INTRODUCCIÓN A LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Conceptos y definiciones de: corriente eléctrica, velocidad media de los portadores de carga libres y densidad de corriente eléctrica.

El movimiento de carga eléctrica, en un conductor, debido a un campo eléctrico que se aplica, constituye *la corriente eléctrica*. Se mide en culombios por segundo o *amperios*, en honor del físico francés André-Marie Ampère (1775-1836). En materiales conductores tales como los metales, las *cargas eléctricas libres* son los *electrones de conducción* (o *de valencia*) asociados con las bandas de valencia de los átomos. Estos electrones libres debido a la agitación térmica colisionan con la estructura reticular del material por lo que se mueven aleatoriamente. Se debe percatar, sin embargo, que el promedio de la densidad de carga eléctrica en cualquier región del material en todo tiempo es cero, por lo que el material permanece neutro.

Cuando se aplica un campo eléctrico, los electrones libres experimentan una fuerza de sentido opuesto al campo. Son desviados de su trayectoria aleatoria y acelerados en la dirección de la fuerza producida por el campo. Estos electrones se frenan al chocar con la estructura reticular del conductor y de nuevo vuelven a ser acelerados. Esta sucesión de aceleraciones y frenados, se puede suponer un movimiento uniforme cuya *velocidad promedio* o *velocidad media* es llamada *velocidad de deriva*, v. De esta manera, en un tiempo dt cada electrón libre avanza una distancia vdt. En este tiempo, el número de electrones libres que cruzan el plano achurado que se muestra en la figura 3.1, es el contenido en el volumen $Avdt$, donde A es el área de la sección del conductor. Si en éste hay n electrones por unidad de volumen, el número de electrones libres que cruzan dicho plano en el tiempo dt es $nAvdt$, y si e indica la carga de cada electrón, la carga eléctrica dq que atraviesa el área considerada en el tiempo dt, es

$$dq = nevAdt$$

$$\therefore \quad \frac{dq}{dt} = i = nevA \qquad [A] \qquad (3.1)$$

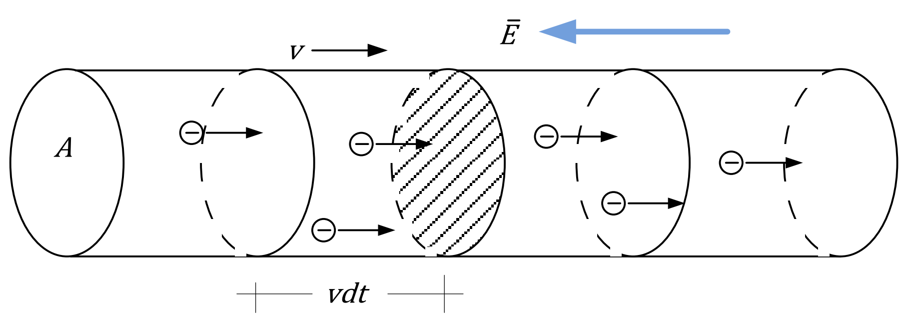

Figura 3.1. La corriente eléctrica y el movimiento de electrones libres en un conductor.

A mediados del siglo XVIII, cuando la electricidad era sólo una curiosidad y se consideraba un hobby por científicos e investigadores. Uno de ellos, Benjamin Franklin (1706-1790) quien hizo varios descubrimientos relacionados con la electricidad, propuso la idea de que la carga eléctrica fluye desde una batería a través de un alambre. Y supuso que la carga que fluía era una *carga eléctrica positiva*. Fue hasta el siguiente siglo en que se descubrió que la suposición de Franklin no era correcta. Ahora se sabe que son los electrones, carga negativa, los que se mueven en el conductor. Pero debido al hecho, de que el flujo de una carga negativa en una dirección es equivalente al flujo de una carga positiva en la otra dirección, no se hicieron ya modificaciones en las definiciones.

Si el campo eléctrico $\bar{E}$ que se aplica al conductor, mantiene el mismo sentido, aunque varíe en magnitud, la corriente eléctrica que resulta se denomina *corriente directa*; si el campo eléctrico cambia en magnitud y sentido la corriente se dice que es *corriente alterna*. Un caso particular es la corriente continua que resulta cuando el campo eléctrico no modifica ni su magnitud y ni sentido.

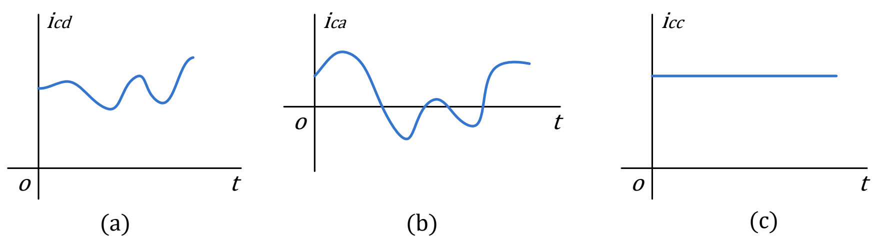

Figura 3.2. (a) Corriente directa. (b) Corriente alterna. (c) Corriente continua.

La intensidad de la corriente eléctrica está distribuida uniformemente a lo largo de cualquier sección del conductor. Si no sucede esto, es decir si la corriente eléctrica no está distribuida uniformemente o sea que la velocidad con que pasan las cargas eléctricas por la superficie considerada varía de un punto a otro, resulta más conveniente trabajar con la densidad de corriente, $\bar{J}$ cuyas unidades son amperios por metro cuadrado $\left[\frac{A}{m^2}\right]$. La relacionan entre la corriente eléctrica y la densidad de corriente eléctrica está dada por

$$i = \iint \bar{J} \cdot \overline{dA} \qquad (3.2)$$

La capacidad de un electrón libre de atravesar la estructura reticular excitada térmicamente del conductor se denomina *movilidad*, μ_e del electrón. Como se mencionó, debido a las aceleraciones y frenados, un electrón alcanza una velocidad promedio. La expresión que relaciona la velocidad de deriva con la movilidad y el campo eléctrico que se aplica es

$$\bar{v} = -\mu_e \bar{E} \quad \left[\frac{m}{s}\right] \qquad (3.3)$$

por lo que las unidades de la movilidad son $\left[\frac{m^2}{V\cdot s}\right]$.

Ley de Ohm

La densidad de corriente $\bar{J}$ en un conductor es igual a la densidad de electrones de valencia o de conducción multiplicada por la velocidad promedio o de deriva, es decir

$$\bar{J} = \rho_{ev}(-\mu_e \bar{E}) = -\rho_{ev}\mu_e \bar{E} \tag{3.4}$$

donde ρ_{ev} es la densidad de los electrones de valencia en el conductor. En el mismo orden de ideas, es más frecuente relacionar la densidad de corriente y el campo eléctrico que se aplica por medio de la *conductividad* σ, a través de *la ley de Ohm*, cuya *forma puntual es*

$$\bar{J} = \sigma \bar{E} \tag{3.5}$$

Las unidades de σ son *conductancia por metro*, esto es $\left[{}^{A}/_{m^2}\right]/\left[{}^{V}/_{m}\right] = \left[\frac{A}{V\cdot m}\right]$.

