Master 2 de Physique Théorique de l'ENS

année 2012-2013

*******************

Nathalie Deruelle

*

# *Introduction aux équations d'Einstein de la Relativité Générale*

*

Cours de Pré-Rentrée
3-7 Septembre 2012

# *Sommaire*


*Première Partie*

Relativité et gravitation newtoniennes

Chapitre 1. **Géométrie cartésienne**

Chapitre 2. **Géométrie vectorielle**

Chapitre 3. **Géométrie gaussienne**

Chapitre 4. **Dynamique et gravitation newtoniennes**

*Deuxième Partie*

De la Relativité Restreinte à la Relativité Générale

Chapitre 5. **Espace-temps de Minkowski et repères inertiels**

Chapitre 6. **Repères accélérés et géométrisation de l'inertie**

Chapitre 7. **Principe d'équivalence et géométrisation de la gravitation**

*Troisième Partie*

Espaces-temps courbes et Gravitation

Chapitre 8. **Le tenseur de Riemann-Christoffel**

Chapitre 9. **Variétés riemanniennes**

Chapitre 10. **Les équations du champ de gravitation**

*Première Partie*

# Relativité et gravitation newtoniennes

"Les termes (...) de *temps*, d'*espace*, de *lieu* & de *mouvement* sont connus de tout le monde; mais il faut remarquer que pour n'avoir considéré ces quantités que par leurs relations à des choses sensibles, on est tombé dans plusieurs erreurs. Pour les éviter il faut distinguer le temps, l'espace, le lieu & le mouvement, en *absolus* & *relatifs*, *vrais* & *apparens*, *mathématiques* & *vulgaires*."

Isaac Newton, in *Principia*, Londres 1687
Traduit par la Marquise du Châtelet, Paris 1759

## Chapitre 1
## Géométrie cartésienne

L'objet de cet premièr chapitre est de présenter de manière élémentaire et succinte la géométrie euclidienne, cadre mathématique dans lequel sont formulées les lois de la physique newtonienne.

### SECTION 1. L'espace-temps newtonien

En physique newtonienne espace et lieux "relatifs, apparents et vulgaires" sont représentés par un ensemble mathématique de points, l'espace "absolu" $\mathcal{E}_3$, postulé être euclidien.

Ainsi, chaque point est caractérisé par trois nombres réels, ses coordonnées, qui définissent sa position. De plus il existe des systèmes de coordonnées "cartésiennes", tels que la *distance* $r_{12}$ entre deux points, de coordonnées $(X_1, Y_1, Z_1)$ et $(X_2, Y_2, Z_2)$ est donnée par le théorème de Pythagore :

$$r_{12} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=3} (X_2^i - X_1^i)^2} \,. \tag{1}$$

L'*élément de longueur*, c'est-à-dire le carré de la distance $dl(\geq 0)$, entre deux points infiniment voisins de coordonnées cartésiennes $X^i$ et $X^i + dX^i$, qui permet de mesurer les longueurs des courbes et de démontrer toutes les propriétés métriques des figures s'écrit donc

$$dl^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \sum_{i,j} \delta_{ij}\, dX^i dX^j \equiv \delta_{ij}\, dX^i dX^j \,. \tag{2}$$

La deuxième égalité définit le symbole de Kronecker $\delta_{ij}$ ; dans ce contexte géométrique ses six composantes ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ autrement) s'appellent coefficients de la métrique euclidienne en coordonnées cartésiennes. La troisième égalité définit la *convention de sommation d'Einstein* sur les indices répétés.

L'origine et les trois axes de coordonnées constituent un repère cartésien orthonormé, $\mathcal{S}$.

Le temps "apparent" est quant à lui représenté par un nombre réel, le temps "absolu" ou universel, $t \in R$, le même pour tous les points de l'espace absolu.

On peut ainsi introduire l'espace-temps de Newton, $N_4$, comme un "feuilletage", c'est-à-dire une succession de copies de l'espace euclidien $\mathcal{E}_3$, paginées en ordre croissant par le temps $t$ : $N_4 = \mathcal{E}_3 \times R$. L'ensemble des copies d'un point de $\mathcal{E}_3$ devient alors une "fibre" de $N_4$ représentant un point au repos absolu et dans ce contexte cinématique l'ensemble des repères cartésiens indexés par $t$ prend le nom de repère absolu.

### SECTION 2. Le référentiel absolu

Le temps absolu $t$ est matérialisé par des horloges ou des montres, c'est-à-dire des phénomènes répétitifs. Une bonne horloge, en fin de compte, est un appareil qui mesure, quel que soit le mouvement dont il est affecté, des durées en accord avec les prédictions des lois dynamiques écrites en fonction du temps absolu.

Un repère cartésien de l'espace absolu est quant à lui matérialisé, dans l'espace "relatif, apparent et vulgaire", par un *référentiel*. Concrètement ce référentiel est un trièdre solide, c'est-à-dire un ensemble d'objets matériels dont les distances relatives sont invariables dans le temps et dont on a choisi l'orientation des axes (par la "règle du tire-bouchon" par exemple). On le construit à l'aide d'instruments qu'une utilisation répétée permet de qualifier de "rigides" (*i.e.* solides également), règles, compas *etc*, en utilisant le théorème de Pythagore et ses conséquences. Enfin, un étalon de longueur est choisi, par exemple le mètre. Ce référentiel, qui permet de quadriller l'espace physique, est "bon" si, à la précision des mesures, toutes les propriétés euclidiennes des figures y sont vérifiées.[1]

Le *référentiel absolu* qui matérialise le repère absolu de l'espace-temps de Newton est un référentiel qui doit être au repos afin que l'on puisse identifier les "fibres" de $N_4$ à des objets matériels immobiles. Pour Newton, le référentiel absolu était formé du système solaire et de l'ensemble des étoiles suffisamment lointaines pour paraître fixes, qu'il postulait être au repos absolu. Quant au mouvement "absolu" d'un point matériel il est représenté par une courbe d'équation $t \in R \mapsto P(t) \in \mathcal{E}_3$, $t$ étant le temps absolu. Remarquons que, l'univers semblant pour l'essentiel vide de matière, les points $p$ de $\mathcal{E}_3$ n'y sont pour la plupart que "virtuellement matérialisés", une contradiction dans les termes qui ne laissa pas de choquer Descartes et Kant, et fut contournée dès le XVIIIème siècle par l'introduction de la notion d'*éther*, milieu élusif chargé de matérialiser $\mathcal{E}_3$.

Si l'espace et le temps incarnent bien la structure que leur prête Newton on peut alors prédire un résultat, élémentaire mais important : considérons deux voyageurs $A$ et $B$ qui partis d'un endroit se retrouvent après de quelconques périples ; les durées des voyages mesurées par $A$ et $B$ doivent être les mêmes : leurs montres, synchronisées au départ, doivent indiquer la même heure à l'arrivée.[2]

### SECTION 3. Changement de coordonnées cartésiennes

Si l'on change l'étiquetage des points de $\mathcal{E}_3$ la distance entre deux points est, on le postule, inchangée. Restreignons-nous aux changements $X^i \mapsto X'^i$ qui préservent aussi la *forme* de l'élément de longueur, c.-à-d. tels que $dl^2 \equiv \delta_{ij}\, dX^i dX^j = \delta_{ij}\, dX'^i dX'^j$. Les nouvelles coordonnées $X'^i$ sont alors aussi, par définition, cartésiennes et les transformations sont données par

$$X'^i = \mathcal{R}_j{}^i (X^j - d^j) \qquad \text{avec} \quad \mathcal{R}_k{}^i \mathcal{R}_l{}^j \delta_{ij} = \delta_{kl}\,. \tag{1}$$

Nous imposerons de surcroît $\det\mathcal{R} = +1$, où $\det\mathcal{R}$ est le déterminant de la matrice de rotation $\mathcal{R}_j{}^i$ ; la transformation préserve ainsi l'orientation des axes. Ces transformations forment le groupe (propre) des changements de repères cartésiens, groupe à $n(n+1)/2$ paramètres, $n$ de translation et $n(n-1)/2$ de rotation, $n$ étant la dimension de l'espace. A deux dimensions par exemple la matrice de rotation $\mathcal{R}_j{}^i$ est paramétrée par un angle $\phi$ et on a $\mathcal{R}_X{}^X = \cos\phi$, $\mathcal{R}_Y{}^X = \sin\phi$, $\mathcal{R}_X{}^Y = -\sin\phi$ et $\mathcal{R}_Y{}^Y = \cos\phi$.[3]

Puisque la forme de l'élément de longueur est invariante sous les translations et rotations le choix de l'origine et de la direction des axes du référentiel absolu doit être sans importance. C'est une première facette du "principe de Copernic", dont on peut donner la version (active) suivante : la géométrie d'Euclide

---

[1] Si la construction du référentiel s'avère impossible, ou si des mesures donnent des résultats systématiquement contraires aux prédictions euclidiennes (*e.g.* que la somme des angles d'un triangle n'est pas égale à $\pi$) on en déduira alors que la représentation de l'espace réel (la surface de la Terre par exemple) par un plan euclidien est inadéquate. Pour une exposition magistrale et concise de ce va-et-vient entre les phénomènes et leur représentation mathématique, *cf* la lettre de A. Einstein à M. Solovine, *in, e.g.*, *"Einstein et la Relativité Générale"* par J. Eisenstaedt, CNRS Edt, 2002.

[2] Si lors d'une expérience ce n'était pas le cas, cela signifierait, *a priori*, que les horloges ne sont pas bonnes. Mais si un grand nombre d'expériences, effectuées avec soin, donnent un résultat systématiquement différent de la prédiction (ce qui est le cas...), on en conclura (avec Einstein) que l'espace-temps absolu de Newton ne représente pas adéquatement l'univers réel.

[3] A trois dimensions la matrice $\mathcal{R}_j{}^i$ peut être paramétrée par les 3 angles d'Euler, voir *e.g.* N. Deruelle et J.P. Uzan, "*Mécanique et Gravitation Newtoniennes*", Vuibert 2006, & 3. Ajoutons que nous supposerons toujours que la *topologie* de l'espace absolu est triviale et qu'une orientation globale est possible, excluant ainsi les espaces du genre "ruban de Möbius" à deux dimensions ou "espace de Klein" à trois.

est universelle ; un objet solide triangulaire, par exemple, doit avoir les mêmes propriétés géométriques, où qu'il soit. L'univers ne le déforme pas ; c'est un réceptacle neutre de la matière, qu'on qualifie d'homogène et isotrope.

Rappelons que ce référentiel doit par contre être au repos. On le détermine donc par approches successives, par le fait que, à la précision des mesures, les mouvements des objets matériels y suivent les lois de la dynamique telles qu'elles s'écrivent dans le repère absolu. Pour des expériences peu précises "les murs du laboratoire" peuvent ainsi suffire à matérialiser le repère cartésien absolu ; dans des expériences plus poussées il faut en revanche passer à un système lié au centre de la Terre, *etc.*

### SECTION 4. Cinématique et champs de vecteurs cartésiens

Les coordonnées des points $P(t)$ représentant le mouvement d'un point matériel étant données par trois fonctions $X^i(t)$ dans un repère cartésien $\mathcal{S}$, $t$ étant le temps absolu, ses vitesse, $V^i \equiv dX^i/dt$ et accélération, $a^i \equiv dV^i/dt$, deviennent, dans un autre repère cartésien $\mathcal{S}'$ où l'on a $X'^i = \mathcal{R}_j{}^i(X^j - d^j)$, *cf* (3.1) :

$$V'^i(t) \equiv \frac{dX'^i}{dt} = \mathcal{R}_j{}^i\, V^j(t) \qquad , \qquad a'^i(t) \equiv \frac{dV'^i}{dt} = \mathcal{R}_j{}^i\, a^j(t)\,. \tag{1}$$

Le choix du repère cartésien doit être cinématiquement sans importance, du moment qu'il est au repos. Il est par conséquent naturel de considérer les composantes de la vitesse d'une trajectoire $P(t)$ dans n'importe quel repère au repos, *i.e.* l'ensemble des $V'^i = \mathcal{R}_j{}^i V^j$ paramétré par les matrices de rotation $\mathcal{R}_j{}^i$, comme une classe d'équivalence, c.-à-d. un objet unique, la *vitesse* de $P(t)$, notée $v$, les fonctions, ou "composantes", $V^i(t)$ et $V'^i(t)$ n'en étant que les avatars dans les repères $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$. De même $a^i$ et $a'^i = \mathcal{R}_j{}^i a^j$ sont les avatars de l'*accélération* $a$ de $P(t)$.

Ces vecteurs vitesse ou accélération sont des fonctions du temps. Il s'avèrera particulièrement fructueux d'introduire, "à la Faraday", des *champs de vecteurs*, c.-à-d. des ensembles de trois fonctions des *points* qui se transforment dans les changements de repère cartésien selon $T^i(X^j) \;\to\; T'^i(X'^j)$ où $X^j$ et $X'^j$ sont reliés par (3.1) et où

$$T'^i = \mathcal{R}_j{}^i T^j\,. \tag{2}$$

Dans cette optique la vitesse (ou l'accélération) devient un champ de vecteurs évalué sur la trajectoire : $V^i(t) = V^i(X^j(t))$. Enfin un *champ scalaire* $\Phi(X^i)$ est une fonction des coordonnées invariante par changement de repère : $\Phi'(X'^i) = \Phi(X^i)$.

### SECTION 5. Le groupe des déplacements rigides

On peut vouloir passer, par commodité de calcul ou pour simplifier la description des phénomènes, ou pour les rapporter à un référentiel en mouvement par rapport au référentiel absolu, du repère cartésien absolu $\mathcal{S}$ de l'espace-temps $N_4 = \mathcal{E}_3 \times R$ à un repère en mouvement, $\mathcal{S}'$, c'est-à-dire à une famille de repères de $\mathcal{E}_3$ indexés par $t$ dont les origines et directions des axes varient "de feuille à feuille", *i.e.* dans chaque section $\mathcal{E}_3$ de $N_4$. Cette opération est différente d'un passage d'un repère cartésien à un autre puisque l'étiquetage des points (immobiles dans $\mathcal{S}$) dépend du temps dans $\mathcal{S}'$. Ceci étant on continue à postuler que la distance entre deux points est la même dans $\mathcal{S}$ ou dans $\mathcal{S}'$.

Nous ne considèrerons que l'ensemble des transformations $X^i \to X'^i$ qui préservent la forme de l'élément de longueur, de sorte que les trois axes restent orthonormés (et de même orientation) au cours du mouvement du repère. Il est défini par :

$$X'^i = \mathcal{R}_j{}^i(t)\left(X^j - d^j(t)\right) \qquad \text{avec} \quad \mathcal{R}_k{}^i(t)\,\mathcal{R}_l{}^j(t)\,\delta_{ij} = \delta_{kl} \quad \text{et} \quad \det\mathcal{R} = +1 \tag{1}$$

où les composantes dans $\mathcal{S}'$ de la matrice de rotation $\mathcal{R}_j{}^i(t)$ des trois axes et de la translation de l'origine $d^i(t)$ dépendent du temps. Cet ensemble de transformations forme le groupe des déplacements rigides. Ils décrivent l'évolution au cours du temps de la position et de l'orientation d'un trièdre solide de référence en mouvement par rapport au reférentiel absolu.

Si les coordonnées cartésiennes dans le repère absolu $\mathcal{S}$ de la trajectoire $P(t)$ d'un point matériel sont données par les trois fonctions $X^i(t)$, les composantes de ses vitesse et accélération dans $\mathcal{S}'$ sont

$$\begin{cases} V'^i \equiv \dfrac{dX'^i}{dt} = \mathcal{R}_j{}^i\, V^j + \dot{\mathcal{R}}_j{}^i X^j - (\mathcal{R}_j{}^i d^j)^{\cdot} \\ a'^i \equiv \dfrac{dV'^i}{dt} = \mathcal{R}_j{}^i\, a^j + 2\,\dot{\mathcal{R}}_j{}^i\, V^j + \ddot{\mathcal{R}}_j{}^i\, X^j - (\mathcal{R}_j{}^i d^j)^{\cdot\cdot} \end{cases} \tag{2}$$

où $V^i(t) \equiv dX^i/dt \equiv \dot{X}^i$ et $a^i(t) \equiv dV^i/dt \equiv \ddot{X}^i$ sont ses vitesse et accélération dans $\mathcal{S}$. On voit que les $V'^i$ ne sont égaux aux $\mathcal{R}_j^iV^j$ que dans un changement de repère cartésien *indépendant* du temps ; quant aux $a'^i$ ils sont égaux aux $\mathcal{R}_j^i(t)a^j$ si le changement est la *transformation de Galilée* :

$$X'^i = \mathcal{R}_j{}^i(X^j - X_0^j - V_0^j t) \tag{3}$$

où $\mathcal{R}_j{}^i$, $X_0^i$ et $V_0^i$ sont des constantes. L'ensemble des repères se déduisant du repère absolu par (3) sont dit *inertiels*. Ils jouent on le sait un rôle considérable en physique newtonienne.

**Exercice : rotation autour d'un l'axe**

Montrez que lorsqu'on passe du repère absolu à un repère en rotation avec la vitesse angulaire rétrograde $\Omega(t) \equiv d\phi/dt$ autour de l'axe des $Z$, les composantes $(d^2X/dt^2, d^2Y/dt^2)$ de l'accélération d'un point matériel deviennent :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X'}{dt^2} = +2\Omega\dfrac{dY'}{dt} + \Omega^2 X' + \dfrac{d\Omega}{dt}Y' + \cos\phi\dfrac{d^2X}{dt^2} + \sin\phi\dfrac{d^2Y}{dt^2} \\ \dfrac{d^2Y'}{dt^2} = -2\Omega\dfrac{dX'}{dt} + \Omega^2 Y' - \dfrac{d\Omega}{dt}X' - \sin\phi\dfrac{d^2X}{dt^2} + \cos\phi\dfrac{d^2Y}{dt^2}\,. \end{cases} \tag{4}$$

# Chapitre 2
# Géométrie vectorielle

L'objet de ce chapitre est de passer de la notion de vecteur comme objet dont les composantes se transforment selon $T^i \to \mathcal{R}_j{}^i T^j$ dans un changement de repère, à la notion "intrinsèque" de vecteur, $T$. Ces notions sont aussi généralisées aux "tenseurs".

## SECTION 6. Espaces tensoriels

Rappelons qu'un espace vectoriel $E$ est un ensemble d'objets $v$ ou $w$ appelés vecteurs tels que $(\alpha\, v+\beta\, w)$, où $\alpha$ et $\beta$ sont des nombres réels, est aussi un vecteur et où addition de vecteurs et multiplication par un nombre réel possèdent les propriétés habituelles de commutativité, d'associativité, d'existence d'élément neutre et d'inverse. Par définition d'une base $\{e_i\}$ et de la dimension $n$ de $E$, tout vecteur $v$ de $E$ se décompose de façon unique selon $v = v^i\, e_i$, où les $n$ nombres réels $v^i$, $i = 1, 2, ...n$, sont les composantes de $v$ dans la base $\{e_i\}$ (et où nous utilisons la convention de sommation d'Einstein).

Rappelons aussi que l'espace dual de $E$, noté $E^*$, est l'ensemble des applications linéaires (ou formes) qui à un vecteur associent un nombre réel. On peut construire $E^*$ ainsi : à toute base $\{e_i\}$ de $E$, on associe la base duale (ou conjuguée) $\{\epsilon^j\}$ de $E^*$ par les formules $\epsilon^j(e_i) = \delta_i^j$ où $\delta_i^j$ est le symbole de Kronecker ; alors, toute forme $\lambda \in E^*$ se décompose de façon unique selon $\lambda = \lambda_j\, \epsilon^j$ où les $\lambda_j$ sont ses composantes (ou coefficients) dans la base $\{\epsilon^j\}$.

Rappelons enfin que le dual du dual est isomorphe à $E$ car l'action de la forme $\lambda = \lambda_i\epsilon^i$ sur le vecteur $v = v^ie_j$, qui est $\lambda(v) = \lambda_iv^i$, peut être aussi vue comme une action de $v$ sur $\lambda$. On écrit donc $\lambda(v) \equiv v(\lambda) \equiv <\lambda, v>$ où $<.., ..>$ dénote le crochet de dualité : ainsi les vecteurs sont aussi des opérateurs agissant sur des formes pour donner des nombres réels.

Les formes bilinéaires $a$ associent un nombre réel à un couple de vecteurs. On note $L_2(E \times E, R)$ leur ensemble. On peut les définir ainsi : pour $v = v^ie_i \in E$, $w = w^je_j \in E$, on a (par définition de la linéarité) :

$a(v,w) = v^i\, w^j\, a(e_i,e_j)$ ; donc se donner $a$ équivaut à se donner les $n^2$ nombres réels $a_{ij} \equiv a(e_i,e_j)$, composantes (ou coefficients) de $a$ dans la base $\{e_i\}$.

La notation produit tensoriel, $\otimes$, engendre une définition "automatique" des formes multilinéaires. Si nous définissons $\epsilon^i \otimes \epsilon^j$ comme étant la forme bilinéaire telle que $(\epsilon^i \otimes \epsilon^j)(v,w) = \epsilon^i(v)\, \epsilon^j(w) = v^i\, w^j$ (de sorte que $(\epsilon^i \otimes \epsilon^j)(e_k,e_l) = \delta^i_k \delta^j_l$), on peut alors écrire $a = a_{ij}\, \epsilon^i \otimes \epsilon^j$. Les $\epsilon^i \otimes \epsilon^j$ forment une base de $L_2(E\times E, R)$ que l'on peut alors noter $E^* \otimes E^*$.

De manière analogue un élément $b$ de $L_2(E\times E^*, R) \equiv E^* \otimes E$ associe un nombre réel à un couple d'un vecteur et d'une forme et s'écrit $b = b_i{}^j \epsilon^i \otimes e_j$, *etc.*

Au lieu de formes bi- ou multilinéaires il s'avère donc plus économique de parler de *tenseurs*. Par exemple $T = T_{ij}{}^k \epsilon^i \otimes \epsilon^j \otimes e_k$ est, par définition, un tenseur deux fois *covariant* et une fois *contravariant*. Une base de l'ensemble de tels tenseurs est $\epsilon^i \otimes \epsilon^j \otimes e_k$, construite par produit tensoriel de la base $e_i$ de $E$ et de la base conjuguée $\epsilon_j$. Ainsi les vecteurs deviennent des tenseurs une fois contravariants, les formes des tenseurs une fois covariants, la métrique un tenseur deux fois covariant *etc.* De manière générale on écrira

$$T = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\; e_{i_1} \otimes\, e_{i_2} \ldots \otimes\; e_{i_p} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes\, \ldots\, \otimes\, \epsilon^{j_q}\,. \tag{1}$$

Un tenseur $p$ fois contravariant et $q$ fois covariant est dit de type (ou variance), $\binom{p}{q}$.[4] Les tenseurs de type $\binom{p}{q}$ forment un espace vectoriel. Les produits des composantes de deux tenseurs $T$ et $T'$ de types $\binom{p}{q}$ et $\binom{p'}{q'}$ sont les composantes du tenseur $T\otimes T'$ de type $\binom{p+p'}{q+q'}$, produit tensoriel de $T$ et $T'$.

Les espaces de formes multilinéaires sont alors unifiés et deviennent des éléments d'une algèbre tensorielle de dimension infinie bâtie sur $E$ par produit tensoriel.

La contraction transforme un tenseur de type $\binom{p}{q}$ en un tenseur de type $\binom{p-1}{q-1}$ par sommation sur un indice covariant et un indice contravariant (ainsi : $e_a \otimes \epsilon^a = 1$). La *trace* d'un tenseur de type $\binom{p}{p}$ est sa contraction sur tous ses indices : $T = T^{ijk\ldots}_{ijk\ldots}$. Un tenseur de type $\binom{0}{p}$ antisymétrique en tous ses indices est appelé une p-forme.

### SECTION 7. Plans affines et euclidiens

Un espace affine $\mathcal{E}$ est un ensemble de points où tout bipoint, noté ($p$,$q$), est identifié à un vecteur, noté $pq$, d'un espace vectoriel $E$ de même dimension.

Un repère affine $\mathcal{S}$ de $\mathcal{E}$ est l'ensemble d'un point origine $O$ et d'une base $e_i$ de $E$. Ainsi le vecteur $Op$ se décompose-t-il selon : $Op = X^i e_i$, où les $X^i$ sont à la fois les composantes de $Op$ dans la base $\{e_i\}$ et les coordonnées de $p$ dans le repère $\mathcal{S}$.

A un vecteur $F$ correspond tout une classe d'équivalence de bipoints dits équipollents, $(p,q)$, où $p$ est quelconque et où $pq = F$. L'opération qui associe $(p_1,q_1)$ à $(p_2,q_2)$ s'appelle *transport parallèle*.

Un espace euclidien est un espace affine muni d'une *métrique euclidienne*, c'est-à-dire de la forme bilinéaire symétrique (ou tenseur deux fois covariant)

$$e = \delta_{ij} \epsilon^i \otimes \epsilon^j \tag{1}$$

où $\delta_{ij}$ est le symbole de Kronecker. L'action de $e$ sur les vecteurs de base $e_i$ de $E$ est donc $e(e_k,e_l) = \delta_{kl}$. La base $\{e_i\}$ est alors orthonormée et le repère $\mathcal{S} = (O,\{e_i\})$ cartésien.

Relions l'élément de longueur $dl^2$ défini en & 1 à la métrique $e$ : soient $p$ et $q$ deux points infiniment voisins de l'espace euclidien $\mathcal{E}_3$, de coordonnées $X^i$ et $(X^i + dX^i)$ dans le repère cartésien $\mathcal{S}$ ; on note $dp \equiv pq = dX^i e_i$ le vecteur de l'espace vectoriel associé ; $dl^2$ est alors le résultat de l'action de la métrique $e$ sur le vecteur $dp$ :

$$e(dp,dp) = dX^i\, dX^j e(e_i,e_j) = dX^i\, dX^j \delta_{ij} \equiv dl^2. \tag{2}$$

Plus généralement l'action de $e$ sur deux vecteurs $v$ et $w$ définit leur *produit scalaire* $(v.w) \equiv e(v,w)$.

[4] Une façon de rendre manifeste la variance $\binom{p}{q}$ d'un tenseur est de le noter $T^{J_1\ldots J_p}_{I_1\ldots I_q}$ (en se gardant de le confondre avec ses composantes $T^{j_1\ldots j_p}_{i_1\ldots i_q}$ dans une base), *cf e.g.* R. Wald, *"General Relativity"* Chicago University Press, 1984.

**SECTION 8. Changement de base et de repère**

Un vecteur $v$ est défini indépendamment de la base $e_i$ ou $e'_i$ choisie : $v = v^i\,e_i = v'^j\,e'_j$. Donc, si $e'_j = \mathcal{R}^i{}_j\,e_i$, on aura $v^i = \mathcal{R}^i{}_j\,v'^j$ et $v'^j = \mathcal{R}_i{}^j v^i$ où $\mathcal{R}_i{}^j$ est la matrice inverse de $\mathcal{R}^i{}_j$ (*i.e.* telle que $\mathcal{R}^k{}_i\,\mathcal{R}_k{}^j = \mathcal{R}^j{}_k\,\mathcal{R}_i{}^k = \delta^j_i$).

