con deslizamiento, sólo existen giros de amplitud 180º.
- cmm: hay reflexiones cuyos ejes pasan por centros de rotación y centros de rotación por los que no pasa ningún eje de reflexión.
- pmm: Por todos los centros de rotaciones de 180º pasan ejes de reflexión (hay reflexiones con ejes perpendiculares que se cortan en los centros de rotación).
- pmg: Los ejes de reflexión no pasan por los centros de rotación (todas las reflexiones tienen los ejes de reflexión paralelos y existen simetrías con deslizamiento cuyos ejes son perpendiculares a los ejes de las reflexiones).
- pgg: No hay reflexiones, pero sí simetrías con deslizamiento de ejes perpendiculares entre sí.



- Ampliando p3 con simetrías y deslizamientos obtenemos los grupos: p3m1, p31m.

- p3: No hay reflexiones, sólo giros de amplitud 120º.
- p3m1: Por todos los centros de las rotaciones de 120º pasan ejes de reflexión.
- p31m: Existen reflexiones, pero hay centros de rotación de 120º por los que no pasa ningún eje de reflexión.

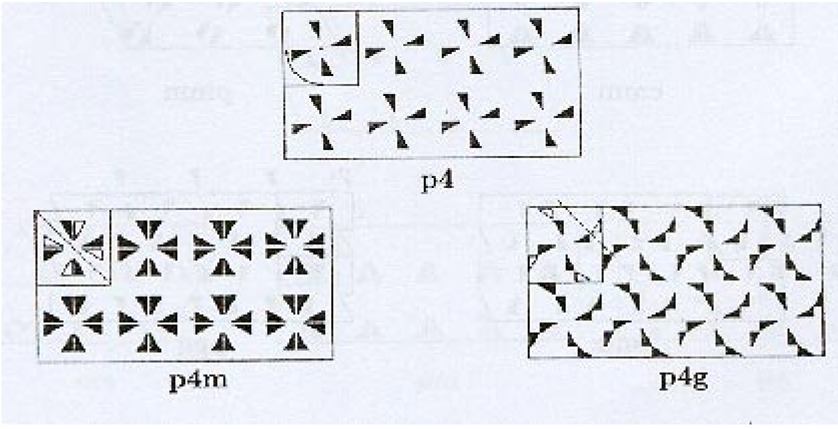


- La ampliación de p4 (grupo de período 4) con simetrías y deslizamientos da lugar

a : p4m, p4g

- p4: No hay reflexiones, sólo existen rotaciones de 90º.
- p4m: Hay reflexiones cuyos ejes pasan por los centros de rotación.

- p4g: Existen reflexiones, pero sus ejes no pasan por los centros de rotación y existen simetrías con deslizamiento cuyos ejes no son paralelos a ningún eje de reflexión.



- Ampliando p6 con reflexiones resulta p6m.

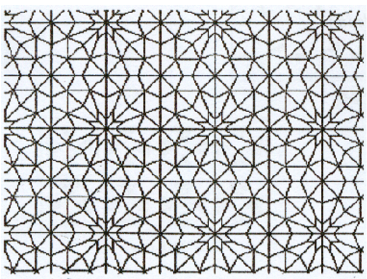
- p6: No hay reflexiones, y las rotaciones son de 60º.
- p6m: Existen reflexiones.

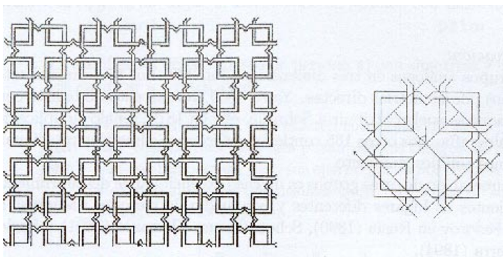
Teorema

Sólo existen 17 grupos de simetría del plano,5 de ellos contienen isometrías que conservan la orientación y en los 12 restantes aparecen reflexiones y simetrías con deslizamiento.

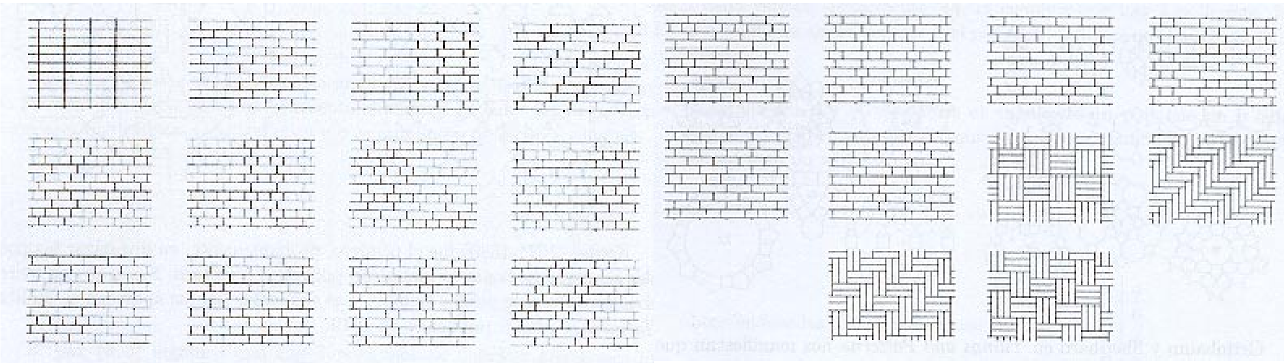
Si se utilizan dos colores, se encuentran 80 tipos de grupos de simetría plana.

Aquí tenemos unos ejemplos de simetrías.



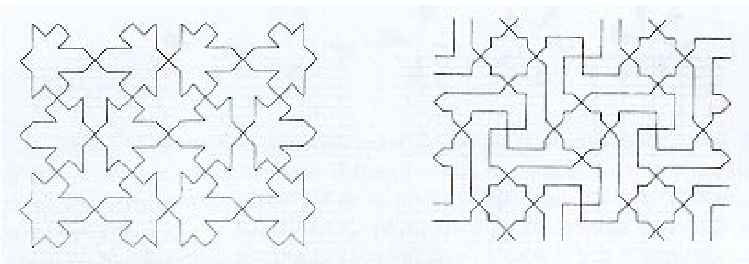


También se pueden obtener gran variedad de mosaicos con simples ladrillos. Si se emplean distintos colores y texturas, el número de posibilidades aumenta considerablemente.

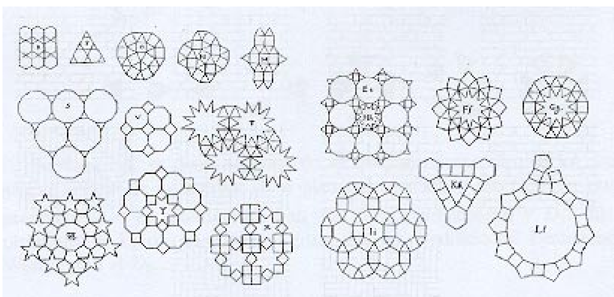


4.6 TEORÍA DE MOSAICOS

Un mosaico es un recubrimiento especial del plano, que se genera con la repetición, en dos direcciones distintas, de un módulo que cumple ciertas caracteríasticas de acoplamiento y regularidad. Los mosaicos suelen estar fabricados en piedra, cerámica, yeso.... y las piezas que los componen encajan, sin huecos, recubriendo el plano u otra superficie.

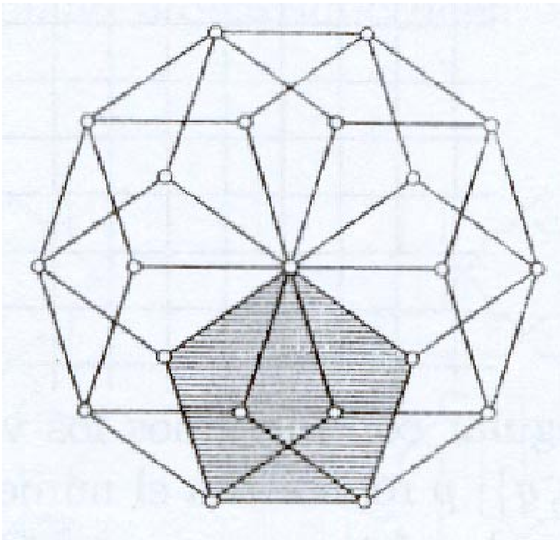


Kepler fue el primero, probablemente, en investigar las posibles maneras de llenar el plano con polígonos regulares. Sus trabajos fueron olvidados durante mucho tiempo. Las siguientes figuras aparecen en su libro Harmonoice Mundi publicado en 1619.



Los mosaicos regulares son los geométricamente más sencillos.
Están formados por polígonos convexos iguales y regulares.

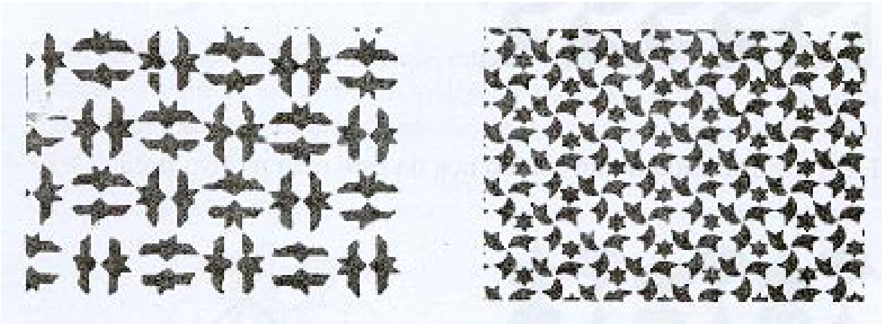
El plano sólo puede rellenarse con polígonos regulares, ya que necesitamos que los ángulos que confluyen en cada vértice sumen 360º. Si eligiésemos pentágonos, con un número finito de ellos convergiendo en un punto cubriríamos el plano, pero con solapamiento.



