KALKULUS 1

Disusun Oleh:
Dr. Yoyok Dwi Setyo Pambudi, ST, MT

UNPAM PRESS
Lembaga Penerbit & Publikasi
Jl. Surya Kencana No. 1 Pamulang
Gd. A, Ruang 211 Universitas Pamulang
Tangerang Selatan - Banten

KALKULUS 1

Penulis:
Yoyok Dwi Setyo Pambudi

ISBN: 978-602-5867-49-1

Editor:
Seflahir Dinata

Penyunting:
Syaiful Bakhri, ST, M.Eng.Sc., Ph.D

Desain Sampul:
Ubaid Al Faruq

Tata Letak
Aden

Penerbit :
UNPAM PRESS

Redaksi :
JL. Surya Kencana No. 1
Pamulang – Tangerang Selatan
Telp. 021 7412566
Fax. 021 74709855
Email: unpampress@unpam.ac.id

Cetakan pertama, 15 Agustus 2019

LEMBAR IDENTITAS ARSIP MODUL

Data Publikasi Unpam Press
| Lembaga Pengembangan Pendidikan dan Pembelajaran Universitas Pamulang

Gedung A. R. 212 Kampus 1 Universitas Pamulang
Jalan Surya Kencana Nomor 1. Pamulang Barat, Tangerang Selatan, Banten.
Website: www.unpam.ac.id | email: unpampress@unpam.ac.id

Kalkulus 1 / Yoyok Dwi Setyo Pambudi – 1st ed.

ISBN 978-602-5867-49-1

1. Kalkulus I. Yoyok Dwi Setyo Pambudi

M041-15082019-01

Ketua Unpam Press: Sewaka
Koordinator Editorial: Aeng Muhidin, Ali Madinsyah, Ubaid Al Faruq
Editor: Seflahir Dinata
Koordinator Bidang Hak Cipta: Susanto
Koordinator Produksi: Pranoto
Koordinator Publikasi dan Dokumentasi: Ubaid Al Faruq
Desain Cover: Ubaid Al Faruq
Tata Letak: Aden

Cetakan pertama, 15 Agustus 2019

KALKULUS 1

IDENTITAS MATA KULIAH

Fakultas	:	Teknik
Mata Kuliah/Kode	:	Kalkulus 1 / TEK0013
Jumlah SKS	:	3
Prasyarat	:	-
Deskripsi Mata Kuliah	:	Matakuliah Kalkulus 1 merupakan matakuliah Wajib fakultas teknik yang membahas tentang jenis bilangan riil, Cartesius, Persamaan dan pertidaksamaan, Sistem himpunan, Fungsi eksponen dan logaritma, persamaan garis lurus, persamaan lingkaran, fungsi dan grafik, invers fungsi, limit, turunan dan aplikasi turunan.
Capaian Pembelajaran	:	Setelah menyelesaiakn mata kuliah ini mahasiswa mampu mengaplikasikan turunan pada bidang teknik dengan tepat.
Penyusun	:	Dr. Yoyok Dwi Setyo Pambudi, S.T., M.T.

Ketua Program Studi Teknik Elektro UNPAM	Ketua Tim Penyusun
Syaiful Bakhri, ST,M.Eng.Sc.Ph.D NIDN. 0421127402	Dr. Yoyok Dwi Setyo Pambudi, ST, MT NIDN. 0422047304

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah puji syukur kami panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah Nya sehingga penulisan buku ajar Kalkulus 1 untuk dapat diselesaikan dengan baik.

Seperti diketahui bahwa matematika adalah alat yang penting bagi insan teknik dan fisika dimana digunakan sejak awal studinya maupun saat mereka bekerja di lingkungan masing masing. Sehingga mahasiswa akan mendapatkan kemampuan untuk mengerti dan memahami materi bidang kalkulus dan menggunakannya untuk memecahkan solusi pada bidang keteknikan.

Buku ajar Kalkulus 1 ini dibuat sebagai bahan kuliah di Teknik Elektro strata 1 pada program studi Teknik Elektro Universitas Pamulang. Buku ini disusun berdasarkan Rencana pembelajaran Semester Teknik Elektro Universitas Pamulang, dimana terdiri dari 18 bab yang dengan jumlah pertemuan kelas 3 SKS mata kuliah Kalkulus 1.

Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada pihak pihak yang telah membantu dalam penyelesaian bahan ajar ini. Buku ini masih jauh dari sempurna, oleh sebab itu kami menampung kritik dan saran yang dapat digunakan untuk perbaikan selanjutnya.

Tangerang Selatan, 15 Agustus 2019
Penyusun

Dr. Yoyok Dwi Setyo Pambudi, ST, MT
NIDN. 0422047304

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

PERTEMUAN 1

SISTEM BILANGAN RIIL

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu:

1. Menguasai materi Sistem Bilangan Riil dalam matematika dan kegunaannya.
2. Mampu menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan dengan sistem Bilangan Riil.

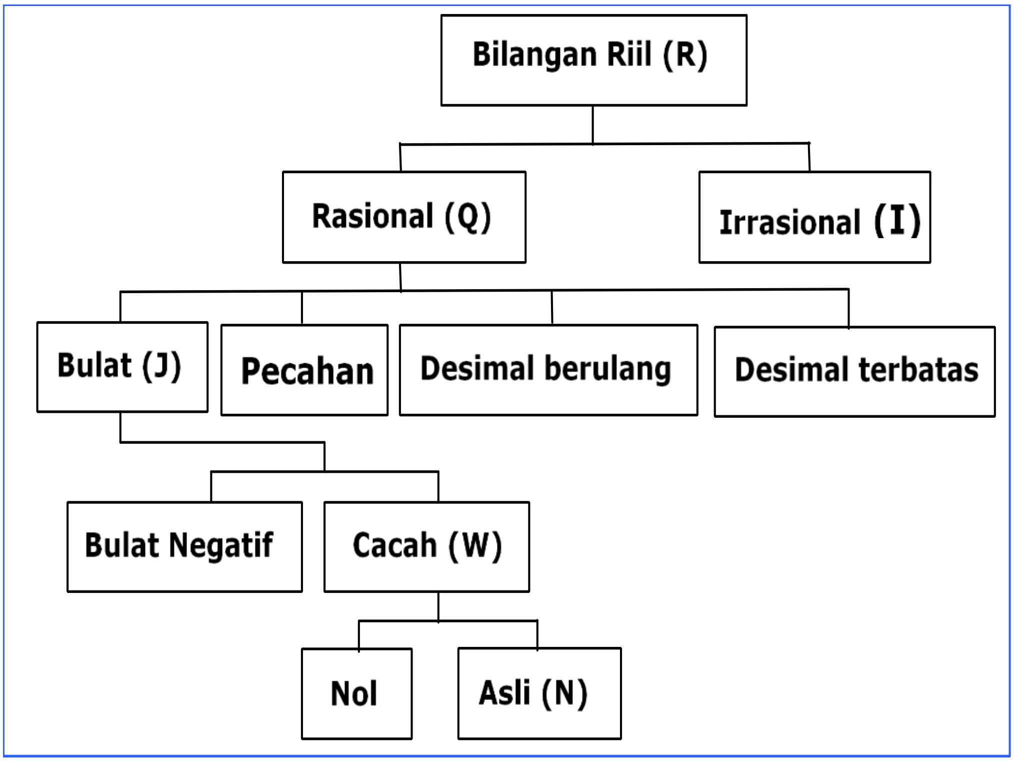
B. URAIAN MATERI

1. Sistem bilangan riil

Dalam matematika, bilangan riil adalah nilai kuantitas kontinu yang dapat dinyatakana dalam garis bilangan garis riil atau nyata. Bilangan riil dapat dianggap sebagai titik pada garis panjang yang tak terbatas yang disebut garis angka atau garis nyata, di mana poin yang sesuai dengan bilangan bulat sama-sama spasi. Setiap nomor riil dapat ditentukan oleh representasi desimal mungkin tak terbatas, seperti 7,538, di mana setiap digit berturut-turut diukur dalam unit sepersepuluh ukuran yang sebelumnya.. René Descartes, pada abad ke-17 menerangkan sifat nyata dalam bilangan untuk membuat perbedaa antara akar nyata dan imajiner dari polinomial. Bilangan riil biasa digunakan untuk mengukur jarak, untuk mengukur jumlah seperti waktu, massa, energi, kecepatan, dan banyak lagi.

Bilangan riil termasuk semua bilangan rasional, seperti bilangan bulat -5 dan pecahan 4/3, dan semua Bilangan irasional, seperti $\sqrt{2}$ (1,41421356..., akar kuadrat dari 2, bilangan aljabar irasional). Termasuk dalam irasional adalah bilangan Transendental, seperti π (3,14159265...), bilangan natural atau euler dengan notasi e (2,71828…)

Biasanya bilangan riil biasanyak dinyatakan dengan notasi R. Dalam kalkulus, bilangan riil sering digunakan pada operasi pengurangan dan penjumlahan, perkalian dan pembagian. Misal a dan b bilangan riil maka operasinya adalah a+b, a-b, a x b, dan a/b.



Gambar 1. 1. Jenis Bilangan Riil

Jenis jenis bilangan ril dalam matematika dapat ditunjukkkan pada Gambar 1.1 Dimana bilangan riil merupakan induk dari bilangan bilangan matematika tersebut seperti dijelaskan sebagai berikut:

Himpunan bilangan asli (N)

N = { 1, 2, 3, …. }

Himpunan bilangan cacah (W)

W = {0, 1, 2, 3, … }

Himpunan bilangan bulat (J)

J = {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, … }

Himpunan bilangan rasional adalah himpunan bilangan yang mempunyai bentuk p/q atau bilangan yang dapat ditulis dalam bentuk a/b, dimana a dan b adalah anggota bilangan bulat dan b ≠ 0

Contoh

Untuk bahwa bilangan-bilangan berikut ini, buktikan apakah temsuk bilangan rasional atau bukan?

a. bilangan 5
b. bilangan 3,4
c. bilangan 0,33333…
d. bilangan 2,121212…

Jawab

a. bilangan 5 dapat ditulis dalam bentuk a/b yaitu : 5/1 atau 10/2 atau 15/3 dan seterusnya.
b. bilangan 3,4 dapat ditulis dalam bentuk 34/10 atau 340/100 dan seterusnya
c. bilangan 0,33333… dapat ditulis dalam bentuk 1/3 dimana 1 dan 3 adalah bilangan ril
d. bilangan 2,121212 ….untuk merubah dalam bentuk a/b maka digunakan cara berikut:

$$x = 2{,}121212\,\ldots$$

$$100x = 212{,}1212\,\ldots$$

$$100x - x = 210$$

$$99x = 210$$

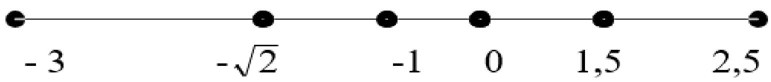
sehingga

$$x = 210/99$$

Sehingga bilangan tersebut adalah bilangan rasional

2. Garis bilangan riil

Garis bilangan riil adalah tempat titik titik bilangan dalam sebuah mistar nyata yang dimulai dari minus tak hingga (-~)` sampai tak hingga (~). Bilangan riil dapat diempatkan pada garis bilangan secara terurut seperti diperlihatkam pada Gambar 1.2.



Gambar 1. 2. Bilangan riil pada garis bilangan

Untuk menggambarkan keduudkan bilangan riil langkah pertama adalah gambarkan garis horizontal dan tentukan titik nol. Selanjutnya ditentukan titik-titik tempat kedudukan bilangan riil positif bulat disebelah kanan titik nol dan bilangan negatif pada sebelah kiri angka nol. Kemudian urutkan sesuai dengan besar kecilnya bilangan tersebut dengan jarak yang sesuai dan seterusnya.

3. Hukum-hukum bilangan riil

Untuk melakukan operasi matematika berupa penjumlahan,pengurangan, perkalian dan pembagian pada bilangan riil maka perlu di perhatikan hukum-hukum seperti yang dituliskan berikut ini :

Jika a dan b adalah bilangan-bilangan riil maka berlaku :

a.	a + b	hukum penjumlahan
b.	a . b	hukum perkalian
c.	a + b = b + a	hukum komutatif penjumlahan
d.	a . b = b .a	hukum komutatif perkalian
e.	a + 0 = 0 + a = a	hukum penjumlahan nol
f.	a . 0 = 0 . a = 0	hukum perkalian nol
g.	a . 1 = 1 . a = a	hukum perkalian satu
h.	a + (- a) = -a + a	hukum invers penjumlahan
i.	a . (1/a) = 1	hukum invers perkalian
j.	(a + b) + c = a + (b + c)	hukum asosiatif penjumlahan
k.	(ab) c = a (bc)	hukum asosiatif perkalian
l.	a (b + c) = ab + ac	hukum distributif

dimana a, b dan c merupakan bilangan-bilangan riil

4. Bilangan kompleks

Bilangan kompleks adalah bilangan yang terdiri dari unsur bilangan riil dan imajiner. Bentuk umum bilangan kompleks adalah $z = a + bi$

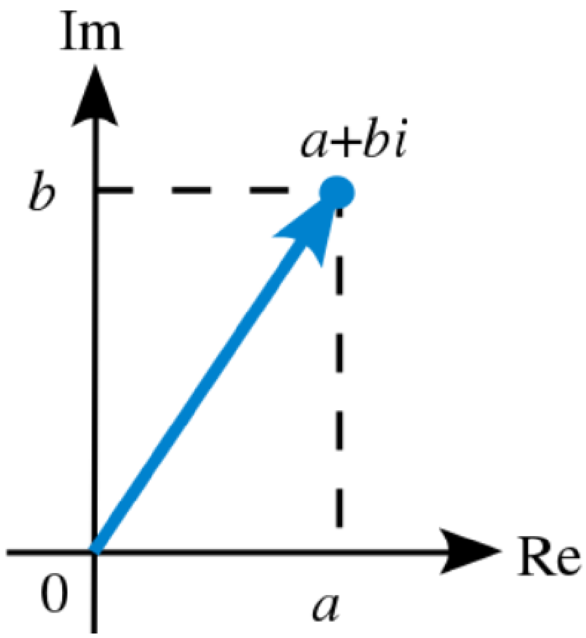
Dimana a adalah komponen nyata bagian riil dan ditulis sebagai Re(z) dan b adalah bagian imajiner dan ditulis sebagai Im(z). Bilangan a dan b adalah bilangan-bilangan riil sedangkan i adalah bilangan imajiner yang besarnya adalah $\sqrt{-1}$. .

Karena $\sqrt{-1}$ = i, maka : $i^2 = -1$

Dari keterangan diatas penulisan bilangan imajiner seperti $\sqrt{-2}$ dapat ditulis

$$\sqrt{-2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{2} \cdot i$$

dan seterusnya.



Gambar 1.3. Grafik bilangan kompleks dalam bentuk a+bi

Garis bilangan riil, Re" adalah sumbu riil dan "Im" adalah sumbu imajiner

5. Hukum – hukum bilangan kompleks

Misalkan terdapat dua bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$, maka berlaku hukum hukum berikut:

a. $z_1 = z_2$ maka $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$ hukum kesamaan

b. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ hukum penjumlahan

c. $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ hukum pengurangan

d. $z_1 . z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ hukum perkalian

6. Konjugat

Konjugat dari suatau bilangan kompleks dapat dijelaskan sebagai berikut. Bila terdapat suatu bilangan kompleks $z = x + iy$, maka konjugat bilangan kompleks tersebut adalah $z = x – iy$. Jika bilangan kompleks berbentuk $z = x – iy$, maka konjugatnya adalah $z = x + iy$.

Bila di perhatikan pada kedua bilangan kompleks diatas dengan konjugatnya maka perbedaannya terletak pada komponen imajinernya. Jika komponen imajiner pada suatu bilangan kompleks adalah +iy maka komponen imajiner pada konjugatnya adalah –iy. Demikian juga sebaliknya Jika komponen imajiner pada bilangan kompleks adalah –iy, maka komponen imajiner pada konjugatnya adalah +iy, sedangkan komponen riil pada bilangan kompleks maupun pada konjugatnya adalah sama. Konjugat pada bilangan kompleks juga sering ditulis dalam bentuk $\bar{z}$ atau dibaca **z bar**.

Contoh :

Bilangan komplek A= 3 + 4i , maka konjugat bilangan tersebut adalah

$$\bar{A} = 3 - 4i$$

Bilangan komplek B= 12 - 5i , maka konjugat bilangan tersebut adalah

$$\bar{B} = 12 + 4i$$

7. Operasi Aritmetika bilangan kompleks

Operasi aritmetika pada bilangan komplek meliputi operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Untuk memahami nya maka diberikan contoh contoh sebagai berikut:

a. (2 + 3 i) + (5 – 4i) = (2 + 5) + (3 – 4)i = 7 – i
b. (8 + 4 i) – (3 – 4i) = (8 – 3) + (4 – (– 4)i) = 5 + 8i
c. ((2 + 3 i) + (5 – 4i) = (2 + 5) + (3i – 4i) = 7 – i

(2 + 3 i) + (5 – 4i) = (2 + 5) + (3i – 4i) = 7 – i / (1 + 2 i)
= ((2 + 3 i) * (1 – 2 i)) / ((1 + 2 i) * (1 – 2 i))
= ((2*1 + 3*2) + (-2*2 + 3*1) i) / (1^2 + 2^2)
= (8 – i) / 5

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i$

8. Perkalian bilangan kompleks dengan konjugatnya

Perkalian antara bilangan kompleks dengan konjugatnya dapat dijelaskan sebagai berikut : Jika terdapat suatu bilangan kompleks $z = a + bi$ maka konjugat bilangan tersebut adalah nya adalah $\bar{z} = a - bi$. Jadi perkalian bilangan kompleks dengan konjugatnya adalah :

$z * \bar{z} = (a + bi)(a - bi)$

$= a^2 - abi + bai - b^2 i^2$

$= a^2 + b^2$

Dari hasil perkalian tersebut diatas, dapat di simpulkan bahwa perkalian bilangan kompleks dengan konjugatnya menghasilkan bilangan riil.

Contoh :

Diketahui bilangan g = 3 + 4i, Carilah perkalian bilangan kompleks tersebut dengan konjugatnya :

Jawab:

$g = 3 + 4i$

Konjugatnya: $\bar{g} = 3 - 4i$

$g * \bar{g} = (3 + 4i)(3 - 4i)$

$= 3^2 - 3 \cdot 4i + 4 \cdot 3i - 4^2 i^2$

$= 3^2 + 4$

$= 25$

9. Pembagian dua buah bilangan kompleks

Untuk melakukan operasi pembagian dua buah bilangan kompleks, maka pertama dilakukan perkalian pembilang dan penyebutnya (dalam hal ini z_1 dan z_2) dengan konjugat z_2. Sehingga didapat :

((a + b i) * (c – d i)) / ((c + d i)*(c-d i))

= ((a + b i)*(c – d i)) / (c^2 + d^2)

= ((a*c + b * d) + (– a*d + b*c) i) / (c^2 + d^2)

(5 + 4 i) / (1 + 2 i)

= ((5 + 4 i) * (1 – 2 i)) / ((1 + 2 i) * (1 – 2 i))

= ((5*1 + 4*2) + (-5*2 + 4*1) i) / (1^2 + 2^2)

= (13 – 6i) / 5

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

1. Diketahui : -10, 3/2, 7, 0, -12 , 4/9, π, e , $\sqrt{10}$, $\sqrt{2{,}333\ldots}$. Dari bilangan tersebut diatas, tentukan jenis jenis bilangan-bilangan tersebut serta gambarkan masing masing pada garis bilangan.

2. 3 + -4 x 2 -7 =
3. -24 : 2 x 3+-5 =
4. x = 0,212212212…

   Apakah x merupakan bilangan rasional? Jika ya nyatakan x dalam p/q ; (p,q = bilangan bulat)
5. Selesaikan soal-soal berikut :
   a. (4 + 5i) + (3 – 7i)
   b. (10 – 2i) + (-3 + 4i)
   c. (- 6 + 3i) – (6 - 5i)
   d. (5 + 4i)(7 + 3i)

6. Mang Udin melakukan pengukuran instrumen listrik dan memperoleh angka 1.5 V, 2 A pada kanal A. Pada kanal B diperoleh gelombang dgn amplitudo -100 V sd 100 V dengan frekuensi 50 Hz. Pada kanal C diperoleh tegangan 45 - 20i V. Pada kanal D diperoleh 11 - 3i V.
   a. identifikasi kan jenis jenis bilangan pada soal cerita diatas
   b. Kanal C + Kanal D berapa tegangannya.

7. Selesaikan soal bilangan komplek berikut ini :
   a. (NIM + 3 i) + (5 – NIMi) = ..i
   b. (8 + NIMi) – (NIM – 4i) = (8 – 3) + (4 – (– 4)i) = 5 + 8i

8. Selesaikan operasi bilangan komplek berikut ini:
   a. (NIM + 3 i) + (5 – NIMi) = ..i
   b. (8 + NIMi) – (NIM – 4i) = (8 – 3) + (4 – (– 4)i) = 5 + 8i

9. Diketahui bilangan g = 3 + 4i, Carilah perkalian bilangan kompleks tersebut dengan konjugatnya :

10. Berapakah hasil dari
    a. 3 + 4i / (9-5i)
    b. (NIM + 3 i) / (5 – NIMi)
    c. 3 + 4i * (9-5i)
    d. (NIM + 3 i) * (5 – NIMi)

D. DAFTAR PUSTAKA

Purcel. Edwin J.Varberg; Dale; Kalkulus dan Geometri Analitis, Jilid I, Edisi ke.5, Penerjemah Drs. I Nyoman Susila, M.Sc. Jakarta, Erlanga. 1995

Georhe B.Thomas Jr.; Calculus and Analytic Geometry; 4th edition; Addison Wesly; Publishing Company, Reading Massachussets printing, 1975

Thomas - Calculus 11e with Differential Equations HQ

Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide

PERTEMUAN 2
SISTEM KOORDINAT CARTESIUS

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu:

1. Menguasai materi Sistem koordinat cartesius dalam matematika dan kegunaannya.
2. Mampu menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan dengan Sistem koordinat cartesius minimal 80% benar.