Un changement de base dans $E$ induit un changement de base dans l'espace dual $E^*$ : $\epsilon^j \to \epsilon'^j = \mathcal{R}_i{}^j\epsilon^i$. La base $\{\epsilon'^j\}$ reste conjuguée de la base $\{e'_j\}$ : $\epsilon'^j(e'_i) = \delta^j_i$. Dans la base $\{\epsilon'^j\}$ une forme $\lambda$ se décompose selon $\lambda = \lambda_i\epsilon^i = \lambda'_j\epsilon'^j$ avec $\lambda_i = \mathcal{R}_i{}^j\lambda'_j$ et $\lambda'_j = \mathcal{R}^i{}_j\lambda_i$.

On obtient par extension la loi de transformation des composantes des tenseurs dans les changements de base :

$$T'^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = T^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q}\mathcal{R}_{k_1}{}^{i_1}\ldots\mathcal{R}_{k_p}{}^{i_p}\mathcal{R}^{l_1}{}_{j_1}\ldots\mathcal{R}^{l_q}{}_{j_q}\,. \tag{1}$$

Ainsi, les composantes d'un vecteur, d'une forme et plus généralement d'un tenseur ne sont que leurs avatars dans une base donnée et leur statut supérieur transparaît dans les lois de transformation de leurs composantes. En fait, et toute l'approche "en composantes" de la géométrie est basée sur cela, la loi de transformation (1) peut être vue comme une *définition* d'un tenseur, *cf* & 4.

Soient $\mathcal{S} = (O, \{e_i\})$ et $\mathcal{S}' = (O', \{e'_j\})$ deux repères d'un espace affine $\mathcal{E}$. Les *rayons vecteurs* $O'p \equiv R'$ et $Op \equiv R$ du point $p$ dans $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}$ sont reliés par, en posant $OO' \equiv d$,

$$\begin{aligned} &O'p = Op - OO' \qquad \text{c.-à-d.} \qquad R' = R - d\,, \qquad \text{soit encore} \\ &X'^i e'_i = X^i e_i - d^i e_i \qquad \text{ce qui implique} \qquad X'^i = \mathcal{R}_j{}^i(X^j - d^j) \end{aligned} \tag{2}$$

et l'on retrouve ainsi la formule (3.1).

Si la matrice $\mathcal{R}_i{}^j$ est une matrice de rotation alors, si $\mathcal{S}$ est un repère cartésien, $\mathcal{S}'$ l'est aussi car la formule (1) donne

$$\delta'_{ij} = \mathcal{R}^k{}_i\mathcal{R}^l{}_j\delta_{kl} = \delta_{ij} \tag{3}$$

par définition des matrices de rotation.[5]

**SECTION 9. Cinématique du point**

Le mouvement d'un point matériel est représenté par la courbe $P(t)$ de $\mathcal{E}_3$ ou, de manière équivalente, par son rayon vecteur $OP(t)$, $t$ étant le temps absolu. Le *vecteur vitesse* de $P(t)$ dans $\mathcal{S}$ est

$$v(t) = \frac{d\,OP}{dt} \equiv \frac{dR}{dt} \equiv \dot{R}\,. \tag{1}$$

Si $OP$ se décompose selon $OP = X^i(t)\,e_i$, alors $v = V^i(t)\,e_i$ où les trois fonctions du temps $V^i(t) \equiv dX^i/dt \equiv \dot{X}^i(t)$ sont ses composantes, introduites en & 4. De même le *vecteur accélération* de $P(t)$ dans $\mathcal{S}$ est $a = a^i(t)e_i$ où $a^i(t) \equiv \ddot{X}^i(t)$.

Vitesse et accélération sont des vecteurs (ou tenseurs une fois contravariants) dans les rotations de repères cartésiens, $X'^i = \mathcal{R}_j{}^i\,X^j$, *indépendantes* du temps. Par contre si le repère $\mathcal{S}'$ est en mouvement par rapport au repère absolu $\mathcal{S}$ alors les vitesse et accélération d'une trajectoire $P(t)$ ne sont pas représentées par les mêmes vecteurs dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$. On obtient en effet, en dérivant (8.2) par rapport au temps :

$$\begin{cases} v' = v - \dot{d} - \Omega \wedge R' \\ a' = a - \ddot{d} - 2\Omega \wedge v' + \Omega \wedge (R' \wedge \Omega) - \dot{\Omega} \wedge R' \end{cases} \tag{2}$$

où $\wedge$ dénote le produit vectoriel, où $R' \equiv O'P = X'^i(t)\,e'_i$ est le rayon vecteur de $P(t)$ dans $\mathcal{S}'$ ; $v' \equiv \dot{X}'^i\,e'_i$ ($\neq \dot{R}'$ car $e'_i$ dépend du temps) et $a' \equiv \ddot{X}'^i\,e'_i$ sont ses vitesse et accélération par rapport à $\mathcal{S}'$ ; $v \equiv \dot{X}^i\,e_i$ ($= \dot{R}$) et $a \equiv \ddot{X}^i\,e_i$ sont ses vitesse et accélération par rapport à $\mathcal{S}$ ; $d \equiv OO' = d^i e_i$ ; enfin $\Omega$, défini par

$$\dot{e}'_i = \Omega \wedge e'_i \tag{3}$$

[5] Les composantes de l'indice de Levi-Civita $e_{ijk}$ (complètement anti-symétrique avec $e_{123} = 1$) sont également invariantes dans les rotations à trois dimensions : $e'_{ijk} = \mathcal{R}_i{}^l\mathcal{R}_j{}^m\mathcal{R}_k{}^p e_{lmp} = \det\mathcal{R}\,e_{ijk} = e_{ijk}$.

est le vecteur de rotation de $\mathcal{S}'$ par rapport à $\mathcal{S}$. Le terme $-2\Omega \wedge v'$ est l'accélération de Coriolis, $\Omega \wedge (R' \wedge \Omega)$ est l'accélération centrifuge.

Les équations (2-3) sont les versions vectorielles des équations (5.2).

On ne peut donc pas parler de vitesse ou accélération dans l'absolu, c'est-à-dire indépendamment des repères où elles sont évaluées, lorsque ces repères se déduisent les uns des autres par des transformations dépendant du temps. Les seules exceptions sont les transformations de Galilée (pour lesquelles la matrice de rotation est constante et le vecteur translation linéaire dans le temps), qui laissent l'accélération invariante :

$$a' = a \qquad \text{soit, en composantes} \qquad a'^i(t) = \mathcal{R}_j{}^i a^j(t)\,. \tag{6}$$

La vitesse, quant à elle, n'est jamais représentée par le même vecteur dans deux repères déduits l'un de l'autre par une transformation dépendant du temps. Dans les transformations de Galilée :

$$v' = v - V_0 \qquad \text{soit, en composantes} \qquad V'^i(t) = \mathcal{R}_j{}^i \,(V^j(t) - V_0^j)\,. \tag{7}$$

Cette loi de *composition galiléenne* des vitesses signifie que les repères $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ ne sont pas équivalents du point de vue cinématique. Les théories d'Einstein de la Relativité simplifieront grandement cela.

# Chapitre 3
# Géométrie gaussienne

Nous faisons dans ce chapitre une présentation "à la Descartes", soit encore "en composantes", des coordonnées curvilignes, parallèle à celle des coordonnées cartésiennes faite au chapitre 1. Nous reportons au Cours proprement dit l'introduction de la *géométrie différentielle*, version "vectorielle" de la géométrie en coordonnées gaussiennes.

## SECTION 10. Coordonnées curvilignes

Une fois un repère cartésien et ses coordonnées $X^i$ définis, on peut souhaiter étiqueter les points de l'espace euclidien $\mathcal{E}_3$ à l'aide d'un nouveau système $\mathcal{C}$ de coordonnées curvilignes (appelées aussi gaussiennes) $x^i = x^i(X^j)$, et, inversement, $X^i = X^i(x^j)$, reliées non linéairement aux coordonnées cartésiennes (par exemple les coordonnées sphériques). Les dérivées partielles $\partial x^i/\partial X^j$ et $\partial X^j/\partial x^k$ forment les matrices jacobiennes de la transformation et sont reliées par $(\partial x^i/\partial X^j)(\partial X^j/\partial x^k) = \delta^i_k$ (et, inversement, par $(\partial X^i/\partial x^j)(\partial x^j/\partial X^k) = \delta^i_k$).

L'élément de longueur $dl^2$ entre deux points infiniment voisins (de valeur postulée invariante) n'est alors plus manifestement donné par le théorème de Pythagore puisque, par la règle de dérivation des fonctions composées

$$dl^2 \equiv \delta_{ij}\, dX^i dX^j = \delta_{ij}\, \frac{\partial X^i}{\partial x^k}\frac{\partial X^j}{\partial x^l}\, dx^k\, dx^l \equiv e_{kl}\, dx^k\, dx^l \tag{1}$$

où les composantes $e_{kl}$ de la métrique $e$ et son inverse $e^{km}$ (défini par $e_{kl}e^{km} = \delta^m_l$) ne sont plus données par le symbole de Kronecker mais par les fonctions des coordonnées

$$e_{kl} = \delta_{ij}\frac{\partial X^i}{\partial x^k}\frac{\partial X^j}{\partial x^l} \quad , \quad e^{km} = \delta^{pq}\frac{\partial x^k}{\partial X^p}\frac{\partial x^m}{\partial X^q}\,. \tag{2}$$

**Exercice : la métrique en coordonnées polaires**

Montrez que lorsqu'on passe des coordonnées cartésiennes du plan $X^i = (X, Y)$ aux coordonnées polaires $x^i = (r, \phi)$ telles que $X = r\cos\phi, Y = r\sin\phi$ on obtient, par application de la formule (2), le résultat familier $dl^2 = dX^2 + dY^2 = dr^2 + r^2\, d\phi^2$.

**Elément de volume en coordonnées curvilignes**

A $n$ dimensions, si la métrique est diagonale, *i.e.* si $dl^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + ... = (\vartheta^1)^2 + (\vartheta^2)^2 + ...$ avec $\vartheta^1 = \sqrt{g_{11}}dx^1...$, alors l'*élément de volume* est $dV = \vartheta^1\vartheta^2... = \sqrt{g_{11}g_{22}...}dx^1dx^2... = \sqrt{\det g_{ij}}\, dx^1dx^2....$ Si la métrique n'est pas diagonale, on a, dans le cas simple à deux dimensions : $dl^2 = g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + g_{22}(dx^2)^2$.

On peut la diagonaliser en introduisant $\vartheta^1 = L^1_1 dx^1 + L^1_2 dx^2$, $\vartheta^2 = L^2_1 dx^1 + L^2_2 dx^2$ avec $g_{11} = (L^1_1)^2 + (L^2_1)^2$, $g_{12} = L^1_1 L^1_2 + L^2_1 L^2_2$, $g_{22} = (L^1_2)^2 + (L^2_2)^2$. Les quantités $\vartheta^1$ et $\vartheta^2$ sont définies à une rotation près : si $\vartheta^1 = \cos\varphi\ \vartheta'^1 + \sin\varphi\ \vartheta'^2$ et $\vartheta^2 = -\sin\varphi\ \vartheta'^1 + \cos\varphi\ \vartheta'^2$ on a $dl^2 = (\vartheta^1)^2 + (\vartheta^2)^2 = (\vartheta'^1)^2 + (\vartheta'^2)^2$. L'élément de volume doit être le même que l'on choisisse $(\vartheta^1, \vartheta^2)$ ou $(\vartheta'^1, \vartheta'^2)$. C'est le cas de leur produit vectoriel ; on pose donc $dV = \vartheta^1 \wedge \vartheta^2$ et c'est alors un calcul élémentaire de voir que

$$dV = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 \equiv \sqrt{g}\, d^2x \quad \text{avec} \quad g \equiv \det g_{ij} = (\det g^{ij})^{-1} \quad \text{lorsque la métrique s'écrit :} \quad dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j\,.$$

Ainsi par exemple en coordonnées sphériques où $dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$ : $dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$.

## SECTION 11. Tenseurs curvilignes

Nous avons défini les champs de vecteurs en & 5 comme des ensembles de trois fonctions $T^i(X^j)$ se transformant selon $T^i \mapsto T'^i = \mathcal{R}_j{}^i T^j$ dans un changement de repère cartésien. La généralisation de la matrice de rotation $\mathcal{R}_j{}^i$ étant la matrice jacobienne $\partial x^i/\partial X^j$, on définira dans ce contexte élargi un tenseur $p$-fois contravariant et $q$-fois covariant comme un ensemble de fonctions dont la loi de transformation dans les changements de système de coordonnées est

$$t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial X^{k_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial X^{k_p}} \frac{\partial X^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial X^{l_q}}{\partial x^{j_q}}\,. \tag{1}$$

Ainsi la métrique et son inverse, dont les composantes se transforment selon la formule (10.2), sont respectivement des tenseurs deux fois covariant et deux fois contravariant.

Le produit scalaire de deux vecteurs est invariant dans un changement de système de coordonnées. En effet on a

$$(T.U) \equiv \delta_{ij} T^j U^i = e_{ij} t^j u^i = t_i u^i \qquad \text{avec} \qquad t_i \equiv e_{ij} t^j\,. \tag{2}$$

$t_i$ sont les composantes de la forme déduite du vecteur $t^i$ par *abaissement d'indice* et $t_i u^i$ peut-être vu comme la contraction ou trace du tenseur une fois contra- et une fois co-variant $t_i u^j$. On note que les fonctions $t_i$ ne sont plus numériquement égales aux $t^i$ : la place des indices, assez formelle en coordonnées cartésiennes où $e_{ij} = \delta_{ij}$, devient cruciale.

**Exercice : les composantes polaires d'un champ de vecteurs**

Montrez que dans le passage des coordonnées cartésiennes $(X, Y)$ aux coordonnées polaires $(r, \phi)$ on a $t^r = T^X \cos\phi + T^Y \sin\phi$ et $r\, t^\phi = -T^X \sin\phi + T^Y \cos\phi$.

Montrez que les composantes de la forme associée au vecteur $t^i$ sont : $t_r = t^r$ , $t_\phi = r^2 t^\phi$ .

## SECTION 12. Dérivation covariante

Dans un changement de repère cartésien les composantes d'un champ de vecteurs $T^i(X^k)$ se transforment, par définition, selon $T^i \mapsto T'^i = \mathcal{R}_j{}^i T^j$. Comme la matrice $\mathcal{R}_j{}^i$ et son inverse sont constantes les dérivées $\partial T^i/\partial X^k$ se transforment, elles, comme celles d'un tenseur cartésien une fois contra- et une fois co-variant puisque $\partial T'^i/\partial X'^k = \mathcal{R}_j{}^i \mathcal{R}^l{}_k\, (\partial T^j/\partial X^l)$. Cela n'est plus vrai dans une transformation non-linéaire de coordonnées où $T^i \mapsto t^i = (\partial x^i/\partial X^j)\, T^j$ car on a alors, par les règles de Leibniz et de dérivation des fonctions composées,

$$\begin{aligned} \frac{\partial t^i}{\partial x^k} &= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial x^i}{\partial X^j} T^j\right) = \frac{\partial x^i}{\partial X^j}\frac{\partial T^j}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^k \partial X^j} T^j \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial X^j}\frac{\partial X^l}{\partial x^k}\,\frac{\partial T^j}{\partial X^l} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial X^l \partial X^j}\frac{\partial X^l}{\partial x^k} T^j \end{aligned} \tag{1}$$

où toutes les grandeurs sont évaluées en $X^m(x^p)$. Le premier terme du membre de droite représente, par définition, les composantes dans le système $x^i$ du tenseur une fois contra- et une fois co-variant de composantes $\partial T^i/\partial X^k$ dans $\mathcal{S}$ ; on les note $\tilde{D}_k t^i$ :

$$\tilde{D}_k t^i \equiv \frac{\partial x^i}{\partial X^j}\frac{\partial X^l}{\partial x^k}\,\frac{\partial T^j}{\partial X^l}\,. \tag{2}$$

Ce sont les composantes de la *dérivée covariante* par rapport à $x^k$ du champ de vecteurs de composantes $t^i$.[6] Elles s'expriment en fonction des dérivées ordinaires de $t^i$ selon (1), c.-à-d.

$$\tilde{D}_k t^i = \partial_k t^i - \frac{\partial^2 x^i}{\partial X^l \partial X^j}\frac{\partial X^l}{\partial x^k}T^j \qquad \text{où l'on a noté} \qquad \partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{3}$$

soit encore

$$\tilde{D}_k t^i = \partial_k t^i + \tilde{\Gamma}^i_{km} t^m \qquad \text{avec} \qquad \tilde{\Gamma}^i_{km} \equiv \frac{\partial x^i}{\partial X^j}\frac{\partial^2 X^j}{\partial x^k \partial x^m} \tag{4}$$

où l'on a transformé le dernier terme de (3) en utilisant le fait que

$$\frac{\partial X^j}{\partial x^m}\frac{\partial x^i}{\partial X^j} = \delta^i_m \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial X^j}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^i}{\partial X^l \partial X^j} + \frac{\partial^2 X^j}{\partial x^m \partial X^l}\frac{\partial x^i}{\partial X^j} = 0\,. \tag{5}$$

Les fonctions $\tilde{\Gamma}^i_{km}$ sont les *coefficients de connexion*. Symétriques en leurs indices inférieurs, ils sont au nombre de $n^2(n+1)/2$ soit 18 en 3 dimensions.

**Exercice: champ de vecteurs constant et transport parallèle**

Montrez qu'en coordonnées polaires $(r,\phi)$ du plan les seuls coefficients de connexion non nuls sont $\tilde{\Gamma}^r_{\phi\phi} = -r$ et $\tilde{\Gamma}^\phi_{r\phi} = 1/r$.

Le champ de vecteurs $t^i$ sera constant si $\tilde{D}_j t^i = 0$. Montrez que cela s'écrit

$$\partial_r t^r = 0 \quad , \quad \partial_r t^\phi + t^\phi/r = 0 \quad , \quad \partial_\phi t^r - r t^\phi = 0 \quad , \quad \partial_\phi t^\phi + t^r/r = 0\,. \tag{6}$$

Montrez que ce système d'équations différentielles est intégrable (ce qu'on vérifie en constatant que les dérivées secondes commutent) et que sa solution est $t^r = a\cos(\phi+\omega)$, $t^\phi = -(a/r)\sin(\phi+\omega)$, $a$ et $\omega$ étant deux constantes d'intégration.

Vérifiez que les composantes cartésiennes de ce champ sont les constantes $T^X = a\cos\omega$, $T^Y = -a\sin\omega$ .

Si donc un champ de vecteurs a les composantes $t^i(x_1^j)$ au point $p_1$, que l'on peut toujours écrire sous la forme $t^r(r_1,\phi_1) = a\cos(\phi_1+\omega)$ , $t^\phi(r_1,\phi_1) = -(a/r_1)\sin(\phi_1+\omega)$, les composantes de ce champ *transporté parallèlement* au point $p_2$ seront $t^r_{||}(r_2,\phi_2) = a\cos(\phi_2+\omega)$ , $t^\phi_{||}(r_2,\phi_2) = -(a/r_2)\sin(\phi_2+\omega)$.[7]

Ayant défini la dérivée covariante d'un vecteur, on peut ensuite définir celle d'une forme de composantes $\lambda_i$ dans $\mathcal{C}$. En effet si $w^i$ sont les composantes d'un vecteur, alors, par contraction d'indices, $\lambda_i w^i$ est une simple fonction et si l'on pose $\tilde{D}_j(\lambda_i w^i) = \partial_j(\lambda_i w^i)$ alors, par application de la règle de Leibniz ($\tilde{D}$ étant une dérivation) on obtient

$$\tilde{D}_j \lambda_i = \partial_j \lambda_i - \tilde{\Gamma}^k_{ji}\lambda_k \tag{7}$$

et, de manière plus générale

$$\tilde{D}_j\, t^i_{lm} = \partial_j\, t^i_{lm} + \tilde{\Gamma}^i_{jk}\, t^k_{lm} - \tilde{\Gamma}^k_{jl}\, t^i_{km} - \tilde{\Gamma}^k_{jm}\, t^i_{lk}\,. \tag{8}$$

On remarque que les dérivées covariantes $\tilde{D}$ commutent : $\tilde{D}_k\tilde{D}_j\, t^i_{lm} = \tilde{D}_j\tilde{D}_k\, t^i_{lm}$ puisque, dans un système de coordonnées cartésiennes, on a $\partial_{kj}T^i_{lm} = \partial_{jk}T^i_{lm}$.[8]

---

[6] De manière plus précise, mais plus lourde quand il n'y a pas de confusion possible sur la coordonnée par rapport à laquelle on dérive, on peut écrire $\tilde{D}_k = \frac{\tilde{D}}{\partial x^k}$.

Quant au tilde il est là pour rappeler qu'il existe des systèmes de coordonnées (les coordonnées $X^i$ cartésiennes) où dérivée covariante et dérivée ordinaire coïncident. Un espace où il n'existe pas de systèmes globaux de coordonnées cartésiennes est *courbe* et on utilisera alors les notations $(D_k, \Gamma^i_{jk})$ au lieu de $(\tilde{D}_k, \tilde{\Gamma}^i_{jk})$.

[7] Il est crucial pour arriver au résultat que le système (6) soit intégrable. Il ne l'est pas en espace *courbe* où le transport parallèle dépend du chemin suivi.

[8] Cela n'est plus vrai en espace *courbe* où on ne peut plus définir de systèmes globaux de coordonnées cartésiennes. L'écart entre les deux dérivées secondes sera alors relié la courbure locale représentée par le "tenseur de Riemann", voir & 39.

## SECTION 13. Transformation des coefficients de connexion

Les composantes $t^i$ d'un vecteur s'expriment en fonction de ses composantes $t'^i$ dans un autre système de coordonnées curvilignes $x'^i$ selon $t^i = (\partial x^i/\partial x'^l)\, t'^l$. Par conséquent les composantes de sa dérivée covariante par rapport à $x^j$ deviennent :

$$\tilde{D}_j t^i \equiv \frac{\partial t^i}{\partial x^j} + \tilde{\Gamma}^i_{jk} t^k = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^l} t'^l\right) + \tilde{\Gamma}^i_{jk}\frac{\partial x^k}{\partial x'^l} t'^l = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial t'^l}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x'^m} t'^m + \tilde{\Gamma}^i_{jk}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m} t'^m \,. \qquad (1)$$

Comme $\tilde{D}_j t^i$ sont les composantes d'un tenseur une fois contra- et une fois co-variant elles s'expriment selon $\tilde{D}_j t^i = (\partial x'^k/\partial x^j)(\partial x^i/\partial x'^l)\,(\tilde{D}_k t^l)'$ en fonction de ses composantes $(\tilde{D}_k t^l)'$ dans $\mathcal{C}'$ qui sont $(\tilde{D}_k t^l)' = \partial t'^l/\partial x'^k + \tilde{\Gamma}'^l_{km} t'^m$ où les $\tilde{\Gamma}'^l_{km}$ sont les coefficients de connexion dans $\mathcal{C}'$. Ainsi

$$\tilde{D}_j t^i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\left(\frac{\partial t'^l}{\partial x'^k} + \tilde{\Gamma}'^l_{km} t'^m\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial t'^l}{\partial x^j} + \frac{\partial x'^k}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\tilde{\Gamma}'^l_{km} t'^m \,. \qquad (2)$$

En égalant (1) et (2) on obtient, après multiplication par $(\partial x^j/\partial x'^p)(\partial x'^q/\partial x^i)$ :

$$\tilde{\Gamma}'^q_{pm} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^m}\frac{\partial x^j}{\partial x'^p}\frac{\partial x'^q}{\partial x^i}\,\tilde{\Gamma}^i_{jk} + \frac{\partial x'^q}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^p \partial x'^m} \qquad (3)$$

ce qui donne la loi de transformation des coefficients de connexion dans le passage d'un système de coordonnées curvilignes à un autre. On voit que les coefficients de connexion ne sont pas les composantes d'un tenseur car ils ne se transforment pas comme telles. C'est heureux car, puisqu'ils sont tous nuls dans un système de coordonnées cartésiennes, il seraient alors tous nuls dans tout système de coordonnées curvilignes.

## SECTION 14. Dérivée covariante et tenseur métrique

Les coefficients de connexion de la dérivée covariante ont été introduits indépendamment de la métrique euclidienne, de composantes $e_{ij}$ dans $\mathcal{C}$. Ils peuvent cependant leur être reliés. En effet, on obtient aisément, en dérivant les composantes de la métrique données en (10.2), en en faisant les sommes et différence appropriées pour faire apparaître le coefficient de connexion donné en (12.4) :

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk} = \frac{1}{2} e^{il}\left(\frac{\partial e_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial e_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial e_{jk}}{\partial x^l}\right) \,. \qquad (1)$$

Ecrits sous cette forme les coefficients de connexion $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ prennent le nom de *symboles de Christoffel* et la dérivée covariante celui de dérivée covariante de *Levi-Civita*.

On peut aussi vérifier explicitement à partir de la définition (12.8) de la dérivée covariante d'un tenseur et de l'expression (1) des $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ que

$$\tilde{D}_j e_{ik} \equiv 0 \,. \qquad (2)$$

Ce résultat s'obtient en fait sans calcul en notant que dans le système de coordonnées cartésiennes où dérivée covariante et dérivée ordinaire coïncident, les composantes de la métrique sont des constantes ; leurs dérivées (covariantes) sont donc nulles : étant nulles dans ce système elles sont nulles dans tout autre.

**Exercice : symboles de Christoffel en coordonnées polaires**

Démontrez la formule (1).
Retrouvez, en utilisant la formule (1), les coefficients de connexion du plan en coordonnées polaires, déjà obtenus en & 12.
Vérifiez explicitement l'identité (2) sur l'exemple des coordonnées polaires.

## SECTION 15. Cinématique du point

Si la trajectoire d'un point matériel est donnée dans $\mathcal{S}$ par $X^i = X^i(t)$, elle est donnée dans $\mathcal{C}$ par $x^i = x^i(t) \equiv x^i(X^j(t))$ de sorte que :

$$\begin{cases} v^i \equiv \dfrac{dx^i}{dt} = \dfrac{\partial x^i}{\partial X^j}\, V^j(t) \\[2ex] \qquad \dfrac{dv^i}{dt} = \dfrac{\partial x^i}{\partial X^j}\, a^j(t) + \dfrac{\partial^2 x^i}{\partial X^j \partial X^k}\, V^j(t) V^k(t) \end{cases} \qquad (1)$$

où $V^j(t) \equiv \dot{X}^j$ et $a^j(t) \equiv \ddot{X}^j$ sont les composantes dans $\mathcal{S}$ de ses vitesse et accélération et où $\partial x^i/\partial X^j$, *etc*, sont évalués en $X^k = X^k(t)$.

Les trois fonctions $(\partial x^i/\partial X^j)\, a^j(t)$ sont, par définition, les composantes dans $\mathcal{C}$ de l'accélération. On voit sur (1) qu'elles ne sont pas égales aux dérivées temporelles ordinaires des $v^i$, mais à leurs dérivées covariantes : $\tilde{D}v^i/dt \equiv (\partial x^i/\partial X^j)\, a^j(t)$, que l'on réécrit :

$$\frac{\tilde{D}v^i}{dt} \equiv \frac{dv^i}{dt} + \tilde{\Gamma}^i_{jk} v^j v^k \qquad \text{avec} \qquad \tilde{\Gamma}^i_{jk} \equiv \frac{\partial x^i}{\partial X^l} \frac{\partial^2 X^l}{\partial x^j \partial x^k} \tag{2}$$

où il est entendu que toutes les grandeurs sont évaluées en $x^i = x^i(t)$.