En el sistema internacional las unidades de la conductancia son siemens $[S]$, por lo que las unidades de la conductividad son siemens por metro $\left[\frac{S}{m}\right]$. La conductividad de un material en general no es constante sino que es función de la temperatura y de la frecuencia, no obstante para buenos conductores la variación de σ con la frecuencia sucede para frecuencias del orden de $10^{14}\left[\frac{ciclos}{seg}\right]$ o $10^{14}[Hz]$.

Ejemplo 1

Encuentre la conductancia del conductor cilíndrico homogéneo, que se muestra en la figura 3.3, de longitud l y de sección constante A, por el cual circula una corriente eléctrica de intensidad i cuando entre sus extremos hay una diferencia de potencial $V_{ab} = V_a - V_b$. Suponga de σ es independiente de $\bar{J}$ y que la temperatura es constante en todo el conductor

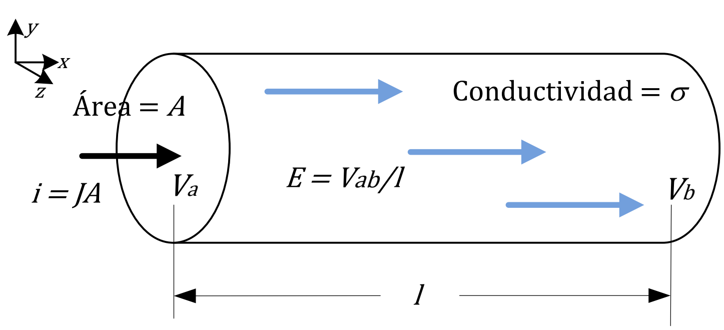

Figura 3.3. Conductor cilíndrico con densidad de corriente $\bar{J}$ y campo eléctrico $\bar{E}$ uniformes.

Si $\bar{J}$ y $\bar{E}$ son uniformes, entonces de la ley de Ohm

$$\frac{i}{A} = -\sigma \frac{dV}{dx}$$

$$idx = -\sigma A dV$$

Integrando a lo largo del conductor desde a hasta b

$$i \int_0^l dx = -\sigma A \int_{V_a}^{V_b} dV$$

$$il = \sigma A (V_a - V_b) = \sigma A V_{ab}$$

$$V_{ab} = \frac{l}{\sigma A} i = \frac{\rho l}{A} i$$

$$V_{ab} = Ri \tag{3.6}$$

el factor $\frac{\sigma A}{l} = \frac{A}{\rho l} = G$ es la conductancia del conductor. El reciproco de la conductancia G es la *resistencia* $R = \frac{\rho l}{A}$, ésta se mide en ohmios $[\Omega]$ en honor del físico alemán Georg Simon Ohm (1789-1854). El recíproco de la conductividad $\rho = \frac{1}{\sigma}$ se denomina *resistividad*, sus unidades son $ohmios\ metro$, esto es $[\Omega\, m]$. En textos relacionados con este tema se proporcionan tablas para diversas sustancias a la temperatura ambiente.

La ecuación (3.6) es la *forma escalar de la ley de Ohm* ya enunciada antes, ecuación (3.5): *si una diferencia de potencial V en un resistor ocasiona que una corriente i fluya a través de él, la resistencia del resistor es* $R = \frac{V}{i}$. La figura 3.4, muestra un circuito eléctrico sencillo con los símbolos que se emplean para representar un resistor de resistencia R y un generador de fuerza electromotriz fem (batería).

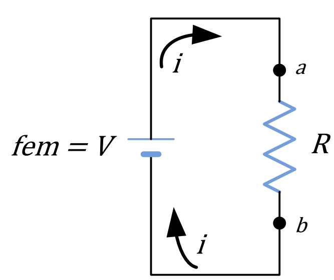

Figura 3.4. Modelo de un generador de fuerza electromotriz fem y un resistor de resistencia R.

Asociación de resistores

Hay dos configuraciones o conexiones de resistores que se encuentran frecuentemente y que se pueden simplificar fácilmente. La primera de ellas se observa en la figura 3.5(a). Los resistores conectados de esa forma se dice que están en serie. Si se conecta esta combinación de resistores a una batería, se podría considerar que actúan como un solo resistor equivalente. Se desea encontrar el resistor equivalente R_{eq} que extrae la misma corriente eléctrica de la batería como la combinación de resistores. Recordando la ley de Ohm y que para el campo eléctrico conservativo

$$\oint \bar{E} \cdot \bar{dl} = 0$$

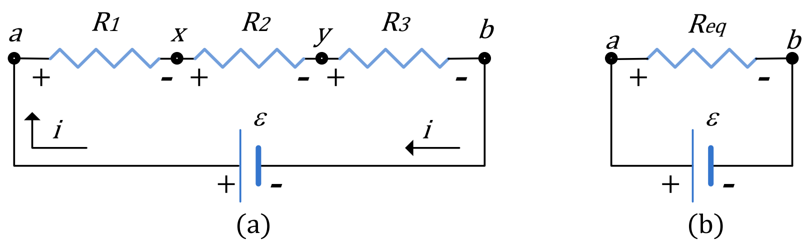

Figura 3.5. (a) Resistores conectados en serie. (b) Resistor equivalente.

Avanzando desde el punto (*nodo*) b en la dirección de las manecillas del reloj alrededor del circuito

$$+\varepsilon - V_{R_1} - V_{R_2} - V_{R_3} = 0$$

o

$$+\varepsilon - i_{R_1}R_1 - i_{R_2}R_2 - i_{R_3}R_3 = 0$$

Pero del principio de conservación de la carga eléctrica, *la corriente eléctrica que entra en un nodo es igual a la que sale del dicho nodo*, así

$$i_{R_1} = i_{R_2} = i_{R_3} = i$$

entonces

$$\varepsilon = i(R_1 + R_2 + R_3) = iR_{eq}$$

por lo que

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

En general se puede afirmar:

El valor del resistor equivalente de resistencias en serie es igual a la suma de las resistencias.

$$R_{eq} = \sum_{k=1}^{n} R_k \tag{3.7}$$

La otra configuración común se muestra en la figura 3.6(a). Estos resistores se dice que están conectados en paralelo. Cuando hay una diferencia de potencial en la combinación, cada resistor experimenta la misma diferencia de potencial. Se desea encontrar el resistor equivalente R_{eq} que extrae la misma corriente eléctrica de la batería como la combinación de resistores.

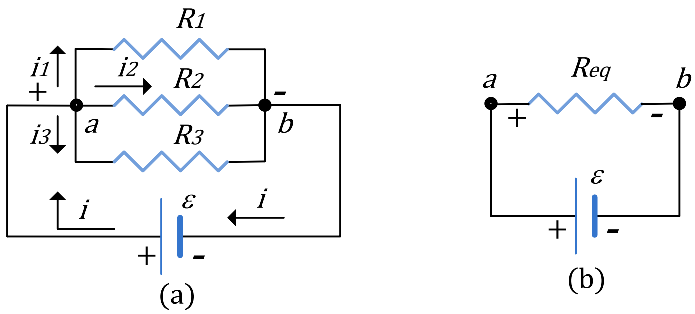

Figura 3.6. (a) Resistores conectados en paralelo. (b) Resistor equivalente.