4.7. ARABESCOS DE LA ALHAMBRA DE GRANADA

En la historia de las Matemáticas los árabes ocupan un lugar destacado por sus aportaciones en el terreno de la Geometría, la Aritmética y la Astronomía. Gracias a ellos conocemos la mayoría de las obras de los griegos ya que trajeron a Europa los manuscritos traducidos de la Geometría Euclídea. Desde un punto de vista estético nos han dejado una importante herencia que culmina en los mosaicos de la Alhambra, auténticas joyas geométricas que hacen de este conjunto artístico el máximo exponente del arte nazarí.

Este monumento, el más famoso islámico medieval, es un conjunto de edificios construido como acrópolis y ciudad de la corte de la dinastía nazarí que contiene exquisitas estancias y bellos jardines. Sus paredes, con yeserías interrumpidas por hileras de ventanas, tienen zócalos alicatados cerámicos e inscripciones ornamentales que hacen de la Alhambra la expresión más hermosa del arte geométrico.

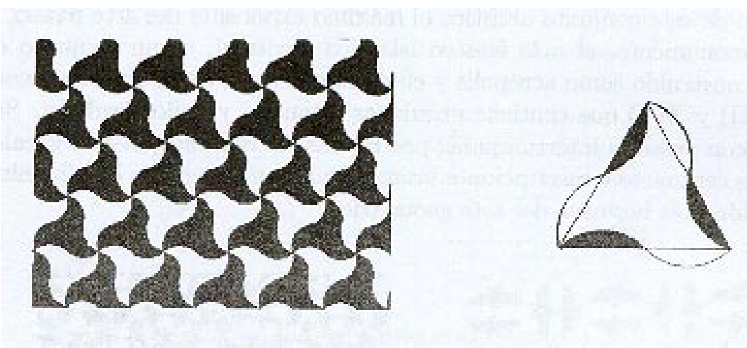


¿A qué se debe esta abundancia en el arte hispano-musulman? La razón fundamental es de carácter religioso. En primer lugar, porque el Corán prohibe expresamente cualquier representación icónica de Alá. Y por otra parte, la divinidad se identifica con la singularidad.

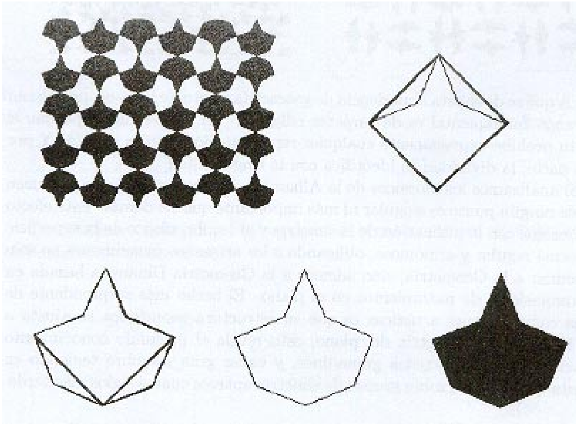
Si analizamos los mosaicos de la Alhambra, el efecto visual que producen es que ningún punto es singular ni más importante que otros. Este efecto se consigue con la utilización de la simetría y el recubrimiento de la superficie de forma regular y armoniosa, obligando a los artesanos musulmanes no sólo a recurrir a la Geometría, sino además a la Geometría Dinámica basada en la composición de movimientos en el plano. El hecho más sorprendente de estas composiciones artísticas es que su estructura geométrica se ajusta a los 17 grupos de simetría del plano; esto revela el profundo conocimiento matemático de los artistas granadinos, y causa gran asombro teniendo en cuenta que la teoría sobre grupos de simetría aparece cuatro siglos más tarde.

Entre las técnicas que utilizaban para elaborar los motivos de los mosaicos destaca la transformación de los polígonos regulares, como es el caso de la pajarita nazarí y el hueso nazarí.

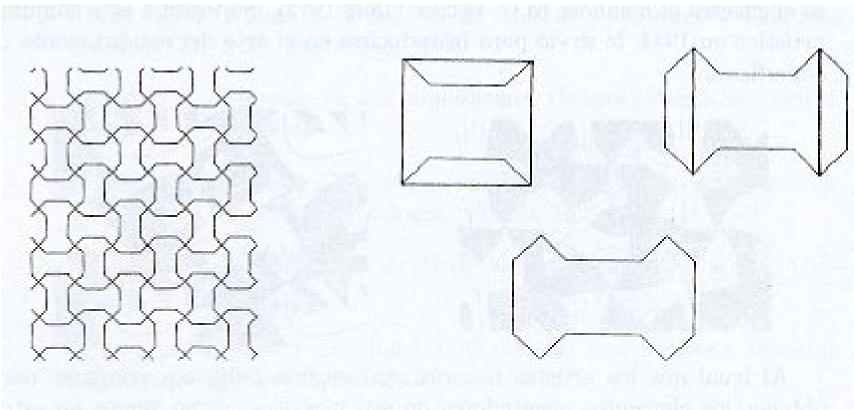
La pajarita se obtiene modificando un triángulo equilátero. Cada parte sombreada en negro se recorta y se añade sobre cada uno de los lados del triángulo.



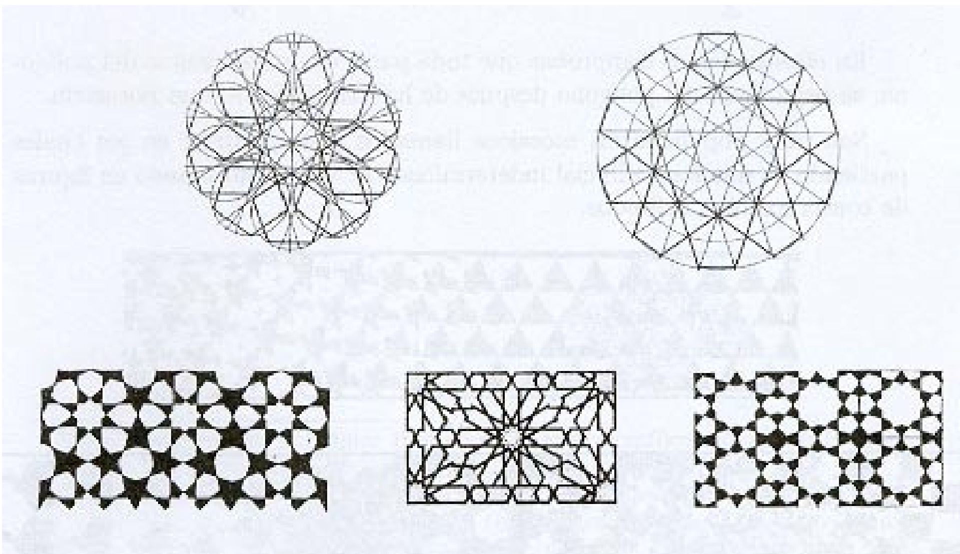
La transformación del rombo, nos da este motivo floral.



Así obtenemos el hueso nazarí.



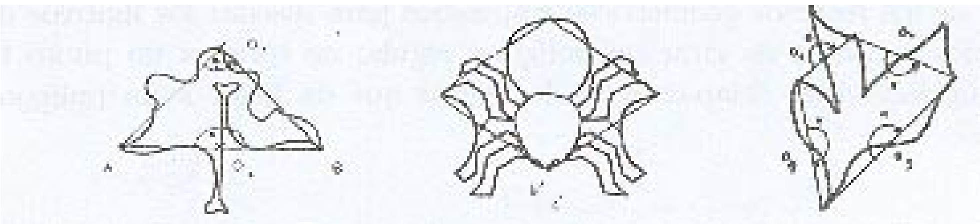
Otro de los recursos geométricos empleados para diseñar los motivos de un mosaico consistía en girar un polígono regular en torno a un punto fijo, produciéndose un solapamiento de figuras que da lugar a un polígono estrellado.



4.8 MOSAICOS DE ESCHER

La Alhambra ha inspirado a muchos artistas a lo largo de los siglos, entre ellos se encuentra el holandés M. C. Escher. Su visita a este conjunto le sirvió para introducirse en el arte del recubrimiento de superficies.

Al igual que los nazaríes, transforma polígonos regulares para obtener los elementos generadores de sus mosaicos. Aquí tenemos algunos ejemplos.



5. PROPORCIÓN

El concepto de proporción deriva históricamente del proceso de comparación. Si nos fijamos en los métodos de medición de longitudes de las antiguas civilizaciones: el dedo, la palma, el codo, el brazo, el pie, el paso, etc., representaban unidades básicas, de referencia humana, con las que se establecieron sistemas de medición consistentes. La comparación relativa de dichas unidades de medida dio lugar a diferentes sistemas metrológicos de proporciones. Así, en Babilonia:

1 palma = 1/6 codo

y en Grecia:

1 palma = 4 dedos

El carácter antropomórfico de estos sistemas de medición hizo que la teoría de proporciones tuviera un papel relevante no sólo en la construcción de edificios notables, sino también en la pintura y en la escultura.

La teoría de la proporción asumió una particular importancia en el Renacimiento. Según Vitruvio: *"la proporción es la conmensurabilidad de cada uno de los miembros de la obra y de todos los miembros del conjunto de la obra mediante una determinada unidad de medida o módulo"*. Su sistema de medición que se ha denominado armónico, considera como unidad de medida la altura (o el rostro) de un hombre (bien formado).

Alberti con su tratado *Sobre la pintura* de 1435 y Durero con su obra *Los cuatro libros de las proporciones humanas* contribuyeron enormemente a esta teoría de proporciones que culminaría con los estudios de Leonardo da Vinci sobre la figura humana.