Si la vitesse $v^i$ est vue comme un champ de vecteurs $v^i(x^j)$ évalué sur la trajectoire $x^i = x^i(t)$ on peut réécrire la dérivée covariante de la vitesse comme $\tilde{D}v^i/dt = v^j \tilde{D}_j v^i$ et la considérer comme une dérivée directionnelle, contraction du vecteur $v^j$ et du tenseur une fois contra- et une fois co-variant $\tilde{D}_j v^i$. L'équation $v^j \tilde{D}_j v^i = 0$ est l'équation de *transport parallèle* du champ de vecteurs $v^i$ le long d'une courbe générée par lui-même appelée auto-parallèle. C'est une droite de $\mathcal{E}_3$.

**Exercice : trajectoires en coordonnées polaires et auto-parallèle**

Montrez qu'en coordonnées polaires du plan l'accélération d'une trajectoire est donnée par $\frac{\tilde{D}\dot{r}}{dt} = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2$, $\frac{\tilde{D}\dot{\phi}}{dt} = \ddot{\phi} + 2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\phi}$. Intégrez ces équations lorsque l'accélération est nulle et montrez, en passant en coordonnées cartésiennes, qu'il s'agit là de l'équation d'une droite du plan.

# Chapitre 4
# Dynamique et gravitation newtoniennes

Le cadre euclidien de la physique newtonienne étant posé et les principales propriétés de la cinématique exposées, nous commençons dans cette section par présenter les facettes les plus saillantes de la dynamique de Newton et du principe de Relativité Galiléenne.

Il s'agira ensuite de préciser les vecteurs "force" qui décrivent mathématiquement les diverses interactions auxquelles sont soumis les corps matériels. Celle qui nous occupera dans ce livre est la gravitation, dont nous décrirons succintement la formulation élaborée par Newton.

## SECTION 16. Loi de la dynamique et Relativité Galiléenne

La loi fondamentale du mouvement d'un point matériel $P$ en interaction avec d'autres, $P_a$, ou "deuxième loi de Newton", est une équation différentielle qui s'écrit dans le repère cartésien absolu $\mathcal{S}$ selon :

$$m\, a = F \qquad \text{soit, en composantes,} \qquad m \frac{d^2 X^i}{dt^2} = F^i \tag{1}$$

où $a$ est l'accélération de la trajectoire de $P$, d'équation $X^i = X^i(t)$ en coordonnées cartésiennes, et où le vecteur $F$ représente la "force" exercée à l'instant $t$ sur $P$ par les points matériels $P_a$. Le paramètre $m$, constant, est un attribut du point $P$, sa *masse inerte*, exprimée par exemple en kilogrammes.

Dans un système $\mathcal{C}$ de coordonnées curvilignes $x^i$ la loi (1) s'écrit

$$m \frac{\tilde{D}v^i}{dt} = f^i \tag{2}$$

où $v^i = (\partial x^i/\partial X^j)\, V^j$ et $f^i = (\partial x^i/\partial X^j)\, F^j$ sont les composantes de la vitesse et de la force dans $\mathcal{C}$ et où $\tilde{D}$ est la dérivée covariante : $\tilde{D}v^i/dt = \dot{v}^i + \tilde{\Gamma}^i_{jk} v^j v^k$, les $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ étant les coefficients de connexion caractérisant $\mathcal{C}$.

Une propriété importante des interactions que la physique newtonienne peut décrire est la loi de l'action et de la réaction (ou "troisième loi" de Newton) qui exprime que l'action d'un corps $P_2$ sur un autre $P_1$, décrite par $F_{12}$, doit être égale est opposée à l'action $F_{21}$ de $P_1$ sur $P_2$, ce qui se traduit par la condition vectorielle : $F_{21} = -F_{12}$.

Le vecteur force apparaissant dans la loi du mouvement (1-2) est une fonction du temps. En fait, il est plutôt une *fonctionnelle* de la trajectoire de $P$, ce qui signifie qu'à un instant donné il est fonction du vecteur position $R$ du point $P$ mais aussi, *a priori*, de ses vitesse $v$, accélération $a$, sur-accélération $\dot{a}$ *etc* (*cf* l'exemple de la force magnétique). Mais il s'avère qu'une simple dépendance en $R$ suffit pour décrire la gravitation dans le cadre newtonien et dans ce cas $F = F(P)$ est un champ de vecteurs à la fois dans le passage à des coordonnées curvilignes et dans tout changement de repère du groupe des déplacements rigides.

Un point matériel (ou particule) *libre* est, par définition, soumis à aucune force. De par la loi de Newton (1) on a alors que son mouvement est rectiligne uniforme dans le repère cartésien absolu.

Cette propriété des particules libres devrait permettre de déterminer le système de référence cartésien absolu (indépendamment de l'existence d'étoiles lointaines censées être au repos absolu). En effet le système de référence cartésien (par exemple le système solaire ou les "murs du laboratoire") où les coordonnées des particules libres varient linéairement dans le temps devrait être l'incarnation du repère cartésien absolu.[9]

Cependant, si l'on admet qu'une particule libre est libre dans tout référentiel, la loi de Newton n'est pas modifiée dans les transformations de Galilée car l'accélération est représentée par le même vecteur dans tous les repères inertiels ; en d'autres termes la loi de son mouvement a la même forme (est "invariante") dans tous les repères en mouvement rectiligne uniforme par rapport au repère absolu : $m\,a = 0$, que $\mathcal{S}$ soit le repère absolu ou un repère inertiel. Ainsi, si dans un repère cartésien inertiel $\mathcal{S}_g$ sa trajectoire est rectiligne uniforme de vitesse $v$, alors dans un autre repère cartésien $\mathcal{S}'_g$ ayant la vitesse $V_0$ constante par rapport à $\mathcal{S}_g$, sa trajectoire sera également rectiligne uniforme, de vitesse $v' = v - V_0$, qui peut être nulle si $v = V_0$. C'est là la *première loi de Newton*, énoncée en fait par Galilée et appelée aussi *principe d'inertie*.

Une conséquence de cette loi est que si un objet libre se trouve être au repos dans un système de référence, on ne peut pas en déduire que ce système est le système de référence absolu et que l'objet est au repos absolu (identifiable donc à un point donné de $\mathcal{E}_3$, plus précisément à une fibre de $N_4 = \mathcal{E}_3 \times R$), mais seulement que le système considéré est inertiel. L'objet peut être en mouvement de translation uniforme quelconque par rapport au système de référence absolu et il est impossible, à l'aide du moins de particules libres, de mesurer cette vitesse.

Cette *invariance* dite *galiléenne* de la loi de la dynamique enlève, on le voit, de sa pertinence à la notion d'espace absolu. On peut cependant concevoir que des particules soumises à des interactions, permettent, elles, de le déterminer. Mais si l'interaction est représentée par le même vecteur $F$ dans tous les repères galiléens alors la loi de Newton s'écrit de la même façon : $m\,a = F$ dans *tout* repère inertiel. Or si la loi est la même dans le repère cartésien absolu $\mathcal{S}$ et dans tout repère inertiel cartésien $\mathcal{S}_g$ elle ne peut pas permettre de distinguer $\mathcal{S}$ de $\mathcal{S}_g$.[10]

La question devient alors : une interaction (fondamentale, comme la gravitation ou l'électromagnétisme) est-elle toujours représentée par le même vecteur dans tous les repères inertiels ? Pendant deux siècles la réponse, donnée par l'expérience, a été "oui", au point qu'on en est arrivé à l'ériger en principe, le *principe de relativité galiléenne* : *toutes les lois de la mécanique newtonienne sont invariantes dans les transformations de Galilée*. (On sait depuis plus d'un siècle maintenant que cela n'est vrai que si les vitesses relatives des référentiels et des particules restent faibles devant celle de la lumière, voir la deuxième partie.)

Ainsi, en mécanique newtonienne, l'espace absolu est, doublement, un "fantôme" : à la fois parce que sa structure géométrique est indépendante de son contenu matériel, et parce qu'on ne peut l'"ancrer" nulle part. En fait, il n'y a pas d'espace et de repère absolus en mécanique newtonienne : seule est absolu sa classe d'équivalence dynamique, c'est-à-dire l'ensemble des repères inertiels en mouvements rectilignes uniformes par rapport à lui, que nous noterons dorénavant indifféremment par $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{S}_g$.

---

[9] Si les particules ne s'avèrent pas en translation uniforme c'est, *a priori*, que le référentiel ou les horloges sont trop approximatifs pour la précision des mesures, ou que les particules ne sont pas en fait vraiment libres.

[10] Cela serait possible si une loi fixait les conditions initiales des mouvements dans le référentiel absolu. Mais la théorie newtonienne est muette sur ce point.

**SECTION 17. Repères en mouvement et forces d'inertie**

Tout repère accéléré par rapport à l'ensemble des repères inertiels se distingue en revanche de ces derniers : les mouvements des particules libres n'y sont pas représentés par des trajectoires rectilignes uniformes et la loi de la dynamique ne s'écrit pas sous la forme $F = m\,a$ ; un repère cartésien $\mathcal{S}'$ étant relié à un repère inertiel $\mathcal{S}$ par un déplacement rigide on a en effet, sous deux formes équivalentes *cf* (9.2) :

$$\begin{cases} m\,a' = F - m\,\ddot{d} + m\left(-2\Omega\wedge v' + \Omega\wedge(R'\wedge\Omega) - \dot{\Omega}\wedge R'\right) \\ m\,a'^i = \mathcal{R}_j{}^i\left(F^j - m\,\ddot{d}^j\right) + m\left(2\,\dot{\mathcal{R}}_j{}^i\,V^j + \ddot{\mathcal{R}}_j{}^i\,X^j - (\mathcal{R}_j{}^i d^j)^{\cdot\cdot}\right) \end{cases} \tag{1}$$

où $\mathcal{R}_j{}^i(t)\,F^j$ sont les composantes dans $\mathcal{S}'$ du vecteur $F$ représentant l'interaction des particules dans $\mathcal{S}$. Ce vecteur $F$ représente aussi l'interaction dans $\mathcal{S}'$ si elle ne dépend pas de l'accélération du référentiel dans lequel on l'étudie. C'est le cas des forces fondamentales traitées par la mécanique newtonienne et l'on parlera dorénavant de *vecteur force* sans préciser le repère. Quant aux autres termes ils répondent au nom de *forces d'inertie*, parfois qualifiées (improprement) de *fictives* car elles s'évanouissent dans un repère inertiel.

L'équation (1) donne en particulier l'accélération dans $\mathcal{S}'$ d'une particule libre ($F = 0$), dont la trajectoire est rectiligne uniforme dans le repère inertiel $\mathcal{S}$ ($X^i = X_0^i + V_0^i\,t$). Cette accélération $a'$ ne dépend pas de sa masse $m$, ce qui est normal car son mouvement est un "effet de perspective" purement cinématique, dû au mouvement du référentiel et non à l'action d'une force.

De cette propriété mathématique de non-invariance de la loi de la dynamique dans le groupe des déplacements rigides on déduit donc l'existence de forces d'inertie dans les référentiels non inertiels, aux effets quantifiables. Ainsi la rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault par rapport aux murs du Panthéon mesure-t-elle la rotation *absolue* du Panthéon, qui se trouve coïncider, à la précision des mesures, avec celle de la Terre par rapport aux étoiles lointaines. Cette conséquence remarquable de la physique newtonienne ne laissa pas d'étonner Newton lui-même puis Leibniz, Kant, Mach, Poincaré, Einstein...

**SECTION 18. Force et champ de gravitation de Newton**

La *masse inerte*, que nous dénoterons temporairement $m_I$, est un paramètre qui apparaît dans la loi de Newton du mouvement $F = m_I\,a$, où $a$ est l'accélération de la trajectoire du point matériel et $F$ la force qu'il subit. Elle mesure en quelque sorte la "résistance" du point matériel à la force qui lui est appliquée et sa valeur numérique peut s'obtenir en principe par des expériences de collision, en exploitant les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion.

La "puissance de la gravité" étant un fait expérimental, la *masse grave*, $m_G$, est un autre paramètre que l'on est amené à associer aux corps matériels subissant ou créant une "force gravitationnelle".

Cette notion est donc double : la masse grave *passive* caractérise la réponse d'un corps à l'action gravitationnelle d'objets extérieurs, et la masse grave *active* caractérise, elle, l'objet qui crée un champ gravitationnel (il s'agit donc de sa "charge gravitationnelle"). Ceci étant la loi d'action et de réaction implique que masses graves passive et active sont égales et on ne les distinguera plus.

En revanche rien dans la structure de la physique newtonienne n'impose que les masses graves, c.-à-d. les charges gravitationnelles, soient égales aux masses inertes.

C'est un fait expérimental, établi par Galilée, qu'en l'absence de frottements, tous les corps, quels que soient leur masse inerte et leurs constituants, tombent de la même façon dans un champ de gravitation extérieur (ceci est à contraster, par exemple, au comportement dans un champ électrique de deux charges de signe opposé d'une part et de leur ensemble neutre d'autre part). Les expériences actuelles, parmi les plus précises de la physique, vérifient ce fait à $10^{-12}$ près. Le rapport de la masse grave et de la masse inerte est donc le même pour tous les corps, qu'on peut prendre égal à 1 :

$$m_I = m_G \equiv m\,. \tag{1}$$

Quant à l'expression explicite du vecteur force $F(t)$ représentant la force de gravitation exercée sur un point matériel $P$ en $X^i = X^i(t)$ par un ensemble d'autres points matériels $P_a$ en $X^i = X^i_{(a)}(t)$ elle est donnée, dans le repère cartésien absolu $\mathcal{S}$, par la loi de Newton :

$$F = -m \sum_a \frac{Gm_a}{r_a^3} l_a \tag{2}$$

où $l_a = P_a P$ est le vecteur joignant $P_a$ à $P$ (force attractive), de composantes $l_a^i = X^i(t) - X^i_{(a)}(t)$ ; où $r_a$ est leur distance : $r_a^2 = \delta_{ij}\ l_a^i l_a^j = e(l_a, l_a)$ ; $G$ est la *constante de Newton*[11] et $m$ et $m_a$ sont les masses (graves, respectivement passive et active) de $P$ et $P_a$.

Dans tout autre repère ou système de coordonnées la distance $r_a$ est donnée par la même fonction du temps. Quant aux composantes du vecteur séparation $l_a$ elles se transforment, dans le passage de $\mathcal{S}$ à un repère accéléré quelconque $\mathcal{S}'$ ou dans le passage d'un système de coordonnées cartésiennes $X^i$ à des coordonnées curvilignes quelconques $x^i$, selon (en omettant l'indice $a$) : $l'^i = \mathcal{R}_j{}^i l^j$, $l'^i = (\partial x^i/\partial X^j)\, l^j$ où $\partial x^i/\partial X^j$ est évalué sur la trajectoire de $P$. Par ailleurs il s'avère que la force de gravitation peut être représentée par le même vecteur dans tout repère. Ainsi s'écrit-elle sous la forme (2) dans tout repère, inertiel ou non, cartésien ou non.

La force de gravitation peut être aussi définie comme un *champ* auquel cas le vecteur $l_a$ est vu comme une fonction du point $p$ de coordonnées $X^i$ et non comme une fonctionnelle de la trajectoire d'un point matériel $P(t)$. Elle dérive alors d'un *potentiel de gravitation* $U$ (défini à une constante additive près) selon

$$F = -m\ \nabla U \qquad \text{avec} \qquad U \equiv -\sum_a \frac{Gm_a}{r_a} \tag{3}$$

où $\nabla U$ est le gradient de la fonction $U$, de composantes $(\nabla U)^i = e^{ij}\,(\partial U/\partial x^j)$ dans un système de coordonnées curvilignes quelconques.

Ainsi les équations du mouvement d'une particule de masse inerte $m_I$ et de masse grave $m_G$, dont l'égalité est imposée par l'expérience, sont données, sous forme vectorielle, par

$$\begin{cases} a = -\nabla U & \text{dans tout repère inertiel} \\ \dfrac{\tilde{D}v}{dt} = -\nabla U & \text{dans tout sytème de coordonnées curvilignes} \\ a' = -\nabla U + \Big(-2\Omega \wedge v' + \Omega \wedge (R' \wedge \Omega) - \dot{\Omega} \wedge R' - \ddot{d}\Big) & \\ & \text{en repère quelconque} \end{cases} \tag{4}$$

où $U$ est le potentiel gravitationnel (3).

L'égalité des masses grave et inerte a pour conséquence capitale que l'équation du mouvement d'un point matériel $P$ dans un champ de gravitation est indépendante de sa masse. Ecrivons-la dans un repère accéléré du *groupe de Milne*, c.-à.d. sans rotation ($\Omega = 0$), $X' = X, Y' = Y, Z' = Z - d(t)$, et posons $\ddot{d} = \mathrm{g}$. Comme $\nabla = (\partial/\partial X, \partial/\partial Y, \partial/\partial Z)$, l'équation (4) devient

$$a' = -\nabla U - \mathrm{g} = -\nabla(U + g\, Z) = -\nabla(U + g\, Z') \tag{5}$$

(où $g$ est le module de g). On peut donc "effacer" le champ de gravitation subi par $P$ en rapportant son mouvement au repère accéléré sans rotation "en chute libre" tel que $\mathrm{g} = -\nabla U$, où $\nabla U$ est évalué sur la trajectoire de $P$ : dans ce repère $a' = 0$ et le mouvement de $P$ est celui d'une particule libre (l'effacement ne concerne que $P$ et les particules de son voisinage où $\nabla U$ peut être considéré comme constant). A l'inverse on peut créer un champ de gravitation artificiellement (*i.e.* en absence de toute masse grave) en se plaçant dans un repère d'accélération g identifié au gradient d'un potentiel gravitationnel.

[11] Elle vaut, dans le système international, $G = 6.673 \times 10^{-11}\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$ et, dans le système C.G.S : $G = 6.673 \times 10^{-8}\mathrm{cm^3g^{-1}s^{-2}}$.

Cette équivalence (locale) entre force de gravitation et forces d'inertie, accidentelle en physique newtonienne, sera érigée en *postulat* en Relativité Générale sous le nom de *principe d'équivalence*, dont nous explorerons les diverses facettes au chapitre 7.

**SECTION 19. Equation de Poisson**

Lorsque la matière est décrite comme un milieu continu de densité de masse (grave) $\varrho$ le potentiel $U$ (18.3) devient :

$$U(P) = -G \int \frac{\varrho(t, P')}{r_{_{PP'}}} dV' \tag{1}$$

où $r_{_{PP'}} = |PP'| = |R - R'|$ est la distance entre le point $P$ où l'on évalue $U$ et le point $P'$ du corps étendu créant le champ, et où $dV$ est l'élément de volume dans les coordonnées choisies, voir & 10.

**Le théorème de Gauss**

C'est un exercice facile,[12] mais un résultat important, que de montrer que si la distribution des masses $P'$ est à symétrie sphérique le potentiel $U$ en $P$ est égal à celui créé par un point de même masse totale situé au centre de la distribution.

En effet : plaçons le corps à l'origine du repère ; par symétrie on peut placer le point $P$ en $(0, 0, r)$ ; les composantes cartésiennes du vecteur position d'un point $P'$ sont, en coordonnées sphériques : $(r' \sin\theta \cos\phi, r' \sin\theta \sin\phi, r' \cos\theta)$ ; le potentiel en $P$ est donc

$$U(r) = -G \int \frac{\varrho(r', t)}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr' \cos\theta}} r'^2 \sin\theta \, dr' d\theta d\phi \tag{2}$$

ce qui s'intègre à vue pour donner

$$U(r) = -\frac{GM}{r} \qquad \text{si} \qquad r > r_0 \tag{3}$$

où $M = 4\pi \int_0^{r_0} \varrho r'^2 dr'$ est la masse totale du corps et $r_0$ son rayon.

C'est la propriété *d'effacement* : les mouvements internes d'une distribution de masse, s'ils sont à symétrie sphérique, n'affectent pas le champ gravitationnel extérieur. On montre de la même façon que le potentiel à l'intérieur d'une cavité sphérique est constant ; le champ qui y règne est donc nul.

Laplace et Poisson déduisirent de (1) une relation différentielle entre $U$ et $\varrho$, qui transforme la théorie newtonienne de la gravitation en une théorie de champ :

$$\triangle U = 4\pi \, G \, \varrho \tag{4}$$

où $\triangle$ est l'opérateur laplacien (en notations tensorielles : $\triangle U \equiv e^{ij} \tilde{D}_i \tilde{D}_j U = e^{ij} \tilde{D}_i \partial_j U$).

On note que la forme locale (4) de l'équation pour $U$ admet d'autres solutions que (1) qui, elle, incorpore le choix d'une condition aux limites. Ainsi, si par exemple $\varrho$ ne dépend que du temps (cas d'une distribution homogène de matière dans tout l'espace) alors (1) (soit encore (2) dans ce cas) n'est pas défini alors que (4) admet la solution $U = \frac{2}{3} \pi \, G \, \varrho \, r^2$. Cela joue un rôle lorsqu'on cherche à bâtir des modèles cosmologiques newtoniens.[13]

**SECTION 20. Lagrangien de la gravitation**

La force gravitationnelle entre deux particules peut s'écrire $f_{aa'} = -\nabla_a w_{aa'}$ où $w_{aa'} = -\frac{Gm_a m_{a'}}{r_{aa'}}$ est l'*énergie potentielle* (ou *énergie gravitationnelle*) du couple $P_a, P_{a'}$ (et n'est autre que $m_a$ fois le potentiel $U = -\frac{Gm_{a'}}{r_{aa'}}$ créé en $P_a$ par $P_{a'}$). L'énergie potentielle de gravitation d'un ensemble de particules est donc

$$W = -\sum_{a<a'} \frac{Gm_a m_{a'}}{r_{aa'}} = \frac{1}{2} \sum_a m_a U_a \qquad \text{avec} \qquad U_a = -\sum_{a' \neq a} \frac{Gm_{a'}}{r_{aa'}} \, . \tag{1}$$

[12] ...qui retarda cependant de vingt-cinq ans la publication des *"Principia"* car Newton, pour le résoudre, dut inventer (en concurrence avec Leibniz) le calcul intégral. Remarquons en effet qu'il est impossible, sauf cas exceptionnels, de disposer uniformément un nombre fini de points sur une sphère ; la notion de distribution de points à *symétrie sphérique* ne fait vraiment sens que dans la limite continue, *cf e.g.* à ce sujet E. Saff et A.B.J. Kuijlaars, Math. Intelligencer, 19 (1997) 5.

[13] Voir, *e.g.*, N. Deruelle et J.P. Uzan, "*Mécanique et Gravitation Newtoniennes*", Vuibert 2006, chapitre 15.

Ayant en main l'expression de l'énergie potentielle d'un système gravitationnel, on peut définir son *action* $S = \int dt L$ où son lagrangien $L$, différence de ses énergies cinétique et gravitationnelle est, en repère inertiel :

$$L = \sum_a \left( \frac{1}{2} m_a v_a^2 - m_a U \right) . \tag{2}$$

L'action est une fonctionnelle du chemin allant d'une configuration de points $P_1$ à une autre $P_2$. On vérifie que les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_a} = \nabla_a L \tag{3}$$

qui extrémisent l'action lorsqu'on varie le chemin allant de $P_1$ à $P_2$ sont bien équivalentes aux équations du mouvement (18.4) pour chacun des points matériels $a$.[14]

Pour une distribution continue de matière la définition de l'énergie gravitationnelle se généralise à

$$W = \frac{1}{2} \int \varrho U dV \qquad \text{avec} \qquad \triangle U = 4\pi G \varrho \, . \tag{4}$$

Grâce à l'équation de Poisson on peut éliminer $\varrho$ de l'expression de $W$ ; en effet on a

$$4\pi G \int \varrho U dV = \int U \triangle U dV = \int \nabla(U \nabla U) dV - \int (\nabla U)^2 dV = - \int (\nabla U)^2 dV \, ,$$

en appliquant le théorème de la divergence (à savoir $\int \nabla(U\nabla U)dV = \int U \nabla U.dS$) et en constatant que, puisque $U \propto 1/r$ à l'infini (à condition la distribution de matière soit à support compact), l'intégrale de surface s'annulle. Ainsi, "on shell" (c.-à-d. si les équations du mouvement sont satisfaites) :

$$W = \frac{1}{2} \int \varrho U dV = - \frac{1}{8\pi G} \int (\nabla U)^2 dV \, . \tag{5}$$

Quant au lagrangien d'une distribution continue de matière on peut l'écrire *a priori* de diverses manières, au vu de (5) car on peut écrire $W$ sous la forme $W = \int dV \left( \frac{(1+c)}{2} \varrho U + \frac{c}{8\pi G} (\nabla U)^2 \right)$, $c$ étant une constante arbitraire. Mais en fait la combinaison à retenir correspond à $c = 1$, c.-à-d.

$$L = \int \left( \frac{1}{2} \varrho v^2 - \varrho U - \frac{1}{8\pi G} (\nabla U)^2 \right) dV \, . \tag{6}$$

En effet c'est de ce lagrangien-là qu'on peut dériver l'équation de Poisson (19.4) en faisant varier la configuration du potentiel de gravitation $U$ : si $U \mapsto U + \delta U$ alors

$$(\nabla U)^2 \mapsto (\nabla U)^2 + 2 \nabla U \, . \, \nabla \delta U = (\nabla U)^2 + 2 \nabla(\nabla U \, . \, \delta U) - 2 \triangle U \delta U \, .$$

Par conséquent on a, après application du théorème de la divergence :

$$\delta L = - \int \left( \varrho - \frac{1}{4\pi G} \triangle U \right) \delta U \, dV \, , \tag{7}$$

de sorte que le principe de moindre action ($\delta L = 0$ quelle que soit la variation de configuration $\delta U$, nulle au bord du domaine) redonne bien l'équation de Poisson.

[14] Pour une introduction plus détaillée au formalisme lagrangien voir, *e.g.*, N. Deruelle et J.P. Uzan, "*Mécanique et Gravitation Newtoniennes*", Vuibert 2006, chapitre 8.

### SECTION 21. Gravitation newtonienne : questions sans réponse

Les principales failles de l'équation newtonienne du mouvement des corps graves furent dénoncées très tôt, par Newton lui-même et ses contemporains. Ainsi par exemple :

La force de gravitation exercée sur un corps à l'instant $t$ dépend des positions des autres corps au *même* instant. L'interaction entre objets distants est donc instantanée, ce qui déroutait Newton qui ne voyait pas comment expliquer cela (d'où le célèbre *"Hypotheses non fingo"*).

La force de gravitation est de longue portée ; on ne peut donc isoler un corps de l'attraction des autres corps graves, sauf à les éloigner à l'infini ; aucun corps ne peut donc être considéré comme complètement libre ; or la construction des référentiels inertiels *repose* sur la notion de particule libre.

L'accélération d'un corps est définie par rapport à l'origine du repère considéré. Leibniz refusait ce privilège accordé à un point non matériel et voulait que n'entrent dans les lois du mouvement que les distances relatives entre les corps. En soustrayant deux à deux les $N$ équations régissant le mouvement de $N$ corps graves, on arrive effectivement à $(N-1)$ équations indépendantes ne mettant en jeu que les vecteurs séparation $l_{aa'}$ et leurs dérivées secondes $\ddot{l}_{aa'} = \ddot{l}^i_{aa'} e'_i$ dans tout repère du groupe de Milne des translations *quelconques* (*i.e.* non nécessairement uniformes). L'observation des mouvements relatifs des corps graves ne permet donc pas de déterminer le mouvement de translation du référentiel par rapport au repère absolu et on peut toujours trouver un de ces référentiels dans lequel un des corps graves est au repos. Pour ce corps donc la gravitation est comme *effacée*.