Notando que la diferencia de potencial en cada resistor es ε. Por consiguiente, de la ley de Ohm

$$i_1 = \frac{\varepsilon}{R_1} \qquad i_2 = \frac{\varepsilon}{R_2} \qquad i_3 = \frac{\varepsilon}{R_3}$$

Del principio de conservación de la carga eléctrica

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

por lo que

$$i = \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2} + \frac{\varepsilon}{R_3}$$

rearreglando términos

$$\frac{i}{\varepsilon} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Por otra parte, para el circuito de la figura 3.6(b), es claro que

$$+\varepsilon - iR_{eq}0$$

de la cual

$$\frac{i}{\varepsilon} = \frac{1}{R_{eq}}$$

finalmente

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

En general se puede afirmar:

El reciproco del valor del resistor equivalente de resistencias en paralelo es igual a la suma de los recíprocos de las resistencias.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} \tag{3.8}$$

Medición de la corriente eléctrica y la diferencia de potencial

Cuando se dibuja un circuito eléctrico, la resistencia eléctrica se representa por una línea en zigzag, de esta manera todas las conexiones, excepto la indicada por este símbolo se considera que tienen resistencia despreciable o nula y no existe caída de potencial en dichos conectores.

Si se desea medir la corriente que fluye en un conductor, se utiliza el *amperímetro*. El amperímetro registra la cantidad de carga eléctrica que circula por segundo a través de él, esto es la corriente eléctrica. En la figura 3.7(a), la misma corriente eléctrica fluye a lo largo de todo el circuito eléctrico; por consiguiente un amperímetro colocado en la posición que se muestra (*en serie*) leerá la corriente en cualquier parte del circuito. Un amperímetro es un instrumento de una pequeña resistencia, del orden de centésimas de ohmio para no alterar el circuito a cual se conecta y no limitar la corriente fluyendo a través de él. El amperímetro perfecto o ideal tiene una resistencia nula.

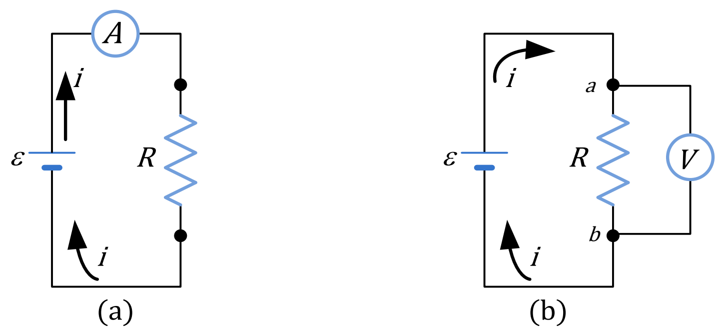

Figura 3.7. (a) Amperímetro en serie para medir la corriente eléctrica. (b) Voltímetro en paralelo para medir una diferencia de potencial.

También algunas veces es necesario medir la diferencia de potencial entre dos puntos (*nodos*) de un circuito. Para hacer esto se utiliza el *voltímetro*. En la figura 3.7(b) se ilustra la forma de medir la caída de potencial en el resistor (el voltímetro se conecta *en paralelo*). El voltímetro ideal tiene una resistencia infinita. ¿Por qué?

La resistividad y su dependencia con la temperatura

Como se mencionó, la conductividad y por consiguiente la resistividad en los materiales conductores varía con la temperatura. En la figura 3.8 se muestra una gráfica de la resistividad en función de la temperatura para un conductor metálico. La curva puede representarse de forma satisfactoria por una serie de la forma

$$\rho = \rho_o + aT + bT^2 + \cdots$$

siendo ρ_o la resistividad a 0°C; a, b, $\cdots$, son constantes características de cada material y T es la temperatura en grados centígrados. Para cierto rango de interés de temperaturas, la resistividad tiene un comportamiento cuasi *lineal* por lo que se puede expresar como

$$\rho = \rho_o + aT = \rho_o\left(1 + \frac{a}{\rho_o}T\right)$$

o bien

$$\rho = \rho_o(1 + \alpha_o T) \tag{3.9}$$

La magnitud α_o se denomina coeficiente de variación de la resistividad con la temperatura a 0 ℃. En la literatura del tema se presentan tablas de valores de la resistividad y del coeficiente de temperatura para diversos materiales a la temperatura ambiente, por lo que para utilizar la ecuación (3.9) se requiere conocer de antemano ρ_o y α_o. La forma de encontrarlos se muestra a continuación

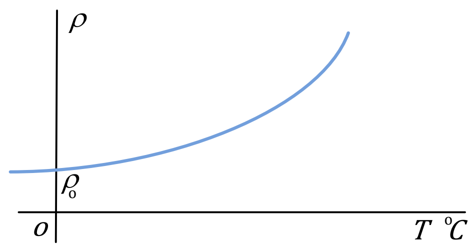

Figura 3.8. Variación de la resistividad de un conductor con la temperatura.

En general a una temperatura T_x

$$\alpha_x = \frac{a}{\rho_x} = \frac{a}{\rho_o(1 + \alpha_o T_x)}$$

de la razón de α_o y α_x se tiene

$$\frac{\alpha_o}{\alpha_x} = 1 + \alpha_o T_x$$

entonces

$$\alpha_o = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_x} - T_x} \tag{3.10}$$

Por otra parte, dado que a las temperaturas T_1 y T_2, respectivamente

$$\rho_1 = \rho_o(1 + \alpha_o T_1)$$

$$\rho_2 = \rho_o(1 + \alpha_o T_2)$$

de la razón de ambas

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{1+\alpha_o T_2}{1+\alpha_o T_1} \tag{3.11}$$

o en términos de α_1

$$\rho_2 = \rho_1[1 + \alpha_1(T_2 - T_1)] \tag{3.12}$$

Puesto que la resistencia de un conductor es proporcional a su resistividad, las ecuaciones (3.9), (3.10) y (3.12) se pueden escribir como

$$R = R_o(1 + \alpha_o T) \qquad (3.13)$$

$$R_2 = R_1 \frac{1+\alpha_o T_2}{1+\alpha_o T_1} \qquad (3.11)$$

$$R_2 = R_1[1 + \alpha_1(T_2 - T_1)] \qquad (3.12)$$

Ley de Joule

La presencia de un campo eléctrico en un medio conductor ocasiona un movimiento de las cargas libres en él. Si esta corriente eléctrica se mantiene, es necesario suministrar en forma continua energía a las cargas lo que finalmente aparece o se manifiesta como *calor*.

Suponiendo que dentro del conductor hay n electrones de valencia o de conducción por unidad de volumen y que se mueven a una velocidad promedio $\overline{v}$, la densidad de corriente está dada por

$$\overline{J} = ne\overline{v} \qquad (3.13)$$

Como también, la fuerza eléctrica que experimenta cada electrón es

$$\overline{F} = e\overline{E}$$

el diferencial de trabajo que realiza la fuerza eléctrica en el diferencial de tiempo dt, es

$$dW_e = e\overline{E} \cdot \overline{v}dt$$

Y el diferencial de trabajo que se hace al mover todos los electrones en un pequeño volumen $dvol$, es

$$dW = e\overline{E} \cdot \overline{v}dt\, ndvol = \overline{E} \cdot ne\overline{v}dt\, dvol$$

considerando la ecuación (3.13)

$$dW = \overline{E} \cdot \overline{J}\, dvol\, dt \qquad (3.14)$$

La ecuación anterior nos proporciona la energía transformada en calor dentro de un pequeño volumen en un tiempo pequeño. La razón a la cual la energía se convierte en calor por unidad de volumen es la potencia disipada por unidad de volumen

$$\frac{dP}{dv} = \frac{dW/dt}{dv} = \overline{E} \cdot \overline{J} \qquad \left[{}^{W}/_{m^3}\right] \qquad (3.15)$$

La ecuación (3.15) es *la forma puntual de la Ley de Joule*. La potencia total que se proporciona a las cargas eléctricas en el volumen que ocupa el conductor es entonces

$$P = \iiint \overline{E} \cdot \overline{J}\, dv \qquad [W] \qquad (3.16)$$

Para un conductor con una sección transversal constante A y una longitud l, suponiendo que el campo eléctrico y la densidad de corriente están, en todo punto, dirigidos a la largo del conductor, la ecuación (3.16) se puede escribir como

$$P = \int Edl \iint JdA = Vi \qquad [W] \qquad 3.17)$$

La ecuación (3.17) es *la forma escalar de la Ley de Joule*. Sustituyendo la ley de Ohm, en la ecuación anterior, resulta

$$P = V^2/R = I^2R \qquad [W] \qquad (3.18)$$

que es la expresión para determinar la energía por unidad de tiempo o potencia que se disipa en forma de calor en un resistor.