A partir del siglo XVII comenzó una lenta transformación del concepto de proporción y de su aplicación a la arquitectura. Tras un período de decadencia, que duraría hasta el siglo XIX, la toría matemática acerca de las proporciones dinámicas toma un impulso decisivo gracias a las nuevas tendencias artísticas: Escuela Cubista, Spirit Nouveau y el movimiento Dstijl y el Bauhaus.

En la segunda mitad del siglo XX la teoría de la proporción deja paso a la coordinación modular.

5.1 EL PROBLEMA ARMÓNICO

Al concepto aritmético de relación entre dos magnitudes se le denomina razón o proporción. En el caso de dos longitudes al compararlas con respecto a una unidad, la razón a/b es la medida de la magnitud a si se toma como unidad la magnitud b. En la obra de Euclides, cuya teoría de razones y proporciones está basada en Eudoxio, discípulo de Platón, encontramos la siguiente definición:

"*Razón es la relación cuantitativa en lo que se refiere a la dimensión entre dos magnitudes homogéneas. La proporción es la igualdad de razones".*

Esto conduce a la ecuación general de la proporción geométrica de cuatro magnitudes (proporción discontínua)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

que en el caso en el que b = c se obtiene la proporción geométrica continua

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$$

Podemos obtener una proporción continua partiendo únicamente de dos magnitudes a y b:

$$\frac{a + b}{a} = \frac{a}{b}$$

Esta ecuación dice: “La razón entre la suma de dos magnitudes consideradas y una de ellas (la mayor), es igual a la razón entre ésta y la otra (la menor)”.

Aplicada a las longitudes que dividen un segmento AC en dos partes AB y BC por un punto B, de tal modo que

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

Corresponde a lo que Euclides llama “división de una longitud en media y extrema razón”.

Esta razón fue llamada divina proporción por Fray Lucca Paccioli di Borgo y mostraré más adelante su influencia en los cánones arquitectónicos.

Los griegos, y entre otros Nicómano de Gerasa (siglo I) escribían una proporción bajo la forma de una progresión. Por ejemplo, en una progresión geométrica del tipo

$$1, k, k^2, k^3, ..., k^n...$$

los elementos que definen una proporción geométrica continua, es decir,

$$\frac{1}{k} = \frac{k}{k^2}$$

Además, dados tres elementos de una progresión geométrica a, b, c, el término b se denomina media geométrica y puesto que

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

se obtiene que

$$b = \sqrt{ac}$$

En el caso de que tres elementos a, b, c, estén en proporción aritmética, b se define como la media aritmética y su valor es

$$b = \frac{a + c}{2}$$

ya que los términos de esta proporción cumplen que $b - a = c - b$.

En las proporciones armónicas

$$\frac{(b - a)}{a} = \frac{(c - b)}{c}$$

la media armónica es

$$b = \frac{2ac}{a + c}$$

Tanto los tres tipos de proporción (la proporción aritmética, la proporción geométrica y la proporción armónica) como las medias proporcionales se atribuyen a Pitágoras.

5.2 LA PROPORCIÓN DEL RECTÁNGULO

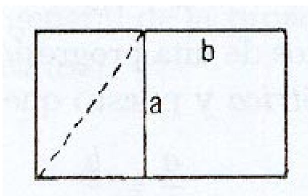
Dada su importancia geométrica dentro de la arquitectura voy a pasar a estudiar la proporción del rectángulo.

Sea un rectángulo, de lados a y b, se define la proporción del rectángulo como el cociente:

$$p(a, b) = \frac{\text{Máximo } (a, b)}{\text{Mínimo } (a, b)}$$

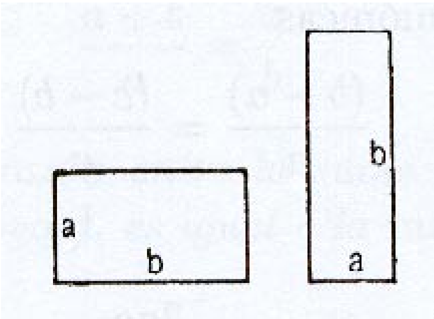
Es decir es el cociente entre el lado mayor y el lado menor del rectángulo.

Su valor, por tanto, es siempre mayor o igual que 1. Sólo en el caso del cuadrado la proporción es 1.



Además esta proporción así definida no depende del orden de los lados puesto que:

$$\text{Max}\,(a, b) = \text{Max}\,(b, a)$$
$$\text{Min}\,(a, b) = \text{Min}\,(b, a)$$

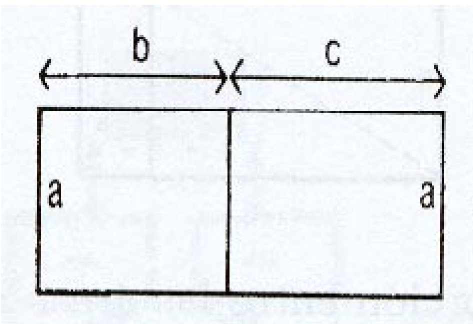


Algunas propiedades de este tipo de proporción que pueden resultar de interés son las siguientes:

Propiedad 1.

La proporción es aditiva en ciertas condiciones.

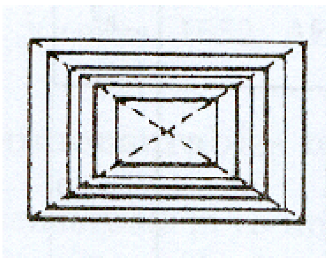
Si $a \leq \text{Min}\,(b, c)$ entonces $p(a, b) + p(a, c) = p(a, b + c)$



Propiedad 2.

La proporción es una función continua.

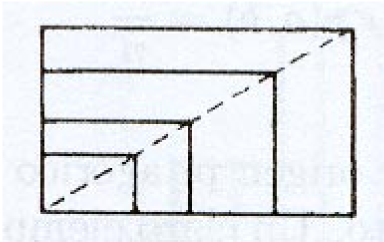
$\text{Lim}_{n\to\infty}\, p(a_n, b_n) = p(a, b)$



Propiedad 3.

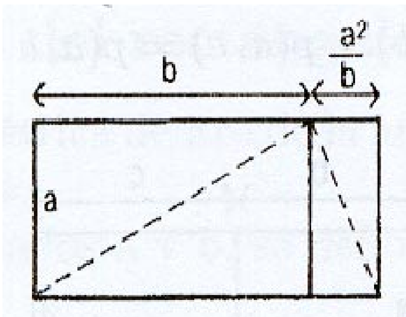
La proporción es invariante por homotecias y semejanzas.

Si $\lambda > 0$ entonces $p(a, b) = p(\lambda a, \lambda b)$



Propiedad 4.

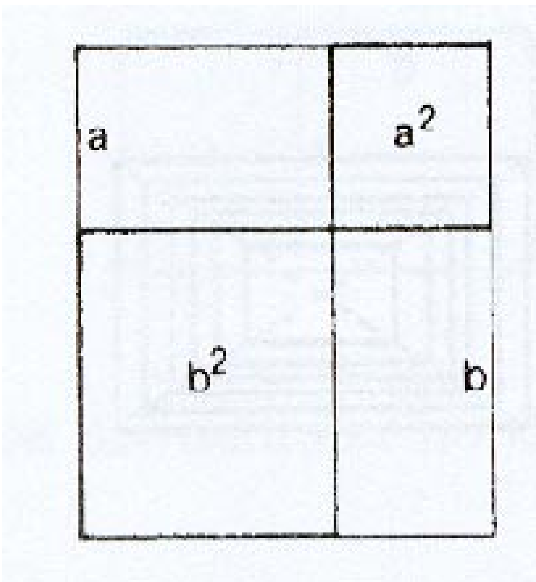
Dado un rectángulo de lados a, b, sus rectángulos recíprocos son dos rectángulos construidos sobre cada uno de sus lados que tienen a su vez como lados a, a^2/b y b, b^2/a.



Propiedad 5.

La proporción entre las áreas de los cuadrados sobre los lados de un rectángulo es el cuadrado de la proporción de dicho rectángulo.

Es decir si el rectángulo tiene de lados a, b entonces $p(a^2, b^2) = p^2(a, b)$



5.2.1. PROPORCIONES CONMENSURABLES O ESTÁTICAS.

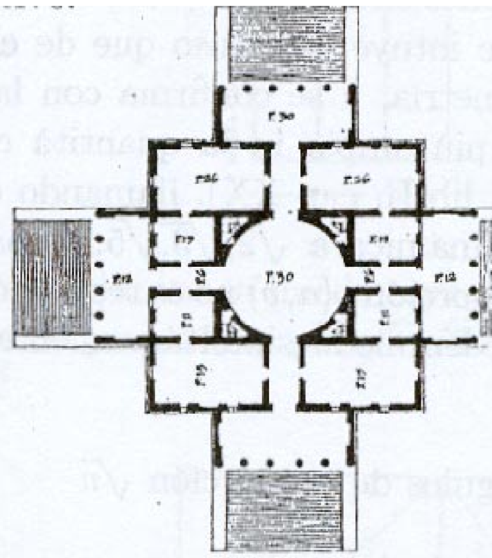
Se dice que p(a, b) es conmensurable si es un número racional positivo, es decir

$$p(a, b) = \frac{m}{n}$$

siendo m y n números positivos.

Este tipo de proporción de origen pitagórico tuvo un papel relevante en los arquitectos del Renacimiento. Un claro ejemplo de cómo las proporciones entre las distintas partes de una obra arquitectónica se pueden expresar por relaciones de números enteros, lo podemos observar en Santa María Novella de Florencia, de Palladio, quien dio gran importancia a estas relaciones estáticas. Su novedad fundamental consistió en conectar sistemáticamente una estancia con otra por medio de proporciones armónicas.