La Relativité Générale répondra à ces objections ; la vitesse de propagation de l'interaction gravitationnelle y sera en effet finie (égale à celle de la lumière) et tous les corps seront "libres" dans un champ de gravitation, leur trajectoire extrémisant la distance entre les points d'un espace, non pas euclidien mais "courbé" par la gravitation.

*Deuxième Partie*

# De la Relativité Restreinte à la Relativité Générale

"Messieurs ! La conception de l'espace et du temps que je voudrais développer devant vous a grandi sur le sol de la Physique expérimentale. C'est ce qui fait sa force. La tendance est radicale. Dès maintenant, l'espace indépendant du temps, le temps indépendant de l'espace ne sont plus que des ombres vaines : une sorte d'union des deux doit seule leur subsister encore."

Hermann Minkowski, *Raum und Zeit*, conférence de Cologne, 21 Septembre 1908, *Phys. Z. 10 (1909) 104*

## Chapitre 5
## Espace-temps de Minkowski et repère inertiels

### SECTION 22. Un espace-temps absolu

**Principes de relativité et de constance de la vitesse de la lumière**

Albert Einstein en 1905 fonda une nouvelle mécanique sur deux postulats : le *principe de relativité*, à savoir que les lois de la physique doivent être les mêmes dans tous les repères inertiels (c.-à-d. où les particules libres ont un mouvement rectiligne uniforme) et ne permettent donc pas de privilégier l'un d'eux ; et le postulat de la constance de la vitesse de la lumière dans le vide, à savoir qu'elle se propage à une vitesse de module $|c|$ constant dans *tous* ces repères.

La loi de transformation d'un repère à un autre ne peut donc pas être celle de Galilée, car celle-ci implique que la vitesse de la lumière n'est *pas* la même dans deux repères en mouvement relatif : si son module est $|c|$ dans $\mathcal{S}$, il doit être $|c'| = |c - V_0|$ dans le repère $\mathcal{S}'$ allant à la vitesse $V_0$ par rapport à $\mathcal{S}$.

Or les transformations de Galilée découlent directement de la structure prêtée à l'espace et au temps par la physique newtonienne ; rejeter les transformations de Galilée implique abandonner l'idée de représenter l'espace par un espace euclidien $\mathcal{E}_3$, le temps par un paramètre universel $t$ et l'espace-temps par un "fibré" $\mathcal{E}_3 \times R$.[1]

En Relativité Restreinte l'espace *et* le temps "relatifs, apparents et vulgaires" (pour reprendre les mots de Newton) sont représentés par un ensemble mathématique de points, appelés *événements*, constituant l'*espace-temps de Minkowski* : $\mathcal{M}_4$. $\mathcal{M}_4$ est postulé *pseudo*-euclidien, à quatre dimensions. Ceci signifie que chaque événement $p$ est distingué par un quadruplet de nombres réels, ses *coordonnées d'espace-temps* ; et qu'il existe, parmi tous les étiquetages possibles, des systèmes de coordonnées *minkowskiennes* (ou pseudo-cartésiennes) $(T, X, Y, Z)$, notées de façon plus ramassée par $X^\mu$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$, tels que ce qu'on appellera l'élément de longueur, ou *intervalle*, noté $ds^2$, entre deux points de coordonnées $X^\mu$ et $X^\mu + dX^\mu$ est défini par un théorème de Pythagore généralisé :

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 \\ &= \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu}\, dX^\mu dX^\nu = \eta_{\mu\nu}\, dX^\mu dX^\nu = dX_\nu\, dX^\nu\,. \end{aligned} \tag{1}$$

La deuxième égalité définit les 10 coefficients $\eta_{\mu\nu}$ de la *métrique de Minkowski* en coordonnées minkowskiennes : $\eta_{00} = -1$, $\eta_{0i} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ et $\eta_{ij} = \delta_{ij}$ où $\delta_{ij}$ est le symbole de Kronecker.[2] La troisième

[1] On trouvera la traduction française de l'article fondateur d'Einstein, "*Sur l'électrodynamique des corps en mouvement*" dans *"Les Oeuvres choisies d'Albert Einstein"* éditées par F. Balibar, O. Darrigol et B. Jech, Seuil-CNRS, 1991-1994.

Pour une présentation détaillée de la Relativité Restreinte, voir, *e.g.*, N. Deruelle et J.P Uzan, "*Relativité Restreinte et Electromagnétisme*", à paraître.

[2] La signature choisie pour la métrique de Minkowski est donc $(-1, +1, +1, +1)$.

Les indices grecs iront de 0 à 3 et les indices latins de 1 à 3 (ou de 1 à $n$ si la dimension de l'espace n'est pas spécifiée).

Sauf lorsque cela s'avèrera utile nous choisirons $c = 1$. Il ne reste alors que deux unités fondamentales, celles de temps (la seconde) et de masse (le kilogramme) ; et l'on a 1 mètre $= \frac{1}{2.99792458 \times 10^8}$ s $= 3.33564 \times 10^{-9}$ s.

égalité rappelle la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés, la dernière définit l'opération d'abaissement d'indice : $dX_\nu \equiv \eta_{\mu\nu}\, dX^\nu$ (ainsi $dX_1 = dX$ mais $dX_0 = -dT$). L'origine $O$, de coordonnées $(0,0,0,0)$, et les quatre axes $\{T, X, Y, Z\}$ constituent un repère minkowskien orthonormé, $\mathcal{S}$.

L'intervalle peut être positif, auquel cas la distance entre $p$ et $p + dp$, de "genre espace", est $ds \equiv \sqrt{ds^2}$ ; s'il est négatif cette distance, de "genre temps", est notée $d\tau \equiv \sqrt{-ds^2}$ ; il peut être enfin nul auquel cas $p$ et $p + dp$ sont à distance nulle l'un de l'autre (mais sont néanmoins distincts car leurs coordonnées sont différentes). L'ensemble des événements à distance nulle d'un point $p$ est le "cône de lumière" issu de $p$. Les courbes qui extrémisent la distance entre deux événements sont des *géodésiques*, respectivement du genre temps, espace ou nulles.

C'est du fait que sa métrique est donnée *a priori* que l'espace-temps $\mathcal{M}_4$ de la Relativité Restreinte (par opposition à ceux de la Relativité Générale où la métrique est une grandeur dynamique) peut-être qualifié d'*espace-temps absolu.*

**Rappels de géométrie vectorielle (voir & 6-7)**

L'espace-temps de Minkowski est un espace affine. Les coordonnées $X^\mu$ du point $p$ peuvent donc également être vues comme les composantes du vecteur position $Op \equiv X^\mu e_\mu$, où $O$ est le point origine de coordonnées $(0,0,0,0)$ et où les quatre vecteurs $e_\mu$ forment la base, associée aux coordonnées $X^\mu$, de l'espace vectoriel $M_4$ sous-tendant $\mathcal{M}_4$ ; l'ensemble de l'origine $O$ et des vecteurs de base $e_\mu$ constituent un repère $\mathcal{S}$ de $\mathcal{M}_4$. De même $dX^\mu$ représente un incrément de coordonnée (pas nécessairement infiniment petit) ou, de manière équivalente, la $\mu$-ième composante du vecteur $dp = dX^\mu e_\mu$ ; quant à $dX_\mu$, c'est la $\mu$-ième composante de la forme $dX_\mu\, \epsilon^\mu$ où les quatre formes $\epsilon^\mu$ constituent la base associée aux $e_\mu$ de $M_4^*$, espace dual de $M_4$ : $\epsilon^\mu(e_\nu) = \delta^\mu_\nu$ où $\delta^\mu_\nu$ est le symbole de Kronecker ; enfin la formule (1) signifie que $M_4$ est muni d'une métrique pseudo-euclidienne, c.-à-d. de la forme bilinéaire symétrique (ou tenseur deux fois covariant)

$$\ell = \eta_{\mu\nu}\epsilon^\mu \otimes \epsilon^\nu \; . \tag{2}$$

Rappelons que la métrique $\ell$ agit sur le vecteur $dP = dX^\mu e_\mu$ pour donner $ds^2$ selon :

$$\begin{aligned}\ell(dP, dP) &= dX^\mu dX^\nu\, \ell(e_\mu, e_\nu) = dX^\mu\, dX^\nu\, [\eta_{\rho\sigma}\, (\epsilon^\rho \otimes \epsilon^\sigma)](e_\mu, e_\nu) \\ &= dX^\mu dX^\nu\, \eta_{\rho\sigma}\, [\epsilon^\rho(e_\mu)]\, [\epsilon^\sigma(e_\nu)] = dX^\mu dX^\nu\, \eta_{\rho\sigma}\, \delta^\rho_\mu\, \delta^\sigma_\nu = \eta_{\mu\nu}\, dX^\mu dX^\nu = ds^2 \; .\end{aligned}$$

La première égalité exprime la linéarité de $\ell$ ; la seconde sa définition ; la troisième celle du produit tensoriel ; la quatrième celle d'une base duale et la cinquième les propriétés du symbole de Kronecker et de la métrique de Minkowski. Ainsi, tout comme en géométrie euclidienne, les droites sont aussi des géodésiques.

La métrique définit aussi le produit scalaire de deux vecteurs différents $u = u^\mu e_\mu$ et $v = v^\nu e_\nu$ selon $(u \cdot v) \equiv \ell(u, v) = \eta_{\mu\nu} u^\mu v^\nu \equiv u_\mu v^\mu$ où $u_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} u^\nu$ sont les composantes de la forme $u_\mu \epsilon^\mu$ duale du vecteur $u$.

On rappelle aussi que, quelle que soit la dimension $n$ de l'espace, un tenseur $T$, $p$ fois contravariant et $q$ fois covariant, est une forme multilinéaire qui agit sur $p$ formes et $q$ vecteurs pour donner un nombre :

$$T = T^{i_1 \cdots i_p}_{j_i \cdots j_q} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \cdots \otimes e_{i_p} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \cdots \epsilon^{j_q} \tag{3}$$

$T^{i_1 \cdots i_p}_{j_i \cdots j_q}$ étant les composantes de ce tenseur dans la base $e_{i_1} \otimes \cdots e_{i_p} \otimes \epsilon^{j_1} \cdots \otimes \epsilon^{j_q}$, c.-à-d. le résultat de l'action de $T$ sur $p$ formes de base $\epsilon^i$ et $q$ vecteurs de base $e_j$.

## SECTION 23. Référentiels inertiels

Une section $X^0 = Const.$ de l'espace-temps de Minkowski étant un espace euclidien $\mathcal{E}_3$, la concrétisation d'un repère cartésien de $\mathcal{E}_3$ peut s'effectuer comme en physique newtonienne par le choix d'un trièdre matériel orienté (les "murs du laboratoire"), construit en utilisant le théorème de Pythagore ordinaire et ses conséquences. Les trois coordonnées $X^i$, qualifiées pour cette raison de "spatiales", repèrent ainsi le lieu de l'événement $p$. Quant à la coordonnée $X^0 \equiv T$, de "temps", on la concrétise par le temps donné par de bonnes horloges situées en $X^i = Const.$, c.-à-d. *immobiles* par rapport à la grille de coordonnées spatiales (la restriction est capitale !).

On impose en plus que, pour incarner un repère minkowskien, le référentiel matériel $\mathcal{S}$ ainsi construit, ensemble d'un trièdre cartésien et d'horloges immobiles, soit *inertiel*, c'est-à-dire tel que le mouvement des particules libres, mesuré par le temps $T$ de ses horloges, y est rectiligne uniforme (si ce n'est pas le cas c'est, sauf preuve du contraire, que les particules sont en fait soumises à des forces ou que les horloges sont soit de mauvaise qualité soit en mouvement relatif).

Enfin le cône de "lumière" (futur) issu d'un événement $p$, c.-à-d. la deux-sphère issue du lieu $X^i$ à l'instant $T$ et s'en éloignant à la vitesse $c$ (de module 1), est matérialisé par un signal lumineux (ou toute couche mince de particules se déplaçant radialement à la vitesse $c$).

**“$c = 1$”**

On peut s’étonner, à première vue, que la matérialisation dans l’espace “relatif, apparent et vulgaire” des quatre vecteurs de base $e_\mu$ de l’espace-temps de Minkowski soit pour l’un le battement d’une horloge et pour les trois autres trois règles unité orthogonales. Mais en théorie de la Relativité le concept de longueur, de règle et, de manière générale, de corps rigide, s’avère secondaire ; ainsi par exemple la localisation spatiale s’effectue en pratique non pas à l’aide de “règles” mais par triangulation à l’aide de télémètres laser, au repos les uns par rapport aux autres (s’ils sont au repos la géométrie spatiale obtenue doit être euclidienne). Seule l’unité de temps doit par conséquent être définie, l’unité de longueur en découlant après multiplication par une constante universelle $c$.

Numériquement, cette constante fondamentale est égale à la vitesse de la lumière dans le vide. Pour cette raison la lumière a un statut privilégié en Relativité Restreinte, ce qui explique tout une terminologie axée sur elle ; on parle par exemple de “signaux lumineux” au lieu de “particules se propageant à la vitesse $c$”, *etc.* Il faut néanmoins insister sur le fait que la théorie ne repose *pas* sur ces identifications : la vitesse fondamentale $c$ pourrait tout à fait être incarnée par d’autres objets que la lumière, voire aucun. On peut toujours la poser égale à 1 auquel cas les longueurs s’expriment, *e.g.*, en secondes, voir Note 2.

Il convient de remarquer qu’un référentiel inertiel n’est *a priori* pas unique et que, pas plus qu’on est obligé de choisir la direction des axes du trièdre de référence, on n’est à aucun moment amené à privilégier l’un ou l’autre d’entre eux.[3]

Par ailleurs, la valeur de l’intervalle $ds^2$ ne devant pas dépendre des coordonnées choisies, si elle est nulle dans un repère minkowskien, elle le sera dans tout autre. Par conséquent un signal lumineux devra se propager avec une vitesse $c$ de module 1 dans *tous* les référentiels inertiels, contrairement à la prédiction newtonienne.

Ainsi l’espace-temps de Minkowski est-il un cadre apte à incorporer les deux postulats d’Einstein énoncés en exergue.

**Expérience de Michelson-Morley**

Dans un référentiel considéré comme inertiel lié à la Terre, la vitesse de la lumière, comme dans tous les autres, est de module 1 : $|c| = 1$. Le temps que mettent deux signaux lumineux pour faire un aller-retour le long des bras de longueur $l$ d’un interféromètre, l’un parallèle, l’autre perpendiculaire à la vitesse orbitale de la Terre est le même : $2l/|c|$. Il restera le même après rotation de l’appareil. La différence de marche entre les deux signaux sera donc la même dans les deux configurations, de sorte qu’aucun déplacement de la figure d’interférence n’est attendu, en accord avec l’expérience (1881), et contrairement aux prédictions de A.A. Michelson et de ses contemporains. Aucun raccourcissement des bras à la FitzGerald-Lorentz ne doit être invoqué pour rendre compte du résultat, qui s’interprète comme une conséquence directe des postulats d’Einstein.

Une autre différence entre physiques einsteinienne et newtonienne est qu’en physique newtonienne *toutes* les (bonnes) horloges, quels que soient leurs mouvements, sont censées mesurer le même temps $T$. En Relativité Restreinte rien n’exige *a priori* que le temps lu sur une horloge en mouvement coïncide avec le temps $T$ des horloges de $\mathcal{S}$ ; les notions de “présent” et de simultanéité n’ont plus de raison d’être universelles ; on ne peut plus affirmer par exemple, comme on peut le faire d’emblée en physique newtonienne, que la durée d’un périple doit être la même à la montre du voyageur et à celle du sédentaire.

## SECTION 24. Les transformations de Lorentz

Les changements d’étiquetage $X^\mu \to X'^\mu$ des points $p$ de $\mathcal{M}_4$ qui préservent la forme de l’intervalle ($ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dX^\mu dX^\nu = \eta_{\mu\nu}\, dX'^\mu dX'^\nu$) et qui donc décrivent le passage d’un système de coordonnées minkowskiennes $\mathcal{S}$ à un autre $\mathcal{S}'$ sont les *transformations de Poincaré*. Elles s’écrivent

$$X'^\nu = \Lambda_\mu{}^\nu (X^\mu - d^\mu) \qquad \text{avec} \qquad \Lambda_\rho{}^\mu \Lambda_\sigma{}^\nu \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \tag{1}$$

où $d^\mu$ et $\Lambda_\mu{}^\nu$ ne dépendent pas des $X^\mu$. Un tel changement de coordonnées s’accompagne d’un changement de l’origine de l’espace affine, $O \mapsto O'$ avec $OO' = d^\mu e_\mu$ ainsi que d’un changement de base de l’espace vectoriel

[3] La notion de repos “absolu”, inhérente à la représentation de l’espace et du temps en physique newtonienne, est donc superflue en théorie de la Relativité. Il est également superflu d’introduire un *éther* chargé de matérialiser les points de $\mathcal{M}_4$.

$M_4$, $e_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu e'_\nu$, et de son dual, $\epsilon^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu \epsilon'^\mu$ où $\Lambda^\nu{}_\mu$ est la matrice inverse de $\Lambda_\mu{}^\nu$, telle que $\Lambda_\mu{}^\nu \Lambda^\mu{}_\rho = \delta^\nu_\rho$.[4]

Ces transformations sont la généralisation minkowskienne des changements de repère cartésien en géométrie euclidienne. Elles dépendent de 10 paramètres : les 4 composantes du vecteur de translation $d^\mu$, et les 6 composantes indépendantes de la matrice de "pseudo"-rotation $\Lambda_\mu{}^\nu$ qui possède en effet $4 \times 4 = 16$ composantes, contraintes par les 10 relations (1). Trois paramètres, les angles d'Euler par exemple, décrivent les rotations spatiales, les trois autres les "pseudo"-rotations, appelées aussi *boutées* ou "boosts".

Si l'on se restreint aux rotations et pseudo-rotations ($d^\mu = 0$) les transformations (1) prennent le nom de *transformations de Lorentz.* Si $\det \Lambda = +1$ la transformation est dite *propre* ; si $\Lambda_0{}^0 > 1$ elle est dite *orthochrone.* Les transformations satisfaisant à ces deux conditions s'appellent transformations de Lorentz *restreintes.* Comme on s'en convainc aisément elles forment un groupe, non-commutatif, le *groupe de Lorentz.*

Considérons la transformation de Lorentz *spéciale* :

$$T' = T \cosh \psi - X \sinh \psi \quad , \quad X' = -T \sinh \psi + X \cosh \psi \qquad Y' = Y \quad , \quad Z' = Z \tag{2}$$

où $\psi$ est une constante. On a bien $ds^2 = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 = -dT'^2 + dX'^2 + dY'^2 + dZ'^2$ ; $T'$ est donc un temps-coordonnée et $X'^i$ trois coordonnées spatiales.

Afin que les deux repères $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ demeurent équivalents les trois coordonnées cartésiennes $X'^i$ doivent repérer le lieu de l'événement $p$ ; quant à la coordonnée $T'$ elle doit représenter le temps des horloges dans le nouveau référentiel. Ainsi $X' = 0 \Leftrightarrow X = T \tanh \psi$, décrit le mouvement dans $\mathcal{S}$ de l'origine spatiale de $\mathcal{S}'$, et la constante $\tanh \psi \equiv V_0 \in [0, 1[$ s'interprète comme la vitesse du repère $\mathcal{S}'$ mesurée au temps $T$ de $\mathcal{S}$ : $\mathcal{S}'$ est en translation uniforme par rapport à $\mathcal{S}$ le long de l'axe $X$.

En fonction de $V_0$ la transformation (2) prend la forme

$$T' = \frac{T - V_0 X}{\sqrt{1 - V_0^2}} \quad , \quad X' = \frac{X - V_0 T}{\sqrt{1 - V_0^2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad T = \frac{T' + V_0 X'}{\sqrt{1 - V_0^2}} \quad , \quad X = \frac{X' + V_0 T'}{\sqrt{1 - V_0^2}} \,. \tag{3}$$

En physique newtonienne il a fallu distinguer changements de repère cartésien de $\mathcal{E}_3$ et loi de passage d'un repère à un autre en translation uniforme par rapport au premier. En Relativité Restreinte ces notions se confondent, du fait que le temps y a le statut de coordonnée. On appelle donc *repères inertiels* l'ensemble des repères minkowskiens reliés par des transformations de Lorentz restreintes ; c'est dans ces repères que le mouvement des particules libres devra être représenté par des lignes droites.

### SECTION 25. Le temps propre

Une transformation de Lorentz spéciale se concrétise par l'introduction d'un nouveau trièdre matériel, en translation uniforme par rapport au premier. Le lieu de l'événement $P$ est repéré par les trois coordonnées spatiales $X'^i$ du nouveau référentiel. Quant à la nouvelle coordonnée temporelle $T'$ elle représente le temps des horloges *immobiles* dans le nouveau référentiel, c.-à-d. en mouvement rectiligne uniforme par rapport au premier. Se confirme ainsi le fait, au vu de la formule (24.3), que le temps indiqué par une horloge au repos et celui lu sur une horloge identique mais en mouvement ne sont pas les mêmes.

Le fait que $T'$ mesure le temps dans $\mathcal{S}'$ et $T$ celui de $\mathcal{S}$ montre aussi que la notion de simultanéité n'est pas universelle : deux événements $O$ et $P_1$, simultanés dans un référentiel $\mathcal{S}'$, ne le sont pas à l'aune du temps $T$ de $\mathcal{S}$— ceci est surprenant tant qu'on croit à l'existence d'un temps "absolu". De même, si deux événements sont séparés par un intervalle du genre espace il existe un référentiel où ils sont simultanés ; et si leur intervalle est du genre temps alors il existe un référentiel où ils arrivent au même lieu.

Ainsi donc l'espace et le temps physiques sont-ils conçus comme un "bloc" d'où la notion de "flot" du temps est absente et que chaque référentiel inertiel "découpe" selon son propre axe du temps et ses "tranches" d'espace associées. Distinguer un axe des temps n'a pas plus de sens que de distinguer un axe des $X$.

---

[4] Rappelons que dans une transformation linéaire les composantes d'un tenseur $p$ fois contravariant et $q$ fois covariant deviennent

$$T'^{i_1 \cdots i_p}_{j_i \cdots j_q} = T^{k_1 \cdots k_p}_{l_i \cdots l_q} \Lambda_{k_1}^{\ i_1} \cdots \Lambda_{k_p}^{\ i_p} \Lambda^{l_1}_{\ j_1} \cdots \Lambda^{l_q}_{\ j_q} \,.$$

Les composantes $\eta_{\mu\nu}$ de la métrique de Minkowski, le symbole de Kronecker $\delta^\mu_\nu$ et l'indice de Levi-Civita $e_{\mu\nu\rho\sigma}$ (complètement antisymétrique et tel que $\epsilon_{0123} = +1$) sont trois grandeurs invariantes dans les transformations de Poincaré.

Le mouvement d'un point matériel est représenté par une ligne d'univers $X^\mu = X^\mu(\lambda)$. Si cette ligne d'univers est partout du genre temps, c.-à-d. si $ds^2 < 0$ en tout point, on peut choisir comme paramètre $\lambda$ l'abscisse curviligne $\tau$, $d\tau = \sqrt{-ds^2}$. La quadri-vitesse $U^\mu = dX^\mu/d\tau$ est alors normalisée : $\eta_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1$.

Cette abcisse curviligne $\tau$ est un invariant géométrique : sa valeur numérique est la même, quel que soit le système de coordonnées utilisé pour définir la trajectoire du point.

Prenons le cas où la 3-vitesse $V$ est constante dans $\mathcal{S}$ de sorte que $\Delta\tau = \sqrt{1-V^2}\Delta T$, où $\Delta T$ est l'intervalle de temps, mesuré par les horloges immobiles de $\mathcal{S}$, séparant $P$ et $P+\Delta P$. Introduisons maintenant le repère inertiel $\mathcal{S}'$ dans lequel la particule est au repos. On a alors que $\Delta\tau$ n'est autre que l'intervalle de temps séparant $P$ et $P+\Delta P$ mesuré au temps $T'$ des horloges de $\mathcal{S}'$. En effet, si $\Delta\tau$ représente le battement d'une horloge (ou la durée de vie d'une particule) dans $\mathcal{S}'$ alors on a bien que cette durée, mesurée par les horloges de $\mathcal{S}$, est plus longue : $\Delta T = \Delta\tau/\sqrt{1-V^2}$, en accord avec les formules (24.3). Ainsi $\tau$ est le temps mesuré par les horloges en co-mouvement avec $P$.

Si la 3-vitesse du point matériel n'est pas constante, on généralise ce résultat en *postulant* que le temps mesuré par une horloge accélérée, en co-mouvement avec lui, est représenté par $\tau$. L'abcisse curviligne $\tau$ mesure donc le *temps propre* de l'horloge.

Il faut noter cependant que cette identification de l'abcisse curviligne au temps mesuré par une horloge accélérée impose que les (bonnes) horloges, bien qu'étant toutes des objets étendus, peuvent être accélérées sans que leur fonctionnement en soit affecté.

**Exercice : les "jumeaux de Langevin"**

Considérons dans un repère inertiel $\mathcal{S}$ un point matériel $P_{in}$ en $X = X_{in} > 1/g$ (le "sédentaire") et un autre, accéléré, $P_{acc}$ (le "voyageur"), dont la ligne d'univers est l'hyperbole : $T = \frac{1}{g}\sinh g\tau$, $X = \frac{1}{g}\cosh g\tau$ où $g$ est une constante.

Montrez que $\tau$ est le temps propre de $P_{acc}$ et que son mouvement est uniformément accéléré.

Les lignes d'univers se coupent en $T = \pm T_0$, instants où le voyageur quitte le sédentaire et où il le retrouve. Montrez que la durée mesurée par $P_{acc}$ est

$$\Delta\tau_{acc} = \frac{2}{g}\mathrm{ArgSinh}\,\frac{g\Delta\tau_{in}}{2} \qquad (< \Delta\tau_{in})\,.$$

Le fait que $\Delta\tau_{acc}$ est toujours inférieur à $\Delta\tau_{in}$ (quelle que soit en fait l'accélération de $P_{acc}$) est la version minkowskienne de l'"inégalité triangulaire" : la droite, ou *géodésique* qui relie deux événements $p_1$ et $p_2$ est le plus *long* chemin possible.

# Chapitre 6
# Repères accélérés et géométrisation de l'inertie

**Repères accélérés et coordonnées curvilignes en physique newtonienne : rappels**

En mécanique newtonienne, on est amené à considérer quatre types de changement de coordonnées ou repère :
(1) les changements de repère cartésien (rotation des trois axes et translation de l'origine) qui laissent les vecteurs vitesse et accélération invariants ;
(2) le passage d'un repère inertiel à un autre par le groupe de Galilée (mouvement de translation uniforme de l'origine et des trois axes spatiaux), qui modifie la vitesse mais laisse l'accélération et la loi de la dynamique newtonienne invariantes ;
(3) le passage à un repère accéléré par le groupe plus large des déplacements rigides (mouvement quelconque de rotation des trois axes et de translation de l'origine) qui introduit dans la loi de la dynamique des accélérations d'inertie ;
(4) le passage dans un repère cartésien donné à des coordonnées curvilignes qui conduit à écrire la loi de la dynamique en termes de dérivée covariante.

Cette relative complexité est due à la structure de l'espace-temps de Newton : les changements de coordonnées (1) et (4) opèrent dans l'espace euclidien $\mathcal{E}_3$ ; les opérations (2) et (3) définissent des familles de repères, un pour chaque feuille du fibré $N_4 = \mathcal{E}_3 \times R$.