Valor medio y valor eficaz de la corriente

El valor medio de una corriente de intensidad variable durante un intervalo de tiempo se define como la intensidad de una corriente de intensidad constante que transporta la misma carga en igual tiempo que la corriente variable. La carga Q que transporta la corriente constante de intensidad i_m es

$$Q = i_m t$$

y como ha de ser igual a la carga que transporta la corriente variable

$$i_m t = \int_0^t i(t')\, dt'$$

por lo que el valor medio resulta

$$i_m = \frac{1}{t}\int_0^t i(t')\, dt' \qquad (3.19)$$

El valor eficaz de una corriente de intensidad variable durante un intervalo de tiempo dado, se define como la intensidad constante que disipa la misma cantidad de calor en cualquier resistencia en el mismo intervalo de tiempo. Entonces dado que

$$dW = Ri^2dt$$

integrando

$$W = \int_0^t Ri(t')^2\, dt'$$

Si $i(t)$ y R son constantes

$$W = Ri^2t$$

Así

$$W = Ri_{eficaz}^2 t = \int_0^t Ri(t')^2\, dt'$$

$$\therefore\ i_{eficaz} = \sqrt{\frac{1}{t}\int_0^t i(t')^2\, dt'} \tag{3.20}$$

Este es el *valor rms* (**r**oot-**m**ean-**s**quare) por sus siglas en inglés y es igual a la raíz cuadrada del valor medio del cuadrado de la intensidad.

Ejemplo 2

Encuentre el valor medio y el valor eficaz de la corriente eléctrica

$$i(t) = I_m sen(2\pi f t) \qquad [A]$$

Donde I_m es la amplitud o valor pico, f es la frecuencia en $\left[\frac{ciclos}{segundo}\right] = [Hertz\,]$, su reciproco es el periodo T en $[segundos]$ y $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ en $\left[\frac{radianes}{segundo}\right] = [segundos^{-1}]$ es la frecuencia angular o velocidad angular.

Como esta corriente eléctrica es periódica, se lleva a cabo el análisis en un único periodo.

Su valor medio es

$$i_m = \frac{1}{T}\int_0^T I_m sen(2\pi f t)\ dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I_m sen\,\theta\, d\theta = 0$$

y su valor medio cuadrático resulta

$$i_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\, dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [I_m sen(2\pi f t)]^2\, dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} sen\theta^2 d\theta} =$$

$$i_{rms} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2\pi}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{sen\ 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

y se ve que el valor rms de una onda sinusoidal es igual a la amplitud dividida por $\sqrt{2}$.

Fuerza electromotriz

En los circuitos eléctricos sencillos que se han considerado, la corriente eléctrica que entra por una de las terminales del resistor al mismo tiempo sale esa misma corriente eléctrica por la otra terminal. Para que este proceso perdure es necesario que esté presente una fuente de energía conectada a las terminales del resistor. Esta fuente de energía debe proporciona las fuerzas no eléctricas que impulsan a la carga eléctrica. El nombre que reciben estas fuentes no eléctricas es el de *generadores de fuerza electromotriz* (*fem*).

Un generador de fuerza electromotriz es cualquier dispositivo en el cual se puede llevar a cabo una transformación reversible entre energía eléctrica y otra forma de energía.

El generador de fuerza electromotriz más común es la celda eléctrica o batería. Otro ejemplo es el motor-generador, que se estudia más adelante.

El valor de la fuerza electromotriz de un generador se puede definir como energía transformada de la forma eléctrica a la forma no eléctrica o viceversa (excluyendo la energía convertida irreversiblemente en calor) por unidad de carga que pasa a través del generador o simplemente trabajo por unidad de carga, esto es

$$fem = \varepsilon = \frac{dW}{dQ} \qquad [V] \tag{3.21}$$

De la ecuación anterior

$$dW = \varepsilon\, dQ$$

La energía por unidad de tiempo que se suministra o potencia es entonces

$$P = \frac{dW}{dt} = \varepsilon \frac{dQ}{dt} = \varepsilon i \qquad [W] \tag{3.22}$$

Otra definición de fuerza electromotriz

Dado que de hecho se lleva a cabo determinada cantidad de trabajo *sobre* cada unidad de carga eléctrica cuando ésta atraviesa el generador de fem, se puede hablar de una fuerza equivalente de tal magnitud que el trabajo realizado por ella sobre cada unidad de carga circulante sea igual a la fem. Como la existencia de una fuerza que actúa sobre una carga implica un campo eléctrico, podemos hablar asimismo de un *campo eléctrico equivalente* dentro del generador.

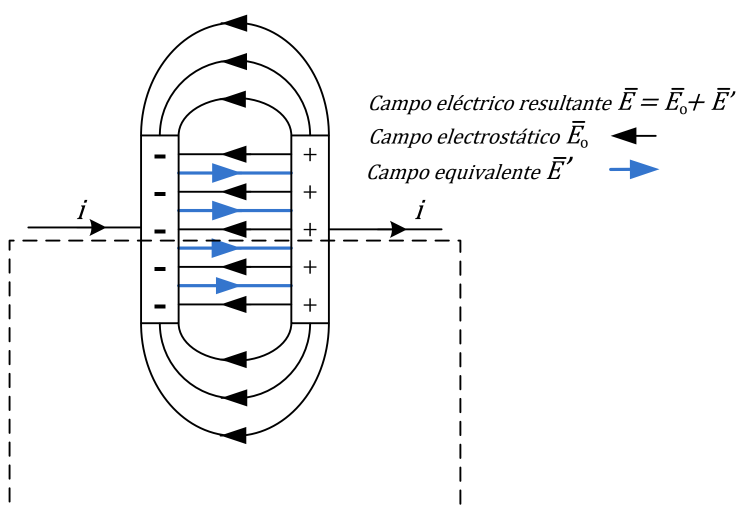

Figura 3.9. Diagrama esquemático de un generador de fem.