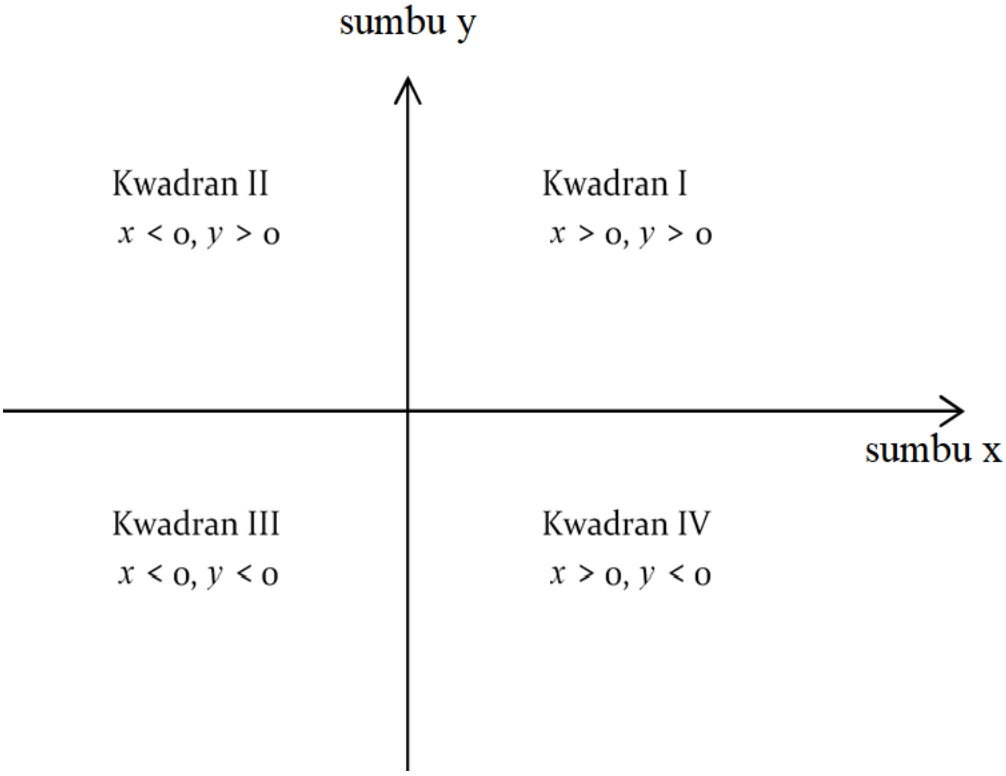
B. URAIAN MATERI

1. Koordinat Cartesius

Koordinat Kartesius adalah sistem koordinat yang di bentuk oleh 2 garis mendatar dan vertikal pada yang saling tegak lurus. Garis mendatar disebut sumbu x dan garis vertikal disebut sumbu y.…

…Untuk menggambar koordinat katesius terlebihdigunakan dua garis koordinat tegak lurus yang berpotongan pada titik 0 masing-masing garis. Garis-garis ini disebut sumbu koordinat dalam suatu bidang. Pada sumbu x horizontal, angka dilambangkan dengan x dan naik ke kanan. Pada sumbu y vertikal, angka dilambangkan oleh y dan naik ke atas. Jadi "ke atas" dan "ke kanan" adalah arah positif, sedangkan "ke bawah" dan "ke kiri" dianggap negatif.

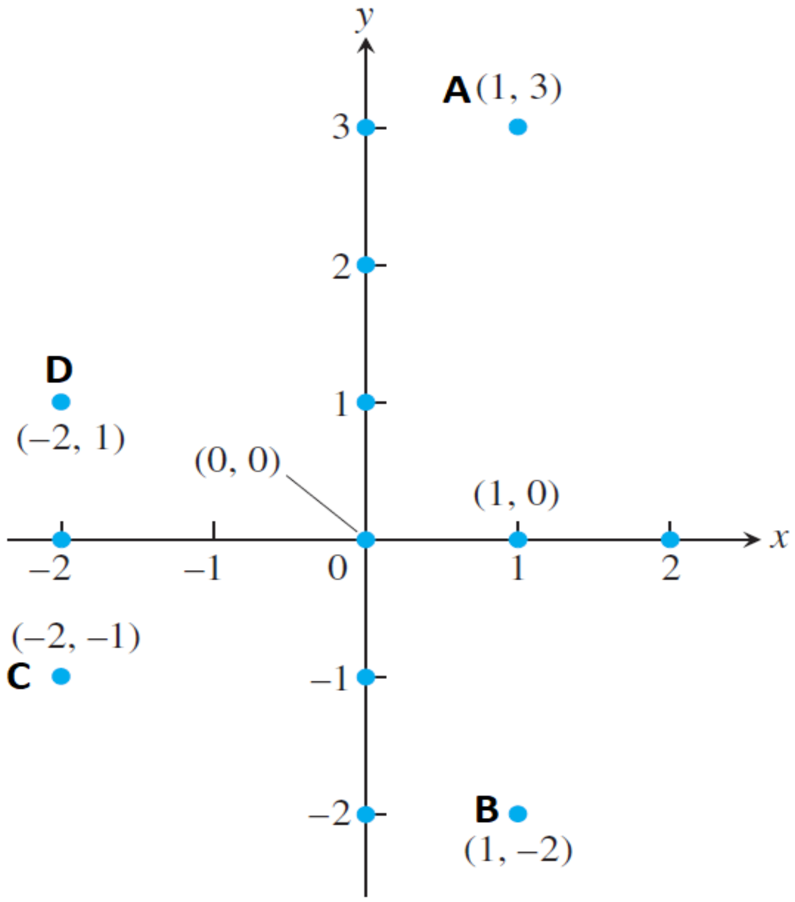
Titik asal berupa O (0,0) dari sistem koordinat adalah titik pada bidang di mana x dan y keduanya nol. Jika P adalah titik di suatu pesawat, ia dapat ditemukan dengan tepat satu pasangan bilangan realdengan cara berikut. Gambar garis melalui P tegak lurus ke dua sumbu koordinat.Garis-garis ini memotong sumbu pada titik dengan koordinat a dan b (Gambar 2.1



Gambar 2.1. Koordinat Kartesius

Sistem koordinat disebut Cartesian untuk menghormati ahli matematika Prancis René Descartes. Sumbu koordinat dari koordinat ini atau bidang Cartesian membagi bidang tersebut menjadi empat wilayah disebut kuadran, dengan arah berlawanan jarum jam seperti yang ditunjukkan pada .Gambar 2.1.

Posisi titik pada sistem koordinat kartesius akan menunjukkan letak titik pada bidang dinyatakan dengan pasangan berurutan (x, y). Titik P(x, y) mempunyai arti bahwa jarak titik P ke sumbu-x dan sumbu-y masing-masing adalah $|\boldsymbol{y}|$ dan $|\boldsymbol{x}|$. Apabila x< 0 maka titik P berada di sebelah kiri sumbu y, apabila x> 0 maka titik P terletak di sebelah kanan sumbu y. Demikian juga apabila y< 0 maka titik P berada di sebelah bawah sumbu x, apabila y> 0 maka titik P terletak di sebelah atas x. Titik asal sering disebut sebagai O(0,0). Sehingga nilai x disebut *absis* titik P sedangkan y disebut *ordinat* titik P.



Gambar 2.2. Sistem Koordinat Kartesian dengan beberapa posisi titik

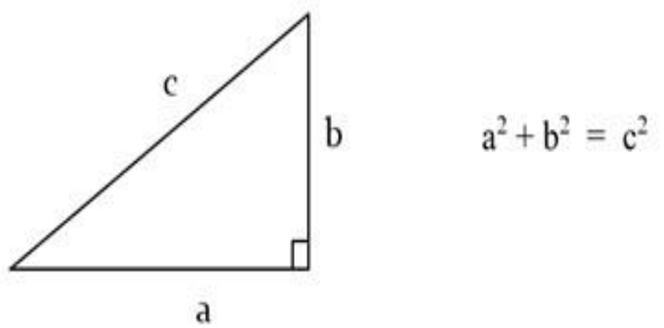
Gambar 2.2 menjelaskan contoh posisi sistem koordinat kartesius pada titik A (1,3), titik B (1,-2), C (-2,-1), dan titik D (-2,1).

2. Penggunaan Sistem Koordinat Cartesius

Sistem koordinat Kartesius dapat digunakan untuk hal hal berikut seperti:

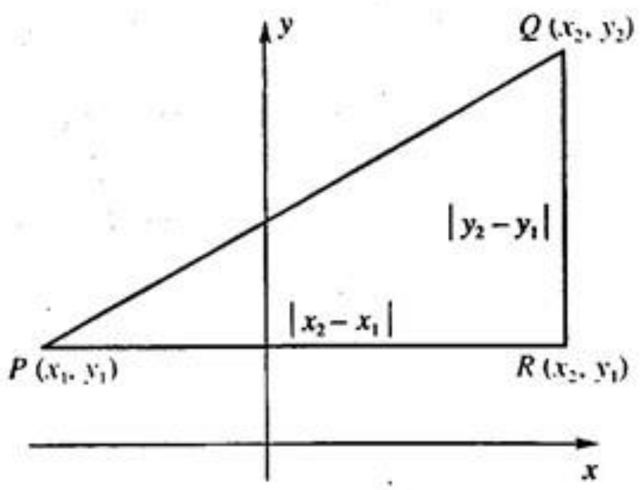
a. Persamaan Jarak

Pada segitiga siku siku dengan tiga sisi a, b , c dengan a adalah sisi datar dan b sisi tegak maka besarnya sisi c dapat dihitung dengan menggunakan persamaan Phytagoras



Gambar 2.3. persamaan Phytagoras

Andaikan P dan Q adalah titik titik koordinat (x_1 , y_1) dan (x_2 , y_2), sedangkan R berada pada koordinat (x_2 , y_1). Dengan menerapkan teorema Pythagoras, dapat menentukan Rumus Jarak seperti berikut :

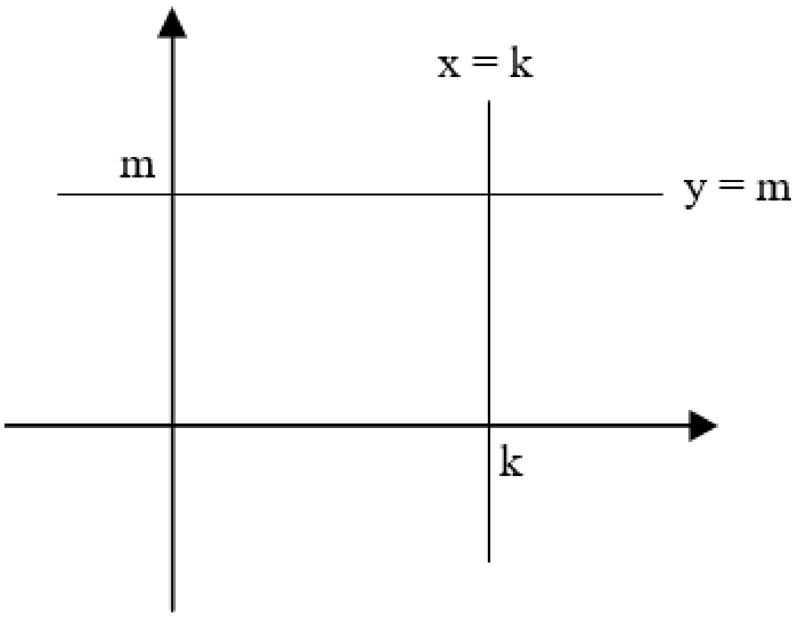


$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Gambar 2.4. Menghitung jarak dua koordinat

b. Garis vertikal dan horisontal

Adalah garis yang arahnya tegak lurus dengan sumbu x atau sumbu y. Sebagai contoh adalah garis lurus yang melalui sumbu x dititik k dinyatakan dengan x = k; yang melalui sumbu y dititik m dinyatakan dengan y = m seperti terlihat pada Gambar 2.8.



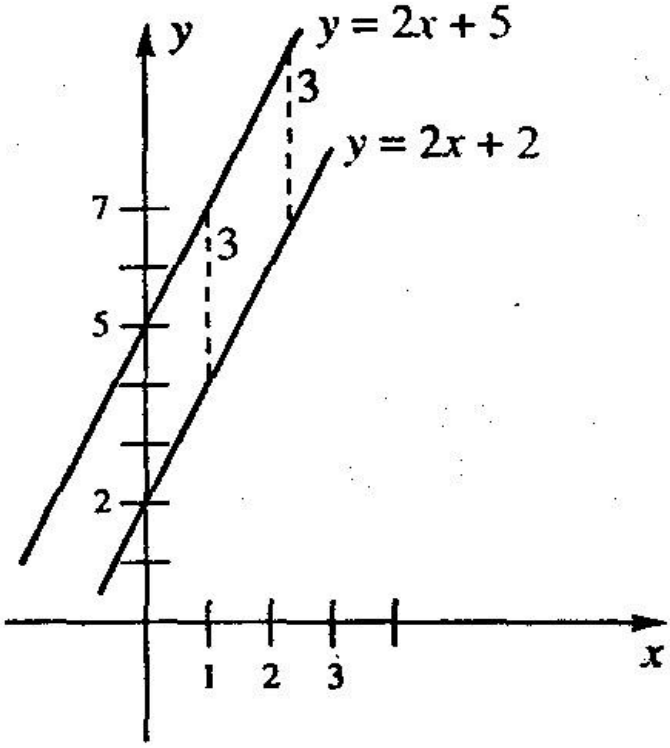
Gambar 2.5. Garis vertikal dan horisontal

c. Garis Paralel.

Dua garis dikatakan parallel jika garis-garis tersebut memiliki slope (m) yang sama.

Contoh:

garis y = 2x + 2 dan y = 2x + 5 memiliki slope (m) =2.



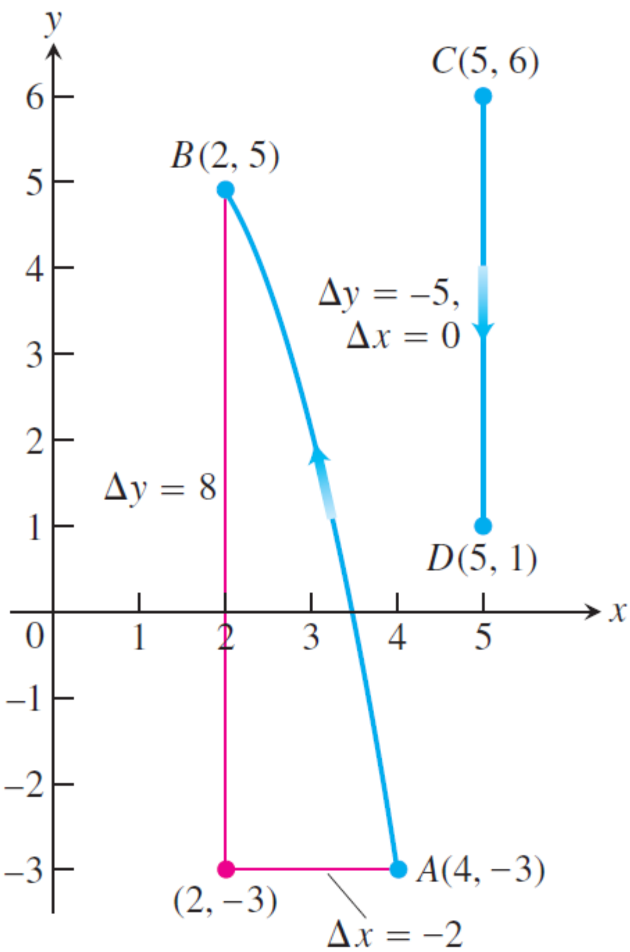
Gambar 2.6. Garis paralel

d. Perpindahan Suatu Titik

Ketika sebuah partikel bergerak dari satu titik pada suatu bidang ke tempat lain lain, maka perubahan ini dapat disebut sebagai increments atau kenaikan. Besar perubahan didapatkan dengan mengurangi koordinat titik akhir dengan koordinat titik awal

$$\Delta x = x_2 - x_1$$
$$\Delta y = y_2 - y_1$$

CONTOH 1 Suatu titik bergerak dari titik A (4,-3) ke titik B (2, 5) seperti terlihat pada Gambar , maka kenaikan dalam koordinat x- dan y adalah



$$\Delta x = 2 - 4 = -2$$

$$\Delta y = 5 - (-3) = 8$$

Suatu titik bergerak dari titik C (5, 6) hingga D (5, 1) kenaikan koordinat adalah

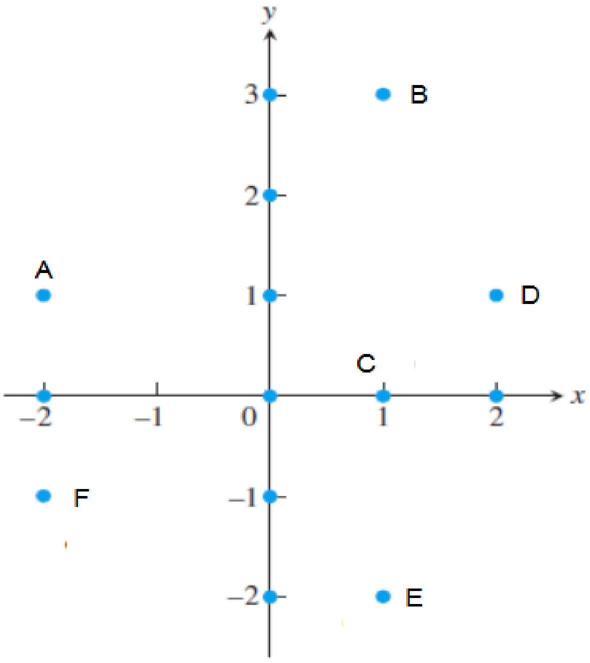
$$\Delta x = 5 - 5 = 0$$

$$\Delta y = 1 - 6 = -5$$

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

Berikut ini beberapa contoh soal koordinat kartesius

1. Perhatikan titik-titik pada koordinat katesius di bawah ini



   Sebutkan koordinat titik A hingga F.

2. Diketahui segiempat ABCD dengan koordinat titik A(-2, 5), B(-2, 1), C(4, 1), dan D(4,5). Gambarkan dan jelaskan bentuk segiempat tersebut.
3. Hitung panjang garis yang dibentuk dari titik:

   a. $A(-3, 2), \quad B(-1, -2)$

   b. $A(\sqrt{2}, 4), \quad B(0, 1.5)$

   c. $A(-1, -2), \quad B(-3, 2)$

   Koordinat-koordinat di bawah ini yang sesuai dengan gambar adalah....

4. Suatu bangun dibentuk dari titik titik koordinat A(-2, 2); B(3, 2); C(3, -5); dan D(-2, -5). Jika keempat titik tersebut dihubungkan, maka bangun ABCD akan membentuk bangun.......

D. DAFTAR PUSTAKA

Thomas (2005), Calculus 11e with Differential Equations, Pearson Wesley

Weltner, Klaus (2009), Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide, Springer

PERTEMUAN 3

SISTEM PERSAMAAN

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menguasai materi Sistem Persamaan dalam matematika dan kegunaannya.

B. URAIAN MATERI

1. Persamaan matematika

Dalam sebuah persamaan matematika dikenal perubah atau variabel (*variable*) adalah lambang (simbol) yang digunakan untuk menyatakan sembarang anggota suatu himpunan. Sebagai contoh jika suatu himpunan berupa bilangan *R* maka variabel tersebut dinamakan *perubah real*.

Variabel dalam matematika biasa dinyatakan dalam huruf seperti:
x, y, z, a, b, c, x1, y3, dst

Contoh :

H. Darmono mempunyai peternakan sapi yang besar. Dimana x menyatakan jumlah sapi. Sapi milik H. Darmono adalah sebanyak 3500 ekor.

Penyelesaian:
Maka pernyataan ini bias dituliskan
x = 3500
Operasi matematika dengan menggunakan variabel menjadi lebih mudah dituliskan. Contohnya, jumlah sapi dikalikan 2 maka menjadi
2 x = 2·3500
= 7000 ekor sapi

2. Persamaan Linear

Persamaan linear dibentuk dengan dari himpunan bilangan riil dan membentuk suatu garis lurus, persamaan linier biasanya ditulis dalam bentuk

$$y = ax + b$$

Dengan

$$a \neq 0$$

Untuk menyelesaikan persamaan linier maka dilakukan penyelesainan dengan operasi matematika :

Sebagai contoh : Carilah penyelesaian persamaan

$$2x + 6 = 10$$

Jawaban:

$$2x + 6 = 10 - 6$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

3. Persamaan Kuadrat

Bentuk umum persamaan kuadrat adalah :

$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

Bilangan real t disebut akar dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$,

jika memenuhi $at^2 + bt + c \neq 0$.

Penyelesaian persamaan kuadrat dilakukan untuk mendapatkan akar akar persamaan tersebut dimana dapat dilakukan dengan tiga cara, yaitu:

a. pemfaktoran,
b. melengkapkan kuadrat
c. rumus abc.

Contoh

Carilah akar persamaan kuadrat $x^2 - 4x - 5 = 0$

Penyelesaian:

a. Cara pemfaktoran :

$x^2 – 4x – 5 = 0$

$(x – 5)(x + 1) = 0$

Diperoleh $x_1 = 5$ atau $x_2 = -1$.

b. Cara melengkapkan kuadrat :

$x^2 - 4x - 5 = 0$

$x^2 - 4x = 5$

$(x - 2)^2 - 4 = 5$

$(x - 2)^2 = 9$

$(x - 2)^2 = 9$

$x - 2 = \pm 3$

$x = 2 \pm 3$

Diperoleh $x_1 = 2 + 3 = 5$ atau $x_2 = 2 - 3 = -1$.

c. Dengan rumus abc

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$a = 1, \quad b = -4 \quad \text{dan } c = -5$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1(-5)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

Maka diperoleh hsail akarnya yaitu

$$x_1 = \frac{4 + 6}{2} = 5$$

dan

$$x_2 = \frac{4 - 6}{2} = -1$$

Bentuk

Untuk semua nilai a yang positif maka :

$$|x| = a \text{ maka } x = \pm\, a$$

Selesaikan persamaan $|2x - 3| = 9$

Jawaban

$$2x - 3 = \pm 9$$

Sehingga

$$2x - 3 = 9 \quad \text{dan} \quad 2x - 3 = -9$$

$$2x = 12 \qquad 2x = -6$$

$$x = 6 \qquad x = -3$$

Bentu yang lain terlihat

$$\left|\frac{s}{2} - 1\right| = 2$$

$$\frac{s}{2} - 1 = \pm 2$$

Sehingga

$$\frac{s}{2} - 1 = 2 \quad \text{dan} \quad \frac{s}{2} - 1 = -2$$

$$\frac{s}{2} = 3 \qquad \frac{s}{2} = -1$$

$$s = 6 \qquad x = -2$$

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

Selesaikan soal- berikut :

1. $2x + 6 = x + 1$
2. $3(x - 2) = x + 1$
3. $\frac{2x+6}{5} = NIMx + 1$; dengan NIM adalah angka terakhir nomor induk mahasiswa dan bukan nol
4. $x^2 - 7x + 12 = 0$
5. $x^3 + 2x^2 - x^3 + x - 1 = 0$
6. $|x| = 4$
7. $|x| = NIM$
8. $|2x - 3| = 1$
9. $|2x + \mathrm{NIM}| = 1$
10. $\left|\frac{x}{4}\right| = 1$

D. DAFTAR PUSTAKA

Thomas (2005), Calculus 11e with Differential Equations, Pearson Wesley

Weltner, Klaus (2009), Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide, Springer

PERTEMUAN 4

SISTEM PERTIDAKSAMAAN

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menguasai materi Sistem Pertidaksamaan dalam matematika dan kegunaannya.