Los métodos de Palladio invertían el modo clásico de proceder. En lugar de subdividir en partes menores las dimensiones globales del edificio según relaciones por números enteros, determina una serie de proporciones para las estancias: 1:1, 1:2, 2:3, 3:4... y las yuxtapone luego con un procedimiento aditivo.

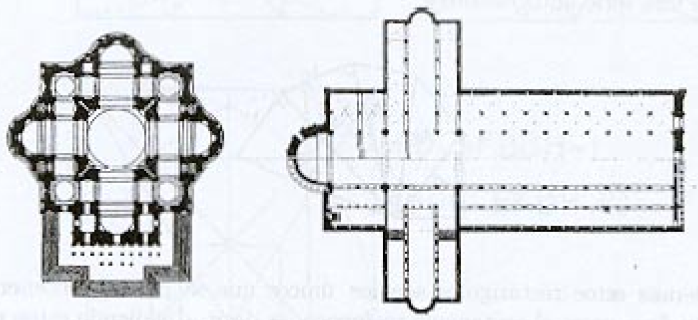


Villa Capra. Vicenza, 1552. Andrea Palladio

5.2.2. PROPORCIONES INCONMENSURABLES O DINÁMICAS

Se dice que p(a, b) es inconmensurable si es un número irracional positivo.

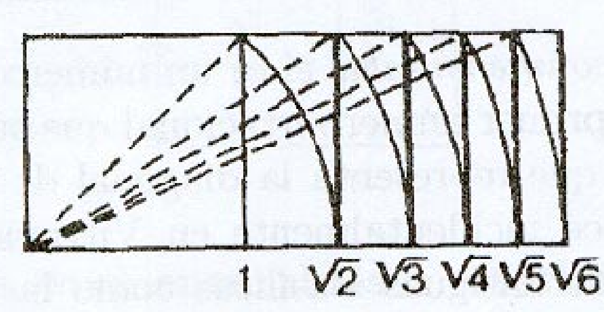
El número √2 fue el primer número irracional que suscitó el interés de los antiguos. Este número, que representa la diagonal de un cuadrado de lado unitario, también aparece incidentalmente en Vitruvio. Es posible hallar √2 en algunas plantas de antígual basílicas como la de San Pedro y Sta. Práxedes en Roma. La proporción √3 y √5 aparecen en el trazado de la catedral de Pisa.



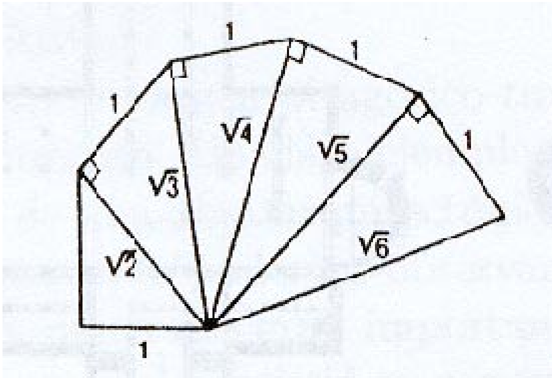
Planta de Miguel Angel. S. Pedro del Vaticano (1546)
Catedral de Pisa (s.XI-XII)

Los números √2, √3, √5, son tales que los cuadrados construidos sobre sí mismos conducen a sucesiones ligadas por proporciones conmensurables. La importancia de estas proporciones irracionales (irracionales linealmente pero racionales en su cuadrado), se intuye en el uso que de ellas hace Vitruvio en delicados problemas de simetría, y se conforma con la frase de Paccioli "che la proporzione si molto più ampia in la quantità continua che in la discreta" (Divina Proportione, lib II, cap XX), llamando discreta o estática a ½, 2/3, ¾ y continua o dinámica a √2, √3, √5. Geométricamente esto indica que el rectángulo de proporción p(a, b) no es repetición de un cuadrado, o bien que sus lados no se pueden medir simultáneamente por repetición de una misma unidad.

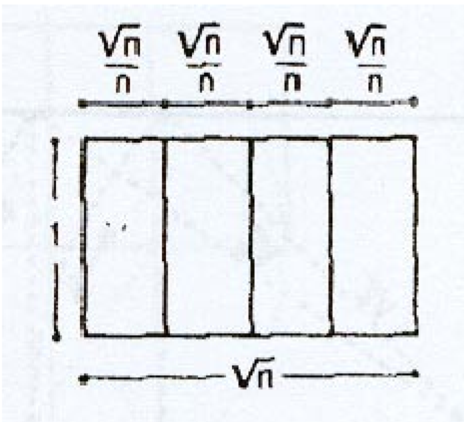
Si consideramos los rectángulos de proporción √n
P(a, b) = √n



Observamos que una de las características de estos rectángulos es que forman una seria autogenerable.

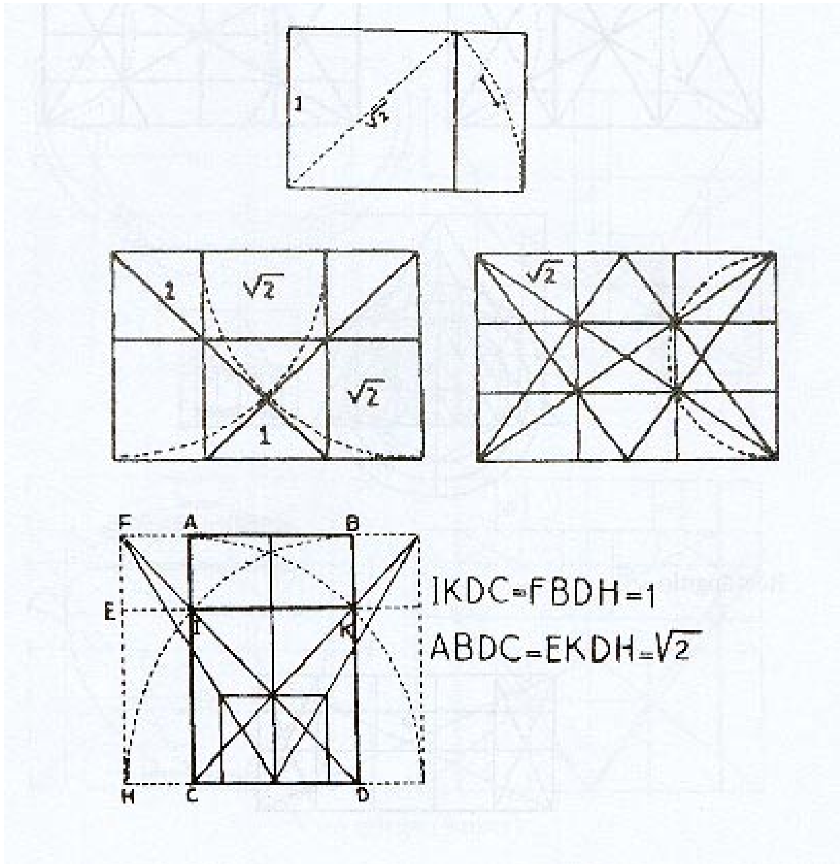


Además estos rectángulos son los únicos que se pueden obtener como reunión de n veces el rectángulo recíproco, es decir, dividiendo estos rectángulos en n partes por el lado mayor, se obtienen n rectángulos de idéntica proporción al dado.

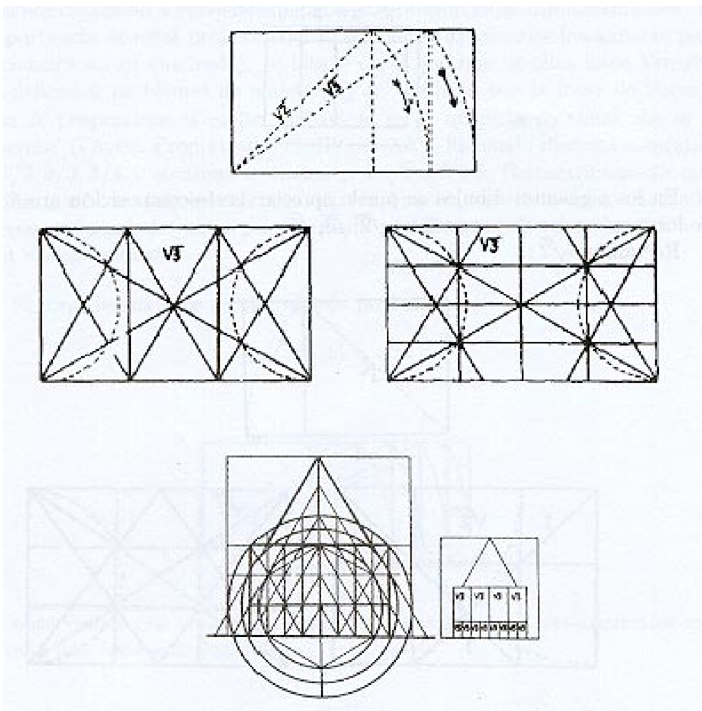


En los siguientes dibujos se puede apreciar la descomposición armónica de los rectángulos de proporción √2, √3, √5.