En la figura 3.9 se presenta el diagrama esquemático de un generador de fem. En ella se puede apreciar el campo electrostático dirigido desde la terminal positiva a la terminal negativa E_o, el campo eléctrico equivalente que realiza trabajo sobre la carga cuando pasa a través del generador E' y cuyo sentido es opuesto al campo electrostático. El campo eléctrico que resulta es la suma vectorial de ambos campos, esto es $\bar{E} = \bar{E}_o + \bar{E}'$

Llevando a cabo la integral curvilínea de la intensidad del campo eléctrico $\bar{E}$ alrededor la trayectoria cerrada arbitraria (línea a trazos), se tiene

$$\oint \bar{E} \cdot \bar{dl} = \oint \bar{E}_o \cdot \bar{dl} + \oint \bar{E}' \cdot \bar{dl}$$

Pero por otro lado, sabemos que la integral de línea cerrada del campo electrostático es nula, por lo que, entonces

$$\oint \bar{E} \cdot \bar{dl} = \oint \bar{E}' \cdot \bar{dl}$$

La fuerza electromotriz que produce un generador se puede definir como la integral de línea del *campo eléctrico equivalente* del generador desde la terminal negativa a la terminal positiva a través de generador. Esto es

$$fem = \int_{(-)}^{(+)} \bar{E}' \cdot \bar{dl} = \oint \bar{E} \cdot \bar{dl}$$

$$fem = \oint \bar{E} \cdot \bar{dl} = \oint E \cos\theta \, dl \qquad (3.23)$$

Es necesario recalcar, que el campo eléctrico equivalente $\bar{E}_{eq}$ es un campo ficticio, ya que no se debe a las cargas eléctricas, sino que es un campo eléctrico *que permite* medir el trabajo sobre la carga cuando pasa a través del generador.

Resistencia interna de la fem

En la práctica los componentes de los circuitos eléctricos vistos, tales como generadores de fuerza electromotriz, resistores, capacitores y conductores que los conectan se consideran *ideales*, por lo que sólo son representaciones simbólicas de los generadores de fem o baterías, resistores, capacitores y conductores *reales*. Por supuesto, los componentes reales no actúan exactamente como los modelos ideales.

Los conductores reales no tienen una resistencia nula. Un resistor real no actúa exactamente como un elemento de resistencia constante. Una fuente de voltaje real no funciona de forma semejante a una ideal. En la figura 3.10 se muestran las características $V - i$ de un generador de fuerza electromotriz real y otro ideal. En la del elemento real a medida que aumenta la corriente eléctrica que fluye a través de él, la diferencia de potencial en sus terminales disminuye mientras que en la fuente ideal el voltaje es constante independientemente de su corriente eléctrica. Lo anterior sucede porque todo generador dependiendo de su construcción contiene una resistencia a la que se acostumbra llamar *resistencia interna*.

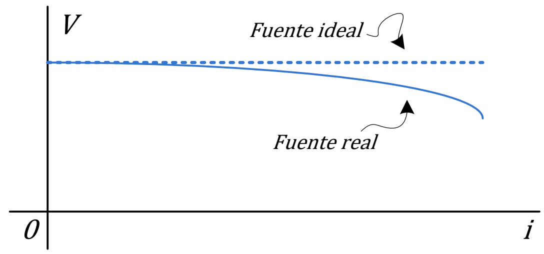

Figura 3.10. Característica del generador de fuerza electromotriz en el plano Vi.

Ejemplo 3

Determine la diferencia de potencial V_{ab} en el circuito eléctrico de la Fig. 3.11.

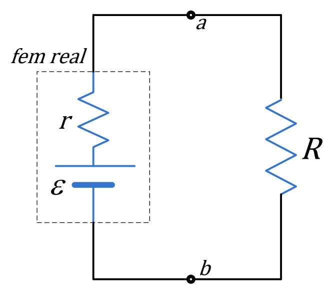

Figura 3.11. Batería real conectada a un resistor.

Del *principio de conservación de la energía*, en estado permanente: *la velocidad con que se consume la energía eléctrica debe ser idéntica a la velocidad con que se la suministra*. Como se sabe, la potencia que entrega la batería es εi y la que se disipa en un resistor es proporcional a i^2.

Por consiguiente

$$\varepsilon i = i^2 r + i^2 R$$

$$i = \frac{\varepsilon}{r + R}$$

Como la corriente eléctrica circula de un valor de potencial mayor a otro de potencial menor

$$V_{ab} = iR = \frac{\varepsilon}{r + R} R = \varepsilon - ir$$

Asimismo, el valor de la resistencia interna se puede determinar a partir de

$$r = \left(\frac{\varepsilon}{V_{ab}} - 1\right) R \tag{3.24}$$

Ejemplo 4
Encuentre la corriente eléctrica en el circuito eléctrico de la figura 3.12(a). Nótese la presencia de un motor eléctrico en el circuito.

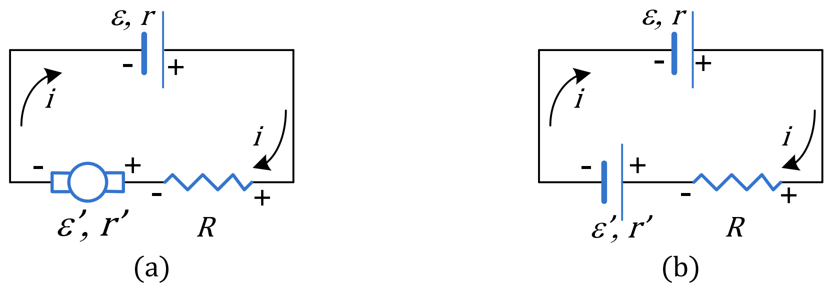

Figura 3.12. Circuito eléctrico con dos generadores de fuerza electromotriz en serie.

Considerando el principio de conservación de la energía, nuevamente. La energía por unidad de tiempo que suministra la batería es

$$p = \varepsilon i - i^2 r = (\varepsilon - ir)i$$

y la energía por unidad de tiempo que se consume en el resto del circuito es

$$p = i^2 R + \varepsilon' i + i^2 r'$$

Como ambas deben se idénticas, se tiene

$$\varepsilon - \varepsilon' = (R + r + r')i$$

Por lo que la intensidad de la corriente eléctrica es

$$i = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{R + r + r'}$$

En la figura 3.12(b) se presenta un circuito equivalente, en la que se ha sustituido al motor eléctrico por otro generador de fuerza electromotriz. Es conveniente notar que el sentido de la corriente eléctrica i en la fem circula de la terminal negativa a la terminal positiva y de hecho se puede considerar que se hace trabajo *sobre* la carga eléctrica que circula, mientras que en el motor el sentido de la corriente eléctrica i circula de la terminal positiva a la terminal negativa, aquí se dice que el trabajo es realizado *por* la carga circulante y la energía eléctrica se transforma en energía mecánica. En este caso la fem recibe el nombre de *fuerza contraelectromotriz*.

Diferencia de potencial en un circuito eléctrico

Sea la sección arbitraria de un circuito eléctrico mostrada en la figura 3.13(a). Se desea encontrar una expresión que permita determinar la diferencia de potencial V_{ab}. Supóngase que el sentido de la corriente eléctrica i es desde a hacia b.

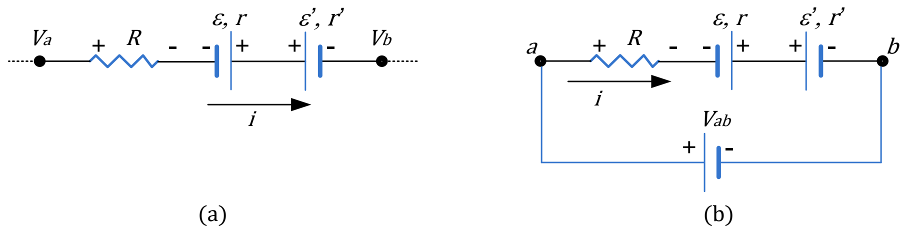

Figura 3.13. Sección de un circuito eléctrico.