B. URAIAN MATERI

1. Pertidaksamaan

Dalam sebuah persamaan matematika dikenal perubah atau variabel (*variable*) adalah lambang (simbol) yang digunakan untuk menyatakan sembarang anggota suatu himpunan. Sebagai contoh jika suatu himpunan berupa bilangan *R* maka variabel tersebut dinamakan *perubah real*. Pada Pertidaksamaan (inequality) merupakan dalah pernyataan matematika yang menggunakan satu perubah atau lebih dengan memakai tanda tanda ketidaksamaan (<, >, ≤, ≥).

Contoh 1:

a. $2x - 7 \leq\ = x + 1$

b. $\frac{2x-1}{x+3} > 1$

c. $x^2 + y^2 \leq 9$

d. $x^2 - x - 12 < 0$

Untuk menyelesaikan suatu pertidaksamaan maka dilakukan operasi pada bilangan real yang dapat dicapai oleh perubah-perubah yang ada dalam pertidaksamaan tersebut, sehingga pertidaksamaan tersebut menjadi benar.

Penyelesaian pertidaksamaan akan menghasilkan bentuk dalam himpuan yang sma yaitu dalam bilangan riil, dimana penyelesaian tersebut harus memenuhi sifat sifat dan hukum dalam bilangan riil.

Contoh 2.

Carilah penyelesaian pertidaksamaan berikut

$$2x - 5 < 5x + 7 .$$

Penyelesaian:

$$2x - 5 < 5x + 7$$
$$\Leftrightarrow 2x - 5 - 5x + 5 < 5x + 7 - 5x + 5$$
$$\Leftrightarrow -3x < 12$$
$$\Leftrightarrow -3x.(-1/3) > 12.(-1/3)$$
$$\Leftrightarrow x > -4$$

Jadi, penyelesaian pertidaksamaan di atas adalah $\{x \in R \mid x > -4\}$.

Berikut diberikan contoh penyelesaian pertidaksamaan dalam fungsi kuadrat dan lainnya, seperti diberikan sebagai berikut.

Contoh 3.

Tentukan penyelesaian pertidaksamaan: $x^2 - 5x + 6 > 0$.

Penyelesaian:

Dengan memfaktorkan ruas kiri pertidaksamaan, maka diperoleh:

$$(x - 2)(x - 3) > 0$$

Telah diketahui bahwa hasil kali 2 bilangan real positif apabila ke dua faktor positif atau ke dua faktor negatif. Oleh karena itu,

a. Jika ke dua faktor positif maka:

   $x - 2 > 0$ dan $x - 3 > 0$

   $x > 2$ dan $x > 3$

   Sehingga diperoleh: $x > 3$.

b. Jika ke dua faktor negatif, maka:

   $x - 2 < 0$ dan $x - 3 < 0$

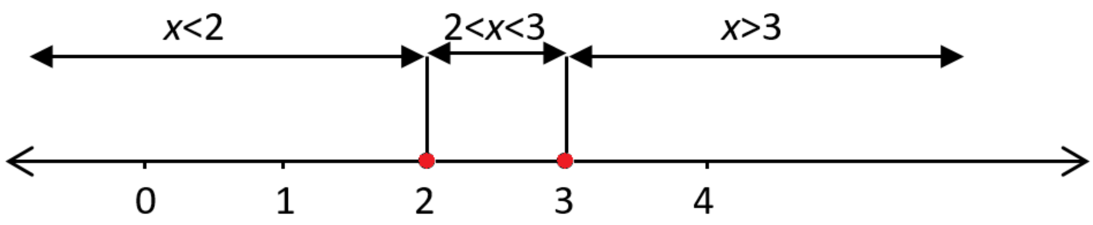
   $\Leftrightarrow x < 2$ dan $x < 3$

   Diperoleh: $x < 2$.

   Sehinga , penyelesaian pertdaksamaan tersebut adalah

   $\{x \in R \mid x < 2 \text{ atau } x > 3\}$

Penyelesaian pertidaksamaan di atas dapat pula diterangkan sebagai berikut: ruas kiri pertidaksamaan bernilai nol jika $x = 2$ atau $x = 3$. Selanjutnya, ke dua bilangan ini membagi garis bilangan menjadi 3 bagian: $x < 2, 2 < x < 3$, dan $x > 3$ seperti diperlihatkan pada Gambar 4.1



Gambar 4. 1. Garis bilangan penyelesaian pertidaksamaan

Kemudian ujilah bilangan yang terletak pada daerah tersebut dan masuukan pada soal $x^2 - 5x + 6$

Misal keduanya positif. Pada rentang $2 < x < 3$, $(x - 2)$ bernilai positif sedangkan $(x - 3)$ bernilai negatif. Sehingga ketika dikalikan keduanya bernilai negatif. Terakhir, pada bagian $x > 3$, $(x - 2)$ dan $(x - 3)$ masing-masing bernilai positif sehingga hasil kali keduanya juga positif. Penjelasan penyelesaian di atas dapat dilihat pada Tabel 1 di bawah ini.

Tabel 4.1. Penyelesaian pertidaksamaan

	$x < 2$	$x < 2 < 3$	$x > 3$
Hasil	–	+	-

Daerah yang bernilai positif adalah pada $2 < x < 3$

Sehingga penyelesaian pertidaksamaan adalah $\{x \in R | x < 2 \text{atau} x > 3\}$

Berikut ini adalah contoh penyelesaian soal soal pertidaksamaan

Contoh 4

Tentukan penyelesaian $x^3 - 2x^2 - x + 1 \leq -1$.

Penyelesaian: Apabila ke dua ruas pada pertidaksamaan di atas ditambah 1, maka diperoleh:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 \le 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2) \le 0$$

Jika $(x-1)(x+1)(x-2) = 0$, maka diperoleh: $x = -1,\ x = 1,$ atau $x = 2$.

Selanjutnya, perhatikan table berikut:

Tabel 4.2. Penyelesaian pertidaksamaan

	Tanda nilai/nilai				Kesimpulan
	$x+1$	$x-1$	$x-2$	$(x+1)(x-1)(x-2)$	
$x < -1$	–	–	–	–	Pertidaksamaan
$-1 < x < 1$	+	–	–	+	dipenuhi.
$1 < x < 2$	+	+	–	–	tidak dipenuhi.
$x > 2$	+	+	+	+	dipenuhi.
$x = -1$	0	–2	–3	0	tidak dipenuhi.
$x = 1$	2	0	–1	0	dipenuhi.
$x = 2$	3	1	0	0	dipenuhi.
					dipenuhi.

Jadi, penyelesaian adalah $\{x \in R \mid x \le -1 \text{ atau } 1 \le x \le 2\}$.

Contoh 5

Selesaikan $\dfrac{2x+6}{x-2} \le x+1$.

Penyelesaian: Apabila pada ke dua ruas ditambahkan $-(x+1)$ maka diperoleh:

$$\frac{2x+8}{x-2} - (x+1) \le 0 \Leftrightarrow \frac{2x+8-x^2+x+2}{x-2} \le 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2-3x-10}{x-2} \ge 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-5)(x+2)}{x-2} \ge 0$$

Nilai nol pembilang adalah -2 dan 5, sedangkan nilai nol penyebut adalah 2.

Sekarang, untuk mendapatkan nilai *x* sehingga $\frac{(x-5)(x+2)}{x-2} \geq 0$ diperhatikan tabel berikut:

Tabel 4.3. Penyelesaian pertidaksamaan

	Tanda nilai/nilai				Kesimpulan
	$x+2$	$x-2$	$x-5$	$\frac{(x+2)(x-5)}{x-2}$	
$x < -2$	–	–	–	–	tidak dipenuhi.
$-2 < x < 2$	+	–	–	+	dipenuhi.
$2 < x < 5$	+	+	–	–	tidak dipenuhi.
$x > 5$	+	+	+	+	dipenuhi.
$x = -2$	0	–4	–7	0	dipenuhi.
$x = 2$	4	0	–3	Tak terdefinisi	tidak dipenuhi.
$x = 5$	7	3	0	0	Pertidaksamaan dipenuhi.

Jadi, penyelesaian adalah $\{x \in R | -2 \leq x < 2 atau x \geq 5\}$.

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

Selesaikan soal- berikut :

1. $2x - 4 > 0$
2. 5>4x-1
3. $2x+6 \leq x+1$
4. $3x - 4 \geq NIMx + 1$; dengan NIM adalah angka terakhir nomor induk
5. $x^2 - 7x + 12 \leq 0$
6. $2x^2 + 11x + 3 \leq -2$
7. $x^3 - 2x^2 - x + 1 \leq -1$.
8. $3(x-2) \geq x+1$
9. $x^2 - 7x + 12 > 0$
10. $\frac{2x+6}{x-2} \leq x+1$.

D. DAFTAR PUSTAKA

Thomas (2005), Calculus 11e with Differential Equations, Pearson Wesley

Weltner, Klaus (2009), Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide, Springer

PERTEMUAN 5

SISTEM HIMPUNAN

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menguasai materi Sistem Himpunan dalam matematika dan kegunaannya.

B. URAIAN MATERI

1. Definisi Himpunan

Himpunan adalah kumpulan benda-benda atau obyek yang didefinisikan (di beri batasan) dengan jelas.

Contoh :

a. Himpunan mahasiswa Teknik Elektro UNPAM yang mengulang kalkulus I tahun 2015

b. Himpunan mahasiswa matematika Teknik Elektro yang IPK-nya lebih dari 3.

c. Himpunan dosen perempuan Teknik Elektro UNPAM.

d. Himpunan bilangan bulat antara 2 sampai 20.

e. Himpunan bilangan prima kurang dari 40.

2. Himpunan dalam bilangan riil

Berikut ini adalah himpunan yang penting dalam matematika:

Himpunan bilangan asli, N = {1,2,3,4,5,…}

Himpunan bilangan bulat, Z = {…,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4…}

Himpunan bilangan cacah, C = {0,1,2,3,4,5,6,…}

Himpunan bilangan rasional, Q =$\left\{\frac{a}{b} | a, b \in Z, b \neq 0\right\}$ $\left\{\ldots, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots\right\}$

Himpunan bilangan irasional =$\left\{\ldots -\sqrt{3}, \sqrt{2}, \pi, e, log 3 \ldots\right\}$

3. Anggota Himpunan

Untuk menggambarkan keanggotaan suatu himpunan maka digunakan notasi $\in$ Penjelasaanya dapat dilihat pada contoh berikut ini:

"Himpunan mahasiswa Teknik Elektro UNPAM yang mengulang kalkulus I tahun 2015" dinotasikan dengan **K**, maka untuk melambangkan anggota dari himpunan **K** sebagai berikut :

(Fauzi adalah mahasiswa Teknik Elektro UNPAM yang mengulang kalkulus I tahun 2015)

Fauzi adalah anggota himpunan K atau Fauzi $\in$ K.

(Kim Jomun adalah mahasiswa Teknik Elektro UNPAM tetapi tidak mengulang kalkulus dasar tahun 2015). Jomun bukan anggota himpunan K atau Kim Jomun $\notin$ K.

4. Menyatakan dengan kata-kata

K adalah himpunan mahasiswa Teknik Elektro UNPAM yang mengulang kalkulus I tahun 2015

L adalah Himpunan mahasiswa Teknik Elektro UNPAM yang IPK-nya lebih dari 3.

M adalah Himpunan bilangan bulat antara 1 sampai 10.

N adalah himpunan bilangan bulat lebih dari 1.

5. Menyatakan dengan mendaftar anggota-anggotanya

Contoh :

K = {ahok, sandy, jessica, mirna, mukidi, sule }

P = {mahasiswa Teknik Elektro Unpam}

M = {mahasiswa Teknik Elektro Unpam yang IPK-nya lebih dari 3}

L = {2,3,4,5,6,7,8,9}

N = {bilangan bulat lebih dari 1}

N = {2,3,4,5,...}

6. Menyatakan dengan notasi pembentuk himpunan

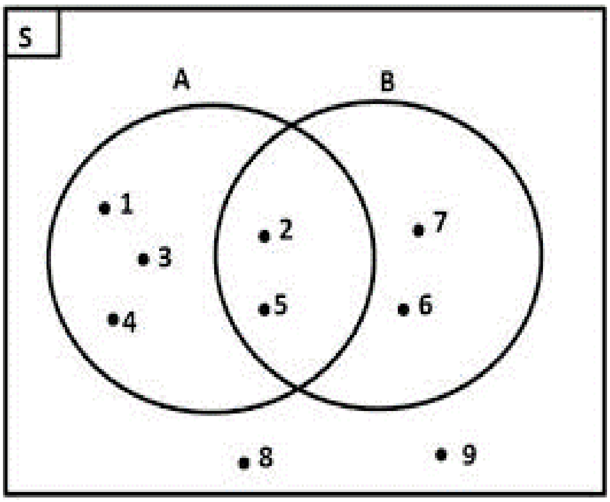
Contoh:

M = {m, 0 < n < 20 , n bilangan ganjil} ; maka M = {1,3,5,7,9,11,13,15,17,19}

K = {k, 0 < k < 20 , n bilangan prima} ; maka K = {2,3,5,7,11,13,17,19}

7. Diagram Venn

Diagram Venn dapat digunakan untuk mengetahui hubungan antar himpunan



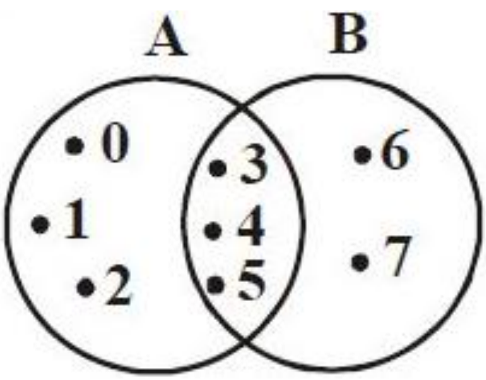
Gambar 5. 1. Diagram Venn

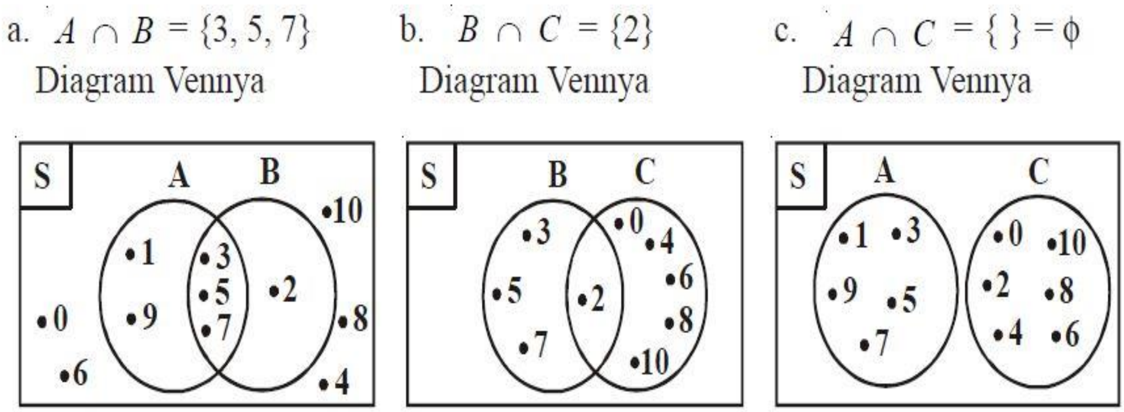
8. Irisan Dua Himpunan

Irisan himpunan A dan B adalah himpunan dimana anggotanya merupakan anggota himpunan A yang juga menjadi anggota himpunan B. Notasi irisan himpunan adalah ∩. Maka Irisan himpunan A dan himpunan B dinotasikan dengan $A \cap B$.

Contoh

Misalkan himpunan A = {0,1,2,3,4,5} dan B = {3,4,5,6,7}, maka irisan dari dua buah himpunan dapat digambarkan pada gambar berikut:





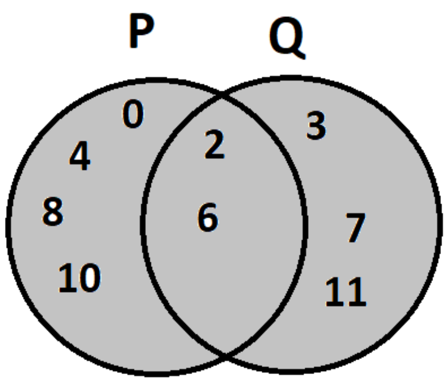
Gambar 5. 2. Hubungan Diagram Venn

9. Gabungan Dua Himpunan

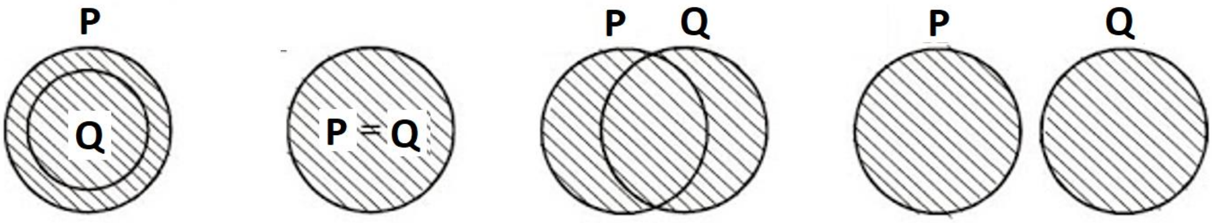
Gabungan himpunan P dan Q adalah himpunan yang anggotanya adalah merupakan anggota himpunan A atau anggota himpunan B. Gabungan himpunan P dan Q dinotasikan dengan P □ Q = {x | x □ P atau x □ Q}

Contoh:

Misalkan P = {0,2,4,6,8,10} dan Q = {2, 3, 6, 7, 11}. Gabungan himpunan P dan Q ditulis P∪Q. Jadi A∪B = {0 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13}. Dengan diagram Venn, diperoleh gambar seperti di bawah ini. Daerah yang diarsir menunjukkan P ∪ Q.



Selanjutnya, untuk menyatakan hubungan macam macam Gabungan himpunan dapat dilihat pada diagram Venn di bawah ini.



Gambar 5. 3. Beragam bentuk gabungan dari himpunan $P \cup Q$

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

1. Dari himpunan berikut ini:

   P = {x | 1 < x < 30, x bilangan ganjil}
   Q = { y | 1 ≤ y ≤ 25, y bilangan prima}
   Hasil dari P ∩ Q adalah....
2. Dari 40 mahasiswa elektro UNPAM, 17 orang gemar makan bakso, 23 orang gemar sate ayam, dan 10 orang gemar sate ayam dan bakso. Banyak mahasiswa yang yang tidak gemar bakso maupun sate ayam adalah....
3. Jika K = { x | 5 ≤ x ≤ 9, x bilangan asli } dan L = { x | 7 ≤ x < 13, x bilangan cacah}, K ∪ L =....
4. Pada seleksi penerimaan pegawai di PT. Wadas Lintang, terdapat 78 orang calon yang diundang mengikuti ujian tulis dan ujian_wawancara agar dapat diterima sebagai pegawai pada perusahaan tersebut. Ternyata 40 orang pelamar lulus tes wawancara, 47 orang lulus tes tertulis, dan 8 orang tidak ikut ujian ujian tersebut. Hitunlah pelamar yang diterima sebagai pegawai adalah?

D. DAFTAR PUSTAKA

Thomas - Calculus 11e with Differential Equations HQ

Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide

PERTEMUAN 6

FUNGSI EKSPONEN DAN LOGARITMA

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menguasai materi mengenai Fungsi Eksponen dalam matematika dan kegunaannya.

B. URAIAN MATERI

1. Fungsi Eksponen

Fungsi eksponen atau perpangkatan dinotasikan dalam bentuk a^n, dimana a disebut basis atau bilangan pokok dan n disebut eksponen atau pangkat. Bentuk eksponen berlaku pada bilangan dengan pangkat rasional dengan syarat jika a, b ∈ R, a ≠ 0, *m* dan *n* bilangan rasional, maka sifat-sifat fungsi eksponen adalah sebagai berikut:

a. $a^{m.} \bullet a^n = a^{m+n.}$

b. $a^{m.} \div a^n = a^{m-n.}$

c. $(a^m)^n = a^{mn.}$

d. $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$

e. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

f. $a^0 = 1$

Contoh

a. $3^3 \bullet 3^2 = 3^{3+2} = 3^5$

b. $3^3 : 3^2 = 3^{3-2} = 3$

c. $\sqrt[3]{10^6} = 10^{\frac{6}{3}} = 100$

d. $2019^0 = 1$

2. Fungsi Eksponen

The function $\boldsymbol{a^x}$ di sebut fungsi eksponen, dimana x adalah variabel bebas, x disebut juga index.

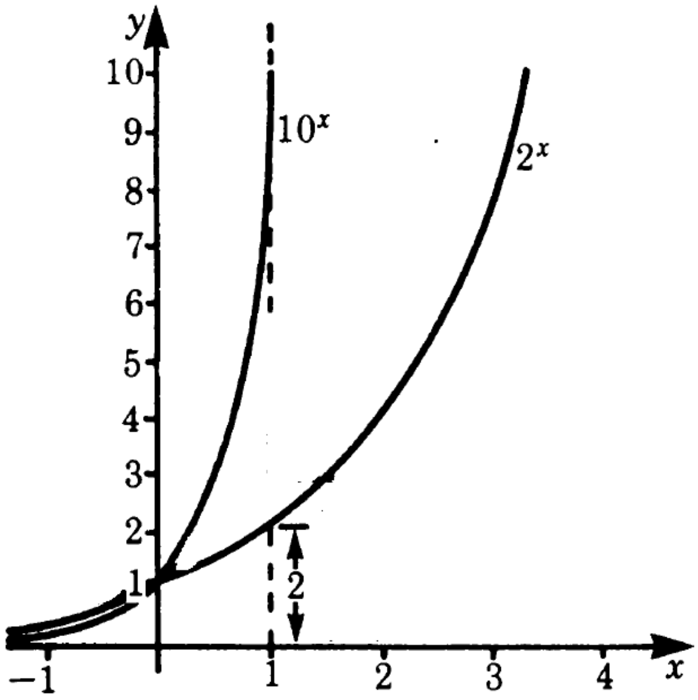
Contoh

a. Fungsi $\boldsymbol{y = 2^x}$

x	2^x
-3	0.125
-2	0.25
-1	0.5
0	1
1	2
2	4
3	8

b. Fungsi $\boldsymbol{y = 10^x}$

x	2^x
-3	0.001
-2	0.01
-1	0.1
0	1
1	10
2	100
3	1000



Gambar 6. 1. Fungs $y = 2^x$ dan $y = 10^x$

Eksponen dalam persamaan matematika

a. $a^{f(x)} = 1$ maka f(x)=0, dengan syarat a>0 dan a≠1,

b. $a^{f(x)} = a^p$.. maka f(x) = p, dengan syarat a>0 dan a≠1

c. $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.. maka f(x) = g(x), dengan syarat a>0 dan a≠1

d. $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, maka f(x) = 0, dengan syarat a≠b ;a,b >0 ; a,b ≠1

e. $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, maka $log\, a^{f(x)} = log\, b^{g(x)}$ dengan syarat a≤b ; a,b >0 ; a,b ≠1, dan f(x) ≠ g(x).