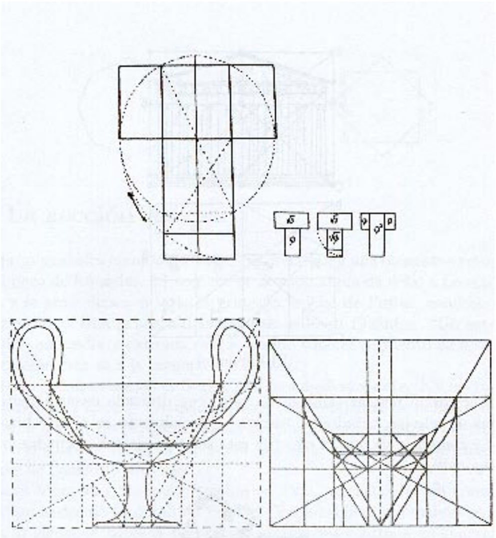
Rectángulo √2:



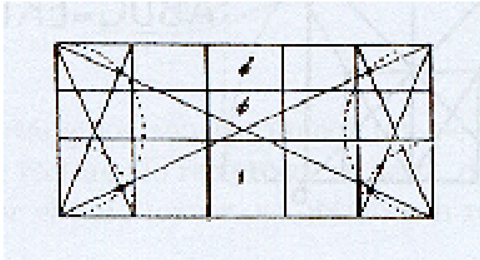
Rectángulo √3:

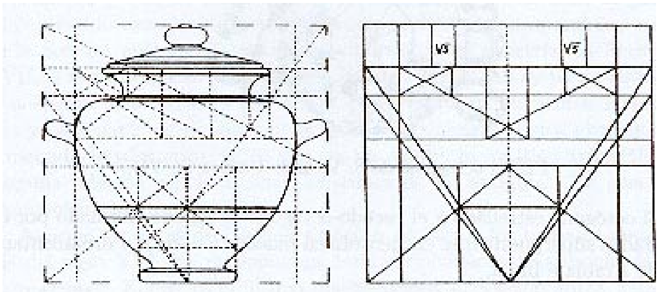


Rectángulo √5:

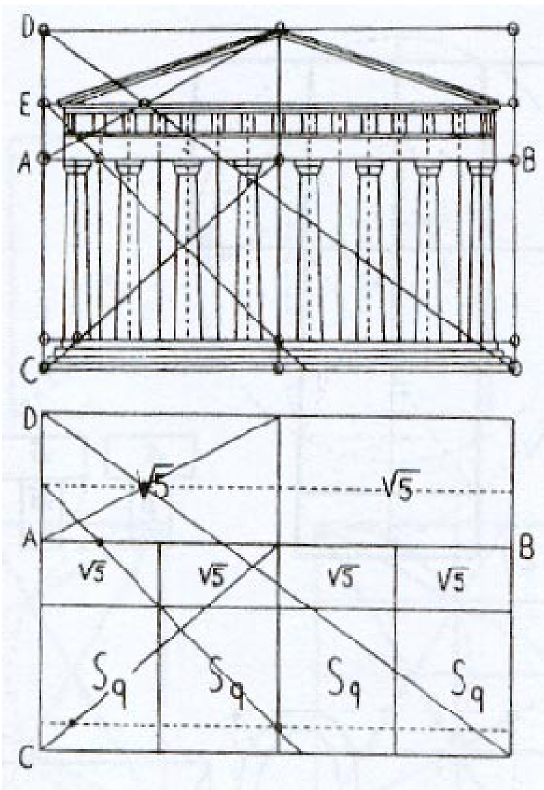


Vasija griega.



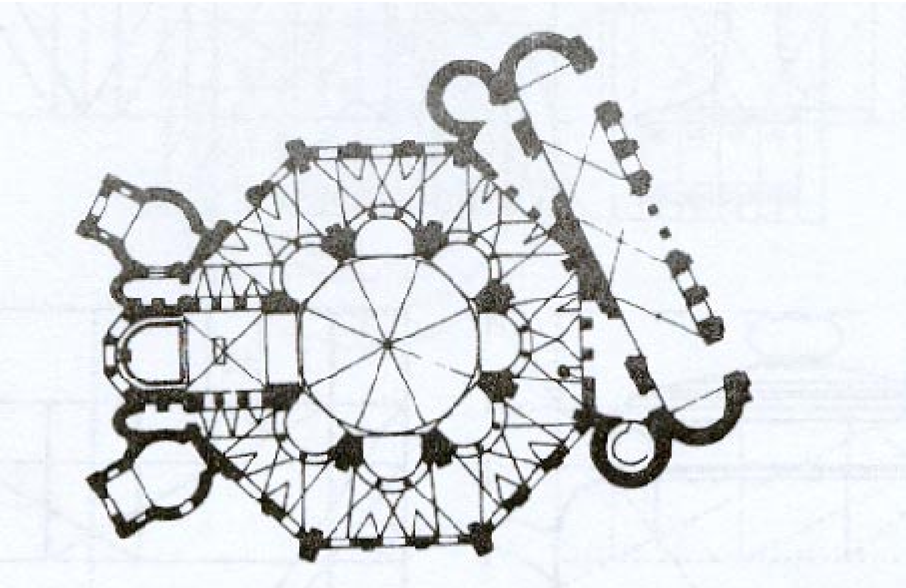


Vaso griego (Samos)



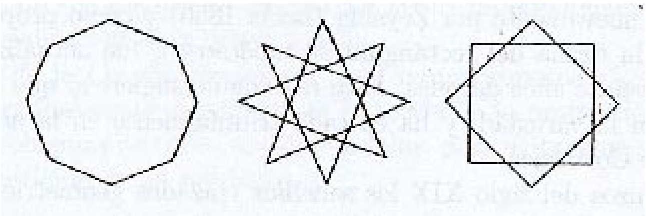
El Partenón

El octógono regular también ha sido muy utilizado en arquitectura en plantas de iglesias, catedrales, torres... especialmente en el arte bizantino, árabe y románico ya que su simetría está relacionada con el cuadrado y con su diagonal √2.



Planta octogonal de S. Vital de Rávena (s. VI)

El octógono estrellado y el pseudo-octógono estrellado (formado por dos cuadrados superpuestos) se encuentran en muchos mosaicos y ornamentaciones de Arabia e India.



6. LA SECCIÓN AÚREA

Esta proporción ha mantenido un interés creciente y una constante actualidad con el paso de los siglos. El nombre de Sección Aúrea se debe a Leonardo da Vinci y se simboliza con la letra griega φ, inicial de Fidias, escultor griego que la utilizó. Una primera definición de ella se halla en Euclides: “un segmento se divide en media y extrema razón cuando todo el segmento es a su parte mayor como esta es a la menor”.

El monje Luca Paccioli di Borgo, nacido a mediados del siglo XV en Toscana, estudiando en Platón y Vitruvio el papel trascendental de la Sección aúrea en cuanto a regir las proporciones de los cinco cuerpos platónicos, compone el tratado sobre la Divina Proporción (ilustrado si recuerdan por Leonardo).

En el Vitruvio editado en Bolonia en 1532, se encuentra un comentario muy iluminador de Caporali de Perusa: "La analogía de Vitruvio en que se apoya la symetría no es la proporción geométrica continua en general, sino la la divina proporción de Fra Luca y de Durero", es decir, la Sección aúrea.

Palladio y Miguel Angel fueron probablemente los últimos arquitectos que aplicaron conscientemente a sus composiciones las proporciones nacidas de la Sección aúrea y los conceptos vitruvianos de simetría. A fines del siglo XVII, el sentido exacto de la palabra simetría es olvidado y reemplazado por acepción aún corriente hoy día: la repartición de elementos idénticos a una y otra parte de un eje o plano de simetría. Estos elementos son a menudo iguales entre sí, lo que da un equilibrio estático aritmético, sin ninguna relación con la simetría dinámica de los antiguos. En general, la arquitectura se ha mecanizado.

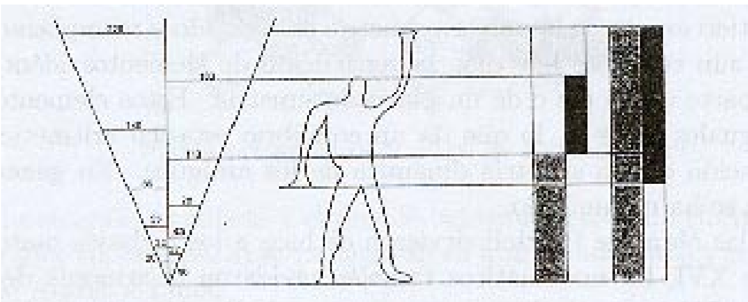
Aunque las obras de Paccioli sirvieronn de base a los trabajos matemáticos del sglo XV, los matemáticos también olvidaron la armonía de estas proporciones, Kepler es el último que menciona la Sección aúrea, citándola como una de las joyas de la Geometría. A mediados del siglo XIX fue descubierta nuevamente por Zeysing (hacia 1850) y como proporción plana ideal (bajo la forma del rectángulo de módulo φ), fue actualizada por Fechner unos veinte años después. Este rectángulo sugiere al que lo contempla la unidad en la variedad, y ha entrado triunfalmente en la arquitectura a través de Le Corbusier.

A comienzos del siglo XIX los sencillos trazados geométricos son sustituidos por trazados más rigurosos basados en la sección aúrea. En lugar de la simetría bilateral y rotatoria, consideradas demasiado estáticas, los artistas prefieren la euritmia (eu = bien, ritmia = ritmo) generada a través de la composición equilibrada, pero no simétrica, de elementos.

Las teorías proporcionales reservan una particular atención, en el campo de la arquitectura, a las técnicas de los trazados reguladores desarrollados en la segunda mitad del siglo XIX y principios del XX. Surge el deseo de controlar la composición con leyes matemáticas. Todos los artistas de los movimientos de vanguardia se interesaban por el instrumento geométrico y matemático, para investigar la estructura interna de la obra.

A mediados del siglo XX la aparición del Modulor (París, 1948) (module = unidad de medida y section d´or) de Le Corbusier, marca un punto culminante de la teoría de la proporción. La propuesta de diseño que hace Le Corbusier es el establecimiento de un módulo arquitectónico que contemple a la vez el dimensionamiento humano y la necesidad internacional de producción en serie. Propone para la arquitectura un sistema modular susceptible de crear armonía arquitectónica. A partir de rectángulos aúreos por superposición y división, construye la malla fundamental: fijada la unidad d, altura del hombre, considera dos series, la serie roja y la serie azul:

Serie roja: d, φd, $\varphi^2 d$, $\varphi^3 d$,....
Serie azul: 2d, $2\varphi d$, $2\varphi^2 d$, $2\varphi^3 d$,...