El hecho de que la corriente eléctrica tenga el sentido señalado, implica que $V_a > V_b$ o lo que es lo mismo $V_{ab} > 0$.

Si se considera que la diferencia de potencial V_{ab} lo causa una fem de valor V_{ab}, como se muestra en la figura 3.13(b), esta fem, como ya se ha visto, suministraría una energía por segundo o potencia igual a $V_{ab}i$. La fem ε, de acuerdo a lo estudiado en la sección anterior, también cede una potencia igual a εi. Mientras que las resistencias r, r' y R consumen energía y la fem ε' la transforma en otra forma de energía, éstas son respectivamente $(r + r' + R)i^2$ y $\varepsilon' i$.

Igualando estas potencias

$$V_{ab}i + \varepsilon i = (r + r' + R)i^2 + \varepsilon' i$$

despejando V_{ab} se tiene

$$V_{ab} = (r + r' + R)i - (\varepsilon - \varepsilon') \qquad (3.25)$$

Generalizando

$$V_{ab} = \sum Ri - \sum \varepsilon \qquad 3.26)$$

Leyes de Kirchhoff

Hasta ahora se han analizado circuitos eléctricos constituidos por generadores de fuerza electromotriz (*baterías*) y resistencias a partir de *la ley de conservación de la energía*. En esta sección se estudian tales circuitos mediante las llamadas leyes o reglas de Kirchhoff (Gustav Robert Kirchhoff, físico alemán (1824 - 1887)), las cuales constituyen una base sistemática para el análisis de circuitos eléctricos permitiéndonos encontrar todas sus corrientes eléctricas y diferencias de potencial o voltajes.

En la literatura de este tema frecuentemente se intercambian los términos de *circuito eléctrico* y de *red eléctrica*, esto es, ambos se definen como *una interconexión de elementos*. Aquí se considerará que un circuito es una red eléctrica que contiene al menos una trayectoria cerrada.

Direcciones de referencia asociadas

Con la finalidad de facilitar el análisis de circuitos eléctricos, es decir, obtener las intensidades de las corrientes y voltajes es conveniente asociar sus correspondientes direcciones. Para ello considere el elemento eléctrico de dos terminales mostrado en la figura 3.14, se le denomina *rama* y puede ser una fuente electromotriz, un resistor o un condensador, etc., su naturaleza no importa ahora. Se dice que las *direcciones de referencia están asociadas* si una corriente eléctrica *positiva* entra a la rama por la terminal marcada con el signo positivo y sale por la terminal negativa, de esta manera, la potencia instantánea $p(t) = i(t)v(t)$ es positiva y se considera que la energía por unidad de tiempo se está suministrando a la rama.

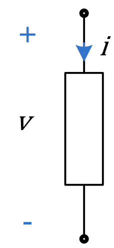

Figura 3.14. Direcciones de referencia asociadas de una rama.

A continuación, se definen dos conceptos fundamentales, en el estudio y análisis de los circuitos eléctricos. Aquí, sin embargo, la definición de nodo diverge del concepto que se encuentra generalmente en la literatura relacionada con este tema, pero debe tenerse en cuenta que el mundo de la ingeniería ha sido completamente modificado por el uso de la computadora.

Nodo: punto donde se unen dos o más ramas.
Malla: cualquier recorrido conductor cerrado, sin contener ninguna rama y sin pasar dos veces por el mismo nodo.

Ley de corrientes de Kirchhoff (*LCK*). En todo tiempo, la suma algebraica de las intensidades de las corrientes eléctricas que se dirigen a cualquier nodo de la red es cero, esto es

$$\sum i = 0 \tag{3.27}$$

Esta regla es una consecuencia de la ley de la conservación de la carga eléctrica en todo nodo.

Ley de voltajes de Kirchhoff (*LVK*). En todo tiempo, en cualquier trayectoria cerrada, la suma algebraica de las fuerzas electromotrices es igual a la suma algebraica de los productos Ri, esto es

$$\sum \varepsilon = \sum Ri \tag{3.28}$$

Esta regla es una consecuencia de la ley de la conservación de la energía.

Las leyes de corriente y de voltaje de Kirchhoff son independientes una de la otra, pero juntas se utilizan para analizar y resolver problemas de circuitos eléctricos. Veamos ahora aspectos básicos del análisis de las redes eléctricas. En una red eléctrica de n nodos y b ramas, las ecuaciones algebraicas lineales y homogéneas que se obtienen al aplicar la LCK a $n-1$ cualesquiera nodos, constituye un conjunto de $n-1$ *ecuaciones linealmente independientes*. Para verificar lo anterior, considere las gráficas asociadas a redes eléctricas que se muestran en la figura 3.15.

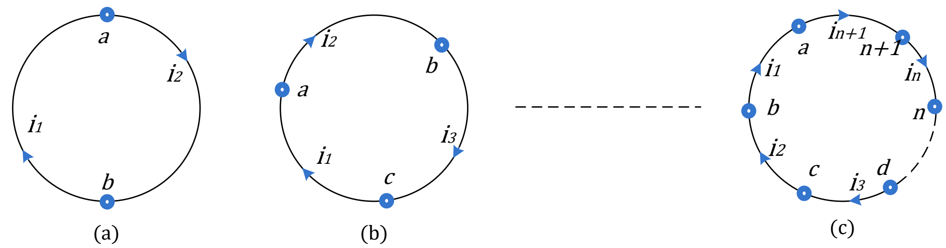

Figura 3.15. Gráficas asociadas a redes eléctricas de n nodos y b ramas.

Aplicando la LCK al nodo a de la figura 3.15(a), donde $n=2$, resulta

$$-i_1+i_2=0$$

del nodo b

$$i_1-i_2=0$$

Obviamente ambas ecuaciones proporcionan la misma información.

Aplicando nuevamente la LCK a los nodos a, b y c de la figura 3.15(b), $n=3$ se tiene

Nodo a:	$-i_1+i_2=0$
Nodo b:	$-i_2+i_3=0$
Nodo c:	$i_1-i_3=0$

Estas tres ecuaciones son linealmente dependientes. Sin embargo, cualquier par de ellas no lo son. Esto es, sólo se pueden establecer $3-1=2$ ecuaciones linealmente independientes.
Procediendo de manera similar, se asume que para una red de n nodos la aseveración propuesta se cumple. Para la red que se muestra en la figura 3.15(c) con $n+1$ nodos, a las $n-1$ ecuaciones linealmente independientes se agrega la ecuación correspondiente al $n+1$ $\acute{e}simo$ nodo, esto es

$$i_n-i_{n+1}=0$$

La ecuación anterior, meridianamente, es linealmente independiente de las $n-1$ ecuaciones que se obtuvieron para la red de n nodos, por lo que para esta red eléctrica se tienen $n+1-1=n$ ecuaciones linealmente independientes.

Nuevamente para una red eléctrica de n nodos y b ramas, el número de mallas que tiene es

$$l=b-n+1 \tag{3.29}$$

que corresponde al número de ecuaciones linealmente independientes que se pueden establecer al aplicar la LVK a la red.