3. Logaritma

Logaritma yang merupakan kebalikan dari ekponen, atau dapat dikatakan logaritma adalah invers dari eksponen (perpangkatan). Rumus dasar logaritma dapat ditulis:

$$^{a}log\, b = c$$

$$b = a^c$$

a disebut bilangan pokok (basis) logaritma, a > 0 , a ≠ 1, a ϵ R b disebut numerus, yaitu bilangan yang akan dicari logaritmanya, b > 0, b є R

c disebut hasil logaritma

Untuk memahami logaritma, perhatikan contoh berikut:

$$10^3 = 1000$$

saat ruas kiri dipertukarkan tempatnya dengan ruas kanan dan sebaliknya sehingga:

$$1000 = 10^3$$

Karena $1000 = 10^3$ maka didapat ${}^{10}\log 1000 = 3$

${}^{10}\log 1000$ dibaca "logaritma dari 1000 dengan bilangan pokok 10". Sehingga untuk mencari logaritma suatu bilangan positif b dengan bilangan pokok a sama dengan mencari pangkat dari b dalam bilangan pokok a tersebut.

Contoh lain dapat dilihat dibawah ini :

$8 = 2^3 \rightarrow {}^{2}\log 8 = 3$

$81 = 3^4 \rightarrow {}^{3}\log 81 = 4$

$16 = 4^2 \rightarrow {}^{4}\log 16 = 2$

Note : Untuk bilangan pokok 10 maka angka 10 dapat tidak dituliskan

${}^{10}\log 100 = 2 \ \text{-}\!\!\rightarrow$ bisa ditulis $\log 100 = 2$

Contoh : $\log 10 = 1$

$\log 1000000 = 6$

$\log 0{,}1 = -1$

4. Sifat Logaritma

a. ${}^{a}\log bc = {}^{a}\log b + {}^{a}\log c$

b. ${}^{a}\log \frac{b}{c} = {}^{a}\log b - {}^{a}\log c$

c. $^{a^n}\log b^m = m\frac{1}{n}\,^a\log b$

d. $^a\log b.^b\log c.^c\log d = ^a\log d$

e. $\log b^m = m\log b$

Contoh soal:

a. $\log 125 + \log 8 = \ldots.$3

$= \log(125 * 8)$

$= \log 1000$

$= 3$

b. $^5\log 400 - ^5\log 16 = \ldots.$2

$= ^5\log \frac{400}{16}$

$= ^5\log 25$

$= 2$

c. $^8\log 2^5$ =

$= ^{2^3}\log 2^5$

$= \frac{5}{3}\,^2\log 2$

$= \frac{5}{3}$

d. $^2\log 9.^3\log 5.^{25}\log 16 = \ldots..$4

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

1. Sebuah fungsi f(x) = $^{2}\log x$, Carilah penyelesaian f(x) + f (2/x)
2. log 1000 = …

   a $^{5}log\, 1\,25 =$

   b $^{2}log\, 8 =$…3

   c $^{5}log\, 4\,00 - {}^{5}log\, 1\,6 = \ldots.$

   d $^{8}log\, 2^{5}$=

   e $^{2}log\, 9\,.\ {}^{3}log\, 5\,.\,{}^{25}log\, 1\,6 = \ldots..$

3. Selesaikan bentuk-bentuk berikut.

   a. a^{-n}

   b. $a^{3} \cdot a^{4}$

   c. $(y^{3})^{2}$

   d. $(y^{3})^{2}$

   e. $10^{2} \cdot 10^{-3}$

   f. $4^{2} \cdot 4^{-3} \cdot 4^{5}$

   g. $27^{1/3}$

   h. $(0{,}1)^{0}$

4. Sederhanakan perkalian berikut:

   a $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}$

   b $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$

   c $\sqrt{5} \cdot \sqrt{-4}$

   d $(\ln 3)^{0}$

   e $e^{1/5}$

D. DAFTAR PUSTAKA

Thomas (2005), Calculus 11e with Differential Equations Pearson Addison Wesley

Weltner, Klaus (2009), Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide, Springer

PERTEMUAN 7

PERSAMAAN GARIS LURUS DAN GRAFIKNYA

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menguasai materi persamaan garis lurus dan grafiknya.

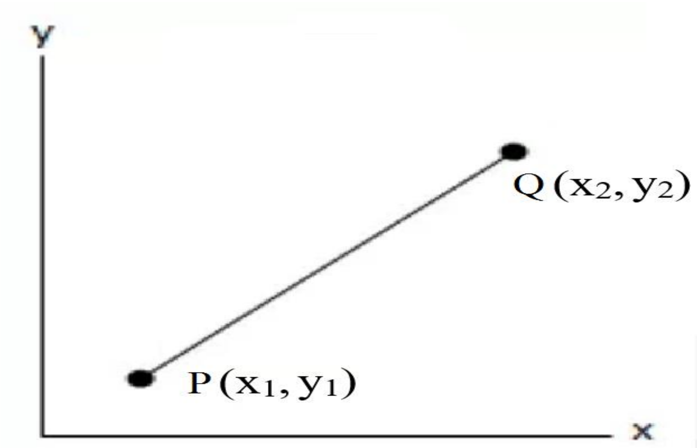
B. URAIAN MATERI

1. Persamaan garis lurus dan grafiknya.

Persamaan garis (atau disebut **Persamaan garis lurus**) merupakan suatu pemetaan persamaan matematika dalam bidang koordinat cartesius yang membentuk grafik berupa garis lurus. Bentuk umum garis lurus: Ax+By+C = 0 dengan A, B, dan C konstanta.

dengan nilai A ≠ 0 dan B ≠ 0 secara bersamaan.

Gambar 7.1 menunjukkan garis lurus yang dibentuk oleh dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) pada suatu koordinat kartesius.



Gambar 7. 2. Garis lurus antara yang menghubungkan dua titik

Persamaan garis lurus yang melalui dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) dapat dicari sebagai berikut ini:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2. Gradien Persamaan garis lurus

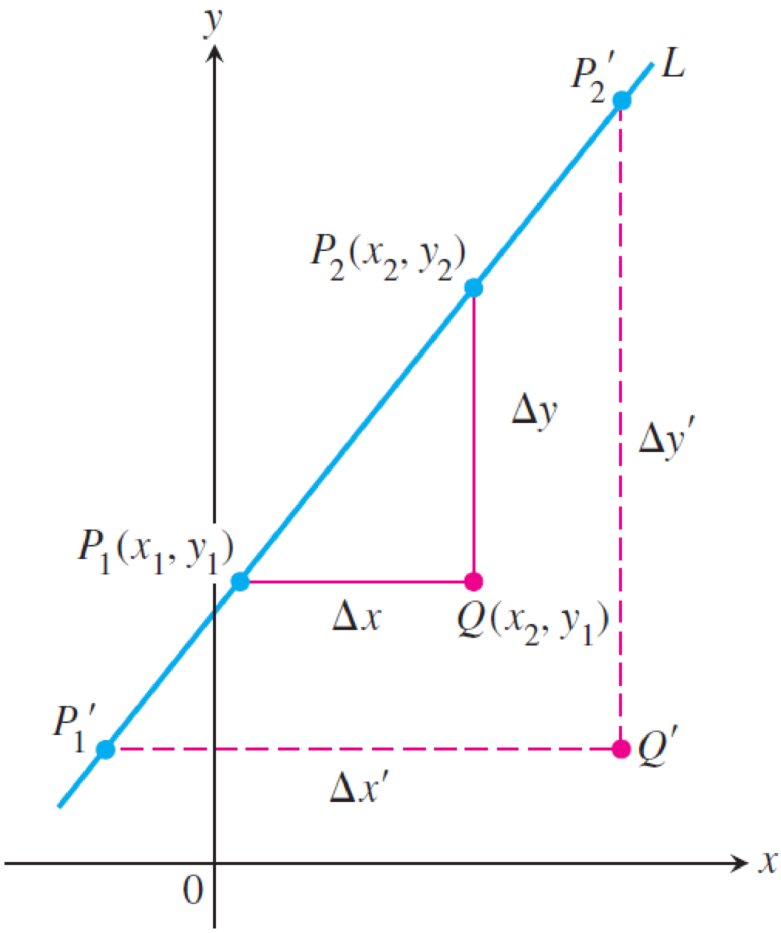
Garis lurus mempunyai nilai kemiringan (*slope*) atau gradien garis atau merupakan ukuran kemiringan (m) garis yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

a. m (gradien/slope) menujukan kemiringan garis lurus
b. garis yang arahnya naik memiliki slope positif
c. garis yang arahnya turun memiliki slope negative
d. garis horizontal memiliki slope nol

Perpindahan ke arah x disebut Δx sedang kan perpindahan kearah y disebut Δy

Gradien atau kemiringan suatu garis memberi tahu kita arah (menanjak, menurun) dan kecuraman sebuah garis. Sebuah garis dengan kemiringan positif naik menanjak ke kanan; satu dengan lereng negatif menurun ke kanan. Semakin besar nilai gradien, semakin cepat kenaikan atau penurunan titik pada garis tersebut.

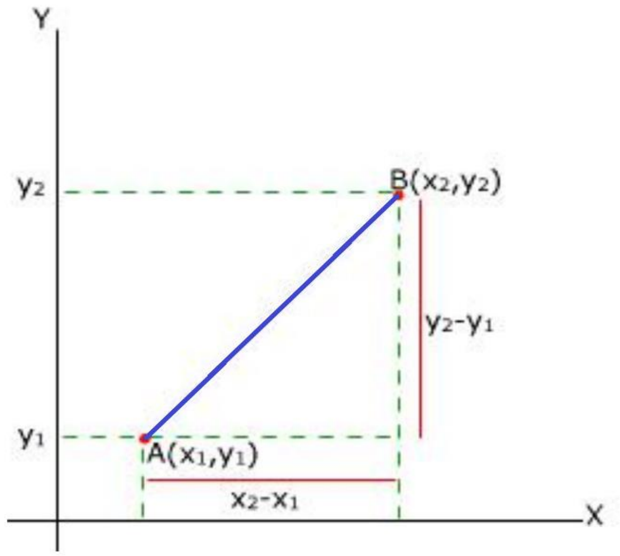


Membuat persamaan garis lurus dengan gradien *m* dan melalui titik (x_1, y_1) adalah

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

didapat

$$y = mx + (y_1 - x_1)$$



Gambar 7. 3. Gradien garis lurus

Jika diketahui dua garis dengan gradien m_1 dan m_2 ,

dua garis sejajar $\Leftrightarrow m_1 = m_2$;

dua garis tegak lurus $\Leftrightarrow m_1.m_2 = -1$

Contoh:

Tentukan persamaan garis U yang melalui titik (1 , 2) dan (8 , 9).

Jawaban :

Langkah pertama yaitu mencari gradien terlebih dahulu :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{9-1}{8-2} = \frac{8}{6} \quad = \frac{4}{3}$$

Selanjutnya yaitu memasukkan ke dalam rumus :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{4}{3}(x - 1)$$

$$3y - 6 = 4x - 4$$

$$3y - 4x = 2$$

3. Garis Paralel

Garis-garis yang paralel memiliki sudut kemiringan yang sama, sehingga mereka memiliki kemiringan yang sama (jika mereka tidak vertikal). Sebaliknya, garis dengan kemiringan yang sama memiliki sudut kemiringan dan sudut yang sama begitu juga paralel.

Contoh:

Garis k melalui (5,-1) dan parallel dengan garis 2x+5y-15=0. Tentukan persamaan garis k.

Jawab

Pertama yang dilakukan adalah mencari gradien garis ax+by+c=0, dimana gradien

$$m = \frac{-a}{b}$$

$$m = \frac{-2}{5}$$

Kemudian dibentuk persamaan garis yaitu garis k

$$y - y1 = m(x - x1)$$

$$y - -1 = \frac{-2}{5}(x - 5)$$

$$y + 1 = \frac{-2}{5}x + 2$$

$$5y + 5 = -2x + 10$$

$$2x + 5y - 5 = 0$$

4. Garis Saling Tegak lurus

Garis-garis

yang saling tegak lurus memiliki sudut 90 derajat. Seingga mereka mempuntai hubungan gradien berkebalikan dan berlawanan tanda, yaitu:

$$m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

Yaitu

yang sama, sehingga mereka memiliki kemiringan yang sama (jika mereka tidak vertikal). Sebaliknya, garis dengan kemiringan yang sama memiliki sudut kemiringan dan sudut yang sama begitu juga paralel.

Contoh:

Garis g melalui (2,1) dan tegak lurus dengan garis 3x - 4y-18=0. Tentukan persamaan garis g.

Jawab

Pertama yang dilakukan adalah mencari gradien garis ax+by+c=0, dimana gradien

$$m = \frac{-a}{b}$$

$$m = \frac{-3}{-4}$$

Kemudian dibentuk persamaan garis yaitu garis g

$$y - y1 = m(x - x1)$$

$$y - 1 = \frac{3}{4}(x - 2)$$

$$y - 1 = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$$

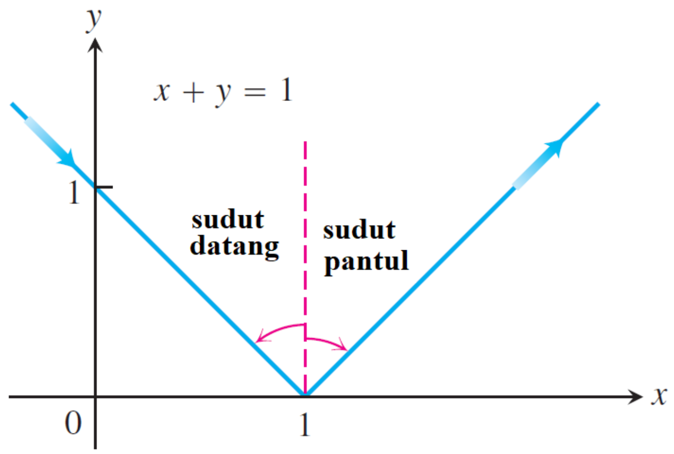
$$4y - 4 = 3x + 6$$

$$3x - 4y + 10 = 0$$

Aplikasi Persamaan garis lurus

1. Pantulan Sinar

Sinar X datang pada suatu bidang datar tak tembus. Sinar datang mengikuti persamaan x+y=1, dari kuadrat dua dan terpantul oleh sumbu x seperti gamabr dibawah. Sudut pantul sama besar dengan sudut datang. Buatlah persamaa utnuk sinar pantul.



Gambar 7. 4. Pantulan sinar X

Jawaban

Sinar X yang memantul pada soal diatas memenuhi sifat garis lurus saling tegak lurus. Terlebih dahulu dihitung gradien sinar datang.

$$m_1 = \frac{-1}{1} = -1$$

Maka gradien sinar datang =

$$m_2 = \frac{-1}{m1}$$

$$= \frac{-1}{-1} = 1$$

Persamaan sinar pantul

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 1(x - 1)$$

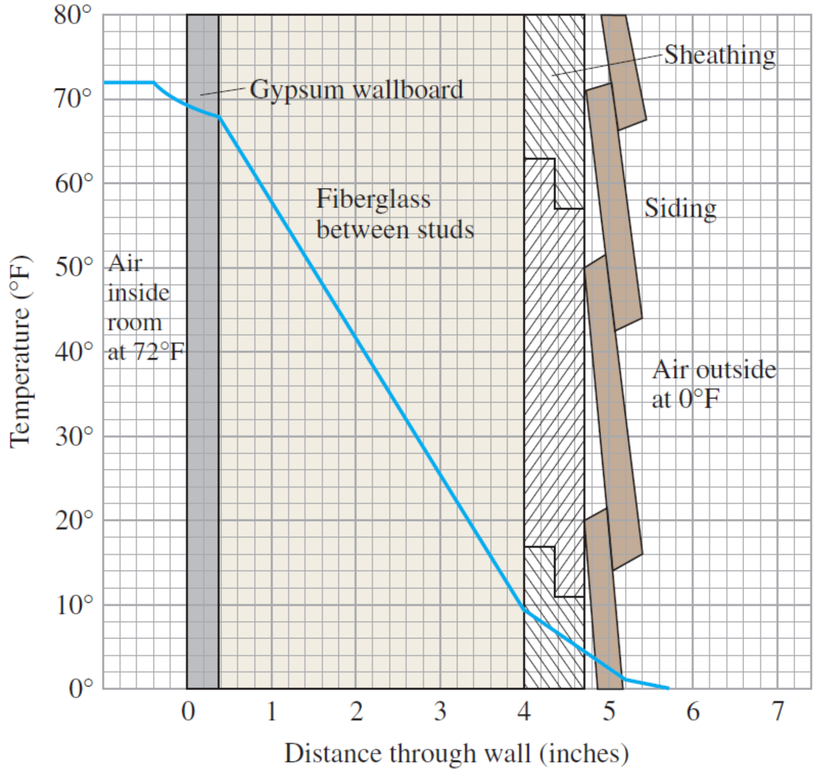
$$y = x - 1$$

$$x - y = 1$$

2. Menghitung daya isolasi bahan

Seorang engineer diminta mengukur kekuatan isolasi bahan untuk menahan suhu panas dalam ruangan agar tidak terbuang saat musim dingin, Bahan isolasi terditi dari papan gypsum, fiberglass, dan sheating, Udara dalam ruangan adalah 70^o F dan udara luar adalah 0^o F. Sebutkan kekuatan bahan dalam mengisolasi suhu.

JAWABAN



Kekuatan isolasi dapat dilihat dari gradien tiap bahan ;

$$m \quad = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Maka tiap bahan dapat dhitung:

$$m_{\text{gypsum}} = \frac{70-68}{0{,}4-0} = 5\ {}^{o}F/inch$$

$$m_{\text{fiberglass}} = \frac{68-10}{4-0{,}4}$$

$$= \frac{58}{3{,}6} \quad = 16{,}1\ {}^{o}F/inch$$

$$m_{\text{sheathing}} = \frac{10-4}{4{,}7-4}$$

$$= \frac{6}{0{,}7} \quad = 8{,}57\ {}^{o}F/inch$$

Dari ketiga bahan isolasi panas tersebut maka dapat disimpulkan bahwa fiberglass merupakan isolator panas yang baik, karena dapat menjaga panas tidak keluar ruangan pada musim dingin.

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

1. Buatlah persamaan garis lurus dalam bentuk Ax+By+C=0 dengan dengan ketentuan sebagai berikut:
   a. Melalui (1,2) dan gradient NIM
   b. Melalui (NIM, 4) dan gradient 10
   c. Melalui (-4,5) dan gradient 8
   d. Melalui (2,-7) dan gradient NIM
   e. Melalui titik (NIM,2) dan (4, NIM)

2. Buat persamaan garis lurus yang melalui titik (NIM,10) dan sejajar dengan garis 6x – 3y = 5
3. Buatlah persamaan garis lurus dalam bentuk Ax+By+C=0 dengan dengan ketentuan sebagai berikut:
   a. Melalui (2,2) dan gradient -3
   b. Melalui (3,2) dan gradient 4
   c. Melalui (-4,5) dan gradient 8
   d. Melalui (2,-7) dan gradient NIM
   e. Melalui titik (NIM,2) dan (4, NIM)
4. Buat persamaan garis lurus yang melalui titik (NIM,10) dan sejajar dengan garis $6x - 3y = 5$
5. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui (3,2) dan parallel dengan garis 2x+5y-15=0.
6. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui (NIM,-3) dan parallel dengan garis 30x - 100y-2000 = 0
7. Tentukan persamaan garis l yang melalui (1,2) dan tegak lurus dengan garis 4x - 5y-18=0. persamaan garis g.
8. Tentukan persamaan garis i yang melalui (1, NIM) dan tegak lurus dengan garis 4x - 5y-18=0. persamaan garis g.

D. DAFTAR PUSTAKA

Thomas (2005), Calculus s11e with Differential Equations, Pearson Wesley

Weltner, Klaus (2009), Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide, Springer

PERTEMUAN 8

PERSAMAAN LINGKARAN

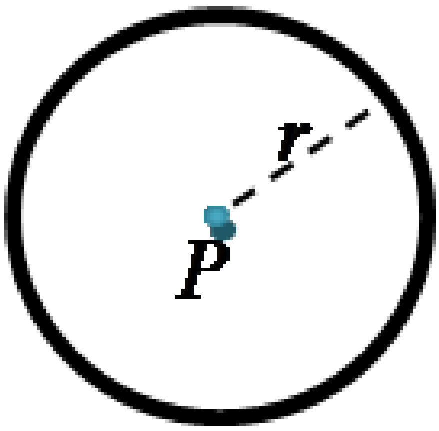
A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan dgn mengenai Persamaan Lingkaran.

B. URAIAN MATERI

1. Lingkaran

Lingkaran merupakan tempat kedudukan titik-titik pada sebuah bidang dengan jarak sama terhadap suatu titik tertentu. Selanjutnya titik tertentu tersebut disebut pusat lingkaran (P), sedangkan jarak titik terhadap P disebut jari-jari lingkaran. Gambar dibawah ini menunjukkan lingkaran dengan pusat P dan jari-jari r.



Gambar 8. 1. Lingkaran dengan pusat P

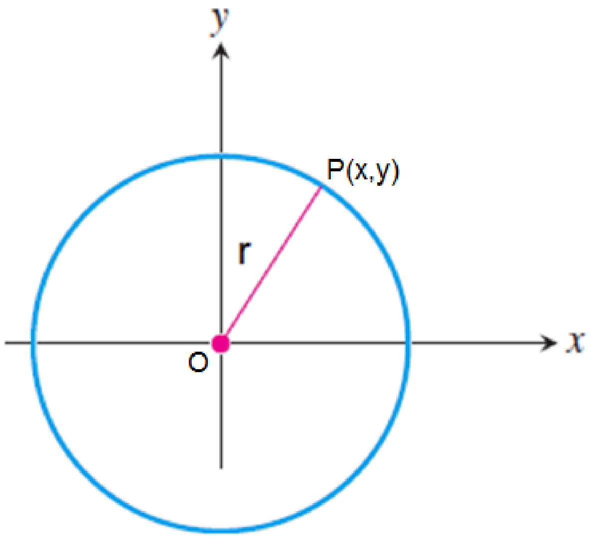
Diameter (d) = garis lurus yang melalui pusat lingkaran = 2 r

Keliling Lingkaran = $2\pi r$

Luas Lingkaran = πr^2

a. Persamaan lingkaran yang berpusat O (0, 0) dan jari-jari r

Untuk membuat persamaan lingkaran dengan pusat (0,0) maka dijelaskan dalam uraian beberikut:



Gambar 8. 2. Lingkaran dengan pusat O (0,0).