## SECTION 26. Repères locaux et coordonnées de Fermi

Dans l'espace-temps pseudo-euclidien de Minkowski $\mathcal{M}_4$ les transformations, linéaires, de Poincaré (qui laissent quadri-accélération *et* quadri-vitesse invariantes) unifient comme nous l'avons vu les changements de repères cartésiens et le passage d'un repère inertiel à un autre. Ces transformations ne permettent pas en revanche de passer d'un repère inertiel à un "repère accéléré".

Une façon d'effectuer cette transition est de généraliser la notion de repère inertiel "tangent". Considérons à cet effet une particule accélérée $P_{acc}$ dont le vecteur position dans $\mathcal{S}$ est $OO' \equiv d(\tau) = d^\mu(\tau)e_\mu$.

Si $\tau$ est son temps propre sa quadri-vitesse $u \equiv \dot{d} = U^\mu e_\mu$ est contrainte par $(u \cdot u) \equiv \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1$. Considérons au point-événement $O'$ défini par $\tau$ un *repère inertiel tangent* à la ligne d'univers en ce point. Il est obtenu par une transformation de Poincaré

$$X'^\nu = \Lambda_\mu^{\ \nu}(\tau)\,(X^\mu - d^\mu(\tau)) \quad ; \quad e_\mu = \Lambda_\mu^{\ \nu}(\tau)\, e'_\nu \quad , \quad \epsilon'^\nu = \Lambda_\mu^{\ \nu}(\tau)\, \epsilon^\mu \tag{1}$$

telle que $e'_0 = u(\tau)$, ce qui fixe quatre composantes de la matrice inverse en fonction des trois composantes indépendantes de la quadri-vitesse selon : $\Lambda^\mu_{\ 0} = U^\mu(\tau)$. Les trois vecteurs de base spatiaux $e'_i$ sont déterminés par un choix des trois paramètres définissant les rotations spatiales, *e.g.* les angles d'Euler (ainsi la matrice de Lorentz $\Lambda_\mu^{\ \nu}$ est déterminée en fonction de 6 paramètres comme il se doit) ; comme la quadri-accélération $\gamma = \dot{u}$ est orthogonale à $u$ on peut choisir $e'_1 = \gamma/\sqrt{(\gamma \cdot \gamma)}$.

Considérons maintenant un point $p$ quelconque. Son rayon vecteur peut être décomposé selon $Op = OO' + O'p$ soit encore : $X^\mu e_\mu = d^\mu e_\mu + X'^\mu e'_\mu$. Si $P$ est suffisamment proche de la ligne d'univers de $P_{acc}$ il existe un instant $\tau$ et un seul pour lequel $O'p$ est orthogonal à $u$ et pour lequel on a $X^\mu e_\mu = d^\mu e_\mu + X'^i e'_i$, $i = (1,2,3)$. La position de $p$ peut être ainsi définie soit par ses coordonnées minkowskiennes $X^\mu$ soit par la donnée de $\tau$ et de $X'^i$. Appelons $x^\mu$ ces quatre coordonnées, dites *coordonnées de Fermi* : $x^0 \equiv \tau$, $x^i \equiv X'^i$. Elles sont reliées aux $X^\mu$ par

$$X^\mu = d^\mu(x^0) + \Lambda^\mu_{\ i}(x^0)\, x^i\,. \tag{2}$$

Ainsi les coordonnées $x^\mu$ représentent-elles un événement de l'espace-temps de Minkowski dans un *repère local* dont l'origine est liée à une ligne d'univers particulière et dont les vecteurs de base varient de point en point. Ce repère est l'analogue relativiste d'un repère du groupe des déplacements rigides de la physique newtonienne. Un point important est que les relations (2) $X^\mu = X^\mu(x^\nu)$ ne sont *pas* linéaires.

**Exercice : métrique de Minkowski en coordonnées de Fermi**

En supposant par simplicité que le mouvement accéléré du point $O'$ dans le repère inertiel $(T, Z)$ est vertical, $d^\mu(\tau) = (d^0(\tau), d^Z(\tau))$ (où $\tau$ est le temps propre), montrez que les vecteurs de base du repère de Fermi attaché à $O'$ sont : $e'_0 = \dot{d}$ et $e'_3 = -\ddot{d}/\sqrt{\ddot{d}.\ddot{d}}$ (pour $\ddot{d}^Z < 0$).

Considérons un point $p$. En exploitant la relation $Op = OO' + O'p$ (c.-à-d. $Te_0 + Ze_Z = d^0 e_0 + d^Z e_Z + T'e'_0 + Z'e'_Z$ ) et en choisissant $O'$ de sorte que $T' = 0$, montrez que la transformation des coordonnées minkowskiennes $(T, Z)$ aux coordonnées de Fermi $\tau \equiv t$ et $Z' \equiv z$ est donnée par

$$T = d^0(t) + z\,\dot{d}^Z \qquad , \qquad Z = d^Z(t) + z\sqrt{1 + (\dot{d}^Z)^2}\,. \tag{3}$$

Montrez que l'élément de longueur de la métrique de Minkowski s'écrit alors :

$$ds^2 = -dT^2 + dZ^2 = -\left(1 + \frac{z\,\ddot{d}^Z}{\sqrt{1 + (\dot{d}^Z)^2}}\right)^2 dt^2 + dz^2\,. \tag{4}$$

## SECTION 27. L'exemple des coordonnées de Rindler

Soit dans un repère inertiel $\mathcal{S}$, c.-à-d. dans un système de coordonnées minkowskiennes $X^\mu = (T, Z)$ où l'élément de longueur est donné par $ds^2 = -dT^2 + dZ^2$, une particule uniformément accélérée $P_{acc}$. Sa ligne d'univers $d^\mu(\tau) = (d^0(\tau), d^Z(\tau))$ est la branche $Z > 0$ de l'hyperbole $Z^2 - T^2 = 1/g^2$ où $g$ est son accélération, que l'on peut écrire sous forme paramétrique, $\tau$ étant le temps propre de $P_{acc}$ (voir & 25) :

$$d^0(\tau) = \frac{1}{g}\sinh g\tau \quad , \quad d^Z(\tau) = \frac{1}{g}\cosh g\tau\,. \tag{1}$$

Considérons maintenant un point $p$ quelconque, restreint cependant à appartenir au quadrant I de l'espace-temps de Minkowski ($Z > 0$, $-Z < T < Z$). Les coordonnées de Fermi $(t, z)$ de $p$ associées à ligne d'univers de $P_{acc}$ sont, *cf* (26.3) :

$$\begin{aligned} gT &= (1 + gz)\sinh gt \quad , \quad gZ = (1 + gz)\cosh gt \\ gz &= -1 + g\sqrt{Z^2 - T^2} \quad , \quad gt = \mathrm{argth}\,(T/Z)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Cette construction effectuée, on peut en oublier l'échafaudage, et considérer (2) comme définissant le passage (dans le cadran I) du système de coordonnées minkowskiennes $(T, Z)$ aux *coordonnées curvilignes* (ou *gaussiennes*) $(t, z)$, dites *coordonnées de Rindler*.

Chaque ligne de coordonnée $z = Cte$ est une hyperbole de $\mathcal{M}_4$ et représente la ligne d'univers d'une particule de quadri-accélération constante $g/(1 + gz)$. Chaque ligne $t = Cte$ est une droite de genre espace issue de l'origine.

Dans ce nouveau système l'élément de longueur minkowskien s'écrit, *cf* aussi (26.4) :

$$ds^2 = -dT^2 + dZ^2 = -\left(\frac{\partial T}{\partial t}dt + \frac{\partial T}{\partial z}dz\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial t}dt + \frac{\partial Z}{\partial z}dz\right)^2 = -(1 + gz)^2 dt^2 + dz^2 \,. \qquad (3)$$

Les coordonnées de Rindler ne se déduisent manifestement *pas* des coordonnées minkowskiennes $(T, Z)$ par une transformation de Lorentz. On note plutôt la ressemblance avec le passage des coordonnées cartésiennes $(u, v)$ aux coordonnées polaires ($u = r\cos\phi$, $v = r\sin\phi$) en géométrie euclidienne, $dl^2 = dv^2 + du^2 = r^2 d\phi^2 + dr^2$. L'analogie devient complète si l'on pose : $1 + gz = gr$, $gt = \mathrm{i}\,\phi$ ; $Z = u$, $T = \mathrm{i}\,v$ avec $\mathrm{i}^2 = -1$. On remarque cependant que si les coordonnées polaires $(r, \phi)$ couvrent tout le plan euclidien $(u, v)$, il n'en est pas de même des coordonnées de Rindler $(t, z)$ qui ne couvrent que le cadran I du plan minkowskien $(T, Z)$.

### SECTION 28. Référentiels accélérés et décalages spectraux

L'équation de la ligne d'univers d'une particule libre, en translation uniforme dans le repère inertiel $\mathcal{S}$, $Z = VT + Z_0$, devient, dans un repère uniformément accéléré, *cf* (27.2) :

$$\frac{g}{1 + gz} = \frac{\cosh gt - V\,\sinh gt}{Z_0}. \qquad (1)$$

Ainsi l'équation de la ligne d'univers de la particule $P_{in}$ au repos en $Z_0 = 1/g$ dans $\mathcal{S}$ est-elle, dans le système de Rindler : $1 + gz = 1/\cosh gt$. Cependant, comme $gT = \tanh gt$, cette courbe ne représente la ligne d'univers de $P_{in}$ que pour $-1/g < T < 1/g$.

Par ailleurs un corpuscule lumineux issu de $P_{acc}$ en $x = 0$ à $t_e$ est représenté par une ligne d'univers de longueur nulle $[(1 + gz)dt = -dz]$ et intersecte la ligne d'univers de $P_{in}$ en $z = z_r, t = t_r$ donnés par :

$$\exp(-2gt_r) = 2\exp(-gt_e) - 1 \qquad , \qquad 1 + gz_r = \exp(gt_e)\sqrt{2\exp(-gt_e) - 1}. \qquad (2)$$

Armés de ces résultats on peut effectuer des calculs d'effet Doppler en travaillant en repère accéléré.

Considérons par exemple deux particules uniformément accélérées $P_e$ et $P_r$, au repos en $z_e$ et $z_r$ dans le reférentiel de Rindler.

$P_e$ envoie à $P_r$ un signal lumineux de durée $\Delta\tau_e$. A cette durée de temps propre correspond un intervalle de temps coordonnée qui se lit sur (1) : $\Delta t = \Delta\tau_e/(1 + gz_e)$. Comme $P_r$ est au repos et que les coefficients de la métrique ne dépendent pas de $t$, la durée-coordonnée du signal à son arrivée en $P_r$ sera aussi $\Delta t$, mais la durée de temps propre $\Delta\tau_r$ que $P_r$ observera sera donnée par : $\Delta\tau_r = \Delta t(1 + gz_r)$ soit

$$\Delta\tau_r = \Delta\tau_e\,\frac{1 + gz_r}{1 + gz_e} = \Delta\tau_e\,\sqrt{\frac{l_{00}(P_r)}{l_{00}(P_e)}}\,. \qquad (3)$$

Si l'on introduit maintenant les accélérations (dans $\mathcal{S}$) $g_e$ et $g_r$ de $P_e$ et $P_r$, telles que $z_e = 1/g_e - 1/g$ et $z_r = 1/g_r - 1/g$ (3) se réécrit, avec $z_r = z_e + h$ (soit $h = 1/g_r - 1/g_e$) :

$$\Delta\tau_r = \Delta\tau_e(1 + g_e h)\,. \qquad (4)$$

**Repère inertiel et décalages spectraux**

Le même problème peut bien sûr être étudié en utilisant les coordonnées de Minkowski $(T, Z)$ plutôt que celles de Rindler. Les équations des lignes d'univers de $P_e$ et $P_r$, respectivement en $Z_e = 1/g_e$ et $Z_r = 1/g_r$ à $T = 0$, sont alors

$$d_e^\mu = \left(\frac{1}{g_e}\sinh g_e\tau\ ,\ \frac{1}{g_e}\cosh g_e\tau\right) \qquad , \qquad d_r^\mu = \left(\frac{1}{g_r}\sinh g_r\tau\ ,\ \frac{1}{g_r}\cosh g_r\tau\right)$$

(avec $g_e > g_r$). $P_e$ envoie des signaux lumineux à $\Delta\tau_e = \tau_{e_2} - \tau_{e_1}$ d'intervalle de son temps propre. Ils sont reçus par $P_r$ à $\Delta\tau_r = \tau_{r_2} - \tau_{r_1}$ d'intervalle de son temps propre. La ligne d'univers du premier signal est $T = Z - Z_{e_1} + T_{e_1}$. Ainsi $g_r \exp(-g_r\tau_{r_1}) = g_e \exp(-g_e\tau_{e_1})$ de sorte que $\Delta\tau_r = (g_e/g_r)\Delta\tau_e$. Par conséquent l'intervalle de temps propre $\Delta\tau_r$ qui sépare la réception par $P_r$ des deux signaux émis par $P_e$ à $\Delta\tau_e$ de son temps propre est bien donné par (4) (en posant $h = 1/g_r - 1/g_e$).

## SECTION 29. Repères tournants

Considérons un repère inertiel $\mathcal{S}$ et ses coordonnées minkowskiennes $X^\mu = (T, X, Y, Z)$ telles que $ds^2 = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2$ et effectuons le changement de coordonnées $X^\mu = (T, X, Y, Z) \mapsto x^\mu = (t, r, \psi, z)$ qui décrit le passage à un repère en rotation autour de l'axe $Z$ :

$$T = t \quad , \quad X = r\,\cos(\psi + f(t)) \quad , \quad Y = r\,\sin(\psi + f(t)) \quad , \quad Z = z\,. \tag{1}$$

Comme on le voit facilement, l'élément de longueur s'écrit dans ce nouveau système :[5]

$$ds^2 = -(1 - \Omega^2 r^2)dt^2 + 2\Omega\, r^2\, dt\, d\psi + dr^2 + r^2\, d\psi^2 + dz^2\,. \tag{2}$$

où $\Omega \equiv df/dt$ est la vitesse angulaire de rotation du repère.

**Géométrie spatiale d'un disque en rotation uniforme**

Si l'on définit la distance spatiale $dl$ entre deux points $P$ et $P+dP$ situés respectivement en $(r, \psi, z)$ et $(r+dr, \psi+d\psi, z)$ comme la moitié du temps propre, mesuré par $P$, que la lumière met pour faire l'aller-retour de $P$ à $P + dP$, alors on a

$$dl^2 = \frac{r^2 d\psi^2}{1 - \Omega^2 r^2} + dr^2\,.$$

(En effet, temps propre $\tau$ et coordonnée $t$ sont reliés par $d\tau = \sqrt{1 - \Omega^2 r^2}dt$ ; la lumière suit des géodésiques nulles telles que $ds^2 = 0$ et donc $dt = (\Omega r^2 d\psi \pm \sqrt{r^2 d\psi^2 + (1 - \Omega^2 r^2)dr^2})/(1 - \Omega^2 r^2)$.) Ainsi la circonférence $C$ d'un cercle centré sur l'origine est-elle donnée en fonction de son rayon $r$ par

$$C = \int_0^{2\pi} \frac{r\, d\psi}{\sqrt{1 - \Omega^2 r^2}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{1 - \Omega^2 r^2}}\,.$$

**Exercice : L'effet Sagnac**

Soit une particule $P_{acc}$ contrainte à un mouvement circulaire de rayon $r_0$ et pulsation $\Omega$ constante dans un repère inertiel $\mathcal{S}$. Dans le repère tournant où elle est immobile sa ligne d'univers est $x^\mu = (t, r_0, 0, 0)$. Montrez que son temps propre est relié au temps $T = t$ des horloges immobiles dans $\mathcal{S}$ par : $\tau_P = \sqrt{1 - r_0^2\Omega^2}\, t$.

Considérons maintenant deux particules $P_\pm$, l'une prograde l'autre rétrograde, contraintes à suivre les lignes d'univers d'équations : $x^\mu = (t, r_0, \omega_\pm t, 0)$ où $\omega_\pm$ sont des constantes (respectivement positive et négative). Montrez que, mesurée au temps propre de $P_{acc}$, la différence entre les temps mis par ces deux particules pour faire un tour est : $\Delta\tau_P = 2\pi\sqrt{1 - r_0^2\Omega^2}\,(\omega_+ + \omega_-)/\omega_+\omega_-$.

---

[5] Rappelons que dans un changement de coordonnées $X^\mu \to x^\mu$ l'élément de longueur devient $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \ell_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$ où les composantes du tenseur métrique $\ell_{\mu\nu}$ dans les coordonnées $x^\mu$ sont données par

$$\ell_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial X^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\nu}\,.$$

Montrez que les composantes des quadri-vitesses des deux particules sont $u^\mu = (1, 0, \omega_\pm, 0)/\sqrt{1 - r_0^2(\Omega + \omega_\pm)^2}$.

Montrez que si on impose que les vitesses tangentielles sont opposées, on a : $(\omega_+ + \omega_-)/\omega_+\omega_- = 2\pi r_0^2/(1 - \Omega r_0^2)$.

Montrez que les "délais Sagnac", *i.e.* les différences entre les temps mis par ces deux particules pour faire un tour mesurées à l'horloge du repère inertiel ou de $P_{acc}$ sont $\Delta T = 4\pi r_0^2 \Omega/(1 - r_0^2\Omega^2)$ et $\Delta\tau_P = 4\pi r_0^2\Omega/\sqrt{1 - r_0^2\Omega^2}$.

## SECTION 30. Géométrisation des accélérations d'inertie

Maintenant que nous avons introduit la notion de repère accéléré en Relativité Restreinte et en avons donné quelques exemples nous pouvons définir la notion d'accélération d'inertie.

### Dérivation covariante, rappels

De manière générale l'équation d'une ligne d'univers d'un point matériel est donnée par $X^\mu = X^\mu(\tau)$ dans des coordonnées minkowskiennes $X^\mu$, $\tau$ étant son temps propre, et par $x^\mu = x^\mu(\tau) \equiv x^\mu(X^\nu(\tau))$ dans un système de coordonnées $x^\mu = x^\mu(X^\nu)$. Les composantes de sa quadri-vitesse et de sa dérivée dans le système $x^\mu$ sont donc données par

$$\begin{cases} u^\mu \equiv \dfrac{dx^\mu}{d\tau} = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial X^\nu} U^\nu \\ \dfrac{du^\mu}{d\tau} = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial X^\nu}\gamma^\nu + \dfrac{\partial^2 x^\mu}{\partial X^\nu \partial X^\rho} U^\nu U^\rho \end{cases} \tag{1}$$

où $U^\nu \equiv dX^\mu/d\tau$ et $\gamma^\mu \equiv dU^\mu/d\tau$ sont les composantes de ses quadri-vitesse et accélération dans les coordonnées minkowskiennes $X^\mu$. Ces formules sont identiques à celles qui donnent la transformation de la vitesse newtonienne et de sa dérivée dans les changements généraux de coordonnées et montrent que les composantes $(\partial x^\mu/\partial X^\nu)\gamma^\nu$ de l'accélération dans le système $x^\mu$ ne sont pas les dérivées temporelles ordinaires des $u^\mu$ mais leurs dérivées *covariantes* $\tilde{D}u^\mu/d\tau \equiv du^\mu/d\tau - (\partial^2 x^\mu/\partial X^\nu \partial X^\rho)U^\nu U^\rho$ qui s'écrivent aussi, *cf* Chap. 1.III

$$\frac{\tilde{D}u^\mu}{d\tau} \equiv u^\nu \tilde{D}_\nu u^\mu = u^\nu \left(\partial_\nu u^\mu + \tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} u^\rho\right) = \frac{du^\mu}{d\tau} + \tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} u^\nu u^\rho \quad \text{avec} \quad \tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} \equiv \frac{\partial^2 X^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\rho}\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\sigma} \tag{2}$$

et l'on montre (*cf* Chap 1.III ) que les *coefficients de connexion* ou *symboles de Christoffel* $\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho}$ peuvent aussi s'écrire en fonction des composantes $\ell_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma}\frac{\partial X^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\nu}$ de la métrique de Minkowski dans le système $x^\mu$ comme

$$\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2}\ell^{\mu\sigma}\left(\frac{\partial \ell_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \ell_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \ell_{\nu\rho}}{\partial x^\sigma}\right). \tag{3}$$

Considérons une particule libre. Son mouvement est rectiligne uniforme, c.-à-d. que les composantes $U^\mu$ de sa quadri-vitesse $u$ dans un système de coordonnées minkowskiennes sont constantes et celles de sa quadri-accélération sont nulles : $\gamma^\mu \equiv dU^\mu/d\tau = 0$ ; sa ligne d'univers est une droite de $\mathcal{M}_4$. Dans un système de coordonnées général $x^\mu$ les composantes $u^\mu$ de la quadri-vitesse ne sont plus constantes, *cf* (1), mais celles de sa dérivée covariante (2) sont nulles puisque $\gamma^\mu = 0$. Ainsi l'équation du mouvement d'une particule libre dans le système $x^\mu$ est-elle :

$$\frac{\tilde{D}u^\mu}{d\tau} \equiv \frac{du^\mu}{d\tau} + \tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} u^\nu u^\rho = 0\,. \tag{4}$$

C'est l'équation d'une droite de $\mathcal{M}_4$ en coordonnées gaussiennes ; c'est aussi celle qui extrémise le chemin entre deux événements, d'où son nom d'*équation géodésique.*

Plaçons-nous pour l'exemple dans un repère tournant où l'élément de longueur de Minkowski a été donné en (29.2). Effectuons maintenant le nouveau changement de coordonnées $x^\mu = (t, r, \psi, z) \mapsto x'^\mu = (t, x, y, z)$ :

$$t = T \quad , \quad x = r\cos\psi \quad , \quad y = r\sin\psi \quad , \quad z = Z\,. \tag{5}$$

Dans ce système de coordonnées l'élément de longueur minkowskien s'écrit

$$ds^2 = -\left[1 - \Omega^2(x^2 + y^2)\right]dt^2 + 2\Omega\, dt(xdy - ydx) + dx^2 + dy^2 + dz^2\,. \tag{6}$$

Un calcul sans difficulté donne les symboles de Christoffel de la métrique (6) à partir des formules générales (2) ou (3) selon :

$$\tilde{\Gamma}^x_{tt} = -\Omega^2 x - \frac{d\Omega}{dt} y \quad , \quad \tilde{\Gamma}^y_{tx} = -\tilde{\Gamma}^x_{ty} = \Omega \quad , \quad \tilde{\Gamma}^y_{tt} = -\Omega^2 y + \frac{d\Omega}{dt} x \tag{7}$$

(les autres s'obtenant par symétrie ou étant nuls), de sorte que l'équation du mouvement (4) devient

$$\frac{d^2x}{dt^2} = +2\Omega\frac{dy}{dt} + \Omega^2 x + \frac{d\Omega}{dt} y \qquad , \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -2\Omega\frac{dx}{dt} + \Omega^2 y - \frac{d\Omega}{dt} x \tag{8}$$

ce qui peut se réécrire sous forme tri-dimensionnelle sous la forme

$$a = -2\Omega \wedge v + \Omega \wedge (R \wedge \Omega) - \frac{d\Omega}{dt} \wedge R \tag{9}$$

où l'on a introduit les grandeurs $R \equiv (x, y, 0)$, $v \equiv dR/dt$, $a \equiv dv/dt$ et où, ici, $\Omega$ est un 3-vecteur parallèle à $e_Z$. On reconnait dans (9) l'expression des accélérations d'inertie newtoniennes où $t = T$ est le temps d'horloges immobiles dans le repère inertiel $\mathcal{S}$, *cf* & 9.

Ainsi les symboles de Christoffel encodent à la fois le système de coordonnées spatiales choisi (ici cartésien puisqu'à $t = Cst.$ l'élément de longueur (6) se réduit à $dx^2 + dy^2 + dz^2$) et les accélérations d'inertie dues au fait que les axes $(x, y, z)$ tournent par rapport aux axes $(X, Y, Z)$. L'espace-temps de Minkowski offre donc en quelque sorte comme *bonus* la géométrisation des forces d'inertie.

A l'inverse on peut se poser la question : les composantes $\ell_{\mu\nu}(x^\rho)$ de la métrique de Minkowski étant données dans un système de coordonnées curvilignes $x^\mu$, comment retourner à un repère inertiel et ses coordonnées minkowskiennes associées $X^\mu$ et effacer ainsi les accélérations d'inertie ? La réponse est dans son principe simple : les symboles de Christoffel $\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho}$ sont connus en fonction de $\ell_{\mu\nu}(x^\rho)$ et de sa matrice inverse par les formules (3) : $\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2}\ell^{\mu\sigma}(\partial_\nu \ell_{\rho\sigma} + \partial_\rho \ell_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \ell_{\rho\nu})$ ; d'autre part ils sont reliés à des coordonnées minkowskiennes $X^\mu$ par les formules (2) qui s'écrivent aussi

$$\frac{\partial^2 X^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} \frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\rho} \, . \tag{10}$$

Une fois ces équations pour $X^\sigma(x^\nu)$ *linéaires* résolues il reste à fixer les constantes d'intégration, ce que l'on fait en imposant : $\eta_{\rho\sigma}(\partial X^\rho/\partial x^\mu)(\partial X^\sigma/\partial x^\nu) = \ell_{\mu\nu}$. Il en restera 10, les 10 paramètres du groupe de Poincaré dont le choix détermine un repère inertiel particulier.

Concluons par une remarque : pour pouvoir être vues comme composantes de la métrique de Minkowski les 10 fonctions $\ell_{\mu\nu}(x^\rho)$ ne peuvent pas être quelconques puisqu'elles doivent pouvoir s'exprimer en fonctions de quatre fonctions indépendantes seulement selon $\ell_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma}(\partial X^\rho/\partial x^\mu)(\partial X^\sigma/\partial x^\nu)$. Si ce n'est pas le cas elles pourront toujours caractériser une métrique mais d'un espace-temps plus complexe que celui de Minkowski, dit *courbe*.

### SECTION 31. Abandon des solides de référence accélérés

Reste maintenant la question de savoir ce que représentent des coordonnées curvilignes $x^\mu$ ou, de manière équivalente, la question de les matérialiser par un système de référence dans l'espace physique réel, "relatif, apparent & vulgaire".

Cela ne pose pas de problème conceptuel en physique newtonienne où les repères accélérés s'obtiennent par déplacement rigide de sorte qu'on peut les concrétiser en accélérant un *solide* de référence dans lequel, par construction, la distance entre deux points reste la même et les trois axes restent orthonormés au cours du temps.

En Relativité Restreinte, la coordonnée minkowskienne $T = X^0$ représente le temps d'une horloge immobile dans le repère inertiel $\mathcal{S}$ considéré. La coordonnée $t = x^0$ ne représente *pas* en revanche en général le temps d'une horloge immobile en $x^i = Const.$ car on a postulé que c'est le temps propre qui joue ce rôle.

Ce temps propre est donné par $\tau = \int \sqrt{1-V^2}\, dT$ où $V$ est la 3-vitesse de l'horloge par rapport au repère inertiel. Mesuré en termes des coordonnées $x^\mu$ il s'obtient à partir de l'élément de longueur en y posant $dx^i = (dx^i/dt)\, dt$ et vaut

$$\tau = \int \sqrt{-ds^2} = \int \sqrt{-\ell_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}}dt = \int \sqrt{-\ell_{00}}\, dt \tag{1}$$

car la 3-vitesse $dx^i/dt$ de l'horloge est nulle.