En las figuras 3.15(a) y 3.15(b) se satisface la ecuación (3.29) pues $l = 2 - 2 + 1 = 1$ y $l = 3 - 3 + 1 = 1$, respectivamente. Suponiendo que para una red con n nodos se cumple. Para la red de la figura 3.15(c), con $n + 1$ nodos, y $n + 1$ ramas se tiene $l = (n + 1) - (n + 1) + 1 = 1$. Por lo que la ecuación (3.29) sigue siendo válida.

Divisor de voltaje y divisor de corriente

En las redes eléctricas frecuentemente aparecen estructuras de resistores que por la forma en que actúan reciben el nombre de divisor de voltaje o de *tensión* y divisor de corriente. El análisis que se hace a continuación hace patente porque reciben tal nombre.

En el divisor de voltaje mostrado en la figura 3.16, se determína el voltaje en cada resistor.

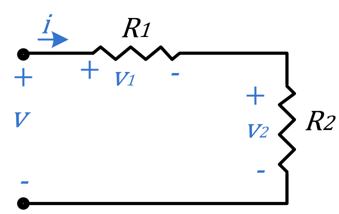

Figura 3.16. Divisor de tensión o de voltaje.

Como

$$v = v_1 + v_2 = iR_1 + iR_2 = i(R_1 + R_2)$$

entonces

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2}$$

así

$$v_1 = iR_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2} v \tag{3.30}$$

$$v_2 = iR_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2} v \tag{3.31}$$

Ahora se encuentra la corriente eléctrica en cada resistor del divisor de corriente mostrado en la figura 3.17.

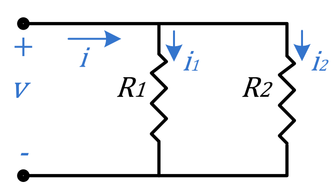

Figura 3.17. Divisor de corriente.

Aquí

$$v = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i$$

entonces

$$i_1 = \frac{v}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i \tag{3.32}$$

$$i_2 = \frac{v}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i \tag{3.33}$$

Ejemplo 5

Encuentre la resistencia equivalente que hay entre los nodos a y h del circuito simétrico de la figura 3.18; esto es, determine la relación que existe entre el voltaje v_{ah} y la corriente i. Suponga que cada resistor tiene una resistencia R.

La relación que se busca está dada por la ley de Ohm, esto es

$$R_{eq} = \frac{v_{ah}}{i}$$

Aplicar directamente las leyes de Kirchhoff, nos permite determinar la resistencia que se demanda a través de un proceso algebraico simple pero embrollado. Sin embargo, si se considera la simetría del circuito, la respuesta que se quiere encontrar se obtiene de una manera elegante e ingeniosa.

La corriente i que entra al nodo a se divide en tres partes iguales, ya que la resistencia de cada rama que se *ve* desde el nodo es la misma. Estas corrientes de $\frac{i}{3}$ que entran en los nodos b, c y d, se dividen nuevamente en partes iguales, por la misma razón anterior y tienen ahora un valor de $\frac{i}{6}$. En los nodos e, f y g la corriente que sale de cada uno de ellos, es la suma de las corrientes que entran, por lo que tiene un valor de $\frac{i}{3}$. Finalmente, en el nodo h las tres corrientes que entran constituyen una corriente eléctrica con una intensidad i.

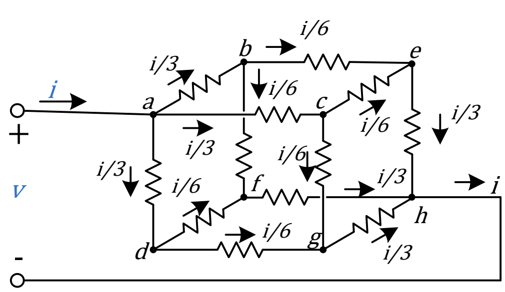

Figura 3.18. Circuito simétrico.

Ahora la diferencia de potencial v_{ah} se puede conocer siguiendo alguna trayectoria adecuada, una de ellas es la siguiente

$$v_{ah} = v_{ad} + v_{dg} + v_{gh}$$

$$v_{ah} = \frac{i}{3}R + \frac{i}{6}R + \frac{i}{3}R = \frac{5}{6}Ri$$

$$R_{eq} = \frac{v_{ah}}{i} = \frac{5}{6}R \quad [\Omega]$$

Circuito RC

Hasta ahora se han estudiado circuitos eléctricos algebraicos o amnésicos. Reciben el nombre de algebraicos porque se describen o modelan mediante ecuaciones algebraicas y el de amnésicos porque sus voltajes y corrientes en un cierto tiempo dependen únicamente del valor de las fuentes electromotrices en ese tiempo y no de valores anteriores de dichas fuentes.

A continuación se estudia otro tipo de circuito eléctrico, el cual se dice que es *lineal, invariante en el tiempo y dinámico*. Es lineal porque está constituido por elementos lineales o sea que satisfacen las propiedades de linealidad, es invariante en el tiempo porque las características de sus componentes no cambian con el tiempo y es dinámico porque los valores de los voltajes y las corrientes en un tiempo dado dependen del valor de las fuentes electromotrices en ese tiempo pero además dependen de los valores anteriores de ellas. Los circuitos dinámicos lineales e invariantes con el tiempo se caracterizan o se describen por medio de ecuaciones diferenciales lineales, ordinarias y de coeficientes constantes.

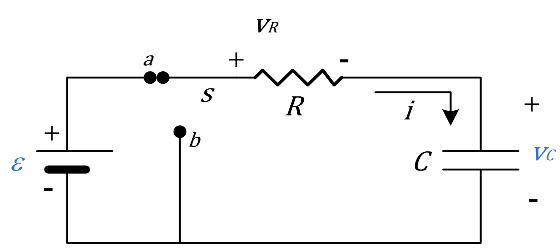

Figura 3.19. Circuito RC.

Sea el circuito mostrado en la figura 3.19, este circuito recibe el nombre de RC por razones obvias. Cuando el conmutador S se conecta en $t = 0$ con el nodo a, de la primera ley de Kirchhoff se tiene

$$i_R(t) = i_C(t) = i(t) \tag{3.34}$$

Donde de la ley de Ohm

$$v_R(t) = Ri_R(t) \tag{3.35}$$

Para el condensador, sabemos

$$Q(t) = Cv_C(t) \tag{3.36}$$

entonces

$$i_C(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C\frac{dv_C(t)}{dt} \tag{3.37}$$

De la segunda ley de Kirchhoff

$$\varepsilon = v_R(t) + v_C(t) = Ri_R(t) + v_C(t)$$

Con la ecuaciones (3.34) y (3.37)

$$\varepsilon = Ri_C(t) + v_C(t)$$

$$\varepsilon = RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t)$$

Si $v_C(t) = v(t)$, entonces

$$\varepsilon = RC\frac{dv(t)}{dt} + v(t) \tag{3.38}$$

Esta ecuación diferencial modela al *circuito RC de primer orden*. Como sabemos, la solución general de esta ecuación diferencial consta de dos componentes. Una es la solución a la ecuación homogénea

$$0 = RC\frac{dv(t)}{dt} + v(t) \tag{3.39}$$

Esta solución recibe varios nombres, algunos son: *función complementaria*, *respuesta natural*, *respuesta libre*. Aquí la denominaremos *la respuesta de entrada cero* (zero input response) $v_{zi}(t)$, y se debe únicamente a la energía almacenada en el circuito eléctrico (*sistema eléctrico*).