Pada lingkaran diatas mempunyai jari-jari atau ***r = OP*, maka** Jarak dari O (0, 0) ke titik P (x, y) adalah.

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

Karena d = r maka

$$r = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}$$

Sehingga persamaan lingkaran dengan pusat O (0, 0) dan jari-jari r adalah $x^2 + y^2 = r^2$

Contoh :

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat O (0, 0) dan jari-jari 7

Jawab :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = 7^2$$

$$x^2 + y^2 = 49$$

b. Persamaan lingkaran yang berpusat O (0, 0) dan melalui A(x,y)

Dapat dijelaskan dengan contoh berikut:

Lingkaran berpusat O (0,0) melalui A (2,3). Berapa jari jari lingkaran tersebut dan persamaan lingkarannya.

Jawab :

1) Menghitung jari jari lingkaran

   $x^2 + y^2 = r^2$

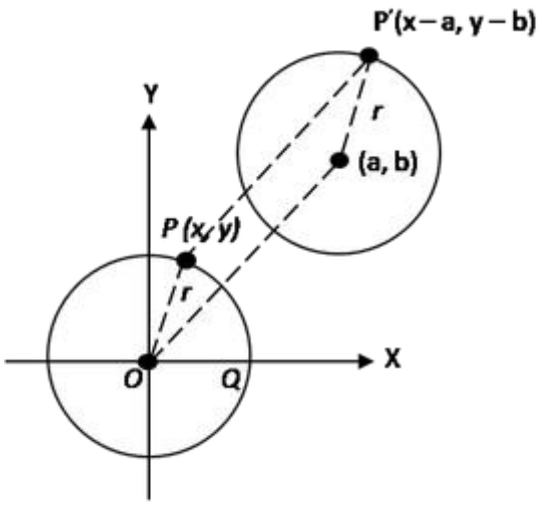
   $2^2 + 3^2 = r^2$

   $13 = r^2$ ---→ $r = \sqrt{13}$

2) maka persamaan lingkarannya adalah:

$$x^2 + y^2 = 13$$

c. Persamaan lingkaran yang berpusat P (a, b) dan berjari-jari r



Gambar 8. 3. Lingkaran dengan pusat P (a,b).

Persamaan lingkaran yang berpusat *P(a, b)* dan berjari-jari r dapat diperoleh dari persamaan lingkaran yang berpusat di (0, 0) dan berjari-jari r dengan menggunakan teori pergeseran. Jika pusat (0, 0) bergeser *(a, b)* maka titik (x, y) bergeser ke *(x + a, y + b).*

Kita peroleh persamaan.

$$x' = x + a \rightarrow \quad x = x' - a$$
$$y' = y + b \rightarrow \quad y = y' - b$$

Persamaan lingkaran menjadi

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Contoh 1 :

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (1, 3) dan berjari-jari 5

Jawab :

Pusat (1, 3) maka *a* = 1 dan b = 3

Dibuat sebagai berikut :

$(x - 1)^2 + (y – 3)^2 = 5^2$

$x^2 + - x + (-1)^2 + y^2 – 6y + 9 = 25$

$x^2 + y^2 – x – 6y + 1 + 9 - 25 = 0$

$x^2 + y^2 – x – 6y + - 15 = 0$

d. Mencari pusat dan jari jari dari persamaan lingkaran dalam bentuk

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Maka P (a,b)

$a = \frac{-A}{2}$ $\qquad$ $b = \frac{-B}{2}$

dan jari jari

$$r = \sqrt{\left(\frac{-A}{2}\right)^2 + \left(\frac{-B}{2}\right)^2 - C}$$

Contoh:

1) Lingkaran dengan bentuk $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ carilah pusat dan jari jarinya

   Jawab :

   A = 4, B = -6, dan C = -3

   Maka

a= -4/2 =-2 ,

b = - (-6)/2 = 3

dan r

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2 - -3}$$

$$r = \sqrt{16} = 4$$

Jadi pusat lingkaran P(-2,3) dan jari jari 4

2) Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$$

Jawab :

A = -4, B = 2, dan C = -20

Pusat : $\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) = \left(-\frac{1}{2}(-4), -\frac{1}{2}(2)\right) = (2, -1)$

$r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}(-4)^2 + \frac{1}{4}(2)^2 - 20}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}(16) + \frac{1}{4}(4) + 20}$

$= \sqrt{4 + 1 + 20}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

1. Tentukan persaman lingkaran dengan:
   a. Pusat (0,0) jari jari NIM
   b. Pusat (3,4) jari jari NIM
   c. Pusat (3,4) jari jari √5
   d. Pusat (2,3) melalui (NIM,0)
   e. Diameter lingkaran yang melalui titik MN, untuk M(1,0) dan B(3,NIM)
   f. Pusat (4,NIM) dan menyinggung sumbu x
   g. Pusat (-2,NIM) dan menyinggung sumbu y

2. Dari persamaan lingkaran dibawah ini carilah pusat dan jari-jarinya

   a. $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0}$
   b. $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0}$
   c. $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0}$
   d. $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 4x - \left(\frac{9}{4}\right) = 0}$
   e. $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0}$
   f. $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2x = 3}$

D. DAFTAR PUSTAKA

Thomas (2005), Calculus 11e with Differential Equations, Pearson Wesley

Weltner, Klaus (2009), Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide, Springer

PERTEMUAN 9

FUNGSI DAN GRAFIKNYA

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menguasai materi mengenai Fungsi dan Grafiknya dalam matematika dan kegunaannya.

B. URAIAN MATERI

1. Fungsi dan Grafiknya

Pengertian fungsi adalah hal penting dalam kalkulus, karena fungsi menggambarkan hubungan hubungan dalam dunia nyata yang dinyatakan dalam bentuk matematika. Misalkan temperatur didih air tergantung dari ketinggian daerah. Keuntungan sebuah perusahaan tergantung dengan banyaknya barang yang di produksi. Keuntungan investtor pasar saham tergantung banyaknya modal yang diinvestasikan dan kondisi pasar.

Definisi **Fungsi**

Fungsi dari himpuan D ke himpunan Y adalah aturan yang menandai hubungan unit meliputi unit tersebut.

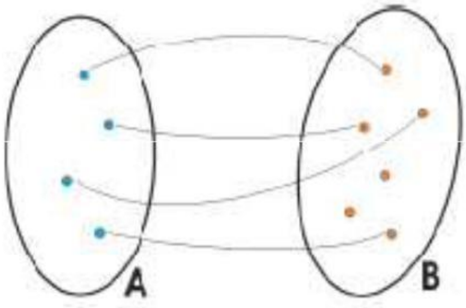
Gambar 9. 1. Diagram fungsi

Gambar 9.1 menunjukkan diagram fungsi yang memetakan input x terhadap output f(x).Himpunan D dari semua nilai input yang mungkin disebut domain fungsi. Sekumpulan dari semua nilai f (x) karena x bervariasi di seluruh D disebut rentang fungsi. Jangkauan mungkin tidak termasuk setiap elemen dalam set Y. Domain dan rentang fungsi dapat berupa set objek apa pun, tetapi seringkali dalam kalkulus mereka adalah set bilangan real.

Pikirkan fungsi f sebagai jenis mesin yang menghasilkan nilai output f (x) di dalamnya rentang setiap kali kita memberinya nilai input x dari domainnya (Gambar 1.22). Fungsinya

Fungsi dan Grafiknya

Penjelasan fungsi dapat dijelaskan oleh dua buah himpunan yaitu *A* dan *B seperti diperlihatkan pada gambar dibawah.* himpunan. Fungsi dari *A* ke *B* didapatkan dari hubungan hubungan yang menjadi aturun yang memasangkan) setiap elemen di *A* dengan tepat satu elemen di *B*.



Gambar 9.2. Himpunan A ke B

Penulisan notasi fungsi adalah sebagai berikut :

$$y = f(x)$$

Dimana y adalah variabel terikat (*dependent variable*) dan x adalah variabel bebas (*independent variable*).

Jenis fungsi:

Beragam fungsi dalam kalkulus yang perlu dipelajari antara lain fungsi fungsi berikut ini:

a. Fungsi konstan: $f(x) = k$ dengan k bilangan konstan
b. Fungsi linear : $f(x) = ax + b$
c. Fungsi kuadrat : $f(x) = ax^2 + bx + c$
d. Fungsi eksponensial : $f(x) = e^x$
e. Fungsi logaritma : $f(x) = \log x$

Notasi atau tanda fungsi

Untuk menyatakan fungsi yang mengawankan anggota-anggota himpunan x (domain) terhadap anggota-anggota y (kodomain) maka dijelaskan dengan notasi atau tanda fungsi sebagai berikut:

$\mathrm{f(x)}$ adalah $\mathrm{X \rightarrow Y}$

$\mathrm{f: x \rightarrow 3\,x}$ dibaca *f* mengawankan *x* terhadap 3*x*

$\mathrm{f: x} \rightarrow 4x^2 - 3x + 7$ dibaca f mengawankan *x* terhadap $4x^2 - 3x + 7$

2. Macam-Macam Fungsi

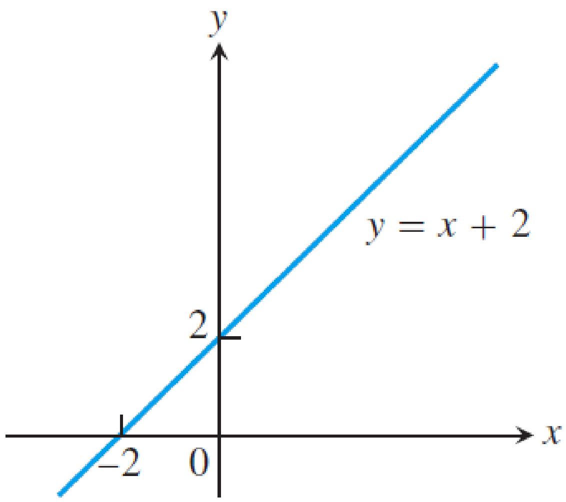
a. Fungsi linear

Rumus umum fungsi linear adalah :

$f(x) = ax + b$

Dimana a adlah gradien atau perbandingan antara selisih *y* terhadap selisih *x; b* adalah besar pergeserannya dari fungsi tersebut.

Grafik fungsi linear merupakan garis lurus. Untuk menggambarnya diperlukan dua titik yang melalui garis tersebut kemudian dihubungkan secara lurus.



Gambar 9.3. Grafik fungsi linier y = x+2

b. Fungsi kuadrat

Rumus umum fungsi kuadrat

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Contoh :

a. $f(x) = x^2$
b. $f(x) = (x + 1)^2$ diperoleh dengan menggeser fungsi $f(x) = x^2$ kekiri satu satuan.
c. $f(x) = (x + 1)^2 + 3$diperoleh dengan menggeser fungsi $f(x) = (x + 1)^2$ ke atas tiga satuan.

Contoh :

$f(x) = x^2 + 2x + 4$ $a = 2$ dan $b = 4$

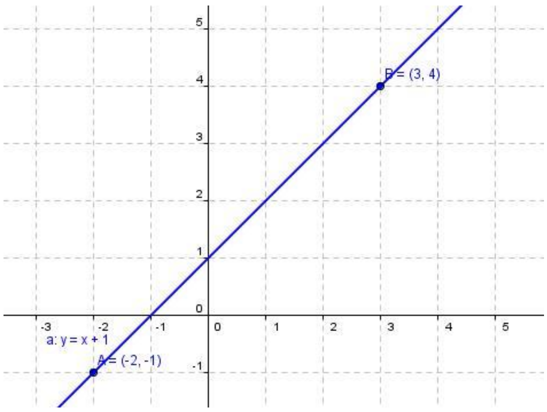
sehingga $c = a/2 = 2/2 = 1$ dan $d = b – (a/2)^2 = 4 – 1^2 = 3$.

Jadi, $f(x) = x^2 + 2x + 4$ bisa juga dinyatakan dalam bentuk $f(x) = (x+1)^2 + 3$ Akibatnya, untuk menggambar $f(x) = x^2 + 2x + 4$ dapat dengan langkah-langkah berikut:

c. Menggambar Grafik Fungsi

Untuk menggambar grafik fungsi maka terlebih dulu dilakukan pembuatan tabel yang memuat pasangan nilai- nilai dari pereubah fungsi yang mewakili suatu titik. Fungsi linier atau garis lurus membutuhkan diperlukan minimal dua titik. Sedang untuk menggambar fungsi kuadrat dibutuhkan minimal tiga titik.

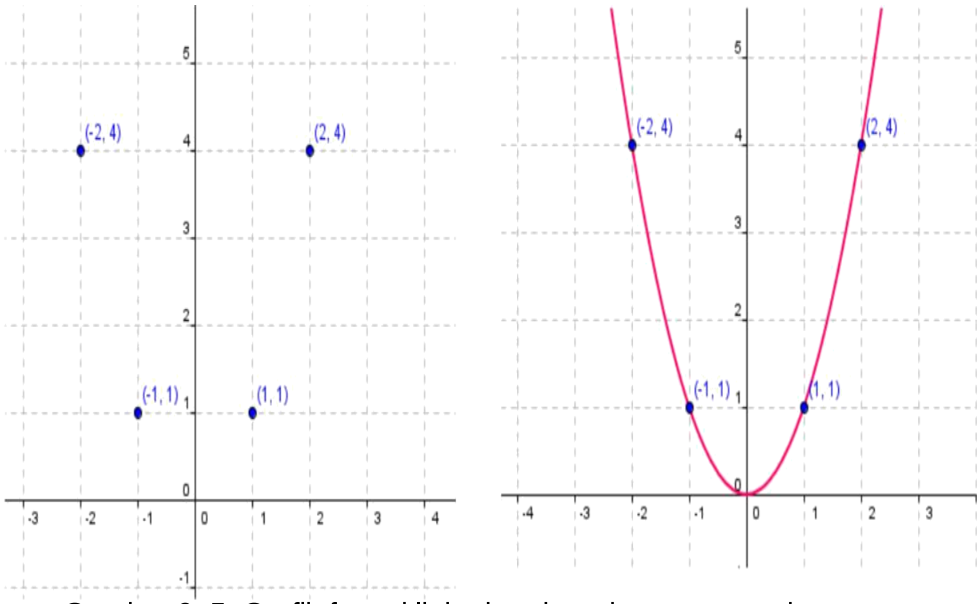
Contoh : Akan digambargambar grafik fungsi $y = x + 1$ atau $f(x) = x + 1$ sebagai berikut.



x	$f(x) = x + 1$
-2	1
-1	0
0	1
3	4

Gambar 9. 4. Grafik fungsi linier $f(x) = x + 1$ dan cara membuatnya.

Contoh beriktut adalah grafik fungsi kuadrat $f(x) = x^2$ yang digambar pada pada koordinat kartesius sebagai berikut:



Gambar 9. 5. Grafik fungsi linier kuadrat dan cara membuatnya.

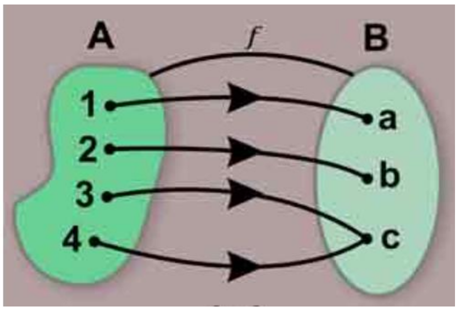
Titik titik yang dibentuk dari x dan y kemudian dihubungkan.

3. Jenis Fungsi Menurut Relasi

a. Surjektif

Fungsi f disebut surjektif jika setiap anggota kodomain mempunyai kawan dengan
setidaknya satu anggota domain.

Contoh :



Gambar 9. 6. Fungsi surjektif

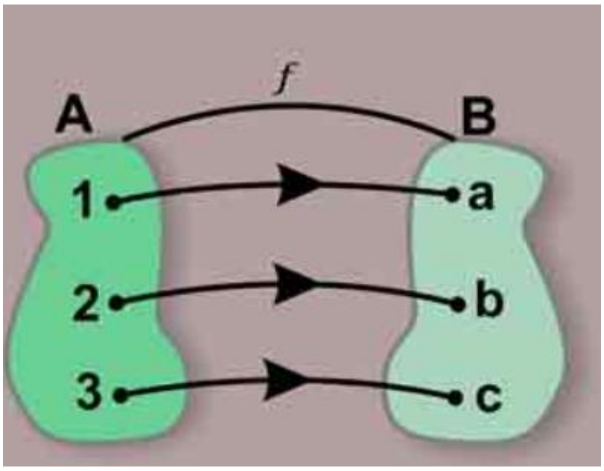
Untuk bisa memahami pengertian fungsi surjektif, perhatikan himpunan A = {1, 2, 3, 4} dan himpunan B = {a, b, c}. Dari himpunan A ke himpunan B ditentukan fungsi-fungsi f dan g dalam bentuk pasangan berurutan sebagai berikut.

f : A → B dengan f = {(1, a), (2, b), (3, c), (4, c)}

b. Injektif

Fungsi f disebut injektif jika anggota kodomainnya hanya berkawan dengan tepat satu anggota domain. $\square y_1$, y_2 $\square Y$,x_1 ,x_2 $\square$ X , f $\square\square x_1$ $\square\square\square$ y_1 , f $\square$ x_2 $\square\square\square\square y_2$, y_1 $\square$ $y_2 \Rightarrow x_1$ $\square$ x_2 .

Contoh dari fungsi injektif, dapat dilihat pada himpunan A = {1, 2, 3} dan himpunan B = {a, b, c}. Dari himpunan A ke himpunan B ditentukan fungsi f dan fungsi g dalam bentuk pasangan terurut sebagai berikut. f : A → B dengan f = {(1, a), (2, b), (3, c)}

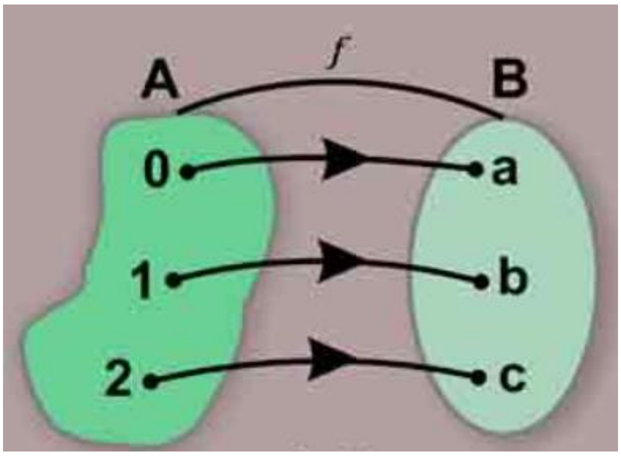


Gambar 9. 7. Fungsi injektif

c. Bijektif

Fungsi f disebut bijektif jika fungsi memenuhi sifat fungsi surjektif sekaligus injektif.

Fungsi f : A → B dengan A = {0, 1, 2) dan B = {a, b, c}. Fungsi f dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut f = {(0, a), (1, b), (2, c)} dengan diagram panahnya diperlihatkan pada gambar (a) di atas. Perhatikan bahwa fungsi f adalah fungsi surjektif dan juga fungsi injektif. Fungsi f yang bersifat surjektif dan juga injektif disebut dengan fungsi bijektif (bi = dua) atau fungsi korespondensi satu-satu



Gambar 9. 8. Fungsi bijektif

Contoh dari fungsi injektif, dapat dilihat pada himpunan A = {1, 2, 3} dan himpunan B = {a, b, c}. Dari himpunan A ke himpunan B ditentukan fungsi f dan fungsi g dalam bentuk pasangan terurut sebagai berikut. f : A → B dengan f = {(1, a), (2, b), (3, c)}

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

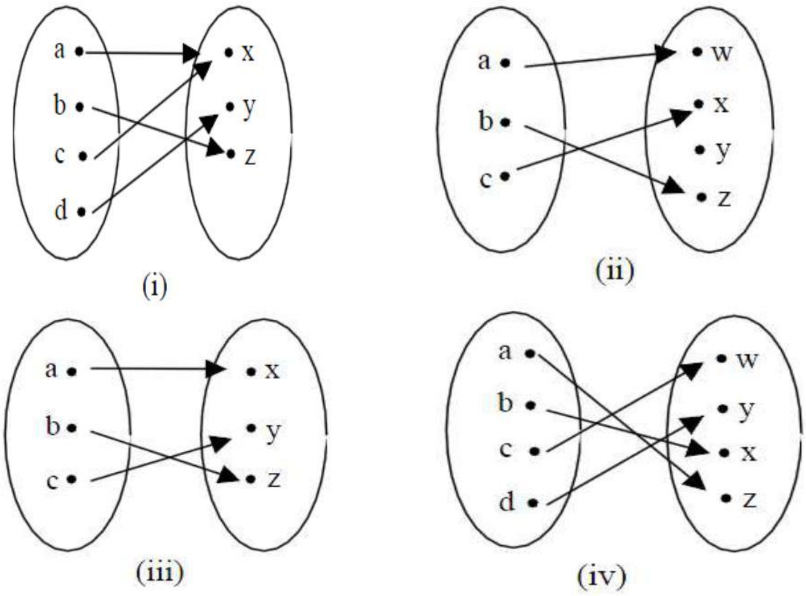
Cari domain dan range soal soal berikut:

1. $f(x) = 1 + x^2$
2. $f(t) = \frac{1}{t}$
3. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$
4. $g(t) = \frac{1}{1+t}$
5. $h(t) = \frac{1}{1-5t}$

Selesaikan soal berikut

NIM = angka terakhir Nomor Induk Mahasiswa , yang bukan 0

6. f(x)= NIMx , Carilah dan gambarkan f(-2) sd f(2);
7. f(x) = $2x^2 + 4x$ + NIM ; cari f(-1) dan f(0) dan f(2); Gambarkan
8. Gambarlah fungsi f(x) = $2x^2 + 4x + 5$
9. Tentukan jenis dari fungsi berikut :



(i) (ii) (iii) (iv)

Cari domain dan range soal soal berikut:

10. $f(x) = 1 + x^2$
11. $f(t) = \frac{1}{t}$
12. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$
13. $g(t) = \frac{1}{1+t}$
14. $h(t) = \frac{1}{1-5t}$

D. DAFTAR PUSTAKA

Thomas (2005), Calculus 11e with Differential Equations, Pearson Wesley

Weltner, Klaus (2009), Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide, Springer

PERTEMUAN 10

FUNGSI DAN KOMPOSISI

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menguasai materi mengenai fungsi dan komposisi dalam matematika dan kegunaannya.