Quant aux coordonnées spatiales $x^i$, peuvent-elles représenter un solide de référence tridimensionnel cartésien ? La réponse est "non" en général.[6]

**"Rigidité" du référentiel de Rindler**

Considérons dans un repère inertiel $\mathcal{S}$ de coordonnées minkowskiennes $(T, X)$ (on se restreint à une seule dimension d'espace) deux lignes de coordonnées spatiales voisines du repère de Rindler, $x(T, X) = x_0$ et $x(T, X) = x_0 + \Delta x$, *cf* (27.2) ; elles peuvent représenter des lignes d'univers de deux éléments matériels du repère qui ont dans $\mathcal{S}$ un mouvement uniformément accéléré de vitesse $V \equiv dX/dT$ déterminée par $dx/dT = \partial x/\partial T + (\partial x/\partial X)V = 0$ ; soit par ailleurs $\Delta X$ leur distance propre, mesurée dans $\mathcal{S}$, c.-à-d. à $T$ constant. Dans le repère inertiel $\mathcal{S}_g$ allant à la vitesse $V$ par rapport à $\mathcal{S}$ où elles sont momentanément au repos leur distance propre est donc $\Delta X_g = \Delta X/\sqrt{1-V^2}$ (contraction des longueurs). Un solide peut alors être défini en imposant que $\Delta X_g$ soit égal à $\Delta x$, la distance entre les lignes de coordonnées du repère accéléré.

Le système de coordonnées de Rindler satisfait à ce critère. En effet les lignes d'univers de deux lignes de coordonnées voisines sont donnés par $g^2(X^2 - T^2) = (1 + gx_0)^2$ et $g^2(X^2 - T^2) = [1 + g(x_0 + \Delta x)]^2$. Leur vitesse dans $\mathcal{S}$ est $V = dX/dT = T/X$. Quant à leur distance propre $\Delta X$, mesurée dans $\mathcal{S}$, c.-à-d. à $T$ constant, elle est donnée par : $gX\Delta X = (1 + gx_0)\Delta x$. Dans le repère inertiel tangent à leur ligne d'univers elle est (contraction des longueurs) : $\Delta X_g = \Delta X/\sqrt{1-V^2}$. En développant le calcul :

$$\Delta X_g = \frac{\Delta X}{\sqrt{1-V^2}} = \frac{(1+gx_0)\Delta x}{gX}\frac{1}{\sqrt{1-T^2/X^2}} = \frac{(1+gx_0)\Delta x}{g\sqrt{X^2-T^2}} = \Delta x\,.$$

En ce sens précis la ligne de coordonnée $x = const.$ peut être considérée comme un "axe rigide" et on peut concevoir la matérialisation du repère de Rindler par un solide accéléré le long de l'axe $X$ du repère inertiel $\mathcal{S}$. Cette propriété est particulière au repère de Rindler; dans le cas général il faut abandonner la notion de repère "rigide" et de référentiel "solide" sauf s'ils sont inertiels.

La notion de *solide* de référence accéléré ne laissant pas d'être subtile en théorie de la Relativité on est amené à admettre que *tout* système de coordonnées $x^\mu$ peut être associé à un système matériel de référence, les coordonnées $x^i$ étiquetant la position de ses points à un instant coordonnée $t = x^0$ dont la signification physique en terme de temps propre mesuré par une horloge est à préciser cas par cas. Dans le cadre ainsi élargi de la Relativité Restreinte on abandonne donc les notions de repère et de référentiels rigides introduits en physique newtonienne.

# Chapitre 7
# Principe d'équivalence et géométrisation de la gravitation

L'objet de ce chapitre est de décrire le chemin conceptuel qui mena Einstein de la Relativité Restreinte à la Relativité Générale. Toutes les notions mathématiques présentées ici de façon qualitative seulement seront explicitées dans la troisième partie.

## SECTION 32. Une relativité "générale"

Les physiciens du XIXème siècle avaient cherché à mesurer la vitesse de la Terre par rapport au milieu dans lequel la lumière se propageait, l'*éther*, souvent considéré alors comme l'incarnation de l'espace absolu

[6] On trouvera dans le livre de W. Pauli, *"Theory of Relativity"*, Dover Publications 1981 (première édition 1921) une discussion claire de la notion de mouvement rigide introduite par M. Born ainsi que de ses limitations.

de Newton.[7] Ce fut en vain : la vitesse de la lumière était $c$ par rapport au référentiel où le système solaire et, pensait-on, l'éther, étaient au repos (aberration des étoiles) *et* par rapport à la Terre (expérience de Michelson et Morley). Comme le résuma Henri Poincaré : "*Il semble au premier abord que l'aberration de la lumière et les phénomènes optiques qui s'y rattachent vont nous fournir un moyen de déterminer le mouvement absolu de la Terre, ou plutôt son mouvement, non par rapport aux autres astres, mais par rapport à l'éther. Fresnel l'avait déjà tenté (...), Michelson (...) échoua à son tour. Il semble que cette impossibilité de mettre en évidence expérimentalement le mouvement absolu de la Terre soit une loi générale de la nature.*"[8]

Il fallut donc multiplier les hypothèses sur l'"électrodynamique des corps en mouvement" (temps "fictif" de Lorentz-Poincaré, contraction des longueurs de FitzGerald-Lorentz, *etc*) pour faire respecter aux équations de Lorentz et de Maxwell, dans le cadre de la physique de Newton, cette impossibilité de distinguer le référentiel où l'éther serait au repos. Einstein, en réfléchissant au concept de temps, montra qu'on pouvait en fait marier naturellement constance observée de la vitesse de la lumière dans tous les référentiels en mouvement rectiligne uniforme relatif, équivalence dynamique de ces repères inertiels et une loi de composition des vitesses, à condition de formuler électromagnétisme et mécanique dans le cadre d'une nouvelle représentation géométrique de l'espace-temps : la Relativité Restreinte. En 1905 donc, l'espace absolu et l'éther dont on l'avait rempli retournèrent dans les limbes.

La classe des référentiels inertiels restait cependant privilégiée. C'est seulement dans ces systèmes en effet que les particules libres peuvent être au repos. Dans tout autre elles sont accélérées et pour les y maintenir au repos il faut les soumettre à des forces, forces d'*inertie*, qui signalent seulement que le système auquel leur mouvement est rapporté n'est pas inertiel. Ces forces d'inertie agissent en quelque sorte comme un "*rappel à l'ordre*" de la cohorte des repères galiléens associée au "*fantôme*" qu'est l'espace absolu. L'on peut donc être insatisfait "*d'un tel acteur restant ainsi dans l'ombre, qui agit sur la matière sans qu'elle puisse agir en retour sur lui*".[9]

L'ambition d'Einstein fut alors, dès 1907, de bâtir une théorie où *tous* les repères seraient privilégiés (soit encore aucun), où il n'y aurait plus de forces d'inertie, plus de rappel à l'ordre de l'espace absolu, et où, donc, les lois de la physique auraient la même forme dans tous les repères, inertiels ou non, afin de ne pouvoir privilégier l'un d'eux ; bref une théorie de *Relativité Générale*.[10]

Cette idée comporte plusieurs facettes. La première, dite de *covariance générale*,[11] consiste à écrire les lois de la dynamique de sorte qu'elles préservent leur forme (soient "invariantes") dans un changement général de coordonnées. Ainsi par exemple (comme nous l'avons vu en & 29), dans tout repère, inertiel ou non, l'équation du mouvement d'une particule de masse $m$, de quadri-vecteur vitesse $u$ de composantes $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ dans le système de coordonnées $x^\mu$ ($x^\mu = x^\mu(\tau)$ étant sa ligne d'univers, $\tau$ son temps propre) s'écrit sous la forme

$$m\,\frac{\tilde{D}u^\mu}{d\tau} = f^\mu \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{du^\mu}{d\tau} + \tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} u^\nu u^\rho = \frac{1}{m} f^\mu \tag{1}$$

où les symboles de Christoffel $\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho}$ caractérisant la dérivée covariante $\tilde{D}$ sont déterminés par le système de coordonnées choisi et où $F$ est un vecteur contravariant décrivant la force (de composantes $f^\mu$ dans le système de coordonnées $x^\mu$) à laquelle la particule est soumise.

[7] Tout comme on peut déterminer la vitesse d'un avion par rapport à l'atmosphère en mesurant, de l'avion, la vitesse du son (à condition de savoir dans quelle mesure l'avion entraîne l'atmosphère dans son sillage...)

[8] H. Poincaré, *"Sur la dynamique de l'électron"*, Palermo Rendiconti, 21 (1906) 129 ; cité par J. Eisenstaedt in *"Avant Einstein"*, Seuil 2005.

[9] Gilles Châtelet, *in* "*Les enjeux du mobile"*, Seuil 1993.

[10] "*Est-il concevable que le principe de relativité vale aussi pour des systèmes qui sont accélérés les uns par rapport aux autres ?*" Jahrb. Rad. Elektr., 4 (1907), 411, cité par A. Pais in *"Subtle is the Lord"*, p. 179.

[11] ou d'*indifférence* : T. Damour *in "Einstein aujourd'hui*", CNRS edts, 2005 et *in "Si Einstein m'était conté*", Cherche-Midi Edt, 2005.

Bien que mathématiquement élémentaire dans le cadre de la Relativité Restreinte où coordonnées de temps et d'espace ont même statut, cette formulation covariante de la loi de la dynamique a néanmoins pour intéressant corollaire (comme nous l'avons souligné en & 27) de montrer de manière explicite l'origine géométrique des forces d'inertie. Ainsi le caractère non-inertiel du repère se manifeste dans les symboles de Christoffel $\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\nu\rho}$, c.-à-d. dans la métrique, grandeur géométrique.

Une seconde facette du principe de Relativité Générale, beaucoup plus riche de contenu, fut de chercher à assigner une origine géométrique à *toutes* les forces, d'inertie *et* réelles—d'absorber en quelque sorte le vecteur $F$ dans un opérateur $D$. Ainsi toutes les forces seraient des manifestations de la géométrie, tout mouvement serait libre, mais s'effectuerait dans un espace-temps géométriquement plus complexe que ceux jusqu'alors considérés. On sait qu'Einstein réussit en 1915 à réduire ainsi la force de gravitation ; les autres résistent encore...

### SECTION 33. Le principe d'équivalence[12]

Le "pied de biche" qu'Einstein utilisa pour "fracturer l'espace-temps absolu",[12] et en extraire la gravitation, fut le fait curieux que tous les corps tombent de la même façon dans un champ de gravitation.

La mécanique newtonienne rend compte de ce fait par une égalité fortuite des masses grave et inerte. Mais cette égalité, comme Einstein le dévoila, n'est pas anodine. En effet l'accélération à laquelle une particule libre est soumise du fait que son mouvement est rapporté à un système de référence non-inertiel ne dépend que du mouvement du référentiel, et non des propriétés intrinsèques de la particule, comme sa masse inerte. Dans un champ d'inertie donc, comme dans un champ de gravitation, tous les corps "tombent" de la même façon.

Cette similarité conduisit Einstein à ériger en postulat l'égalité des masses inerte et grave et à *identifier* forces d'inertie et de gravitation. C'est le *principe d'équivalence.*

Ce principe, lui-aussi, a plusieurs facettes. La première est que, les forces d'inertie étant d'essence géométrique, la gravitation doit l'être également (et donc "encodable" dans les symboles de Christoffel d'une dérivation covariante). Il implique par ailleurs qu'une accélération peut simuler un champ de gravitation : ainsi par exemple l'observation d'un décalage de fréquence, dû au fait qu'elle est mesurée dans un référentiel accéléré, peut légitimement être mis sur le compte d'un champ de gravitation plutôt que sur celui d'effets cinématiques liés au mouvement du référentiel—comment créer un tel champ n'est pas (encore) la question. Réciproquement, un champ de gravitation réel (par exemple celui de la Terre ou du Soleil) peut être effacé par une accélération : dans un référentiel en chute "libre", et donc accéléré par rapport aux référentiels inertiels lointains, le champ de gravitation peut être légitimement ignoré car les particules en *co-mouvement* c'est-à-dire qui tombent elles aussi, sont en mouvement rectiligne uniforme, de sorte que le référentiel est, *de facto* inertiel.[13]

Un intéressant corollaire de ce principe est la claire reconnaissance que la notion de particule libre (du moins au regard de la gravitation) n'a pas grand sens : une particule libre est, dans un référentiel accéléré, soumise à un champ (le champ d'accélération du référentiel) ; quant aux particules attirées par le Soleil par exemple, elles sont libres dans un référentiel en chute libre. Or la définition des repères inertiels *repose* sur la notion de particule libre. Si aucune ne l'est ou si elles le sont toutes, c'est toute la classe des repères inertiels qui disparaît à son tour dans les limbes.

### SECTION 34. Une mosaïque d'éclats de $\mathcal{M}_4$

Le principe d'équivalence stipule que tout champ gravitationnel peut être gommé. Voyons plus précisément dans quel sens.

---

[12] "*Der glücklichste Gedanke meines Lebens*", Einstein (1920).

[13] "*...J'étais assis à mon bureau de l'office des brevets de Berne ; soudain je pensai que si quelqu'un tombait en chute libre, il ne sentirait pas son propre poids. Je fus surpris. Cette simple pensée fit une forte impression sur moi (...) Car pour un observateur tombant d'un toit, il n'existe pas de champ de gravitation. S'il laisse tomber des objets, ils resteront au repos par rapport à lui, ou en mouvement uniforme (...) Il est donc en droit de se trouver au repos*". Albert Einstein, 1907 (cité par A. Pais, *op. cit.* pp. 178–179.)

Le champ de forces d'inertie auquel sont soumises des particules libres du fait que leur mouvement est rapporté à un référentiel accéléré peut être entièrement effacé par un changement de système de référence ; l'effacement est global dans le sens où, dans le nouveau référentiel, inertiel, *toutes* les particules ont *ad vitam aeternam* un simple mouvement rectiligne uniforme.

En revanche, dans un référentiel en chute libre, le champ de gravitation ne s'évanouit pas complètement : deux particules initialement au repos y demeurent, leur distance reste invariable, mais pendant un certain temps seulement, d'autant plus court que la précision des mesures est grande ; en effet la distance entre les particules diminue en fait peu à peu car la force de Newton fait converger leurs trajectoires vers le centre de gravité du corps qui les attirent. Ainsi la propriété d'effacement n'est que locale : à tout moment, en tout lieu, il existe un système de référence "en chute libre" où le champ de gravitation s'évanouit, où les particules peuvent être au repos, mais le système dépend du lieu et du moment.

On est ainsi conduit à se représenter le cadre spatio-temporel où se formuleront les lois de la gravitation comme une "mosaïque de petits éclats de l'espace-temps de Minkowski".[11] Dans chaque éclat, c'est-à-dire localement, l'espace-temps est quasi-minkowskien, la gravitation peut être ignorée, et on postule que tous les résultats de la Relativité Restreinte y sont valables. C'est le principe de *relativité locale.*[14]

### SECTION 35. Le "mollusque" de référence

La mécanique newtonienne postule l'existence de trièdres matériels *solides* dont les distances spatiales entre les constituants (mesurées à l'aide de règles *rigides*) sont constantes et dont les axes restent orthornormés au cours du mouvement. De tels trièdres peuvent (en principe) servir de systèmes de référence globaux quadrillant tout l'espace, où tester les lois de la mécanique écrites dans tout repère accéléré, déduit du repère absolu par déplacement rigide. (Et si les lois de la mécanique n'y sont pas vérifiées c'est *a priori* que le solide se disloque sous l'effet des forces d'inertie qu'il subit !)

En Relativité Restreinte en revanche, les corps solides, référentiels globaux quadrillant tout l'espace, ne matérialisent *de facto* que les repères inertiels. La raison en est simple : comme nous l'avons vu en & 25 le passage à un repère accéléré s'effectue par un changement non linéaire des coordonnées impliquant le temps, transformation dont il serait inutilement restrictif d'exiger qu'elle préserve l'orthogonalité des axes spatiaux. Comme de plus le principe d'équivalence fait perdre aux repères inertiels leur statut privilégié, la notion de corps rigide de référence fut en fin de compte abandonnée par Einstein.[15]

En Relativité Générale l'espace-temps devient ainsi un simple *continuum*, un ensemble d'événements différenciés par leur étiquetage dans un repérage quelconque. On peut si l'on veut se figurer ce continuum et son "mollusque" de référence comme un océan peuplé de bathyscaphes reliés par de lâches filins, dont les mouvements relatifs sont mesurés au temps d'une horloge en mouvement quelconque. Au voisinage de tout point on peut cependant passer de ce "mollusque" à un "quadrillage" local de coordonnées minkowskiennes c'est-à-dire passer à un repère momentanément inertiel, en chute libre, appelé *espace tangent.*

### SECTION 36. Un espace-temps pseudo-riemannien

L'espace physique est représenté en physique newtonienne par un espace "absolu" euclidien ; en Relativité Générale, l'espace et le temps sont représentés par une *variété*, continuum de points $p$ repérés par quatre coordonnées $x^\mu$ qui localement se réduit à l'espace-temps de Minkowski, ainsi que nous venons de le voir.

---

[14] parfois appelé *"principe d'équivalence d'Einstein"*, l'identité masse grave masse inerte étant par contraste qualifiée de *principe d'équivalence faible.*

[15] "*Dans les champs gravitationnels il n'y a pas ce qu'on appelle de corps rigides aux propriétés euclidiennes : ainsi le corps rigide fictif de référence n'est-il d'aucune utilité dans la théorie générale de la relativité*",

"*Des corps de référence non-rigides sont utilisés, qui de manière générale non seulement se meuvent de n'importe quelle façon mais subissent également des modifications de forme ad libitum pendant leur mouvement (...) Ce corps de référence non-rigide, qui peut de manière appropriée être qualifié de "mollusque de référence", est en gros équivalent à un système de coordonnées gaussiennes choisi arbitrairement*".

A. Einstein, in *"Relativity, The Special and General Theory"*, Methuen, 1954.

Une variété[16] est beaucoup moins structurée qu'un espace euclidien car si on peut y définir *localement* (*i.e.* sur l'espace tangent du point considéré) des grandeurs géométriques, vecteurs, tenseurs etc, les notions de parallélisme et de distance n'y sont pas *a priori* définies.

Pour pouvoir comparer des grandeurs en des points différents, et connecter entre eux les différents éclats de $M_4$ (*i.e.* les espaces tangents), il faut lui adjoindre une structure supplémentaire. Le rôle d'une *connexion* est de *définir* le *transport parallèle* des tenseurs ; plus particulièrement, elle permet de construire les courbes *auto-parallèles* (c.-à-d. les plus "droites" possible) d'une variété, de la façon suivante : si leurs lignes d'univers sont $p = p(\lambda)$ soit, en coordonnées, $x^\mu = x^\mu(\lambda)$, et si $u = dp/d\lambda$ ($\Leftrightarrow$ $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$) sont leurs vecteurs tangents, alors leur équation est

$$\frac{du^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\, u^\nu u^\rho = 0, \tag{1}$$

où les 64 coefficients de connexion $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ (qui ne sont pas nécessairement symétriques en $\nu$ et $\rho$) sont des fonctions *a priori* arbitraires des coordonnées. Si par simple changement de coordonnées ils peuvent être annulés en tous points (ce qui implique qu'ils peuvent être exprimés en termes de 4 fonctions des coordonnées seulement), alors la variété est dite *plate* ; dans le cas contraire elle est *courbe*.

Afin maintenant de pouvoir comparer à deux instants notablement différents les distances entre deux particules et en inférer par exemple l'existence d'une masse centrale qui les attire, une structure métrique définissant la notion de distance doit être également introduite. C'est le rôle du *tenseur métrique* qui définit l'élément de longueur comme

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \tag{2}$$

où les 10 fonctions $g_{\mu\nu}$ sont *a priori* arbitraires. La donnée d'une métrique permet de définir les courbes *géodésiques*, c'est-à-dire des courbes de longueur extrémale. Au voisinage de chaque point les coefficients $g_{\mu\nu}$ peuvent être réduits par changement de coordonnées aux coefficients $\eta_{\mu\nu}$ de la métrique de Minkowski mais il n'est pas possible en général de le faire globalement (cela n'est possible que s'ils peuvent s'exprimer à l'aide de 4 fonctions seulement).

Les notions de parallélisme et de distance sont conceptuellement distinctes mais toute métrique peut définir une *connexion de Levi-Civita*. Dans ce cas les 40 coefficients de connexion (symétriques) prennent le nom de *symboles de Christoffel* et s'expriment en fonction des 10 composantes de la métrique sous la forme (*cf* & 14)

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left( \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\sigma} \right) . \tag{3}$$

Auto-parallèles et géodésiques deviennent alors un seul et même objet. Une variété ainsi munie d'une métrique et de sa connexion de Levi-Civita associée est une *variété (pseudo)-riemannienne* ("pseudo" car la métrique doit se ramener localement à $\eta_{\mu\nu}$ plutôt que $\delta_{\mu\nu}$).

Ce sont de telles variétés pseudo-riemanniennes qui représentent l'espace et le temps en Relativité Générale.[17] Un tel espace est *courbe* dans le sens qu'en général les auto-parallèles s'y coupent (*cf* les trajectoires des particules "libres" dans un repère en co-mouvement, qui se rejoignent au centre de gravité). Dans le cas exceptionnel où il est *plat*, il existe alors un système de référence minkowskien global (tous les "éclats" peuvent être "recollés").

En Relativité Générale tout comme en Relativité Restreinte, la métrique est une structure conférée à l'espace-temps. Mais alors qu'en Relativité Restreinte cette structure, qui peut se ramener à $\eta_{\mu\nu}$, est donnée *a priori*, elle est en Relativité Générale une grandeur physique conditionnée par la distribution de masse. L'espace-temps de la Relativité Générale n'est donc pas un réceptacle passif de la matière.

---

[16] C'est au mois d'Août 1912 qu'Einstein décide de représenter l'espace-temps par un espace plus complexe que celui de Minkowski. Il appelle son ami mathématicien Marcel Grossmann à la rescousse qui l'introduit alors à la géométrie riemannienne.

[17] On trouvera une introduction plus détaillée aux espaces-temps de la Relativité Générale selon la ligne suivie ici dans le livre de E. Schrödinger, *"Space-Time Structure"*, CUP, 1950.

C'est-là la mise en forme par Einstein d'un complexe d'idées promues par Ernst Mach dont les aspects les plus saillants sont que (a) l'inertie d'une particule doit être due à une interaction avec toutes les masses de l'univers, (b) l'espace n'a pas d'existence en soi, indépendamment de la matière.

On voit que si la Relativité Générale incorpore d'une certaine manière la première idée (puisque forces d'inertie et de gravitation ne sont plus distinguées), elle ne traduit en revanche pas la seconde. En effet, en l'absence de matière, l'espace-temps ne se réduit pas à "rien", mais à l'espace-temps de Minkowski. Einstein ne réalisa donc pas complètement son ambition.[18]

### SECTION 37. Décalage spectral gravitationnel

Einstein illustra dès 1907 (puis en 1911) la richesse des concepts de la Relativité Générale par une *expérience de pensée* (*"Gedankenexperiment"*) restée célèbre, que nous reprendrons ici en utilisant les calculs faits en & 28.

Considérons dans un référentiel inertiel $(T, Z)$ une "tour de Rindler" de longueur $h$ accélérée le long de l'axe $Z$, c.-à-d. deux hyperboles, la "base", d'équation $gT = \sinh g\tau$ , $gZ = \cosh g\tau$, et le "sommet", d'équation $g_hT = \sinh g_h\tau$ , $g_hZ = \cosh g_h\tau$, avec $h = 1/g_h - 1/g$. Comme nous l'avons vu en & 28 des signaux lumineux émis à des intervalles de temps $\Delta\tau$ de la base de la tour seront mesurés au sommet comme ayant une durée[19]

$$\Delta\tau_h = (1 + gh)\Delta\tau\,. \tag{1}$$

Il est utile d'insister sur le fait que $\Delta\tau_h$ est la période, *observée* du sommet de la tour, de l'horloge située à sa base, et de préciser que si elle était placée à son sommet ses signaux auraient la période $\Delta\tau$ car on a postulé que les appareils mesurant le temps n'étaient pas affectés par leur accélération.

De manière plus générale nous avons aussi vu en & 28, en effectuant les calculs d'effet Doppler dans un repère accéléré où la tour est au repos, que l'on a

$$\Delta\tau_h = \sqrt{\frac{g_{00}(z = h)}{g_{00}(z = 0)}}\Delta\tau \tag{2}$$

où $g_{\mu\nu}$ sont les coefficients de la métrique de Minkowski dans le repère accéléré et $z = 0$, $z = h$ les lignes d'univers de la base et du sommet de la tour dans les coordonnées où elle est immobile.

La tour est accélérée. Or le principe d'équivalence stipule qu'un champ d'accélération est (localement) indiscernable d'un champ de gravitation. Le même phénomène de dilatation du temps doit donc se produire dans un champ de gravitation, par exemple celui de la Terre. Dans ce cas la base de la tour en est le "bas", le sommet en est le "haut" et $h$ la "hauteur". Quant à $g$ c'est l'accélération de la pesanteur, $g \equiv GM_\oplus/R_\oplus^2$. On doit donc avoir :

$$\Delta\tau_{haut} = (1 + gh)\Delta\tau\,, \tag{3}$$

où, rappelons-le, $\Delta\tau_{haut}$ est par exemple la période observée du haut de la tour d'une transition atomique ayant lieu au bas de la tour, et $\Delta\tau$ est la période de cette transition, que l'atome soit au bas *ou* au haut de la tour.

[18] "J'espérais *montrer que l'espace-temps n'était pas nécessairement quelque chose à quoi on puisse assigner une existence séparée, indépendamment des objets concrets de la réalité physique. Les objets physiques ne sont pas dans l'espace, ils ont une extension spatiale. En ce sens le concept d'"espace vide" perd son sens (...) Il n'existe pas d'espace vide, c'est-à-dire d'espace sans champ. L'espace-temps ne prétend pas à une existence propre, mais n'est qu'une propriété structurelle du champ. Ainsi Descartes n'était pas si loin de la vérité lorsqu'il pensait qu'il fallait refuser l'existence à l'espace vide*", A. Einstein, in *"Relativity"*, Methuen 1954.

[19] On se convaincra aisément que lorsqu'on se limite au 1er ordre en $gh$ le résultat (1) sera le même que la tour soit celle, "rigide", de Rindler ou que les lignes d'univers de ses base et sommet soient, par exemple, $(gT = \sinh g\tau\ ,\ gZ = \cosh g\tau)$, $(gT = \sinh g\tau\ ,\ gZ = \cosh g\tau + h)$, voire $(Z = \frac{1}{2}gT^2, Z = \frac{1}{2}gT^2 + h)$.

Si l'on introduit le potentiel de gravitation terrestre $U(h) = -GM_\oplus/(R_\oplus + h)$ on a que $1 + gh = 1 + (U_0/U_h)(U_h - U_0)$, soit, au 1er ordre en $(U_h - U_0)/U_0$ :

$$\Delta\tau_{haut} \approx (1 + U_{haut} - U_{bas})\Delta\tau\,, \tag{4}$$

une formule qui se généralise à tout potentiel gravitationnel.

Le principe d'équivalence conduit ainsi à identifier de (4) et (2) ce qui conduit à écrire

$$g_{00} \approx -(1 + 2U) \tag{5}$$

où $U$ est le potentiel gravitationnel newtonien, et où l'écart du coefficient $g_{00}$ à sa valeur minkowskienne est maintenant interprété comme une déformation de l'espace-temps due à la gravitation.