La otra parte de la solución general es la solución de la ecuación diferencial no homogénea, también recibe varios nombres, entre otros *integral particular*, *solución particular*, *respuesta forzada*. Aquí se le denominará *la respuesta de estado cero* (zero state response) $v_{zs}(t)$, y se debe únicamente a la función de la entrada (batería). Así

$$v(t) = v_{zi}(t) + v_{zs}(t) \tag{3.40}$$

La respuesta de entrada cero se puede obtener de la siguiente manera. De la ecuación (3.39)

$$\frac{dv_{zi}}{v_{zi}} = -\frac{1}{RC}dt$$

Integrando

$$\ln v_{zi} = -\frac{1}{RC}t + C_1 = -\frac{1}{RC}t + \ln C_2$$

$$\ln v_{zi} - \ln C_2 = \ln\left(\frac{v_{zi}}{C_2}\right) = -\frac{1}{RC}t$$

Obteniendo su antilogaritmo

$$\frac{v_{zi}}{C_2} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

por consiguiente

$$v_{zi}(t) = C_2 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (3.41)$$

La respuesta de estado cero, se obtiene a partir de la ecuación (3.38). Dado que la entrada ε es constante, se propone como solución otra constante, esto es $v_{sz} = C_3$. Sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\varepsilon = RC\frac{dC_3}{dt} + C_3 = 0 + C_3$$

En la ecuación (3.40)

$$v(t) = C_2 e^{-\frac{t}{RC}} + \varepsilon$$

Suponiendo que el valor del voltaje en el condensador se conoce, en el momento de que el conmutador hace contacto con la posición a, esto es $v(0^-) = v(0^+) = V_o$, el valor de la constante C_2 se puede determinar

$$V_o = C_2 + \varepsilon$$

Entonces

$$C_2 = V_o - \varepsilon$$

Y la solución completa es

$$v(t) = (V_o - \varepsilon)e^{-\frac{t}{RC}} + \varepsilon = V_o e^{-\frac{t}{RC}} + \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad t > 0 \qquad (3.42)$$

Con la finalidad de simplificar el análisis, consideremos que $V_o = 0$, por lo que

$$v_C(t) = \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad t > 0 \qquad (3.43)$$

Si se conoce el voltaje en el condensador, se puede determinar su carga eléctrica

$$Q(t) = \mathrm{C}v_C(t) = C\varepsilon(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \qquad (3.44)$$

Y la corriente eléctrica en el circuito es entonces

$$i_C(t) = i(t) = \frac{d}{dt}Q(t) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

y por consiguiente el voltaje en el resistor está dado por

$$v_R(t) = Ri_R(t) = Ri(t) = \varepsilon e^{-\frac{t}{RC}} \tag{3.45}$$

En figura 3.20, se muestran los voltajes del condensador y del resistor, con $\varepsilon = 10\ [V]$ y $RC = 1\ [s]$ para $0 < t < 5$.

En la ecuación (3.43) cuando $t = RC\ [s]$, el voltaje en el condensador es

$$v_C(t)|_{t=RC} = \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\Big|_{t=RC} = \varepsilon(1 - e^{-1}) = 0.632\varepsilon$$

El término $RC = \tau_C$ recibe el nombre de *constante de tiempo*. Esta constante junto con la ordenada de la curva en un tiempo de referencia, por ejemplo $t = 0$, caracterizan a una curva exponencial.

Para el circuito RC la constante de tiempo se define como el tiempo que requiere el condensador para que su voltaje sea 63.2 % del valor final. Para el circuito que se estudia, el valor final es de $10\ [V]$ y la constante de tiempo es $\tau_C = 1\ [s]$.

Cuando en el circuito de la figura 3.19, el conmutador S se conecta con el nodo b, se tiene de nuevo de la ley de corrientes de Kirchhoff

$$i_R(t) = i_C(t) = i(t)$$

De la segunda ley de Kirchhoff

$$0 = v_R(t) + v_C(t) \tag{3.46}$$

Y de igual manera como se procedió antes

$$0 = RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t)$$

Ecuación de la que ya conocemos su solución. Si $v(0) = \varepsilon$

$$v_C(t) = \varepsilon e^{-\frac{t}{RC}}$$

de la ecuación (3.46)

$$v_R(t) = -\varepsilon e^{-\frac{t}{RC}}$$

En la figura 3.20, se presentan las gráficas de los voltajes correspondientes del capacitor y del resistor para $5 < t < 10$.

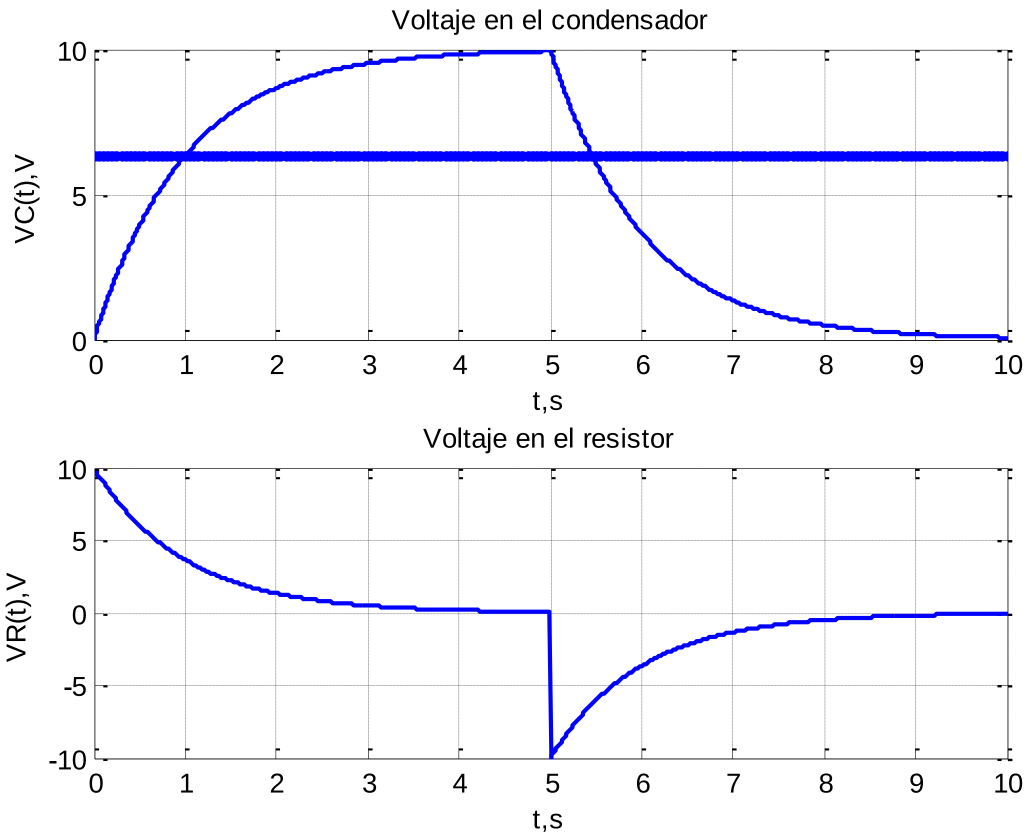

Figura 3.20. Voltajes de carga y descarga de un circuito RC.