B. URAIAN MATERI

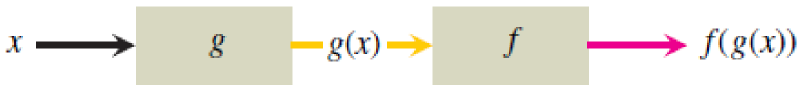
1. Fungsi dan Komposisi

Komposisi fungsi adalah metode penggabungan dua fungsi atau lebih secara berurutan sehingga menghasilkan sebuah fungsi baru.

Jika f dan g adalah fungsi, maka komposisi fungsi f ke g di definisikan sebagai berikut.

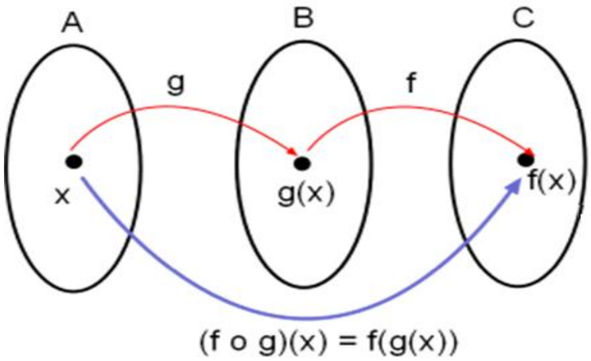
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 10. 1. gabungan fungsi f(x) dan g (x)

Dari Gambar 10.1 terlihat pemetaan x pada fungsi g menghasilkan g(x) , dan pemetaan g(x) pada fungsi f menghasilkan f(g(x))



Gambar 10. 2. Fungsi (f o g) yang didapatkan dari gabungan fungsi f(x) dan g (x)

Contoh komposisi fungsi:

Diketahui $f(x) = x^2$ dan $g(x)=x+1$,

maka $(f \bullet g)(x) = (f(g(x)) = f(x+1)$

$= (x+1)^2$

$= x^2 + 2x + 1$

$(g \bullet f)(x) = (g(f(x)) = g(x2)$

$= x^2+1$

2. Operasi Pada Fungsi

a. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

b. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

c. $(f \bullet g)(x) = f(x) \bullet g(x)$

d. $(g \bullet f)(x) = g(x) \bullet f(x)$

e. $(f \circ f)(x) = f(f(x))$

f. $(g \circ g)(x) = g(g(x))$

Contoh

$$f(x) = \frac{x-2}{5} \text{ dan } g(x) = \frac{x^2}{5}$$

Carilah .

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$$= \frac{x-2}{5} + \frac{x^2}{5}$$

$$= \frac{x^2 + x - 2}{5}$$

2. $f(x) - 5\,g(x) = \frac{x-2}{5} - 5 \cdot \frac{x^2}{5}$

$$= \frac{-5x^2 + x - 2}{5}$$

Contoh

Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = 3x$; Maka

a. $(f+g)(x) = \sqrt{x} + 3x$

b. $(f-g)(x) = \sqrt{x} - 3x$

c. $(f \circ g)(x) = \sqrt{3x}$

d. $(g \circ f)(x) = 3\sqrt{x}$

e. $(f \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$

f. $(g \circ g)(x) = 3(3x) = 9x$

3. Komposisi Fungsi tidak dapat balik

Suatu komposisi fungsi tidak dapat balik, seperti dijelaskan dalam contoh berikut ini:

$$f(x) = 2x + 3 \text{ dan } g(x) = \sqrt{x}$$

$$(f \circ g)(x) = (f\big(g(x)\big) = f\big(\sqrt{x}\big) = \ 2\sqrt{x} + 3$$

Sehingga

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

Contoh

Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x + 1$; Carilah

a. $(f \circ g)(x)$

b. $(f \circ g)(x)$

c. $(f \circ g)(x)$

d. $(f \circ g)(x)$

Jawaban

a. $(f \circ g)(x) = (f(g(x)) \quad = \sqrt{x+1}$ dengan daerah asal (domain) = $[-1, \infty\ ]$

b. $(g \circ f)(x) = (g(f(x)) \quad = \sqrt{x} + 1$ dengan domain = $[0, \infty\ ]$

c. $(f \circ f)(x) = (f(f(x)) \quad = \sqrt{\sqrt{x}} \quad = \sqrt[4]{x}$ dengan domain = $[0, \infty\ ]$

d. $(g \circ g)(x) = (g(g(x)) \quad = (x + 1) + 1 \ = x + 2$ dengan domain = $[-\infty, \infty\ ]$

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

1. Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x + 1$, maka selesaikan :
   a) $f(x) \circ g(x)$
   b) $g(x) \circ f(x)$
   c) $f(x) \circ f(x)$
   d) $g(x) \circ g(x)$
2. Selesaikan soal berikut,
   $f(x) = x^2 + 2x + 5$ dan $g(x) = 3x$ maka carilah
   a) $f(x) \circ g(x)$
   b) $g(x) \circ f(x)$
   c) $f(x) + g(x)$
   d) $g(x) - f(x)$
3. Diketahui f(x) = x2 + 1 dan g(x) = 2x − 3, maka (f o g)(x) = ….
   Diketahui fungsi f(x) = 3x − 1 dan g(x) = $x^2 + 2x + 5$. Nilai dari komposisi fungsi $(f \circ g)(1)$ dan $(g \circ f)(2)$

4. Diberikan dua buah fungsi:
   f(x) = 2x − 3
   g(x) = x^2 + 2x + 3
   Jika (f o g)(a) = 33, tentukan nilai dari 5a

D. DAFTAR PUSTAKA

Thomas - Calculus 11e with Differential Equations HQ

Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide

PERTEMUAN 11

FUNGSI INVERS

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menguasi materi fungsi invers dalam matematika dan kegunaannya.

B. URAIAN MATERI

1. Definisi Invers Fungsi:

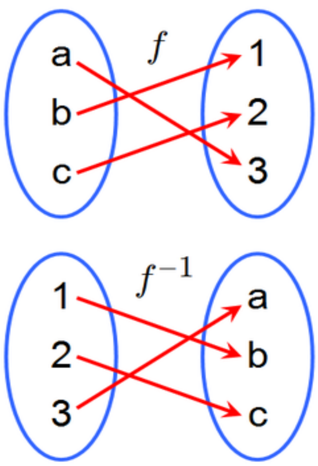
Fungsi Invers (fungsi kebalikan) adalah fungsi yang merupakan kebalikan aksi dari suatu fungsi.

Misalnya f adalah sebuah fungsi dari himpunan A ke himpunan B. Dan hubungan A ke B satu satu, maka invers fungsi dari f definisikan sebagai f^{-1}.

Dimana jika fungsi g dari himpunan B ke himpunan A sedemikian, sehingga g(f(a)) = a dan f(f(b)) = b untuk setiap a dalam A dan b dalam B, maka g disebut fungsi invers dari f. Suatu bilangan itu jika dioperasikan dengan inversnya, maka akan menghasilkan identitas atau 1. Untuk lebih memahami invers dari suatu maka dilihat pada Gambar 11.1

Diperlihatkan bahwa domain (a,b,c) dimasukkan dalam fungsi f menghasilkan (1,2,3).

Sebaliknya jika (1,2,3) dimasukkan dalam suatu fungsi maka hasilnya (a,b,c), fungsi pembalik tersebut adalah invers dari fungsi f.



Gambar 11. 1. Hubungan fungsi dan inversnya.

Jika f adalah fungsi satu satu pada domain D dalam range R. Maka invers fungsi f^{-1} didefinisikan sebagai berikut:

$$f^{-1}(a) = b \quad \text{jika} \quad f(b) = a$$

Domain f^{-1} adalah R dan range dari f^{-1} adalah D.

2. Menemukan Fungsi Invers

Invers dari fungsi f adalah relasi kebalikan dari fungsi f. Maka hubungan suatau fungsi f akan mengkawankan kodomain dari fungsi f terhadap domain dari fungsi f dengan pasangan yang sama.

Contoh

Carilah invers dari fungsi

$$\boldsymbol{f(x) = x + 5}$$

Jawab

$$f(x) = x + 5$$

rubahlah .

$y = x + 5$

$-x = -y + 5$

$x = \quad y - 5$

$\downarrow \quad \downarrow$

$f^{-1}(x) = x - 5.$

Membuktikan hasil invers:

$f(x) = x + 5$

$x = 1 ----> f(x) = 1 + 5 = 6$

Invers dari f(x) adalah

$f^{-1}(x) = x - 5$

maka

$f^{-1}(6) = 6 - 5 = 1$

terbukti

.

Contoh 2

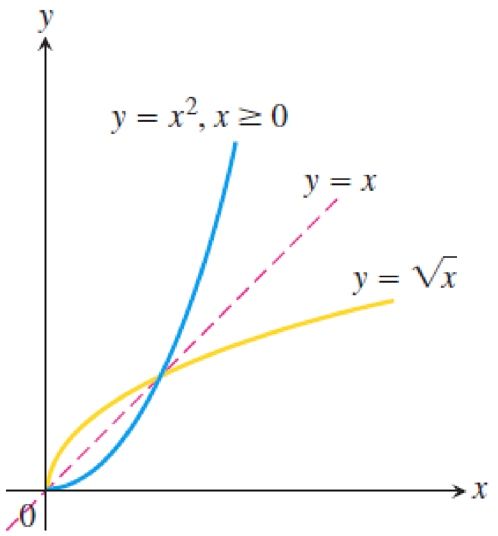
Carilah invers fungsi berikut :

$y = x^2$, x≥0

Jawab

$$\sqrt{y} = x^2$$

Fungsi tersebut dan hasil inversnya dapat digambarkan dalam Gamba



Gambar 11. 2. Grafik fungsi dan inversnya.

Contoh 3

Carilah invers fungsi berikut:

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$; untuk x $\neq -d/c$

Pertama ditulis kembali

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$
$$y(cx + d) = ax + b$$
$$ycx + yd = ax + b$$
$$x(yc - a) = -yd + b$$
$$x = \frac{-dy + b}{cy - a}$$

Sehingga

$$f^{-1} = \frac{-dx + b}{cx - a}$$

Contoh 4

Carilah fungsi invers soal berikut :

$$f(x) = \frac{4x - 3}{2x + 1}$$

Jawab

$$f^{-1}(x) = -\frac{-x - 3}{2x - 4}$$

C. SOAL LTIHAN/TUGAS

1. Tentukan fungsi invers dari $f(x) = \frac{4x - 3}{2x + 1}$

2. Invers dari fungsi $f(x) = \frac{3x - 2}{5x + 8}, x \neq -\frac{8}{5}$

3. Tentukan fungsi invers dari $f(x) = \frac{8x + 3}{2 - 4x}$

4. Jika f(x) = 2x - 6 maka carilah $f^{-1}(x)$
5. Fungsi invers didefinisikan sebagai f(x) = (x - 3) / (2x + 5), x ≠ - 5/2 dan $f^{-1}(x)$ adalah invers dari fungsi f(x). Rumus dari $f^{-1}(x)$ adalah...

D. DAFTAR PUSTAKA

1. Thomas (2005), Calculus 11e with Differential Equations, Pearson Wesley

2. Weltner, Klaus (2009), Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide, Springer

PERTEMUAN 12

LIMIT DAN FUNGSI KONTINU

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menguasi materi limit dan fungsi kontinu dalam matematika dan kegunaannya.

B. URAIAN MATERI

1. Pengertian Limit

Konsep limit mempunyai peranan yang sangat penting di dalam kalkulus dan berbagai bidang matematika. Sehingga ini sangat perlu untuk dipahami. Konsep Limit adalah ide sentral yang membedakan kalkulus dari aljabar dan trigonometri. Sangat penting untuk menemukan garis singgung ke kurva atau kecepatan Sebuah Objek.

Dalam bab ini kita mengembangkan batas, pertama secara intuitif dan kemudian secara formal. Kami menggunakan batasan untuk menggambarkan cara fungsi f bervariasi. Beberapa fungsi bervariasi terus menerus; perubahan kecil di x hanya menghasilkan perubahan kecil dalam f (x). Fungsi lain dapat memiliki nilai yang melompat atau bervariasi tidak menentu. Gagasan limit memberikan cara yang tepat untuk membedakan antara perilaku ini. Aplikasi geometris menggunakan batas untuk menentukan garis singgung ke kurva mengarah sekaligus ke konsep penting turunan dari suatu fungsi.

2. Limit dalam kehidupan sehari-hari

Limit pada pelari cepat 100 m.

Berikut ini contoh limit. Waktu paling cepat yang ditempuh oleh juara juara dunia sprint 100 m dapat di catat sebagai berikut :

Waktu (detik)	Nama atlet	Tanggal
10,6	Don Lippincott	6 Juli 1912
10,4	Charlie Paddock	23 April 1921

Waktu (detik)	Nama atlet	Tanggal
10,3	Percy Williams	9 Agustus 1930
10,2	Jesse Owens	20 Juni 1936
10,1	Willie Williams	3 Agustus 1956
10,0	Armin Hary	21 Juni 1960
9,9	Jim Hines	21 Juni 1960
9,95	Jim Hines	14 Oktober 1968
9,93	Calvin Smith	3 Juli 1983
~~9,83~~ [2]	Ben Johnson	30 Agustus-1987
~~9,79~~ [2]	Ben Johnson	24 September-1988
9,92	Carl Lewis	24 September 1988
9,90	Leroy Burrell	14 Juni 1991
9,86	Carl Lewis	25 Agustus 1991
9,85	Leroy Burrell	6 Juli 1994
9,84	Donovan Bailey	27 Juli 1996
9,79	Maurice Greene	16 Juni 1999
~~9,78~~[3]	Tim Montgomery	14 September-2002
9,77	Asafa Powell	14 Juni 2005
9,74	Asafa Powell	9 September 2007
9,72	Usain Bolt	31 Mei 2008
9,69	Usain Bolt	16 Agustus 2008
9,58	Usain Bolt	16 Agustus 2009

Waktu makin turun tapi tidak pernah melewati 9

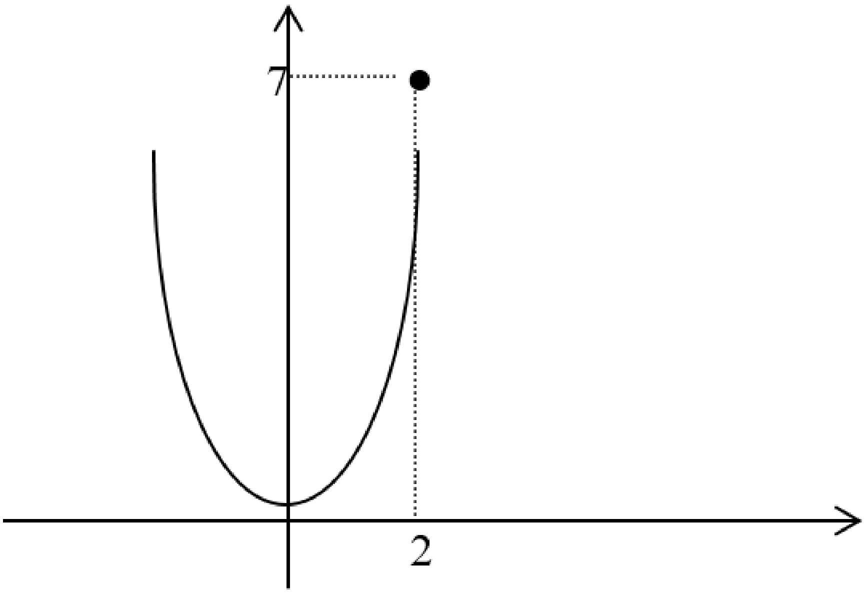
Kesimpulan manusia bumi limit waktu untuk lari 100 m adalah 9 detik.

3. Limit fungsi

Untuk menyelesaikan limit fungsi perhatikan hal berikut:

Contoh 1.

Suatu fungsi $f(x) = x^2 + 3$. Grafik $y = f(x)$ diberikan pada Gambar.1 di bawah ini.



Gambar 12. 1. Kurva limit

Hasil dari penyelasian fungsu $f(x)$ apabila x cukup dekat dengan 2 dapat dilihat dengan perhitungan secara numeris. Seperti diperlihatkan pada tabel 12.1 berikut.

Tabel Simulasi Kuadrat

x	$f(x) = x^2 + 3$	x	$f(x) = x^2 + 3$
3	12	1,5	5,25
2,05	7,2025	1,95	6,8025
2,001	7,004001	1,999	6,996001
2,0001	7,00040001	1,9999	6,99960001

Dari tabel tersebut diatas terlihat bahwa apabila *x* cukup dekat dengan 2, maka $f(x)$ mendekati 7. Karena apabila dihitung secara langsung (subtitusi) didapatkan $f(2) = 2^2 + 3 = 7$. Dalam hal ini dikatakan bahwa *limit f*(*x*) *x mendekati* 2 *sama dengan* 7, ditulis:

Untuk $f(x) = x^2 + 3$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 7$$

Contoh 2.

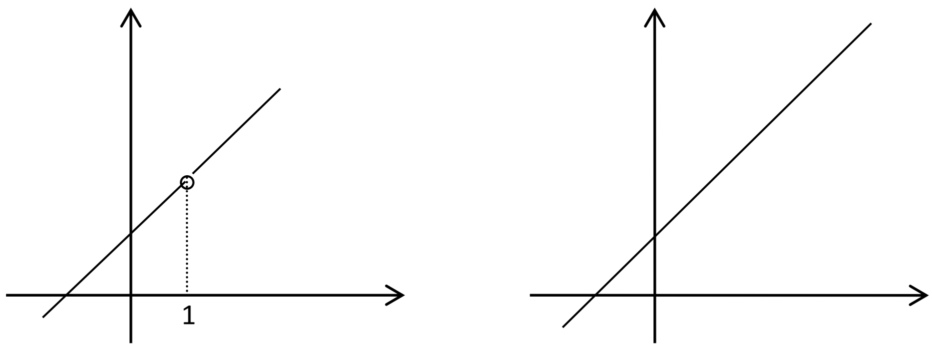
Perhatikan fungsi *f* yang ditentukan oleh rumus:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Jika dilakukan penyelesaian secara langsung dengan memasukkan nilai x pada fungsi tersebut maka fungsi *f(x)* tersebut tidak terdefinisikan di *x* = 1 karena di titik ini nilai *f*(*x*) berbentuk $\frac{0}{0}$. Tetapi masih dapat dipertanyakan apa yang terjadi pada *f*(*x*) bilamana *x* mendekati 1 tetapi $x \neq 1$. Untuk $x \neq 1$. Cara subitusi langsung diatas gagal untuk mendapatkan nilai limit yang sebenarnta. Oleh karena nya dilakukan cara kedua yaitu dengan melakukan penguraian sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1 = g(x)$$
$$f(x) = x + 1 = 1 + 1 = 2$$



(a). $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $D_f = R - \{1\}$ (b). $g(x) = x + 1$, $D_g = R$

Gambar 12. 2. Kurva penyelesaian limit

Dari tabel 1 di bawah terlibat bahwa apabila *x* cukup dekat dengan 1, maka nilai $f(x)$ mendekati 2. Jadi,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Kita dapat juga melakukan penyelesaian dengan metode numeris, seperti ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 12. 2. Penyelesaian limit dengan numerik

x	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1$	x	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1$
2	3	0,5	1,5
1,05	2,05	0,99	1,99
1,001	2,001	0,999975	1,999975
1,00000017	2,00000017	0,9999999	1,9999999

Sehingga dapat diberikan diberikan definisi limit.

Definisi : Limit f(x) x mendekati c sama dengan L, ditulis:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

jika untuk setiap x yang cukup dekat dengan c, tetapi $x \neq c$, maka f(x) mendekati L.

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

1. Carilah $\lim_{x \to 1} x^2 + 3x$.
2. Carilah $\lim_{x \to -2} NIMx^2 + NIMx$.
3. Hitung $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.
4. Tentukan $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1}}$.
5. Tentukan $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x^4-16}$.
6. Tentukan $\lim_{x \to -2} \sqrt{\frac{x+8}{x-1}}$.
7. Tentukan $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x+8}{x-1}\right)\left(\frac{2x+5}{x^2-1}\right)$.
8. Cari $\lim_{h \to 0} \sqrt{h+8}$
9. Selesaikan : $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$
10. Carilah $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} \quad \frac{x^2-9}{x-3} x^2 - 9\ x^2 - 9$

D. DAFTAR PUSTAKA

Thomas (2005), Calculus 11e with Differential Equations, Pearson Wesley

Weltner, Klaus (2009), Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide, Springer

PERTEMUAN 13

ALJABAR HITUNG LIMIT

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu materi mengenai aljabar hitung limit dalam matematika.

B. URAIAN MATERI

1. Teknik Aljabar Untuk Menghitung Limit

Sifat-sifat dasar limit yang dinyatakan dalam beberapa teorema berikut ini sangat diperlukan dalam hitung limit.

Teorema 1

(i) $\lim\limits_{x \to c} A = A$ untuk $A, c \in R$.

(ii). $\lim\limits_{x \to c} x = c$

Teorema 2

Fungsi limit $\lim_{x\to c} f(x)$ dan $\lim_{x\to c} g(x)$ keduanya ada dan $k \in R$ maka berlaku pernyataan-pernyataan berikut:

i. $\lim_{x\to c}\{f(x)\pm g(x)\} = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$

ii. $\lim_{x\to c} kf(x) = k\lim_{x\to c} f(x)$

iii. $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \lim_{x\to c} f(x).\lim_{x\to c} g(x)$

iv. $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, jika $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$

v. *Untuk* $n \in N$: (a). $\lim_{x\to c}(f(x))^n = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^n$

Perhatikan soal dan penyelesaian berikut:

Contoh 1.

(a). $\lim_{x\to 2}(2x^2-7x+6) \underset{\text{(i)}}{=} \lim_{x\to 2} 2x^2 - \lim_{x\to 2} 7x + \lim_{x\to 2} 6$

$= 2\lim_{x\to 2} x^2 - 7\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 6$

$\underset{\text{v.a)}}{=} 2\left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 - 7\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 6$

$\underset{1}{=} 2.2^2 - 7.2 + 6 = 0$

(b). $\lim_{x\to 1} 7x\sqrt{2x-1} \underset{\text{3.2.2 (iii)}}{=} \lim_{x\to 1} 7x.\lim_{x\to 1}\sqrt{2x-1}$

$\underset{\text{3.2.2 (ii)\&(v.c)}}{=} \left(7\lim_{x\to 1} x\right)\sqrt{\lim_{x\to 1}(2x-1)} = (7.1)\sqrt{2.1-1} = 7$

(c). $\lim_{x\to -1}\dfrac{2x+3}{5x+2} \underset{\text{3.2.2(iv)}}{=} \dfrac{\lim_{x\to -1}(2x+3)}{\lim_{x\to -1}(5x+2)} = \dfrac{2.(-1)+3}{5.(-1)+2} = \dfrac{1}{-3}$.