L'effet (3) fut mesuré par Pound et Rebka en 1960. Ils placèrent un échantillon de fer radioactif au bas d'une tour de l'université de Harvard de hauteur $h = 22.6$ m et observèrent au sommet de la tour la fréquence des rayons gamma émis. Le décalage spectral prédit est $(\nu - \nu_{haut})/\nu \approx (GM_\oplus/c^2R_\oplus)(h/R_\oplus) \approx 2.47\times10^{-15}$. Ils mesurèrent $(\nu - \nu_{haut})/\nu = (2.57 \pm 0.26) \times 10^{-15}$.

Einstein avait proposé de mesurer le décalage spectral gravitationnel des raies d'émission du Soleil, beaucoup plus important en principe, puisque de l'ordre de $2\times10^{-6}$. Mais les mouvements internes du Soleil ajoutent des effets Doppler cinématiques difficilement contrôlables et ce n'est qu'en 1991 qu'une mesure précise put être effectuée, par LoPresto *et al.*, en accord à 2% près avec la prédiction.

L'expérience actuellement la plus précise est celle de Vessot et Levine (1976) qui lancèrent une horloge maser à 10 000 km d'altitude où ils mesurèrent sa fréquence. Ils confirmèrent la prédiction avec une précision de $2\times10^{-4}$. Les horloges atomiques du réseau qui définit le temps international ne sont pas toutes au niveau de la mer : celle de Boulder, Colorado par exemple, à 1600 m d'altitude, gagne environ 5 microsecondes par an sur celle de Greenwich. Comme la précision des horloges est actuellement de l'ordre de 0.1 microseconde par an il faut corriger ce retard pour les synchroniser.

**Expériences d'Hafele-Keating et de Alley** ***et al.***

Mentionnons aussi l'expérience de Hafele et Keating (1971) qui a consisté à comparer le temps d'horloges ayant fait le tour du monde d'Est en Ouest puis d'Ouest en Est à celui d'une horloge au sol ; ainsi que celle, similaire, de Alley *et al.* (1975).

Il faut cependant noter que dans ces expériences il faut tenir compte aussi de l'effet de dilatation du temps dû au mouvement des horloges.

L'inclusion de ces effets de dilatation du temps ("restreint et général") est maintenant essentielle à la bonne marche des routines d'ingéniérie comparant les temps d'horloges atomiques en mouvement relatif, sur Terre et dans les satellites du réseau GPS par exemple.

*Exit* donc l'espace-temps de Minkowski de la Relativité Restreinte.

*Troisième Partie*

# Espaces-temps courbes et gravitation

*"Probablement la plus grande découverte scientifique jamais faite".*
P.A.M. Dirac

## Chapitre 8
## Le tenseur de Riemann-Christoffel

Ainsi que nous l'avons argumenté dans le chapitre précédent, les espaces-temps "absolus, vrais & mathématiques" représentant en théorie d'Einstein l'espace et le temps "relatifs, apparents & vulgaires" sont des variétés riemanniennes munies d'une métrique et de sa connexion de Levi-Civita associée, cette métrique décrivant à la fois le système de coordonnées choisi pour "étiqueter" les événements, c.-à-d. les positions à un instant donné des éléments de matière, *et* le champ de gravitation auquel ces éléments sont soumis.

Nous introduisons ici le tenseur de Riemann, qui caractérise les espaces-temps courbes, puis les équations d'Einstein qui disent comment le champ de gravitation créé par la matière contraint la géométrie, c.-à-d. la métrique, de l'espace-temps.

### SECTION 38. Connexion, transport parallèle et courbure

Comme nous l'avons vu en étudiant l'espace euclidien en coordonnées curvilignes au chapitre 3, la dérivation covariante associe à un tenseur un autre tenseur défini au *même* point $p$. Mais c'est également (tout comme la dérivation ordinaire) une opération qui, par "développement de Taylor", permet de transporter le tenseur $T$ *parallèlement* à lui-même du point $p$ à un point proche $q$, et ainsi de *connecter* les points $p$ et $q$. On pourra ainsi par exemple comparer $T$, défini en $p$, à un autre tenseur défini en $q$ ou voir si un champ de tenseur $T$ est "constant" ou non.

Le *transport parallèle* d'un vecteur $t^i$ (ici $i = 1, \ldots n$) le long d'un courbe $x^j(\lambda)$ de vecteur tangent $u^j = dx^j/d\lambda$ est donc défini, par simple extension de la définition en espace euclidien, par :

$$\frac{Dt^i}{d\lambda} \equiv u^j D_j t^i = \frac{dt^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{jk} u^j t^k = 0 \tag{1}$$

où maintenant les $n^3$ *coefficients de connexion* $\Gamma^i_{jk}$ sont des fonctions *a priori* arbitraires des $n$ coordonnées $x^i$. Si les composantes $t^i$ sont connues en $\lambda = \lambda_0$, l'équation différentielle ci-dessus les détermine uniquement pour tout $\lambda$.[1]

Transportons parallèlement le vecteur de composantes $t^i$ le long d'un circuit fermé. En espace euclidien où il existe des coordonnées (cartésiennes) où tous les $\Gamma$ sont nuls l'intégration de (1) est triviale et l'on obtient le résultat bien connu qu'à l'arrivée le vecteur sera le même qu'au départ. Cela n'est plus vrai dans le cas général.

Supposons que le circuit se compose d'un premier tronçon, de $p$ à $p_1$, le long de la ligne de coordonnée $x^1$, suivi d'un second, de $p_1$ à $q$ le long de la ligne de coordonnée $x^2$, d'un troisième de $q$ à $p'_1$, à nouveau le long d'une ligne de coordonnée $x^1$ et, enfin, pour boucler la boucle, d'un tronçon de $p'_1$ à $p$ le long d'une ligne de coordonnée $x^2$. L'équation (1) nous dit que les composantes $t^i_{par}$ de ce vecteur transporté parallèlement sont données implicitement, en $p_1$, $q$, $p'_1$ et $p$ par les expressions intégro-différentielles :

$$\begin{cases} t^i_{par}(p_1) = t^i(p) - \displaystyle\int_p^{p_1} \Gamma^i_{1k} t^k_{par} dx^1 \quad , \quad t^i_{par}(q) = t^i(p_1) - \displaystyle\int_{p_1}^{q} \Gamma^i_{2k} t^k_{par} dx^2 \\ t^i_{par}(p'_1) = t^i(q) - \displaystyle\int_q^{p'_1} \Gamma^i_{1k} t^k_{par} dx^1 \quad , \quad t^i_{par}(p) = t^i(p'_1) - \displaystyle\int_{p'_1}^{p} \Gamma^i_{2k} t^k_{par} dx^2 \end{cases} \tag{2}$$

[1] De manière analogue une *auto-parallèle* est une courbe telle que : $du^i/d\lambda + \Gamma^i_{jk} u^j u^k = 0$. Rappelons qu'en espace euclidien c'est là l'équation d'une droite puisque qu'en coordonnées cartésiennes tous les $\Gamma$ sont nuls ; en physique newtonienne elle décrit la trajectoire d'une particule libre ; en Relativité Restreinte c'est l'équation du mouvement d'une particule libre dans un repère accéléré.

de sorte que

$$\Delta t^i \equiv t^i_{par}(p) - t^i(p) = \left(\int_{p'_1}^{q} - \int_{p}^{p_1}\right)\Gamma^i_{1k}t^k_{par}dx^1 - \left(\int_{p_1}^{q} - \int_{p}^{p'_1}\right)\Gamma^i_{2k}t^k_{par}dx^2\,. \tag{3}$$

Comme les coordonnées des différents points sont $p$: $x^i$, $p_1$: $x^i+\delta^i_1\Delta x^1$, $q$: $x^i+\delta^i_1\Delta x^1+\delta^i_2\Delta x^2$, $p'_1$: $x^i+\delta^i_2\Delta x^2$, on a, à l'ordre le plus bas:

$$\Delta t^i = \Delta x^1\Delta x^2\left[\partial_2(\Gamma^i_{1k}t^k_{par}) - \partial_1(\Gamma^i_{2k}t^k_{par})\right] \tag{4}$$

soit, en utilisant à nouveau l'équation de transport parallèle (1) :

$$\Delta t^i = R^i{}_{j21}\, t^j\,\Delta x^2\Delta x^1 \tag{5}$$

où

$$R^i{}_{jkl} \equiv \partial_k\Gamma^i_{lj} - \partial_l\Gamma^i_{kj} + \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj} \tag{6}$$

est le *tenseur de courbure* (ou encore de *Riemann-Christoffel*), de type $\binom{1}{3}$. C'est un tenseur car $\Delta t^i$, différence de deux vecteurs au même point, est un vecteur, ainsi que $\Delta x^1$ et $\Delta x^2$.[2] On obtient le même résultat en comparant, en $q$, les vecteurs transportés parallèlement *via* $p_1$ pour l'un et *via* $p'_1$ pour l'autre. On voit donc que ce n'est que si le tenseur de Riemann est nul que le transport parallèle d'un vecteur (ou de tout autre tenseur) ne dépend pas du chemin.[3]

**Exercice : transport parallèle sur une 2-sphère**

Considérons un espace bi-dimensionnel dans un système de coordonnées $(\theta,\phi)$, $\theta\in[0,\pi]$, $\phi\in[0,2\pi]$ muni de la connexion suivante

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta \qquad , \qquad \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

les autres coefficients étant nuls. Soit au point $p(\theta_0,\phi_0)$ un vecteur de composantes $t^i(p)=(1,0)$. En le transportant parallèlement d'abord de $p$ à $p_1(\theta_0,\phi_1)$, puis en $q(\theta_1,\phi_1)$, puis en $p'_1(\theta_1,\phi_0)$ pour le ramener enfin en $p$, montrez que l'on a

$$\Delta t^\theta = \cos(\omega_1-\omega_0) - 1 \quad , \quad \Delta t^\phi = \frac{\sin(\omega_1-\omega_0)}{\sin\theta_0} \qquad \text{avec} \qquad \omega_1 = (\phi_1-\phi_0)\cos\theta_1\ ,\ \omega_0 = (\phi_1-\phi_0)\cos\theta_0\,.$$

Montrez que le tenseur de Riemann se réduit à $R^\theta{}_{\phi\theta\phi} = \sin^2\theta$, $R^\phi{}_{\theta\phi\theta} = 1$ de sorte que, en accord avec la formule générale (5) on a, à l'ordre le plus bas et en posant $\Delta\theta = \theta_1-\theta_0$ et $\Delta\phi = \phi_1-\phi_0$ : $\Delta t^\theta = 0$, $\Delta t^\phi = -\Delta\theta\Delta\phi$.

## SECTION 39. Commutation des dérivées covariantes, torsion et courbure

La dérivée covariante par rapport à la coordonnée $x^i$ d'une fonction $f$, qui s'identifie à sa dérivée ordinaire ($D_jf = \partial_jf$), peut être vue comme la i-ème composante du vecteur covariant $D_if$. Sa dérivée seconde est donc : $D_iD_jf = \partial_{ij}f - \Gamma^k_{ij}\partial_kf$, grandeur qui peut être vue comme un tenseur deux fois covariant. Intervertissant les indices $i$ et $j$, on a donc :

$$\begin{aligned}(D_iD_j - D_jD_i)f &= -(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\partial_kf \\ &\equiv -T^k_{ij}\partial_kf\end{aligned} \tag{1}$$

[2] C'est donc un exercice (fastidieux) inutile de le montrer directement en utilisant la loi de transformation des coefficients de connexion, donnée en (13.3).

[3] On reconnaît dans l'obtention de la formule (6) une version du théorème de Stokes reliant l'intégrale d'un vecteur le long d'un chemin à l'intégrale du rotationnel de ce vecteur sur une surface bordée par ce chemin : $\int_{\partial\Sigma}\vec{F}.\vec{d\ell} = \int_\Sigma \vec{\nabla}\wedge\vec{F}.d\vec{\Sigma}$, *cf* le volume *"Théorie des Champs"* du cours de L. Landau et E. Lifchitz.

On donnerons dans le Cours proprement dit une présentation plus mathématique du tenseur de Riemann. (Nous verrons entre autres que le fait d'avoir choisi ici les lignes de coordonnées pour définir le circuit fermé simplifie la présentation car leurs "crochets de Lie" sont nuls.)

Les quantités $T^k_{ij}$ mesurent l'antisymétrie de la connexion. Ce sont les composantes d'un tenseur $T$ de type $\binom{1}{2}$, appelé la *torsion*.

Les connexions des espaces-temps décrivant la gravitation en Relativité Générale sont supposées sans torsion. Nous prendrons donc dorénavant

$$T^k_{ij} = 0 \tag{2}$$

auquel cas les coefficients de connexion sont au nombre de $n^2(n+1)/2$ (soit 40 en quatre dimensions).

Calculons $D_iD_jv^k$ : $v^k$ est un vecteur, $D_jv^k$ un tenseur $\binom{1}{1}$ et $D_iD_jv^k$ est un tenseur $\binom{1}{2}$. On a donc $D_iD_jv^k = \partial_i(D_jv^k) - \Gamma^l_{ij}D_lv^k + \Gamma^k_{il}D_jv^l$, ce qui conduit à (puisque $T^k_{ij} = 0$)

$$(D_iD_j - D_jD_i)v^k = R^k{}_{mij}v^m\,. \tag{3}$$

Et, de même pour un vecteur covariant $\lambda_k$ :

$$(D_iD_j - D_jD_i)\lambda_k = -R^m_{kij}\lambda_m\,. \tag{4}$$

Ainsi le tenseur de Riemann mesure-t-il la non-commutativité de la dérivation covariante.

### SECTION 40. Déviation "géodésique" et courbure

Considérons une famille d'auto-parallèles $x^i_p(\lambda)$ où $\lambda$ est le paramètre le long des courbes et $p$ l'indice les étiquetant. Si $u^i = dx^i/d\lambda$ est le vecteur tangent aux courbes, on a : $Du^i/d\lambda(\equiv u^jD_ju^i) = 0$. Si par ailleurs $n^i = \partial x^i/\partial p$ est le vecteur mesurant l'écartement des courbes, on montre facilement que (si la torsion est nulle) : $Du^i/dp(\equiv n^jD_ju^i) = Dn^i/d\lambda(\equiv u^jD_jn^i)$. On peut ainsi calculer l'"accélération" relative de deux auto-parallèles voisines :

$$\begin{aligned} a^i \equiv \frac{D^2n^i}{d\lambda^2} = \frac{D}{d\lambda}\frac{Dn^i}{d\lambda} = \frac{D}{d\lambda}\frac{Du^i}{dp} &= u^jD_j(n^kD_ku^i) \\ &= (u^jD_jn^k)D_ku^i + u^jn^kD_{jk}u^i \\ &= (u^jD_jn^k)D_ku^i + u^jn^k(D_{kj}u^i + R^i{}_{mjk}u^m) \quad \text{en utilisant (39.3).} \end{aligned} \tag{1}$$

En utilisant maintenant le fait que les courbes sont des auto-parallèles on a :

$$\begin{aligned} 0 = \frac{D}{dp}\frac{Du^i}{d\lambda} &= n^jD_j(u^kD_ku^i) = n^ju^kD_{jk}u^i + (n^jD_ju^k)D_ku^i \\ &= (u^jD_jn^k)D_ku^i + u^jn^kD_{kj}u^i\,. \end{aligned} \tag{2}$$

On obtient ainsi l'équation souvent dite de *déviation "géodésique"* (bien qu'elle ne fasse pas intervenir de métrique) :

$$a^i = R^i{}_{mjk}u^mu^jn^k\,, \tag{3}$$

qui montre que si le tenseur de Riemann n'est pas nul les parallèles ont tendance à se "couper".

## Chapitre 9
## Variétés riemaniennes

### SECTION 41. Le tenseur métrique

Une connexion permet de définir le transport parallèle de quantités géométriques d'un point à un autre d'une variété. Afin de pouvoir également définir une *géodésique* ou courbe de longueur extrémale entre deux points, la notion de distance doit maintenant être introduite.[4]

[4] Dans les deux premières parties toutes les propriétés géométriques des espaces-temps de Newton et de Minskowski, en particulier la notion de transport parallèle, ont été *déduites* de l'existence d'une métrique (euclidienne ou minkowskienne). Nous considérons ici le cas plus général où métrique et connexion sont des structures *a priori* indépendantes.

Un *tenseur métrique*, $g$, est un champ tensoriel deux fois covariant (*i.e.* de type $\binom{0}{2}$), symétrique et non dégénéré. Dans un système de coordonnées $x^i$ ses $n(n+1)/2$ composantes $g_{ij}(x^k)$ symétriques ($g_{ij} = g_{ji}$) et inversibles ($g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$) *définissent* l'élément de longueur selon :[5]

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j\,. \tag{1}$$

Comme nous l'avons déjà vu au chapitre 3 dans la présentation des espaces euclidiens en coordonnées cartésiennes ou curvilignes, le tenseur métrique permet de définir une correspondance biunivoque entre vecteurs et 1-formes. En effet, si $v^i$ sont les composantes d'un vecteur $v$, alors $v_i \equiv g_{ij} v^j$ est une 1-forme isomorphe à $v$ (et souvent notée $v$ également). Réciproquement, si $\lambda$ est une 1-forme de composantes $\lambda_i$, alors $\lambda^i$ où $\lambda^i \equiv g^{ij}\lambda_j$ est un vecteur. De manière plus générale, à tout tenseur de type $\binom{p}{q}$ on associe ainsi des tenseurs de type $\binom{p-1}{q+1}$ ou $\binom{p+1}{q-1}$.

Enfin, une métrique définit le *produit scalaire* de deux vecteurs $v$ et $v'$ par : $\langle v, v'\rangle = g_{ij} v^i v'^j$. Dans le cas d'une métrique lorentzienne, si la *norme* $\langle v, v\rangle$ de $v$ est positive, $v$ est dit du genre espace ; si elle est négative, $v$ est du genre temps ; si elle est nulle, $v$ est dit isotrope ou du genre lumière.

### SECTION 42. Géodésiques et symboles de Christoffel

La notion de norme associée au tenseur métrique permet de définir la longueur d'une courbe $\mathcal{C}$ du genre temps (et similairement du genre espace) d'équation $x^i = x^i(\lambda)$, de vecteur tangent $u^i \equiv dx^i/d\lambda$, entre les points $p_1$ et $p_2$, par :

$$S[\mathcal{C}] = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{-g_{ij} u^i u^j} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \left( - g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

On remarque que $S$ est invariant par reparamétrisation, c.-à-d. dans le changement $\lambda \mapsto \lambda(\tau)$.

Considérons maintenant un ensemble de courbes $C_s$ indéxées par $s$, d'équations $x^i = x^i_s(\lambda)$, toutes issues de $p_1$ et aboutissant en $p_2$, et calculons la variation $\delta S$ de la longueur de ces courbes quand on varie $s$ :

$$\delta S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{2\sqrt{-g_{ij} u^i_s u^j_s}} \left( -2 g_{ij} \frac{d\delta x^i_s}{d\lambda} \frac{dx^j_s}{d\lambda} - \partial_k g_{ij} \delta x^k_s \frac{dx^i_s}{d\lambda} \frac{dx^j_s}{d\lambda} \right) d\lambda\,. \tag{2}$$

On peut, à ce stade (pas avant !), choisir la paramétrisation, par exemple $g_{ij} u^i_s u^j_s = -1$. En notant alors $\tau$ le paramètre, on a (en omettant l'indice $s$ et en se rappelant que $\delta x^i$ est nul en $\tau_1$ et $\tau_2$)

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( -g_{ij} \frac{d\delta x^i}{d\tau} u^j - \frac{1}{2} \partial_k g_{ij} \delta x^k u^i u^j \right) d\tau \\
&= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( -\frac{d}{d\tau}(g_{ij} u^j \delta x^i) + \frac{d}{d\tau}(g_{ij} u^j) \delta x^i - \frac{1}{2} \partial_k g_{ij} \delta x^k_s u^i u^j \right) d\tau \\
&= -g_{ij} u^j \delta x^i|^{\tau_2}_{\tau_1} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( \frac{d}{d\tau}(g_{ij} u^j) \delta x^i - \frac{1}{2} \partial_k g_{ij} \delta x^k_s u^i u^j \right) d\tau \\
&= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \delta x^k d\tau \left( g_{kj} \frac{du^j}{d\tau} + \partial_i g_{kj} u^i u^j - \frac{1}{2} \partial_k g_{ij} u^i u^j \right)\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

La courbe est extrémale si $\delta S = 0\ \forall\ \delta x^k$ ; l'intégrant doit donc être nul, ce qui donne l'équation *géodésique* qui la détermine :

$$\frac{du^i}{d\tau} + \left\{ {i \atop jk} \right\} u^j u^k = 0 \quad \text{avec} \quad g_{ij} u^i u^j = -1 \qquad \text{où les} \qquad \left\{ {i \atop jk} \right\} = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}) \tag{4}$$

[5] En effet, connaissant ses composantes dans les coordonnées $x^i$ on les connaît dans tout autre système *via* la loi de transformation des tenseurs 2 fois covariants, *cf* & 11

sont les *symboles de Christoffel*.

S'il existe un système de coordonnées dans lequel tous les coefficients de la métrique sont constants l'espace est euclidien (ou minkowskien) et les géodésiques sont les droites $u^i = Const.$.

## SECTION 43. Connexion de Levi-Civita

On voit ainsi que pour que la notion d'auto-parallèle définie en & 38 comme la courbe "la plus droite possible" se confonde avec celle ici définie de géodésique ou courbe "la plus courte (ou longue) possible", il faut identifier les coefficients de connexion de la dérivation covariante et les symboles de Christoffel, la connexion prenant alors le nom de *connexion de Levi-Civita* ou de *connexion riemannienne.* Métrique et connexion sont donc compatibles si

$$\Gamma^i_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\} = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}) \,. \tag{1}$$

Les symboles de Christoffel étant symétriques, la connexion de Levi-Civita l'est aussi, c.-à-d. qu'elle est sans torsion.

Il est une autre façon, équivalente et facile à démontrer, d'imposer la compatibilité d'une métrique et d'une connexion, à savoir qu'elle soit sans torsion et que :[6]

$$D_i g_{jk} = 0 \,. \tag{2}$$

Rappelons la loi de transformation des symboles de Christoffel dans un changement de coordonnées, $x^i \to x'^i$, *cf* & 13 :

$$\Gamma'^q_{pm} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} \frac{\partial x^j}{\partial x'^p} \frac{\partial x'^q}{\partial x^i} \Gamma^i_{jk} + \frac{\partial x'^q}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^p \partial x'^m} \,. \tag{3}$$

Ce ne sont pas des tenseurs mais la différence de deux symboles de Christoffel, $\delta\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \tilde\Gamma^i_{jk}$, correspondant à des métriques différentes, elle, est un tenseur une fois contravariant et deux fois covariant puisque le dernier terme de (3) s'élimine.

**Exercice : la sphère**

Soit l'élément de longueur $ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$. Vérifiez que ses symboles de Christoffel sont bien donnés par les expressions déjà utilisées en & 38.

On peut considérer l'intervalle ci-dessus comme la restriction, sur la surface $r = R$, de l'élément de longueur euclidien tri-dimensionnel $dS^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$. Il donne donc l'élément de longueur sur une sphère de rayon $R$. Une sphère se distingue d'un plan. Pour le montrer de manière *intrinsèque*, c.-à-d. sans la plonger dans un espace euclidien, plusieurs méthodes (développées par Gauss) sont possibles. En utilisant les outils présentés dans cette section, montrez que sur une sphère, et contrairement à ce qui se passe dans un plan :

- un vecteur transporté parallèlement à lui-même le long d'un circuit fermé ne retrouve pas son orientation initiale ;
- la somme des angles d'un triangle délimité par des géodésiques est supérieure à $\pi$ ;
- la circonférence $\mathcal{C}$ d'un cercle de rayon $r$ n'y est pas égale à $2\pi r$ mais à $2\pi R\sin(r/R)$ ;
- la distance $\eta$ entre deux grands cercles n'est pas proportionnelle à la distance $s$ parcourue depuis le pôle; (en utilisant l'équation de déviation géodésique : $d^2\eta/ds^2 = -\eta/R^2$.)

Tous ces écarts à la géométrie euclidienne disparaissent lorsque $R \to \infty$. Ainsi $R$ ne mesure pas seulement la courbure "extrinsèque" d'une sphère, c.-à-d. son rayon dans l'espace euclidien à trois dimensions dans lequel on peut la plonger; il mesure aussi sa courbure "intrinsèque", dite aussi de Gauss.

## SECTION 44. Repères localement inertiels

Soit $g_{ij}(x^k)$ les composantes du tenseur métrique $g$ dans le système de coordonnées $x^k$. Dans un autre système $X^l = X^l(x^k)$ les composantes de $g$ sont $f_{ij}(X^k) = (\partial x^k/\partial X^i)(\partial x^l/\partial X^j)g_{kl}$. Effectuons un développement de Taylor autour d'un point $p_0$ de coordonnées $X^k_0$ :

$$f_{ij}(X^k) = \frac{\partial x^k}{\partial X^i}\frac{\partial x^l}{\partial X^j} g_{kl|_0} + (X^m - X^m_0)\left( g_{kl}\frac{\partial^2 x^k}{\partial X^m \partial X^i}\frac{\partial x^l}{\partial X^j} + g_{kl}\frac{\partial^2 x^k}{\partial X^m \partial X^j}\frac{\partial x^l}{\partial X^i} + \frac{\partial x^k}{\partial X^i}\frac{\partial x^l}{\partial X^j}\frac{\partial g_{kl}}{\partial X^m}\right)\Bigg|_0 + \ldots$$

[6] Si on n'impose pas que la torsion soit nulle alors il existe une infinité de connexions compatibles avec la métrique. En revanche si la torsion est nulle, la connexion métrique est unique, et donnée par (1), comme l'a montré Ricci.

La question est : existe-t-il un changement de coordonnées tel que $f_{ij} = \eta_{ij} + \mathcal{O}(X^m - X_0^m)^2$ ?

La réponse est oui.