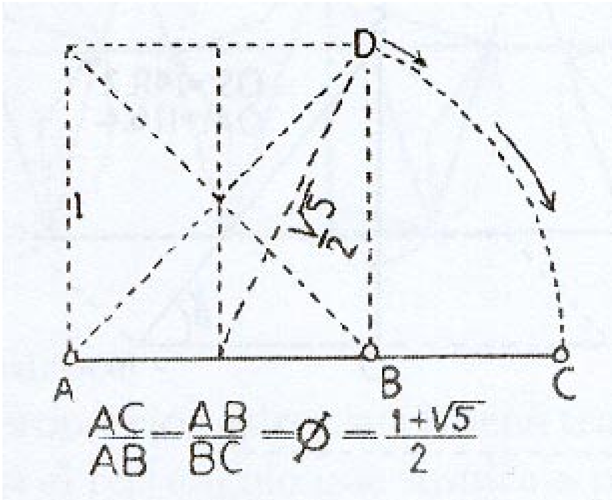


Este sistema proporcional es fuente de rectángulos aúreos y de cuadrados dobles. Uno de sus méritos es enlazar las series proporcionales y el mundo de la industrialización de la construcción.

A partir de la Convención sobre “La Divina Proporción” en Milán en 1951, disminuye gradualmente el interés por la teoría de la proporción para dejar paso a los problemas de coordinación modular, para evitar que sean sencillamente la repetición de un producto.

6.1 CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LA SECCIÓN AÚREA

Consideremos un cuadrado de lado la unidad y realicemos la siguiente construcción geométrica: abatir sobre el lado AB, el segmento que une el punto medio de AB con D obteniendo el punto C.



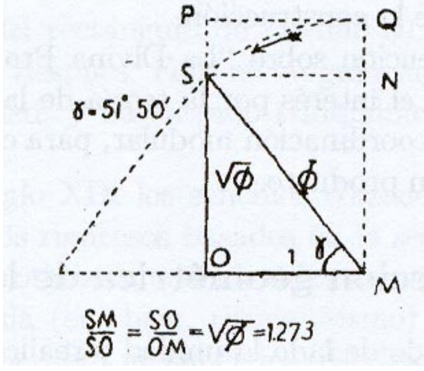
Como el segmento AB es el lado del cuadrado, la longitud del segmento AC es φ.

6.2 LA SECCIÓN AÚREA EN LOS POLÍGONOS

<u>El triángulo de la Gran Pirámide.</u>

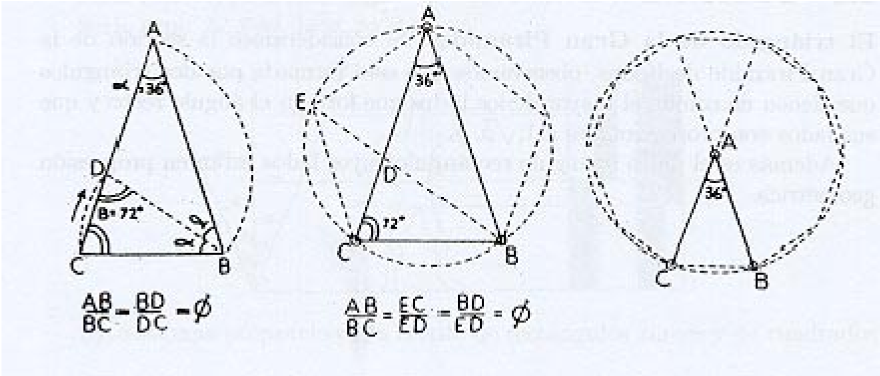
Si consideramos la sección de la Gran Pirámide de Keops, observamos que está formada por dos triángulos que tienen en común el mayor de los lados que forman el ángulo recto y que sus lados son proporcionales a 1, √φ, φ.

Además es el único triángulo rectángulo cuyos lados están en progresión geométrica.



Triángulo Sublime.

El triángulo sublime es un triángulo isósceles de ángulo desigual 36º.



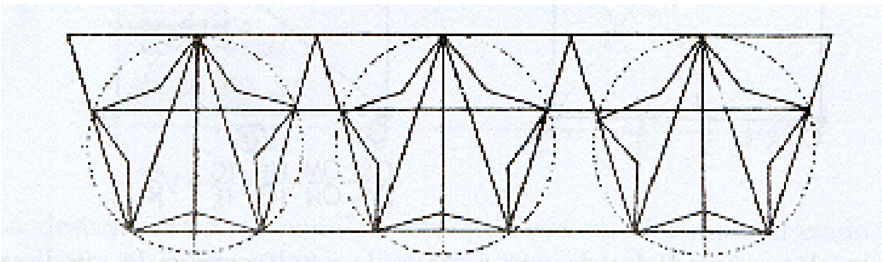
Este triángulo que no es solamente un elemento del pentágono, sino también del decágono, verifica que

$$\varphi = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{ang (ACB)} = \text{ang (ABC)} = 72º$$

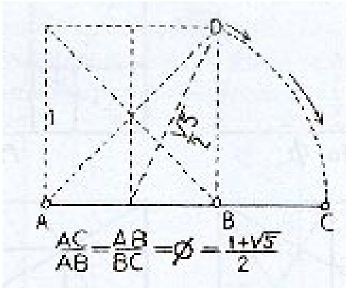
Estas dos relaciones le confieren al carácter de "sublime" y sus "armónicas" propiedades.

Los siguientes diseños se basan en este triángulo.

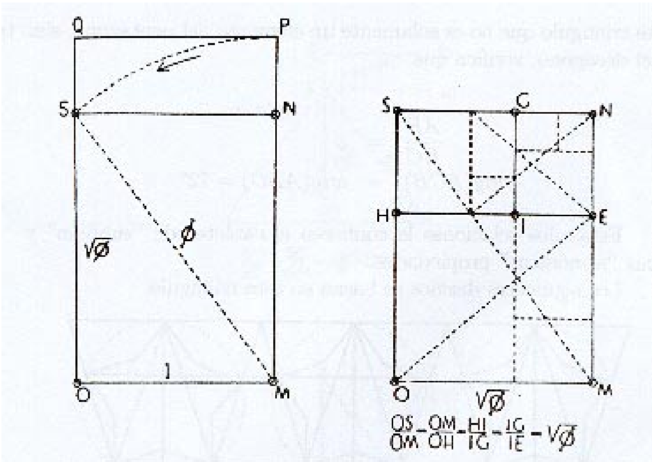


El rectángulo aúreo.

El rectángulo de proporción aúrea se obtiene trazando la perpendicular en el punto C y cerrando el rectángulo que resulta a partir de la figura obtenida en el punto 6.1.

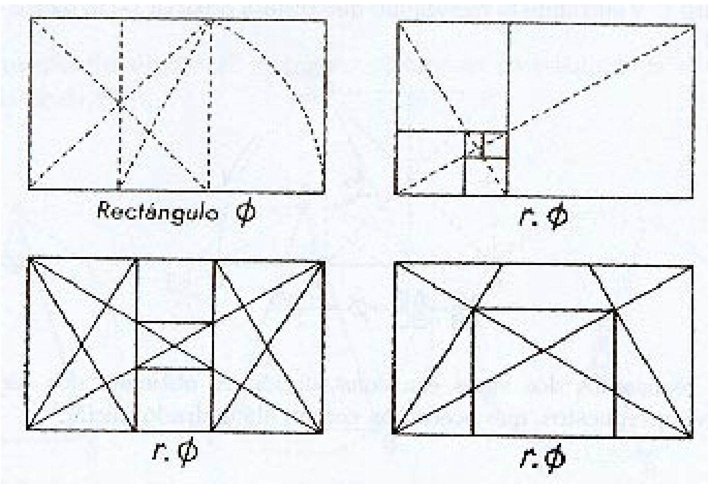


Si realizamos dos veces esa construcción se obtienen dos rectángulos aúreos superpuestos, que poseen en común el cuadrado inicial.

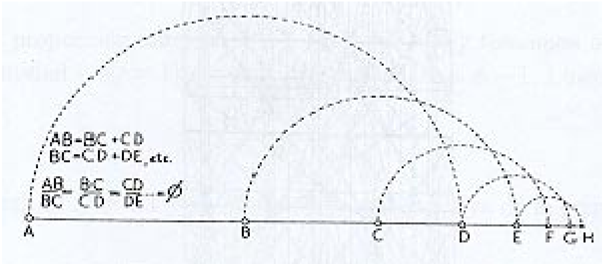


Entre las propiedades de este rectángulo resalta que se le añadimos un cuadrado o se lo sustraemos, queda un rectángulo semejante.