Contoh 2. Hitung

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$$

Penyelesaian: Dilakukan subtitusi langsung ke persamaan, Didapatkan $\frac{0}{0}$; kondisi ini penyebut sama dengan 0, maka tidak dapat digunakan. Oleh karenanya dilakukan penguraian dengan memanfaatkan teknik-teknik aljabar, untuk $x \neq 2$ sehingga diperoleh:

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

Sehingga:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x+2}$$
$$= \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Contoh 3: Tentukan $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^4-16}$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^4-16} = \lim_{x\to -2} \frac{x^3-(-2)^3}{x^4-(-2)^4} = \lim_{x\to -2} \frac{(x-(-2))\left(x^2+x.(-2)+(-2)^2\right)}{(x-(-2))\left(x^3+x^2.(-2)+x.(-2)^2+(-2)^3\right)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{\left(x^2-2x+4\right)}{\left(x^3-2x^2+4x-8\right)} = \frac{4+4+4}{-8-8-8-8} = -\frac{3}{8}.$$

Contoh 4. Carilah

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1}}}.$$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \left(\sqrt{x} + 1\right)$$

$$= \sqrt{1} + 1 = 2.$$

Contoh 5. Tentukan $\lim_{x \to 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right)$.

Penyelesaian: Untuk $x \neq 0$, $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$. Oleh karena itu, untuk $x \neq 0$ berlaku:

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

Hal ini berakibat:

$$-|x| \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

Selanjutnya, karena $\lim_{x \to 0} \left(-|x| \right) = \lim_{x \to 0} |x| = 0$ maka $\lim_{x \to 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$.

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

Untuk soal 1 – 6, tunjukkan pernyataan berikut dengan definisi limit.

1. $\lim\limits_{x \to 1} (x+2) =$
2. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x} =$
3. $\lim\limits_{x \to -1} x^2 =$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x+2}{x-1} =$
5. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} =$
6. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} =$

7. Jika $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ tidak ada.

Untuk soal 8 – 20, hitunglah masing-masing limit jika ada.

8. $\lim\limits_{x \to 5} (x^2 - 20)$
9. $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 3x + 1)$
10. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x+2}{x-3}$
11. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$
12. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$
13. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^6-64}{x^3-8}$
14. $\lim\limits_{s \to -1} \frac{s^4-1}{s^3+1}$
15. $\lim\limits_{u \to 1} \frac{u^{3/2}-1}{1-u}$
16 $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2-\sqrt{x^2+3}}{1-x^2}$
17. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{3-\sqrt{x^2+5}}$
18. $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}$
19. $\lim\limits_{x \to -a} \frac{x^n+a^n}{x+a}$
20. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$
21. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(1/x)-(1/2)}{x-2}$
22. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

D. DAFTAR PUSTAKA

Thomas (2005), Calculus 11e with Differential Equations, Pearson Wesley

Weltner, Klaus (2009), Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide, Springer

PERTEMUAN 14

LIMIT TAK HINGGA

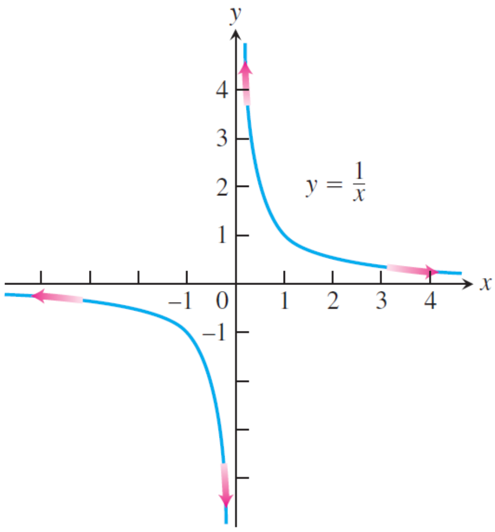
A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menguasi materi limit tak hingga dalam matematika dan kegunaannya dan mampu menyelesaikan soal-soal matematika limit tak hingga dengan benar.

B. URAIAN MATERI

1. Limit Tak Hingga dan Limit Menuju Tak Hingga

Perilaku fungsi ketika nilai-nilai dalam domainnya atau rentang melebihi semua batas yang batas tak hingga dapat dijelaskan sebagai berikut. Misalnya, fungsi ini didefinisikan sebagai y = 1/x, seperti ditunjukkan pada Gambar .



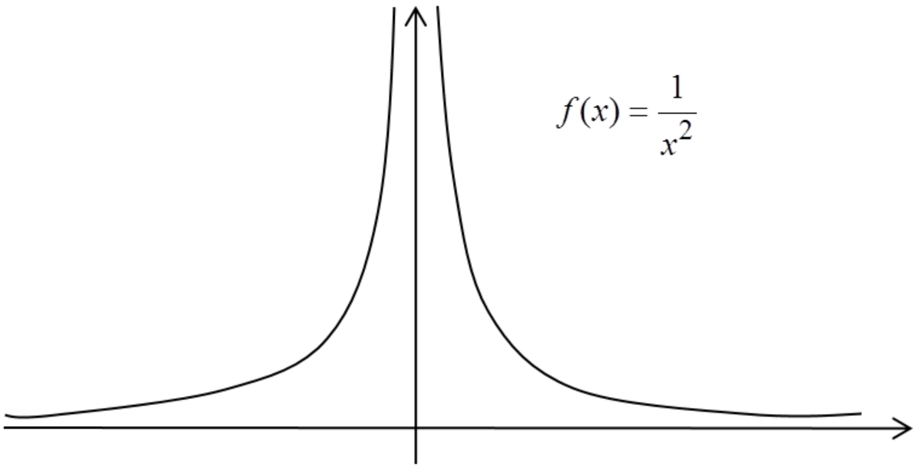
Gambar 14.1. Grafik y= 1/x

Ketika x berada pada sumbu positif dan menjadi semakin besar, maka nilai y menjadi semakin kecil. Ketika x negatif dan besarnya x menjadi semakin besar, sekali lagi menjadi kecil. Sehingga dapat disimpulkan bahwa fungsi y=1/x mempunyai limit 0 saat x mendekati tak hingga. Berikutnya untuk pmisalkan fungsi berikut: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$. Untuk nilai-nilai *x* yang cukup dekat dengan 0, maka nilai-nilai $f(x)=\frac{1}{x^2}$ diberikan pada tabel berikut ini.

Tabel 14.1. Penyelesaian Limit dengan numerik

x	$\frac{1}{x^2}$	x	$\frac{1}{x^2}$
1	1	−1	1
0,5	4	−0,5	4
0,01	10.000	−0,01	10.000
0,0001	100.000.000	−0,0001	100.000.000
0,000005	40.000.000.000	−0,000005	40.000.000.000

Tabel 14.1 menunjukkan bahwa bahwa apabila nilai *x* semakin mendekati nilai 0, maka nilai $f(x)=\frac{1}{x^2}$ menjadi semakin besar. Ketika di uji dari dengan memberikan nilai mendekati 0 dari sisi kiri (bilangan negatif) dan dari sisi kanan (bilangan positif), maka nilai $f(x)=\frac{1}{x^2}$ akan menjadi makin besar dan akan menjadi tak hingga. Penggambaran grafik fungsi $f(x)=\frac{1}{x^2}$ dapat dilihat pada Gambar 14.2



Gambar 14. 2. Kurva fungsi

Sehingga fungsi diatas dikatakan bahwa limit f(x) untuk x menuju nol adalah tak hingga, dan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$$

2. Limit Tak Hingga

Untuk memahami limit tak hingga maka di berikan soal berikut:

Contoh 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$$

Selanjutnya, diperoleh definisi berikut:

Definisi 1

(i). $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$, untuk setiap nilai x yang cukup dekat dengan c, tetapi $x \neq c$, maka

f(x) menjadi tak hingga pada arah positif.

(ii). $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$, untuk setiap nilai x yang cukup dekat dengan c , tetapi $x \neq c$, maka

f(x) menjadi tak hingga pada arah negatif.

Secara matematis, Definisi di atas dapat ditulis sebagai:

$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ (atau $-\infty$) jika untuk setiap bilangan real $M > 0$ terdapat bilangan real $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in D_f$ dengan sifat $0 < |x - c| < \delta$ berlaku $f(x) > M$ (atau $f(x) < -M$)

Contoh 2

(a). $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{|x+1|} = \infty$

(b). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^3 - x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x-1}\right) = -\infty$.

Untuk limit yang dituliskan $x \to c$, dengan c suatu bilangan berhingga. Akan tetapi, dalam berbagai aplikasi sering ditanyakan bagaimana nilai $f(x)$ apabila nilai x cukup besar.

Pada suatau fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ dengan nilai x yang cukup besar. Maka akan diperlihatkan penyelesaian nilai f untuk berbagai nilai x seperti diperlihatkan pada Tabel 14.1 di bawah ini. Ternyata semakin besar nilai x (arah positif), nilai $f(x)$ semakin kecil mendekati nol. Sehingga disimpulkan :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Tabel 14.1 Menghitung limit

x	$f(x) = \dfrac{1}{x}$
10	0,1
1.000.000	0,000001
5.000.000	0,0000002
100.000.000	0,00000001

x	$f(x) = \dfrac{1}{x}$
−1	−1
−1.000.000	−0,000001
−5.000.000	−0,0000002
−100.000.000	−0,00000001

Secara sama, apabila *x* besar tak terbatas arah negative ternyata berakibat $f(x)$ mendekati nol, yaitu:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Pengertian pengertian limit menuju tak hingga dapat dituliskan dalam definisi berikut.

Definisi 2.

(i). $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ jika $f(x)$ terdefinisikan untuk setiap nilai x cukup besar (arah positif) dan jika x menjadi besar tak terbatas (arah positif) maka $f(x)$ mendekati L.

(ii). $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ jika $f(x)$ terdefinisikan untuk setiap nilai x cukup besar

Secara matematis, Definisi 2 dapat ditulis sebagai:

(i). $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ jika untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $M > 0$ sehingga untuk setiap $x > M$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(ii). $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ jika untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $M > 0$ sehingga untuk setiap $x < -M$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Mudah ditunjukkan bahwa:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Contoh 4

Tentukan $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3+9}$.

Penyelesaian:

Untuk $x > 0$, $x^3 + 9 > x$. Sehingga $0 < \frac{1}{x^3+9} < \frac{1}{x}$. Selanjutnya, karena $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ maka dengan Teorema Apit diperoleh:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3+9} = 0$$

.

Contoh 5.

Hitung $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+4x+7}$.

Penyelesaian: Karena:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-2x-3\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x(x-2)-3\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x^2+4x+7\right)=\infty$$

Untuk soal ini tidak bisa digunakan maka sifat limit perbagian, tetapi apabila pada pembilang dan penyebut sama-sama dibagi dengan x^2 maka:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-3}{2x^2+4x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-2x-3\right)/x^2}{\left(2x^2+4x+7\right)/x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{2+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}.$$

$$=\frac{1-0-0}{2+0+0}=\frac{1}{2}$$

Contoh 6

Tentukan $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+7x-6}{x^5+2x^3-7x+10}$.

Penyelesaian:

Dengan membagi pembilang dan penyebut dengan x^5, diperoleh:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+7x-6}{x^5+2x^3-7x+10}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3+7x-6}{x^5}}{\frac{x^5+2x^3-7x+10}{x^5}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^4} - \frac{6}{x^5} \right)}{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{7}{x^4} + \frac{10}{x^5} \right)}$$

$$= \frac{0 + 0 - 0}{1 + 0 - 0 + 0} \quad .$$

$$= 0$$

atau

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 + 7x - 6}{x^5 + 2x^3 - 7x + 10} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^3 + 7x - 6}{x^3}}{\frac{x^5 + 2x^3 - 7x + 10}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \frac{7}{x^2} - \frac{6}{x^3}}{x^2 + 2 - \frac{7}{x^2} + \frac{10}{x^3}}$$

$$= \frac{1 + 0 - 0}{\infty + 2 - 0 + 0}$$

$$= \frac{1}{\infty}$$

$$= 0$$

Contoh 7.

Hitung $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^6 - 2x^3 + 7x - 6}{x^5 + 2x^3 + 7x + 10}$.

Penyelesaian:

Pada fungsi tersebut diakukan pembagian dengan x^5 pada pembilang dan penyebut fungsi tersebut seperti dibawah ini:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^6 - 2x^3 + 7x - 6}{x^5 + 2x^3 + 7x + 10} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^6 - 2x^3 + 7x - 6}{x^5}}{\frac{x^5 + 2x^3 + 7x + 10}{x^5}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to-\infty}\left(x - \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^4} - \frac{6}{x^5}\right)}{\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^4} + \frac{10}{x^5}\right)}$$

$$= \frac{-\infty - 0 + 0 - 0}{1 + 0 + 0 + 0} .$$

$$= -\infty$$

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

Selesaikan soal berikut:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3+9}$.
2. $\lim_{x\to\infty} 2x^3 + NIMx - 7$.
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{NIMx^2 + 5x - 8}{x^2 - 9x}$
4. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 + 4x + 7}$
5. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^4 + 4x + 7}$
6. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 + 4x + 7}$
7. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 7x - 6}{x^5 + 2x^3 - 7x + 10}$
8. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^6 - 2x^3 + 7x - 6}{x^5 + 2x^3 + 7x + 10}$
9. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 2x}\right)$
10. $\lim_{x\to\infty} \frac{x - 7}{\sqrt{x^2 - 7x + 5}}$

11. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^{3/2}-5x+2}{\sqrt{x^3-2x-3}}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{2x-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$

13. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}+5x\right)$

D. DAFTAR PUSTAKA

Thomas (2005), Calculus 11e with Differential Equations, Pearson Wesley

Weltner, Klaus (2009), Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide, Springer

PERTEMUAN 15

TURUNAN

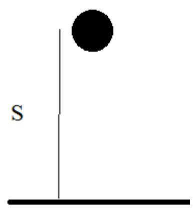
A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan dengan turunan dalam matematika dalam matematika

B. URAIAN MATERI

1. TURUNAN

Konsep turunan adalah pengembangan dari konsep limit seperti bab sebelumnya. Didalam bab ini dibahas bagaimana sifat turunan aturan turunan dan penggunaan untuk memecahkan masalah teknik. Contoh turunan dapat diterangkan pada peristiwa benda yang jatuh bebas. Hasil percobaan menunjukkan posisinya setiap saat. Jika posisi benda sebagai fungsi waktu didefinisikan sebagai $S(t) = 8t^2$. Maka berapakah kecepatannya saat $t = 1$?



Gambar 15.2. Benda jatuh bebas

Untuk menghitung kecepatan pada detik tersebut digunakan tabel sebagai berikut:

t_1	t_2	S1	S2	$v_{errata} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$
1	2	8	32	24

1	1,1	9,68	9,68	16,8
1	1,01	8,1608	8,1608	16,08
1	1,001	8,016008	8,016008	16,008

Sehingga kecepatan rata-rata dapat dihitung dengan melihat data tabel diatas. Kecepatan rata rata adalah :

$$v_{errata} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$$

Sedangkan kecepatan dapat didefinikan sebagai berikut:

$$V_{\text{sesaat}} = \lim_{\Delta t \to 0} V_{\text{rata-rata}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

2. Definisi Turunan

Misalkan f(x) sebuah fungsi riil dimana x adalah anggota bilangan riil, $x \in R$. Maka turunan dari f di titik x, dituliskan sebagai

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Penulisan notasi turunan dinyatakan sebagai berikut :

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y'$$

Notasi f(x) biasa dituliskan dengan f saja. Menunjukkan suatu fungsi. Turunan pertama dari f adalah f'.

3. Rumus Turunan

Proses untuk menghitung derivative adalah diferential. Untuk menekankan idea maka digunakan notasi

$$\frac{d}{dx} f(x)$$

$$= 10x$$

$$\frac{df(x)}{dx}\left(\frac{4}{5}x - 6\right) = \frac{4}{5}$$

Maka turunannya

Rumus umum, Jika

$$\mathrm{f(x) = ax^n}$$

Maka turunannya adalah :

$$f(x) = nax^{n-1}$$

Contoh:

a. Jika $f(x) = 5x^2$ dengan menggunakan rumus turunan maka

Jawab :

$$\frac{df(x)}{dx} = 2.5x^{2-1}$$

$$= 10x$$

b. Untuk $y = NIMx^{NIM} + NIMx + NIM$ maka turunannya adalah

Jawab :

$$y' = NIM.NIMx^{NIM-1} + NIM$$

c. Misal $y = \frac{1}{x}$ untuk $x \neq 0$, maka turunan y adalah :

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = y' = \ln x$$

Aturan turunan

Teorema

1. Untuk c konstanta, jika f(x)=c , maka f'(x)=0
2. jika f(x) = cx , maka f'(x)=c
3. jika f(x) = x^n , maka f'(x)= nx^{n-1}
4. $f(x) = u(x).v(x)$
   $f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$
5. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$
   $f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{(v(x))^2}$

Contoh:

Carilah turunan dari fungsi

a. $f(x) = 9$ b. $g(x) = -\frac{\pi}{3}$

c. $h(x) = \sqrt{5}$ d. $f(x) = 3x^2$

Jawab

a. $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(9) = 0$
b. $\frac{dg(x)}{dx} = 0$
c. $\frac{dh(x)}{dx} = 0$
d. $\frac{dh(x)}{dx} = 2 \cdot 3x = 6x$

Contoh:

Carilah turunan dari fungsi

$$f(x) = -\frac{1}{x}(90 + x^3)$$

Jawaban : Misalkan

$$u = -\frac{1}{x} \qquad ; \qquad v = (90x + x^3)$$

Maka

$$u' = \frac{1}{x^2} \qquad ; \qquad v' = (90 + 3x^2)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(\mathrm{x}) = \frac{1}{x^2}(90x + x^3) + \left(-\frac{1}{x}\right)(90 + 3x^2)$$
$$= \frac{90}{x} + x - \frac{90}{x} - 3x^2$$
$$= -3x^2 + x$$

Contoh:

Carilah turunan dari fungsi

$$f(\mathrm{t}) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

Jawaban : Misalkan

$$u = t^2 - 1 \qquad ; \qquad v = t^2 + 1$$

Maka

$$u' = 2t \qquad ; \qquad v = 2t$$

$$f(\mathrm{t}) = \frac{2t(t^2 + 1) - (t^2 - 1)2t}{(t^2 + 1)^2}$$

$$f(\mathrm{t}) = \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2 + 1)^2}$$

$$f(\mathrm{t}) = \frac{4t}{t^4 + 2t^2 + 1}$$

4. Turunan Fungsi Trigonometri

Turunan pada fungsi trigonometri dapat dilihat pada rumus berikut:

a. Turunan y = sin x

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h-\sin x+\cos x\sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\sin x\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}\right] \\
&= \sin x\lim_{h\to 0} \frac{\cos h-1}{h}+\cos x\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= (\sin x)(0)+(\cos x)(1)=\cos x
\end{aligned}
$$

b. Turunan y = cos x

$$f(x) = \cos x$$
$$f(x+h) = \cos(x+h)$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \cos x - \sin x \sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}\right] \\
&= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= (\cos x)(0) - (\sin x)(1) = -\sin x
\end{aligned}$$

c. Jika $\mathrm{f(x) = \sin a\,(x)}$

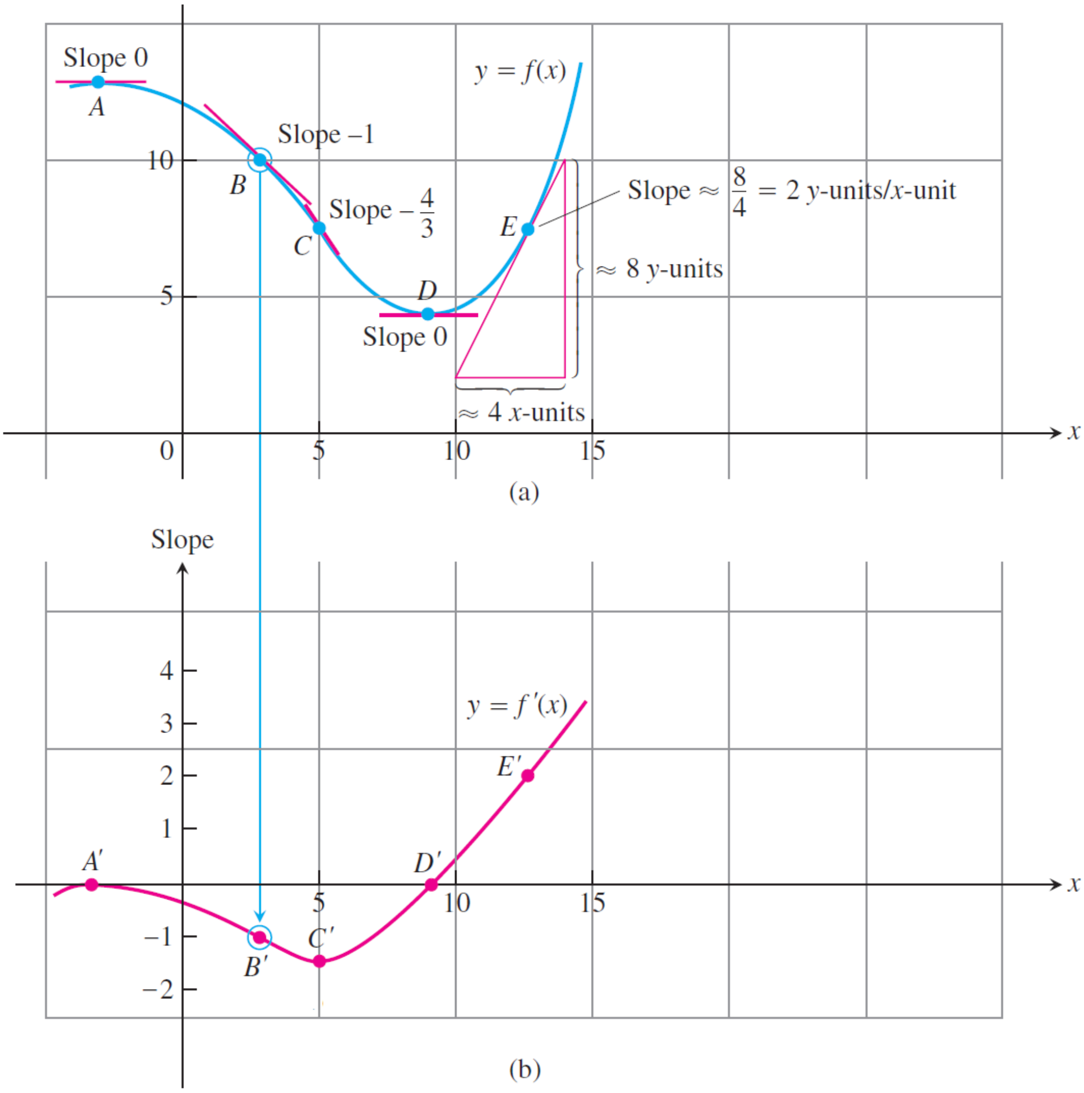
Maka $\mathrm{f'(x) = a \cos a\,(x)}$

d. Jika $\mathrm{f(x) = \cos b\,(x)}$

Maka $\mathrm{f'(x) = -b \cos b\,(x)}$

Menggambar fungsi turunan

Untuk membuat gambar fungsi yang wajar dari turunan biasanya dengan memperkirakan lereng pada grafik f. Yaitu dengan memplot titik titik dalam bidang xy dan menghubungkannya dengan kurva halus, yang mewakili turunan fungsi seperti pada Gambar 15.2