En effet, au point $p_0$ les données sont les $n(n+1)/2$ composantes $g_{kl}|_0$ de la métrique (soit 10 en quatre dimensions), les $n^2(n+1)/2 = 40$ composantes $\partial_m g_{kl}|_0$ de sa dérivée, les $[n(n+1)/2]^2 = 100$ composantes de sa dérivée seconde *etc.* Les inconnues sont les $n^2 = 16$ nombres $(\partial x^k/\partial X^i)|_0$, les $n^2(n+1)/2 = 40$ valeurs des dérivées secondes, les $n^2(n+1)(n+2)/3! = 80$ valeurs des dérivées troisièmes *etc.* Par conséquent le système $f_{ij}(X_0^k) \equiv (\partial x^k/\partial X^i)(\partial x^l/\partial X^j) g_{kl}|_0 = \eta_{ij}$, de 10 équations pour 16 inconnues, a une infinité de solutions à 6 paramètres, les 6 paramètres du groupe de Lorentz. Quant au système

$$\left( g_{kl} \frac{\partial^2 x^k}{\partial X^m \partial X^i} \frac{\partial x^l}{\partial X^j} + g_{kl} \frac{\partial^2 x^k}{\partial X^m \partial X^j} \frac{\partial x^l}{\partial X^i} + \frac{\partial x^k}{\partial X^i} \frac{\partial x^l}{\partial X^j} \frac{\partial g_{kl}}{\partial X^m} \right) \Bigg|_0 = 0$$

de 40 équations pour 40 inconnues il a, dans le cas générique, une solution unique, *cqfd.*

En revanche on ne peut pas en général annuler le terme d'ordre 2 car le système à résoudre comporte 100 équations pour 80 inconnues seulement. La différence, 20, est le nombre de composantes du tenseur de Riemann (voir l'appendice). En développant à l'ordre suivant on trouve en effet (théorème de Riemann-Cartan)

$$f_{ij}(X^k) = \eta_{ij} - \frac{1}{6}(X^m - X_0^m)(X^n - X_0^n)(R_{imjn}|_0 + R_{injm}|_0) + \dots \tag{1}$$

où $R_{imjn}|_0$ sont les composantes, dans le système de coordonnées $X^k$, du tenseur de Riemann ; quant aux termes suivants ils s'expriment en fonction des dérivées covariantes du tenseur de Riemann. En effet les composantes du tenseur de Riemann se réduisent à (en omettant l'indice 0)

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}(\partial^2_{jk} g_{il} + \partial^2_{il} g_{jk} - \partial^2_{ik} g_{jl} - \partial^2_{jl} g_{ik}) \tag{2}$$

de sorte que

$$\partial^2_{mn} g_{ij} = \frac{1}{3}(R_{imjn} + R_{injm}) \quad \text{et} \quad \Gamma^i_{jk} = -\frac{1}{3}(X^m - X_0^m)(R^i{}_{jkm} + R^i{}_{kjm})\,. \tag{3}$$

Dans ces coordonnées dites “normales” l'équation géodésique s'écrit donc

$$\frac{du^i}{d\tau} = \frac{2}{3} R^i{}_{jkm} u^j u^k (X^m - X_0^m) + \dots \tag{4}$$

On voit ainsi que, en accord avec les exigences physiques exposées au chapitre 7, on peut en tout point bâtir un système de coordonnées quasi-minkowskiennes, c.-à-d. un repère quasi-inertiel (défini aux transformations de Lorentz près). Ce n'est que si le tenseur de Riemann est nul que ce système peut être étendu à tout l'espace-temps, qui n'est alors autre que l'espace-temps plat de Minkowski.

### SECTION 45. Propriétés du tenseur de courbure

Nous donnons ici, sans démonstration générale, de très importantes propriétés du tenseur de courbure. Elles se démontrent en fait facilement lorsque la variété est riemanienne (c.-à-d. munie d'une connexion métrique) ; en effet on peut alors se placer dans un repère localement minkowskien (soit encore en “coordonnées normales”) où les symboles de Christoffel sont nuls, de sorte que le tenseur de courbure se réduit à (44.2). On voit alors sans effort que :

- $R^k{}_{lji} = -R^k{}_{lij}$ (ceci suit de la définition du tenseur de Riemann et est vrai pour toute connexion),
- $R^k{}_{lji} + R^k{}_{jil} + R^k{}_{ilj} = 0$ (*première identité de Bianchi*, vraie si la torsion est nulle),
- $D_m R^i{}_{jnp} + D_n R^i{}_{jpm} + D_p R^i{}_{jmn} = 0$ (*seconde identité de Bianchi*, vraie si la torsion est nulle).

Lorsque la connexion, symétrique, est compatible avec un tenseur métrique, le tenseur de courbure possède les propriétés supplémentaires :

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} \quad , \quad R_{ijkl} = R_{klij} \qquad \text{où} \qquad R_{ijkl} \equiv g_{ip} R^p{}_{jkl}\,. \tag{1}$$

Le tenseur de Riemann étant de type $\binom{1}{3}$ on peut par contraction en déduire des tenseurs de type $\binom{0}{2}$. A cause de l'antisymétrie métrique ci-dessus, la contraction $R^i{}_{ijk} \equiv 0$ et ne reste que le *tenseur de Ricci* $R_{ij}$, *symétrique* :

$$R_{ij} \equiv R^l{}_{ilj} = -R^l{}_{ijl} = R_{ji}\,. \tag{2}$$

La *courbure scalaire* est, elle, définie par

$$R \equiv g^{ij} R_{ij}\,. \tag{3}$$

On montre facilement, à partir des secondes identités de Bianchi et de la nullité de la dérivée covariante de la métrique, une propriété qui joue un rôle considérable en Relativité Générale :

$$D_i G^{ij} = 0 \qquad \text{où} \qquad G_{ij} \equiv R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \tag{4}$$

est le *tenseur d'Einstein.*

Enfin on peut isoler dans le tenseur de Riemann les termes qui dépendent du tenseur de Ricci et de la courbure scalaire ; le terme restant, $C^{am}{}_{sq}$ s'appelle *tenseur de Weyl.* Plus précisément, $n$ étant la dimension de la variété :

$$R^{am}{}_{sq} = C^{am}{}_{sq} + \frac{1}{n-2}\left(\delta^a_s R^m_q + \delta^m_q R^a_s - \delta^m_s R^a_q - \delta^a_q R^m_s\right) - \frac{1}{(n-1)(n-2)}\left(\delta^a_s \delta^m_q - \delta^a_q \delta^m_s\right) R. \tag{5}$$

Le tenseur de Weyl possède toutes les symétries du tenseur de Riemann et est de plus sans trace : $C^{am}{}_{aq} = 0$.[7]

# Chapitre 10

## Les équations du champ de gravitation

**Géométrie et matière**

La Relativité Restreinte géométrise les forces d'inertie en les incorporant dans la dérivée covariante associée à l'espace-temps plat de Minkowski décrit dans un repère accéléré.

Le principe d'équivalence stipule qu'inertie = gravitation.

La gravitation est par ce principe incorporée dans une dérivation covariante associée à un espace plus général que celui de Minkowski, courbe. Einstein, aidé par le mathématicien Marcel Grossmann, choisit de représenter l'espace-temps "relatif, apparent et vulgaire" par une variété riemannienne munie d'une connexion de Levi-Civita, c.-à-d. dont les propriétés géométriques, dont sa courbure, se déduisent toutes de la donnée d'une métrique.

En l'absence de toute matière il n'y a pas de champ de gravitation et l'espace-temps qui représente cet univers vide est l'espace-temps plat de Minkowski. C'est la matière qui courbe l'espace-temps. Les équations de la gravitation doivent par conséquent relier géométrie et matière, *i.e.* le tenseur de Riemann à un objet géométrique décrivant l'"inertie" ou, plus exactement, le "contenu énergétique" de la matière.

### SECTION 46. Mouvement géodésique des points matériels

En Relativité Restreinte, c.-à-d. en absence de gravitation, la ligne d'univers d'une particule libre est une droite de l'espace-temps de Minkowski, qui extrémise le temps propre, c.-à-d. la longueur, de tous les chemins possibles entre deux événements donnés. De part le principe d'équivalence le mouvement d'un point matériel dans un champ de gravitation est un mouvement "libre" mais dans un espace-temps courbé par la gravitation.[8] L'*action* choisie pour le décrire sera donc la longueur des chemins possibles entre deux événements $P_a$ et $P_b$, soit :

$$S_p = -mc^2 \int_{P_a}^{P_b} \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \equiv \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} L\, d\lambda \quad \text{avec} \quad L = -mc^2 \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}, \tag{1}$$

[7] Mentionnons ici que deux espaces de Riemann, de tenseurs métriques $\bar{g}_{ij}$ et $g_{ij}$ "conformément" reliés, c.-à-d. tels que $\bar{g}_{ij} = F(x^k)\, g_{ij}$ où $F(x^k)$ est une fonction quelconque des coordonnées, ont même tenseur de Weyl.

[8] Nous supposons ici que les "points matériels" considérés n'ont pas de rotation propre ; le mouvement des "toupies" c.-à-d. des particules dotées d'un "spin", sera étudié dans le Cours proprement dit.

où $m$ est la masse inertielle de la particule et $c$ est la vitesse de la lumière(que nous ne poserons pas égale à 1 dans cette section), où $\lambda$ est un paramètre quelconque et où les coefficients de la métrique $g_{\mu\nu}$ décrivent à la fois le champ de gravitation et le système de coordonnées $x^\mu$ . Comme on l'a vu en & 42, son extrémisation donne l'équation géodésique

$$\frac{Du^\mu}{d\tau} \equiv \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} u^\nu u^\rho = 0, \quad \text{avec} \quad u^\mu u_\mu = -c^2 \tag{2}$$

où $u^\mu = dx^\mu / d\tau$ est la quadri-vitesse du point, $\lambda = \tau$ étant son temps propre et où $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ sont les symboles de Christoffel. Cette équation géodésique est la version "covariantisée" de l'équation du mouvement en Relativité Restreinte, obtenue en remplaçant la dérivée ordinaire $d$ par la dérivée covariante $D$.

En mécanique newtonienne, et dans un repère inertiel, l'action d'une particule dans un champ de gravitation est, *cf* & 20,

$$S_{p(n)} = \int \left( -mc^2 + \frac{1}{2} m v^2 - mU \right) dt \tag{3}$$

où $U$ est le potentiel newtonien (et où la constante $-mc^2$ est ajoutée afin que $S_p$ et $S_{p(n)}$ coïncident en absence de champ et quand $c \to \infty$).

Comme on a $S_p = -mc^2 \int d\tau$ où $\tau$ est le temps propre, on a donc qu'à la limite newtonienne où $S_p = S_{p(n)}$ :

$$d\tau \sim dt \left( 1 - \frac{v^2}{2c^2} + \frac{U}{c^2} \right) \quad \text{soit} \quad ds^2 = -c^2 d\tau^2 \sim -c^2 dt^2 \left( 1 + \frac{2U}{c^2} \right) + d\vec{r}^{\,2}. \tag{4}$$

On retrouve ainsi de manière générale l'expression obtenue en & 37 de la composante $g_{00}$ de la métrique en fonction du potentiel newtonien dans la limite des champ et vitesses faibles.

La quadri-impulsion d'un ensemble de particules peut être définie comme en Relativité Restreinte par $P^\mu = \sum m u^\mu$ mais il n'est pas question qu'elle soit conservée avant et après un "choc" puisque la gravitation est une interaction de longue portée. C'est en fait le *tenseur énergie-impulsion* que nous introduisons brièvement ci-dessous qui décrira le contenu énergétique d'un système de particules dans un champ de gravitation.[9]

### SECTION 47. Equations du mouvement et tenseur énergie-impulsion des fluides

La dynamique d'un fluide, ensemble continu de particules regroupées en "éléments de fluide", décrivant phénoménologiquement ses collisions internes ainsi que son interaction avec un champ gravitationnel, est postulée être encodée dans un tenseur énergie-impulsion (symétrique), de composantes $T^{\mu\nu}$, que l'on peut toujours décomposer selon

$$T^{\mu\nu} = \epsilon\, u^\mu u^\nu + (u^\mu Q^\nu + u^\nu Q^\mu) + \Pi^{\mu\nu}\,. \tag{1}$$

Le champ de vitesse du fluide $u^\mu$ est ici normalisé à l'unité, $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$, $\epsilon(x^\mu)$ est une fonction scalaire, le champ de vecteurs $Q^\mu(x^\nu)$ est perpendiculaire à $u^\mu$ ($Q_\mu u^\mu = 0$) et le tenseur $\Pi^{\mu\nu}(x^\rho)$ peut être décomposé plus avant selon :

$$\Pi^{\mu\nu} = \pi^{\mu\nu} + p\, h^{\mu\nu} \tag{2}$$

où $h^{\mu\nu}$ est le *tenseur de projection* : $h^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu$ ($\Rightarrow h^{\mu\nu} u_\nu = 0$) ; où $p(x^\mu)$ est une fonction scalaire et $\pi^{\mu\nu}(x^\rho)$ un tenseur sans trace et transverse c.-à-d. tel que $\pi^\mu{}_\mu = 0$ et $\pi^{\mu\nu} u_\nu = 0$. On a ainsi troqué les 10 composantes de $T^{\mu\nu}$ pour les 2 scalaires $\epsilon$ et $p$, les 3 composantes indépendantes du vecteur $Q^\mu$ et les 5 composantes indépendantes du tenseur $\pi^{\mu\nu}$. Un fluide est *parfait* si $Q^\mu = 0$ et $\pi^{\mu\nu} = 0$. Son tenseur énergie-impulsion est donc :

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p) u^\mu u^\nu + p\, g^{\mu\nu}. \tag{3}$$

[9] On trouvera une présentation détaillée des tenseurs énergie-impulsion ainsi que des lois de conservation associées dans "*Relativité Restreinte et Electromagnétisme*" par N. Deruelle et J.P. Uzan, à paraître.

Comme on le voit, il se déduit de son expression en Relativité Restreinte[9] par "covariantisation", en y remplaçant la métrique de Minkowski par celle de la variété riemanienne décrivant le champ de gravitation dans lequel le fluide est plongé.

Dans l'approche phénoménologique ici adoptée l'équation du mouvement du fluide est obtenue en *postulant* que son tenseur énergie-impulsion est *conservé*, *i.e.* tel que :

$$D_\nu T^{\mu\nu} = 0 \tag{4}$$

qui est la version "covariantisée" ($\partial_\mu \to D_\mu$) de la loi de conservation dont on déduit les loi de conservation de l'énergie, impulsion, moment angulaire en Relativité restreinte. Dans le cas auquel nous nous restreindrons désormais où le fluide est parfait, cette équation se développe en

$$u^\mu u^\nu \partial_\nu(\epsilon + p) + (\epsilon + p)(u^\nu D_\nu u^\mu + u^\mu D_\nu u^\nu) + \partial^\mu p = 0\,. \tag{5}$$

En la contractant avec $u^\mu$ on obtient d'abord (puisque $u^\mu u_\mu = -1$)

$$D_\nu(\epsilon\, u^\nu) + p\, D_\nu u^\nu = 0\,, \tag{6}$$

ce qui permet de réécrire (5) selon

$$(\epsilon + p)u^\nu D_\nu u^\mu + u^\mu u^\nu \partial_\nu p + \partial^\mu p = 0\,. \tag{7}$$

Cette équation ne comporte que 3 composantes indépendantes car elle est orthogonale à $u^\mu$ ; ainsi l'équation (5) est-elle équivalente à l'ensemble des équations (6) *et* (7).

L'équation (7) est l'*équation d'Euler relativiste* et (6) est l'équation dite de continuité. Par extension de la terminologie en usage en physique newtonienne on appelle donc $\epsilon$ la *densité d'énergie* et $p$ la *pression*.

Les équations (6-7) sont un jeu de 4 équations pour 5 inconnues, à savoir $\epsilon$, $p$ et les 3 composantes du vecteur $u^\mu$ (contraint par $u^\mu u_\mu = -1$). Pour déterminer complètement le mouvement du fluide il faut donc se donner une équation supplémentaire, l'*équation d'état*, reliant pression et densité.

**Tenseur énergie-impulsion de particules**

Le tenseur énergie-impulsion qui décrit un ensemble de particules n'interagissant que gravitationnellement est la "covariantisation" de celui qui s'impose en Relativité Restreinte, à savoir[9]

$$T^{\mu\nu} = \epsilon\, u^\mu u^\nu \qquad \text{avec} \qquad \epsilon(x^\mu) \equiv \sum m \int \delta_4(x^\rho - x^\rho(\tau)) \tfrac{d\tau}{\sqrt{-g}}\,. \tag{8}$$

où $x^\mu(\tau)$ sont leurs lignes d'univers et $u^\mu(x^\rho)$ leur champ de vitesse (qui s'identifie à leurs quadri-vitesses $u^\mu(\tau)$ du fait de la présence des distributions de Dirac $\delta_4(x^\mu) = \delta(t)\delta_3(x^i)$ telles que $\int d^4x\, \delta_4(x^\mu) = 1$). Quant au facteur $\sqrt{-g}$ il garantit, puisque l'élément de 3-volume est $\sqrt{-g}|_t d^3x$ *cf* & 10, que $\int T^{\mu 0}\sqrt{-g}\, d^3x = \sum m u^\mu$ est bien un vecteur.

On voit ainsi, *cf* Eq. (3), que la pression d'un fluide de particules est nulle (ce qui est normal puisque, étant "libres" dans le champ gravitationnel, elles ne subissent pas de chocs). Quant aux équations du mouvement (6-7) déduites de la conservation de $T^{\mu\nu}$ elles se réduisent à

$$D_\nu(\epsilon\, u^\nu) = 0 \qquad \text{et} \qquad u^\nu D_\nu u^\mu = 0\,.$$

En y reportant l'expression (8) de $\epsilon$ la première exprime la conservation de la masse ($\Sigma m = Const.$) et la seconde nous redit que les particules suivent des géodésiques.

## SECTION 48. Les équations d'Einstein

L'objet tensoriel qui, en Relativité Restreinte, décrit complètement la matière est son tenseur énergie-impulsion, $T_{\mu\nu}$, deux fois covariant. Ses composantes dans un repère accéléré se déduisent de leurs expressions dans un repère inertiel par la transformation $\eta_{\mu\nu} \to \ell_{\mu\nu}$ et $\partial_\mu \to \tilde{D}_\mu$ où $\ell_{\mu\nu}$ sont les composantes de la métrique de Minkowski dans les coordonnées $x^\mu$ et $\tilde{D}_\mu$ la dérivée covariante associée. En Relativité Générale, la métrique $g_{\mu\nu}$ et la dérivée covariante de Levi-Civita associée $D_\mu$ caractérisent à la fois le repère choisi et le champ de gravitation, *i.e.* la courbure de l'espace-temps. On est donc amené à décrire la matière par un tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ déduit de son expression en Relativité Restreinte par "covariantisation", *i.e.* par le remplacement $\ell_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$ et $\tilde{D}_\mu \to D_\mu$, qui respecte l'exigence du principe de relativité locale.

Un tenseur géométrique simple (*i.e.* linéaire en la courbure) de même type que le tenseur énergie-impulsion (*i.e.* deux fois covariant) est $R_{\mu\nu} + \alpha\, g_{\mu\nu} R$, où $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$, contraction du tenseur de Riemann $R^\sigma{}_{\mu\rho\nu}$, est le tenseur de Ricci, où $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ est la courbure scalaire et où $\alpha$ est une constante *a priori* arbitraire. Après divers tâtonnements (en particulier $\alpha = 0$ en 1914 ou $\alpha = -1/4$ en 1919), les équations du champ de gravitation proposées par Einstein en novembre 1915 furent

$$G_{\mu\nu} = \kappa\, T_{\mu\nu}\,. \tag{1}$$

$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ est le tenseur d'Einstein (nous verrons les raisons du choix $\alpha = -1/2$ plus bas, & 49 et & 52 ; remarquons seulement ici qu'en dehors de la matière le tenseur d'Einstein est nul, ce qui n'implique *pas* que le tenseur de Riemann, lui, soit nul et que donc l'espace-temps est plat : comme en gravitation newtonienne et en électromagnétisme, le champ de gravitation est présent en dehors des sources); quant à la *constante d'Einstein* $\kappa$ elle doit être reliée à la constante de Newton.

A la limite newtonienne et en repère quasi-inertiel : $-g_{00} \sim 1 + 2U/c^2$, où $U$ est le potentiel newtonien (voir & 37 et & 46). Quant aux autres composantes de la métrique, elles sont du même ordre en $1/c$ au moins. Les symboles de Christoffel $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ sont donc d'ordre $1/c^2$, et leurs dérivées temporelles d'ordre $1/c^3$. Par conséquent on a au plus bas ordre :

$$R_{00} \sim \partial_i \Gamma^i_{00} \sim -\frac{1}{2}\partial_i\big(g^{ij}\partial_j g_{00}\big) \sim \frac{1}{c^2}\partial^i\left(\frac{\partial U}{\partial x^i}\right) \sim \frac{1}{c^2}\Delta U. \tag{2}$$

Le tenseur énergie-impulsion d'un fluide se réduit quant à lui à : $T^{00} \sim \varrho c^2$ où $\varrho$ est la densité propre de masse, *cf* & 47. Ce sont là les seuls termes des tenseurs de Ricci et d'énergie-impulsion que nous ayons à calculer si l'on réécrit les équations d'Einstein sous la forme : $R_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T)$. Elles redonnent alors, à la limite des champs et vitesses faibles, l'équation de Poisson : $\Delta U = 4\pi G \varrho$ si

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \tag{3}$$

où, rappelons-le, $c$ la vitesse de la lumière et $G$ est la constante de Newton, *cf* & 18.[10]

**SECTION 49. Identité de Bianchi, invariance de jauge et contraintes**

Les équations d'Einstein (48.1) forment un ensemble de dix équations du second ordre aux dérivées partielles, non linéaires. Le système de coordonnées peut être choisi arbitrairement. En transformant les quatre $x^\mu$ on peut ainsi assigner, localement du moins, n'importe quelle valeur à quatre composantes du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ (par exemple $g_{00} = -1$ et $g_{0i} = 0$ ; le système de coordonnées est alors dit *synchrone*). Le tenseur métrique a donc six composantes indépendantes. Quant à la matière, *e.g.* un fluide parfait, elle est décrite par sa quadri-vitesse $u^\mu$ sujette à $u_\mu u^\mu = -1$ et par sa densité d'énergie (ou pression), soit quatre grandeurs. Ainsi nous avons dix équations pour dix inconnues en tout.

En vertu des identités de Bianchi (45.4) ($D_\mu G^{\mu\nu} \equiv 0$, inconnue d'Einstein et de Hilbert en 1915...) et comme $D_\mu g_{\nu\rho} \equiv 0$, le tenseur $T^{\mu\nu}$ *doit* être conservé, c.-à-d. à divergence nulle : $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Les équations du mouvement de la matière qui en découlent (*e.g.* les équations d'Euler, voir & 47) sont par conséquent incluses dans les équations d'Einstein. En cela la Relativité Générale se démarque de l'électromagnétisme par exemple où l'équation de Lorentz qui détermine le mouvement des charges n'est pas incluse dans les équations de Maxwell. En dehors des sources les équations d'Einstein du vide sont $G_{\mu\nu} = 0$. Dans ce cas il n'y a que les six $g_{\mu\nu}$ indépendants à déterminer ; mais il n'y a alors que six équations d'Einstein indépendantes, en vertu toujours des identités de Bianchi.

---

[10] $G = 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$, et, dans le système où $c = 1$, : $G = 2.477 \times 10^{-38}\mathrm{s\,kg}^{-1}$. Nous utiliserons souvent les *unités géométriques* où $c = 1$, $G = 1$ dans lequel les masses s'expriment en mètres ou secondes ; ainsi : $1M_\odot = 2 \times 10^{30}$kg= 1.5km= 6$\mu$s ; $M_\oplus = 6 \times 10^{24}$kg= 0.45cm.

Etudions de façon un tout petit peu plus précise ce lien entre libre choix du système de coordonnées et identités de Bianchi.[11]

Si l'on note $C_{\mu\nu}$ toute combinaison des coefficients $g_{\mu\nu}$ de la métrique et de leurs dérivées premières $\partial_\rho g_{\mu\nu}$, appelée donnée de Cauchy, c'est alors un exercice facile de trouver que (avec $i = 1, 2, 3$)

$$R_{ij} = -\frac{1}{2} g^{00} \partial_{00} g_{ij} + C_{ij} \quad , \quad R_{i0} = +\frac{1}{2} g^{j0} \partial_{00} g_{ij} + C_{i0} \quad , \quad R_{00} = -\frac{1}{2} g^{ij} \partial_{00} g_{ij} + C_{00}. \tag{1}$$

On voit que ni $\partial_{00} g_{00}$ ni $\partial_{00} g_{0i}$ n'apparaissent, et que quatre des dix composantes du tenseur d'Einstein, à savoir : $G^0_i = g^{0j} R_{ij} + g^{00} R_{i0}$ et $G^0_0 = \left(g^{00} R_{00} - g^{ij} R_{ij}\right)/2$ ne dépendent que des donnée de Cauchy $C_{\mu\nu}$. On peut donc se donner arbitrairement $g_{00}$ et $g_{0i}$, mais il existe quatre équations de contraintes sur les $C_{\mu\nu}$. Ainsi le problème de la résolution des équations d'Einstein se scinde en deux : trouver des données de Cauchy $C_{\mu\nu}$ qui satisfassent aux contraintes $G^0_\mu = \kappa T^0_\mu$, puis résoudre les équations d'évolution $G^i_j = \kappa T^i_j$. On peut montrer ensuite, à l'aide des identités de Bianchi, que si les contraintes sont satisfaites initialement, elles le sont toujours. Ainsi donc les équations d'Einstein, comme voulu, ne contraignent pas le choix du système de coordonnées.

Ce lien entre choix du système de coordonnées et identités de Bianchi devient transparent lorsqu'on *linéarise* les équations d'Einstein. Il devient alors similaire au lien entre *invariance de jauge* et *contraintes* en électromagnétisme, comme nous le verrons au chapitre xx.

**La "constante cosmologique"**

Etant donné qu'en Relativité Générale l'espace-temps, riemannien, est doté d'une connexion de Levi-Civita, la dérivée covariante de la métrique est nulle, $D_\mu g_{\nu\rho} \equiv 0$, *cf* & 43. On peut donc généraliser les équations d'Einstein (48.1) en

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa \, T_{\mu\nu}$$

qui incluent elles-aussi la loi du mouvement de la matière, $D_\mu T^\mu_\nu = 0$, si $\Lambda$ est une constante.

Cette constante est de dimension $L^{-2}$. On doit donc avoir $\Lambda \ll \ell^{-2}$ où $\ell$ est la longueur caractéristique sur laquelle, à l'approximation newtonienne, le potentiel gravitationnel du système considéré varie, ceci afin de retrouver la loi de Poisson, *cf* (48.2-3)

$$\Delta U = 4\pi G \varrho - \Lambda \approx 4\pi G \varrho \, .$$

Cette constante ne jouera donc de rôle que dans l'étude des systèmes gravitationnels de taille très supérieure aux systèmes stellaires voire galactiques, d'où son nom de *constante cosmologique*.

*

[11] Pour un exposé approfondi sur la structure des équations d'Einstein, voir *"General Relativity and the Einstein Equations"* par Y. Choquet-Bruhat, O.U.P. (2009)

Plan du Cours, septembre-décembre 2012

**RELATIVITE GENERALE master 2 ENS, 2012-2013**

(Cours: Nathalie Deruelle ; TD/approfondissements: Philippe Grandclément)

*Mercredi 12 septembre 14h-18h* **: Cours 1**
Les équations d'Einstein de la Relativité Générale

*Mercredi 19 septembre 14h-18h* **: TD/appro 1**
Symétries d'espace-temps

*Mercredi 26 septembre 14h-18h* **: TD/appro 2**
Trajectoires d'espace-temps

*Mercredi 3 octobre 14h-18h* **: Cours 2**
Trous noirs I

*Mercredi 10 octobre* **: pas de cours**

*Mercredi 17 octobre 14h-18h* **: Cours 3**
Trous noirs II

*Mercredi 24 octobre 14h-18h* **: TD/appro 3**
Ondes gravitationnelles

*Mercredi 31 octobre* **: Vacances de Toussaint**

*Mercredi 7 novembre 14h-18h* **: TD/appro 4**
Formalisme 3+1

*Mercredi 14 novembre 14h-18h* **: Cours 4**
Structure des équations d'Einstein

*Mercredi 21 novembre 14h-18h* **: Cours 5**
Les tests de la Relativité Générale

*Mercredi 28 novembre 14h-18h* **: TD/appro5**
Trous noirs binaires et relativité numérique

*Mercredi 5 décembre 14h-18h* **: Cours 6**
Cosmologie

*Mercredi 12 décembre 14h-18h* **: Cours 7**
Au-delà de la Relativité Générale

**Vacances de Noël**

*Mercredi 2 janvier 2013 14h-18h* : **Examen**