Rectángulos armónicos φ y √5

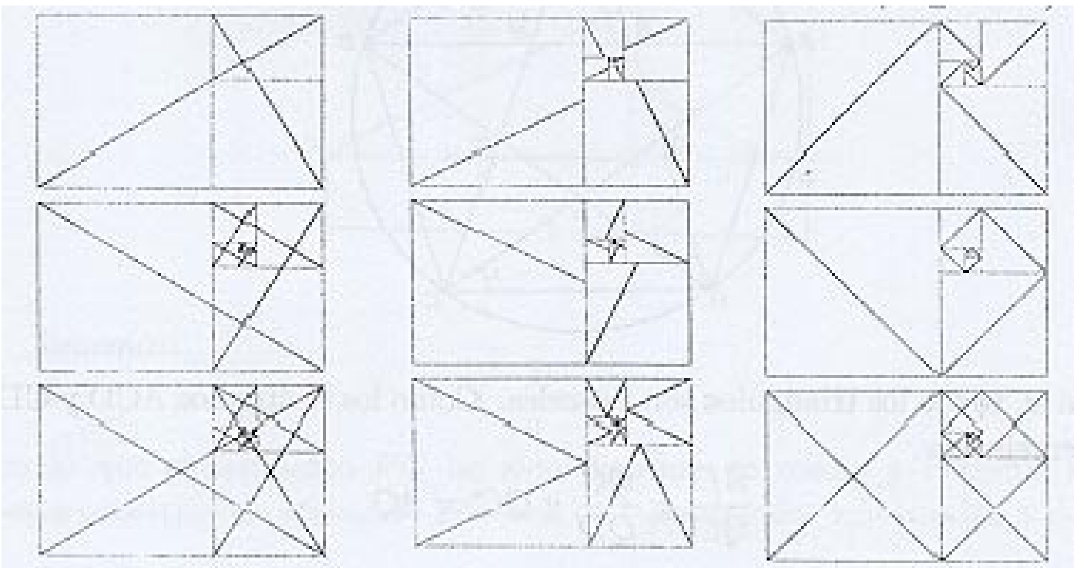


La satisfacción estética de estos rectángulos la expresa Timerding "... *the reassuring impresión given by what remains similar to itself in the diversity of evolution*". Una serie de segmentos con medidas proporcionales a sus términos se puede construir por adición o sustracción de segmentos por simples movimientos del compás.

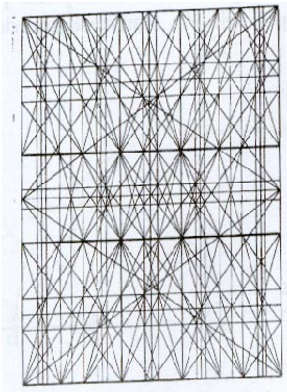


La descomposición armónica está fundada en el simple trazado de las diagonales y las perpendiculares bajadas sobre éstas desde los vértices de los diferentes rectángulos, obtenidos de forma recurrente a partir de un rectángulo aúreo inicial. Esta subdivisión determina un cuadrado además de un rectángulo de proporción φ dispuesto perpendicularmente al primero.

Esta subdivisión decreciente se puede repetir indefinidamente tomando diagonales sobre el cuadrado máximo incluido en el rectángulo aúreo o bien tomando las diagonales de rectángulos en él. Los siguientes diseños corresponden a este tipo de descomposición:

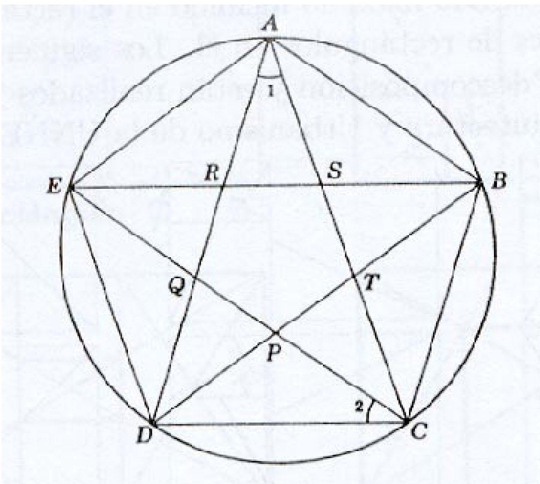


Otro diseño basado en esta descomposición armónica se muestra en la siguiente figura:



El Pentagrama.

Si inscribimos el pentágono regular en una circunferencia y dibujamos sus diagonales obtenemos el pentagrama místico. Sugiere un ritmo indefinidamente recurrente y continuo basado en la proporción por excelencia.



En él, todos los triángulos son isósceles. Como los triángulos ACD y CDQ son semejantes,

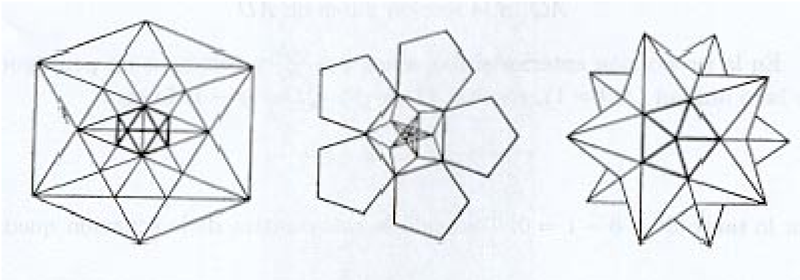
$$\frac{AD}{QC} = \frac{QC}{QD} \quad y \quad QC = AQ$$

Resulta:

$$\frac{AD}{AQ} = \frac{AQ}{QD}$$

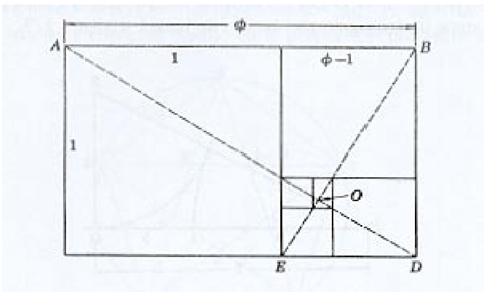
Luego la diagonal AD queda dividida en "extrema y media razón" (llamada así antes del siglo XVII), o sea, en Sección Aúrea.
AQ es la sección aúrea de AD

Podemos observar unos esquemas de crecimiento regulados por la sección aúrea:



6.3 SEMEJANZAS Y ESPIRALES

Si dibujamos un rectángulo de base φ y altura 1, y cortamos un cuadrado unidad, tenemos

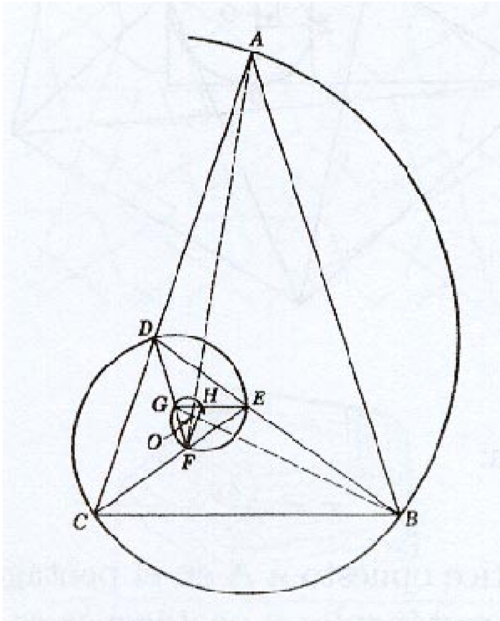


$$\frac{\varphi}{1} = \frac{1}{\varphi - 1}$$

es decir, el rectángulo que queda tiene también sus lados en razón φ:1.

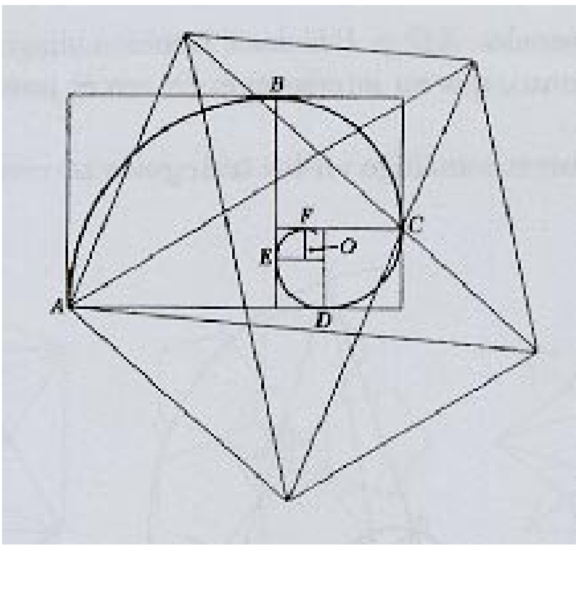
El proceso puede repetirse indefinidamente. Se observa que el rectángulo cuarto tiene la misma orientación que el inicial. Estas construcciones continuas exigen que las diagonales AD y BE sean también diagonales de todos los rectángulos y por tanto, que su intersección O, sea el punto límita alrededor del cual se anidan.

Por un procedimiento análogo en los triángulos se verifica:

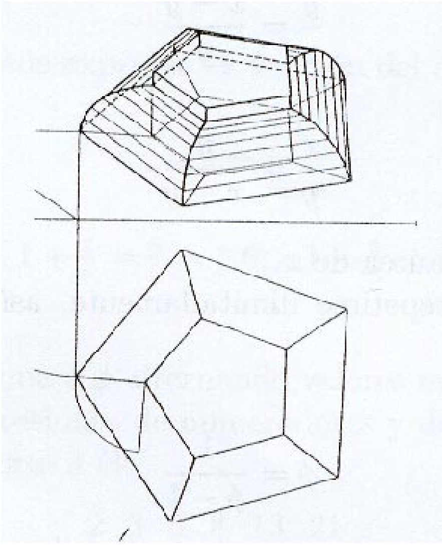


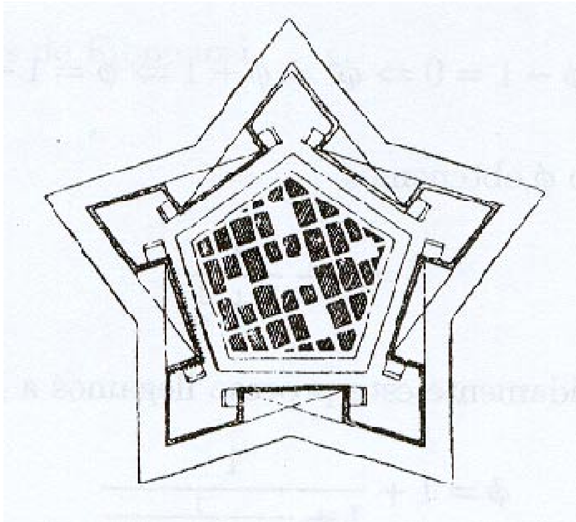
Aquí la semejanza ocurre después de una rotación de 108º en lugar de 90º. El triángulo FGH es el quinto en esa sucesión (sin contar al propio ABC) y hasta que no llegamos al décimo triángulo no volvemos a encontrar la misma orientación que el ABC. La intersección de cualesquiera dos de las diez rectas posibles que unen un vértice con el del siguiente triángulo opuesto, AF y BG, intersecan en el punto límite O, que es común a todos.

En el caso del pentágono, hay varias espirales para elegir:



Añadiendo imaginación y creatividad podemos obtener figuras derivadas del pentágono regular que expresen diseños gráficos interesantes:

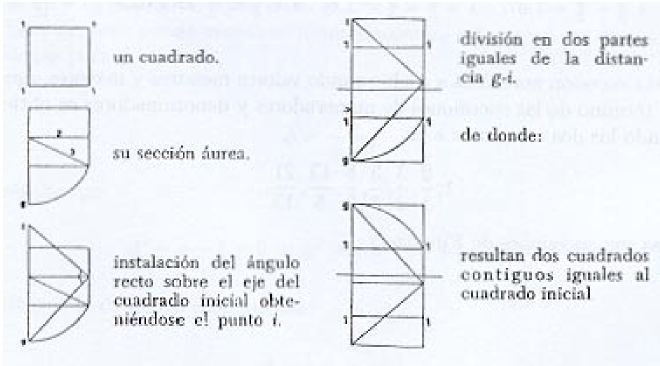




7. EL MODULOR

Le Corbusier (1887-1965) establece un módulo de arquitectura que contempla, al mismo tiempo, las dimensiones humanas y la necesidad de producción en serie. La fórmula ideada por él es EL MODULOR, ensayo sobre una medida armónica a la escala humana aplicable universalmente a la arquitectura y a la mecánica, fórmula que responde al intento de equilibrar la obra creada con el ambiente que la rodea. Las palabras, instrucciones, que dirige a su discípulo Hanning en 1943 desvelan su propósito:

"Tome el hombre con el brazo levantado de 2m20 mts de alto, inscríbalo en dos cuadrados superpuestos de 1,10 mts, móntelo a caballo sobre los cuadrados y el tercer cuadrado que resulte le dará la solución. El lugar del ángulo recto debe poderle ayudar a colocar el tercer cuadrado. Con este enrejado, regido por el hombre instalado en su interior, estoy seguro de que usted llegará a una serie de medidas que pondrán de acuerdo la estatura humana y la matemática".



Un detenido análisis nos muestra que estas medidas están en proporción aúrea lo que da lugar a una malla fundamental construida a partir de rectángulos aúreos.

"El enrejado da tres medidas: 113, 70, 43 (en centímetros) que están en razón aúrea

$$\frac{113}{70} = \frac{70}{43}$$

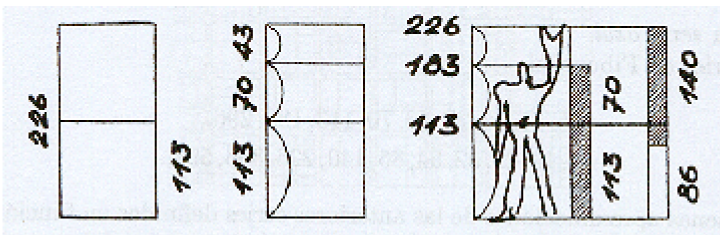
y forman parte de una serie de Fibonacci:

$$43 + 70 = 113$$

$$113 + 70 = 183$$

$$113 + 70 + 43 = 226$$

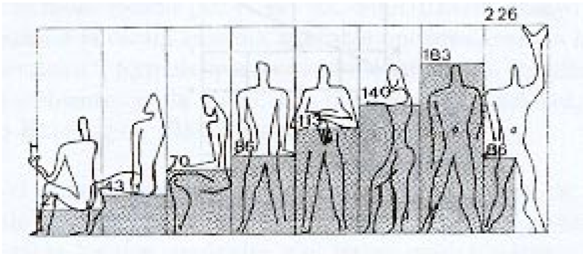
Las tres medidas 113, 183, 226 caracterizan la ocupación del espacio por un hombre de 183 cm de altura.



El hombre en pie confirma estos tres valores esenciales del Modulor, efectivamente 113 marca el plexo solar, 183 el vértice de la cabeza y 226 la extremidad de los dedos con el brazo levantado.

La medida 113 da la sección aúrea 70-43 e inicia la sere roja de medidas ideales:

4, 6, 10, 16, 27, 43, 70, 113, 183, 296......



y la medida 226, doble de 113, da la sección aúrea 140-86 e inicia la otra serie, la serie azul:

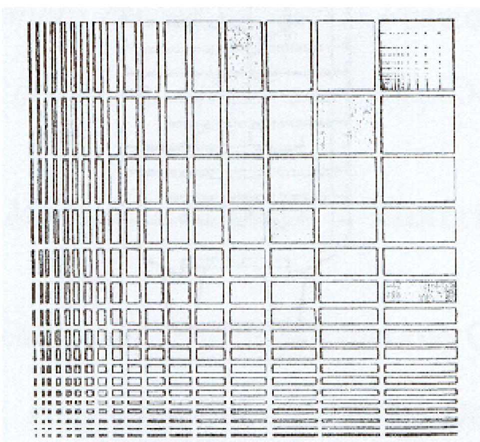
3, 33, 53, 86, 140, 226, 366, 592.....

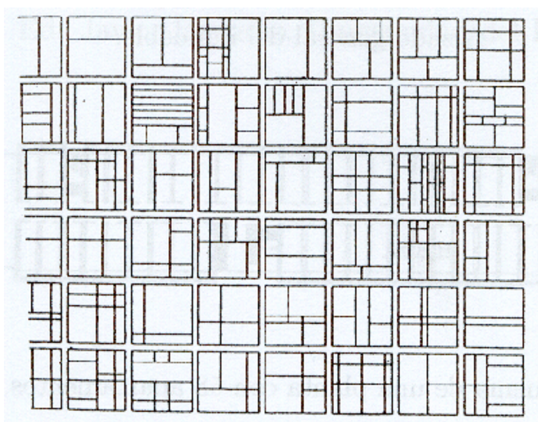
Estas dos series se obtienen al tomar la unidad d = 183, en la expresión general dada en función de φ

d, φd, φ^2d, φ^3d,......
para la serie roja, y

2d, 2φd, 2φ^2d, 2φ^3d,.......
para la serie azul.
Las series de Fibonacci:
6, 5, 11, 16, 27, 43, 70, 113, 183, 296.......
12, 10, 22, 32, 54, 86, 140, 226, 366, 592......
son buenas aproximaciones de las anteriores series definidas en función de φ.

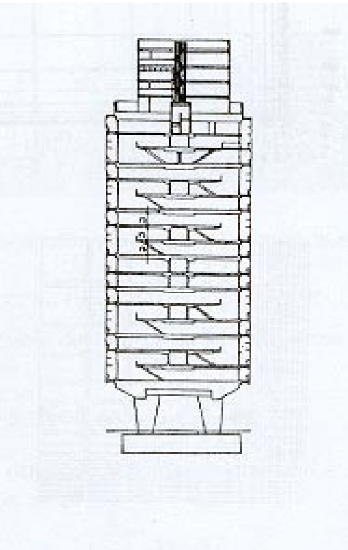
La recurrencia de estos valores permiten infinitas combinaciones.



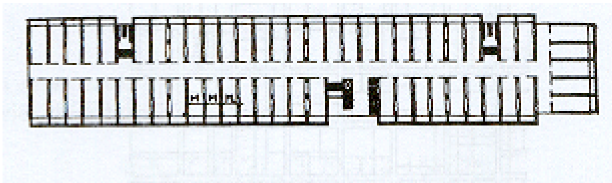


Las medidas del enrejado son aplicadas por Le Corbusier tanto a la planificación urbanística como a los planos de una ciudad de alojamiento: planta, alzado, estancias, carpintería, utensilios, amueblamiento.... es interesante conocer su obra “La unidad de la vivienda” de Marsella en el Bulevar Michelet, inmueble proyectado para 1600 personas con 26 servicios comunes, de dimensiones 140 m de largo x 24 m de ancho x 56 m de alto.

Hasta entonces no se habían aplicado con tal rigor matemático y armonioso estas proporciones a la vida cotidiana.



Alzado general del inmueble.



Esquema de una planta con 58 apartamentos.

8. BIBLIOGRAFÍA

- *Lecciones de Álgebra y Geometría*, Alsina, C. Y Trillas. Editorial Gustavo Gili, Barcelona, 1984
- *Retorno a la Geometría*, Coxeter, DLS Euler Editores
- *Estructuras fractales y sus aplicaciones*, Guzman Ozamiz, M. Y otros. Labor Matemáticas
- *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Kline, M. Barcelona
- *Introducción a la arquitectura*, Benévolo, L. Celeste Ediciones
- *Arabescos y Geometría*, Costa, A. CEMAV
- *Nuevas tecnologías en Geometría*, Roanes Mancías, E. Editorial Complutense
- *Arquitectura: forma, espacio y orden*, Ching, F. Editorial Gustavo Gili
- *El número de oro*, Ghyka, M. Editorial Poseidón
- *El modulor y El modulor 2*, Le Corbusier. Editorial Poseidón
- *El pentágono*, Montiú, A. Editorial Gustavo Gili

También expresar mi agradecimiento a los profesores de la universidad Politécnica de Madrid que me atendieron

- Ana Casaravilla Gil
- Mª Ángeles Gil Sanz
- Mª Agripina Sanz García
- Ascensión Moratalla de la Hoz

Y especialmente quiero agradecer la colaboración de **Don J. L. Pinilla**, director del departamento de Matemática Aplicada a la edificación, medio ambiente y urbanismo.