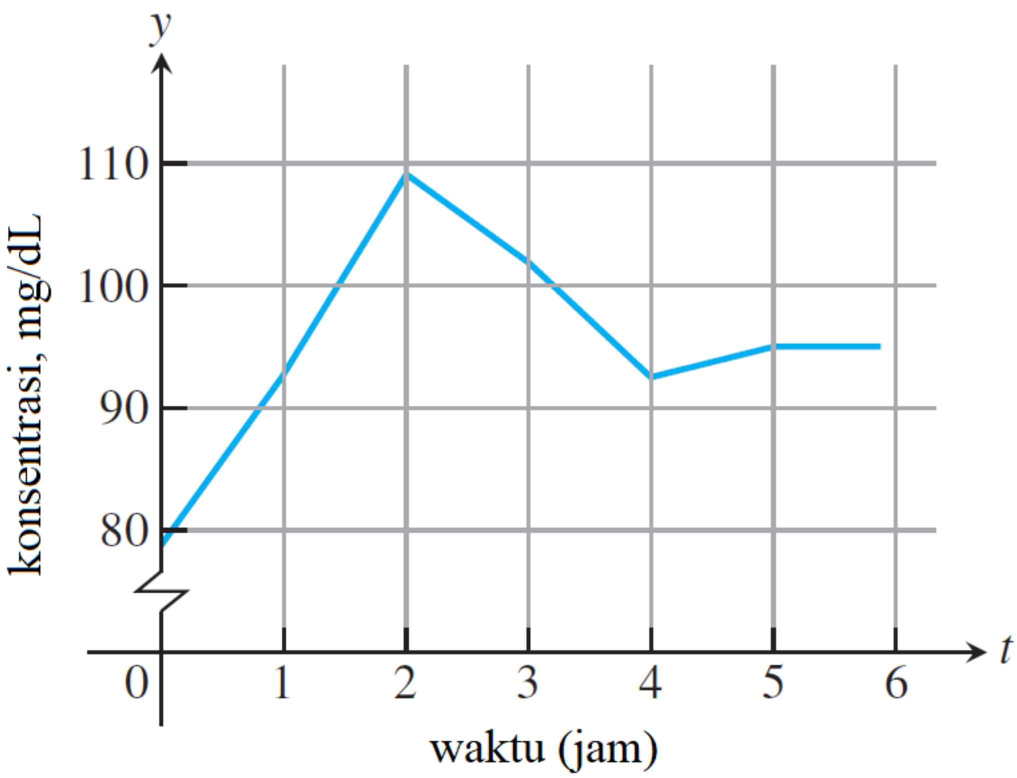
Gambar 15.2. (a)Grafik dalam fungsi dengan koordinatnya, grafik dalam (b). Turunan dari grafik a

Dari grafik tersebut maka dapat kita lihat

1. di mana tingkat perubahan f positif, negatif, atau nol;
2. ukuran kasar dari laju pertumbuhan pada setiap x dan ukurannya dalam kaitannya dengan ukuran f (x);
3. di mana tingkat perubahan itu sendiri meningkat atau menurun.

Contoh . Perhitungan konsentrasi gula darah seorang atlet

Seorang pembalap sepeda melakukan perjalanan sejauh 119 km dari selama 6 jam. Pembalap tersebut di pantau konsentrasi gula darahnya. Grafik konsentrasi nya ditunjukkan pada gambar dibawah ini



Buatlah grafik tingkat kenaikan gula darah tiap satuan waktu

Jawaban. Kenaikan konsentrasi gula darah tiap satuan waktu dapat dihitung dengan cara megambil nilai akhir konsentrasi gula darah dikurangi nilai awal dan di bagi dengan waktu.

Pada jam ke 1, jam ke 2, 3 dan seterusnya hingga jam ke 6 didapatkan

$$m1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{93 - 79}{1} = 14\ mg/dL\ jam$$

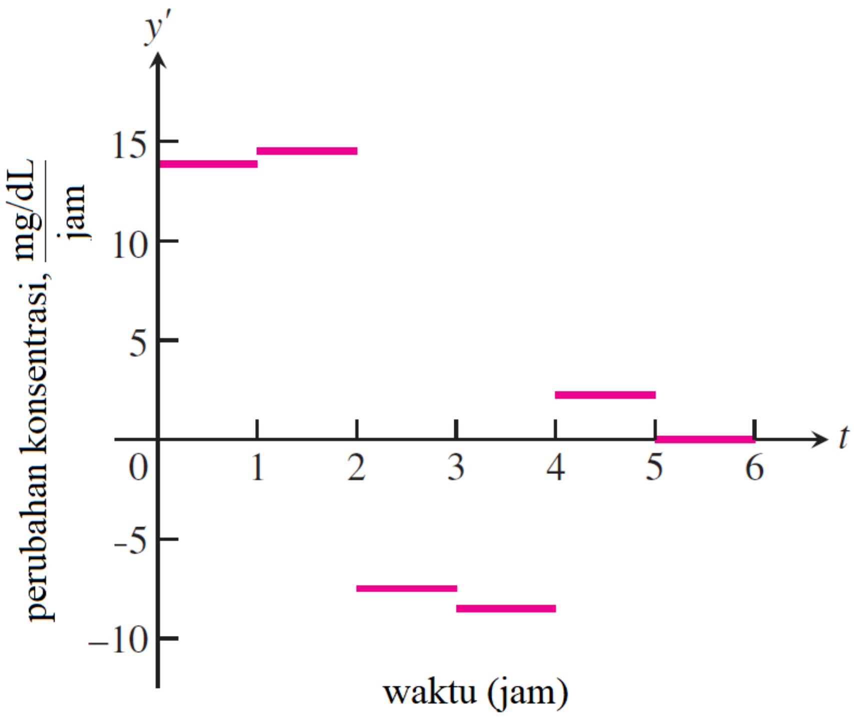
$$m2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{108 - 93}{1} = 15\ mg/dL\ jam$$

$$m3 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{101 - 108}{1} = -7\ mg/dL\,jam$$

….

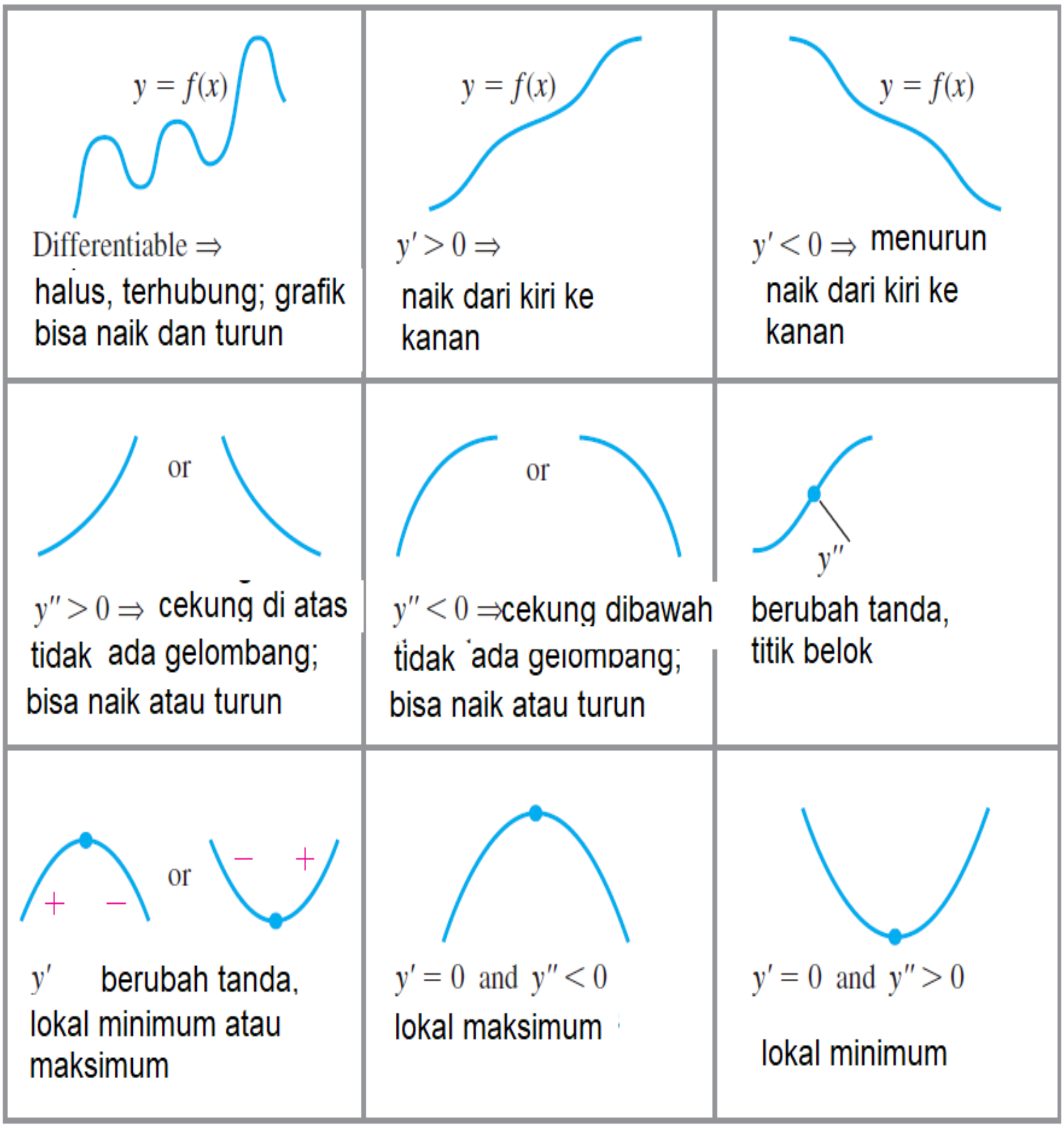
$$m6 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{95 - 95}{1} = 0\,mg/dL\,jam$$

Hasil perhitungan ditunjukkan pada gambar dibawah:



(b)

Bentuk bentuk fungsi dengan menggunakan turunannya, dapat kita temukan apakah di mana grafik fungsi naik dan turun dan di mana setiap titik ekstrim, terbuka keatas atau kebawah, titik maksimum atau minimum dan lainnya yang dapat di liaht dalam gambar di bawah ini.



Gambar 15.3. (a) Bentuk bentuk grafik fungsi dengan melihat turunannya

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

Selesaikan soal-soal berikut :

1. $f(x) = -x - x^2 + 5;\ \ cari\ \ f'(0),\ f'(NIM)$
2. $g(x) = (x-1)^2 + 5;\ \ cari\ \ g'(1), g''(1)$
3. $g(t) = \frac{1}{t^2};$ cari $t'\ (0),\ \ t'\ (1),$ dan $t''(1)$
4. $y = NIMx - \sin x$ cari y'
5. $r(s) = \sqrt{NIMs + 1};$ carilah $r'\ (0),\ \ r'\ (1),$ dan $r''(2)$
6. Diketahui $\mathrm{f(x)} = \sin 5\ \mathrm{(x)}$, maka carilah $f'(x)$
7. Diketahui $\mathrm{f(x)} = cos\ 8\ \mathrm{(x)}$, maka carilah $f'(x)$

D. DAFTAR PUSTAKA

Thomas (2005), Calculus 11e with Differential Equations Pearson Addison Wesley

Weltner, Klaus (2009), Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide, Springer

PERTEMUAN 16

TURUNAN ATURAN RANTAI

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan dgn aturan rantai dalam matematika dan kegunaannya

B. URAIAN MATERI

1. Turunan Berantai / Aturan Rantai

Jika f(x) merupakan suatu fungsi maka turunannya didapatkan dengan menurunkan fungsi luar /*outer function* f yang berhubungan dengan g dan fungsi dalam yang berhubungan dengan z dan mengalikan perkalian tersebut.

Sebagai contoh untuk menyelesaikan turunan dari fungsi y= $(2x + 3)^2$, masih dapat dikerjakan dengan cara menguraikan persamaan tersebut hingga dapat menjadi terpisah dan sederhaana hingga dapat diturunkan.

Tetapi bagaimana jika fungsinya berbentuk

$y = \sqrt{(2 + x^2)}$ atau $y = (8x - 7)^{99/4}$

Akan sulit untuk jika dilakukan penjabaran fungsi -fungsi tersebut.

Maka untuk mengerjakan soal turunan tersebut dikembangkan teknik yang berhubungan dengan fungsi-fungsi majemuk tersebut. Perlu di memahami konsep konsep aljabar dan aritmetika dalam pelajaran pelajaran sebelumnya.. Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat dalam uraian berikut.

Suatu fungsi $y = f \circ g$, sedemikian sehingga $y = f(g(x))$, dimana f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai turunan, maka y juga mempunyai turunan sehingga

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g(x)'$$

Contoh 1.

$$y = (5x^2 + 3)^{100}$$

Maka $g(x) = (5x^2 + 3)$ $\longrightarrow$ fungsi dalam

$$f(g) = g^{100} \quad \longrightarrow \text{ fungsi luar}$$

$$\frac{df}{dg} = 100g^{99} \text{ dan } g'(x) = 10x$$

Sehingga

$$y' = 100(5x^2 + 3)^{99} \cdot 2x$$

$$y' = 200x(5x^2 + 3)^{99}$$

Contoh 2.

Carilah penyelesaian turunan dari fungsi

$$y = (4x^3 + 5x^2 - x + 4)^{12}$$

Penyelesaian:

Misal:

$$u = 4x^3 + 5x^2 - x + 4 \quad \rightarrow \frac{du}{dx} = 12x^2 + 10x - 1$$

$$y = u^{12}$$

$$y' = \frac{dy}{du} = 12u^{11}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \bullet \frac{du}{dx}$$

$$y' = 12u^{11} \cdot (12x^2 + 10x - 1)$$

$$y' = 12(4x^3 + 5x^2 - x + 4)^{11}(12x^2 + 10x - 1)$$

$$y' = 12(12x^2 + 10x - 1)(4x^3 + 5x^2 - x + 4)^{11}$$

Contoh

Carilah dy/dz dari persamaan $y = 3x^4 - 7$ dan $x = z^2 + 10$.

Penyelesaian:

$$y = 3x^4 - 7 \rightarrow dy/dx = 12x^3$$

$$x = z^2 + 10 \rightarrow dx/dz = 2z$$

$$dy/dz = (dy/dx).(dx/dz)$$

$$dy/dz = (12x^3).\ (2z)$$

$$dy/dz = 24x^3z$$

Contoh

Fungsi

$$y = (3x^2 + 1)^2$$

Hitunglah turunannya

Jawab : Cara 1 :Menggunakan aturan rantai

$$u = 3x^2 + 1 \quad ; \quad du = 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot 6x$$

$$= 2(3x^2 + 1) \cdot 6x$$

$$36x^3 + 12x$$

Cara 2. Bentuk fungsi bisa dijabarkan sehingga

$$y = (3x^2 + 1)^2 = \quad 9x^4 + 6x^2 + 1$$

Sehingga

$$\frac{dy}{dx} = 36x^3 + 12x$$

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

Carilah turunan soal berikut ini:

NIM = digit terakhir NIM dan bukan angka 0

1. $f(x) =$ NIMx^2 + NIMx-NIM
2. $f(x) = (2x^3 + 5)^5$
3. $f(x) =$ (NIMx + NIM)^4
4. $f(x) =$ 5(NIMx^2 + NIMx-NIM)^6
5. $f(x) = (212x + 3)^{2016}$

D. DAFTAR PUSTAKA

Thomas (2005), Calculus 11e with Differential Equations, Pearson Wesley

Weltner, Klaus (2009), Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide, Springer

PERTEMUAN 17

TURUNAN DALAM ELEKTRONIKA

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menguasai materi turunan dalam dunia elektronika dan kegunaannya.

B. URAIAN MATERI

1. Turunan pada Arus Listrik

Arus listrik adalah banyaknya muatan listrik yang yang mengalir pada suatu benda atau media dalam waktu tertentu. Muatan listrik tersebut mengalir karena adanya pergerakan elektron-elektron pada benda tersebut. Biasanya benda atau media dapat berupa sirkuit listrik. Arus listrik diukur dalam satuan Coulomb/detik atau Ampere. Contoh adanya arus listrik seperti aliran listrik dalam jaringan tubuh manusia dan hewan, biasanya dalam orde mikroAmpere (sangat lemah). Contoh lain adalah arus listrik pada saat terjadi petir sebesar 1-200 kiloAmpere (sangat kuat).

Besar arus listrik dituliskan dalam persamaan berikut:

$$I = \frac{Q}{t}$$

Jika dituliskan dalam turnan maka

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Dimana I adalah arus listrik dalam Ampere, Q adalah muatn listrik dalam Coulomb, dan t adalah waktu dalam detik.

.

Contoh: Muatan listrik pada sebuah penghantar dengan mengalir dalam rumusan sebagai dirumuskan $Q = 2t^3 + 4t^2 - 7$; Hitunglah

a. besar muatan listrik saat awal
b. besar muatan listrik saat 2 detik
c. Rumusan arus litrik
d. Arus listrik pada saat awal
e. Arus listrik pada saat 2 detik

Jawaban :

a. Muatan listrik saat awal , t = 0 detik.

$$Q(0) = 2 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 - 7$$
$$Q(0) = -7A$$

b. Besar muatan listrik saat 2 detik

$$Q(2) = 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 - 7$$
$$Q(2) = 25\ A$$

c. c). Rumusan arus litrik

$$I(t) = 6t^2 + 8t$$
$$I(0) = 6 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 = 0\ Ampere$$

d. d). Arus saat awal , t = 0 detik.

$$I(0) = 6 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 = 0\ Ampere$$

e. Arus listrik pada saat 2 detik

$$I(2) = 6 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 = 40\ Ampere$$

2. Turunan pada sistem kendali

Sistem kendali banyak terdapat dalam elektronika, misalkan pada peralatan pabrik, industri otomotif dan lain lain. Sistem kendali misalkan PID (proporsional integral dan differensial)

Melibatkan penggunaan diferensial untuk pada perancangan nilai kendalinya.

Contoh

Dalam sistem kendali sebuah mesin mempunyai error yang dirumuskan dengan $e(t) = 4t^2 - 5t$, akan diberi pengendali Differential dengan Td =3 s. Berapa nilai aksi setelah diberi pengendali tersebut.

Jawab

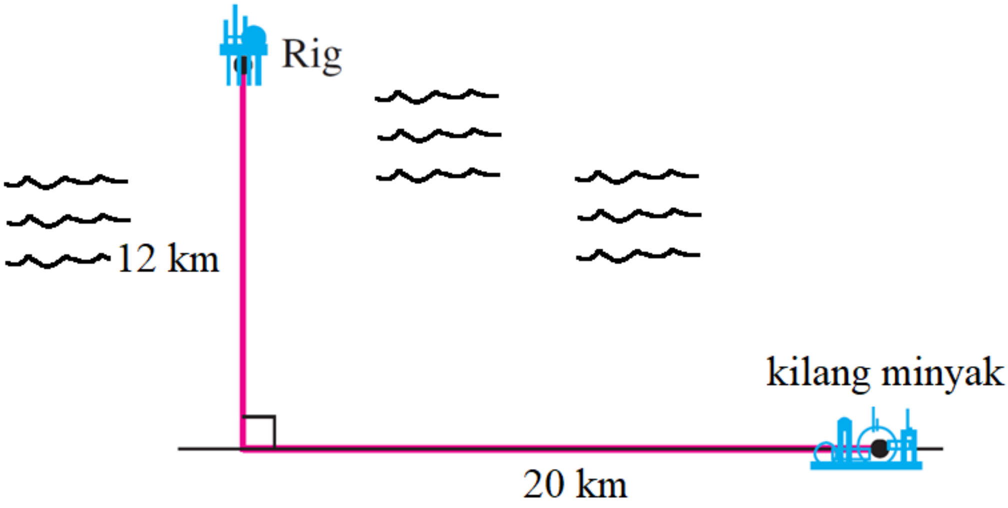
Respon sistem adalah hasil dari

$$u(t) = Td \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

$$u(t) = 3 \cdot (8t - 5)$$

3. Turunan pada pekerjaan pemasangan pipa miyak dari rig pengeboran ke kilang minyak

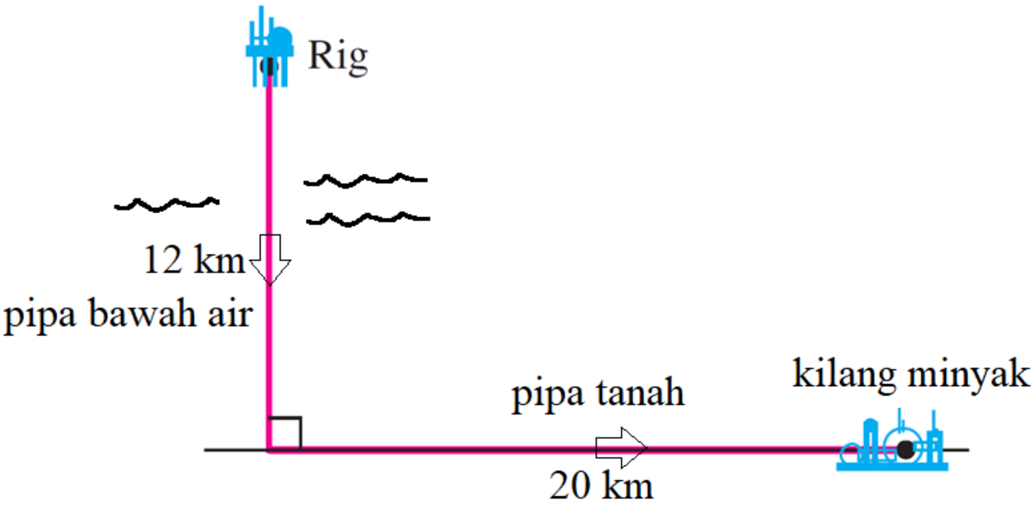
Sebuah rig pengeboran terletak 12 km lepas pantai akan dihubungkan dengan pipa ke kilang minyak yang terletak di pantai , yang pada jarak 20 km lurus horisontal ke pantai dari rig, seperti ditunjukkan gambar dibawah. Jika biaya pembangunan pipa bawah air adalah Rp 5.000.000.000,- per km dan pipa lewat tanah adalah 3.000.000.000,- per km. Hitunglah cara desain agar di peroleh biaya yang murah untuk memasang pipa tersebut.



Jawaban.

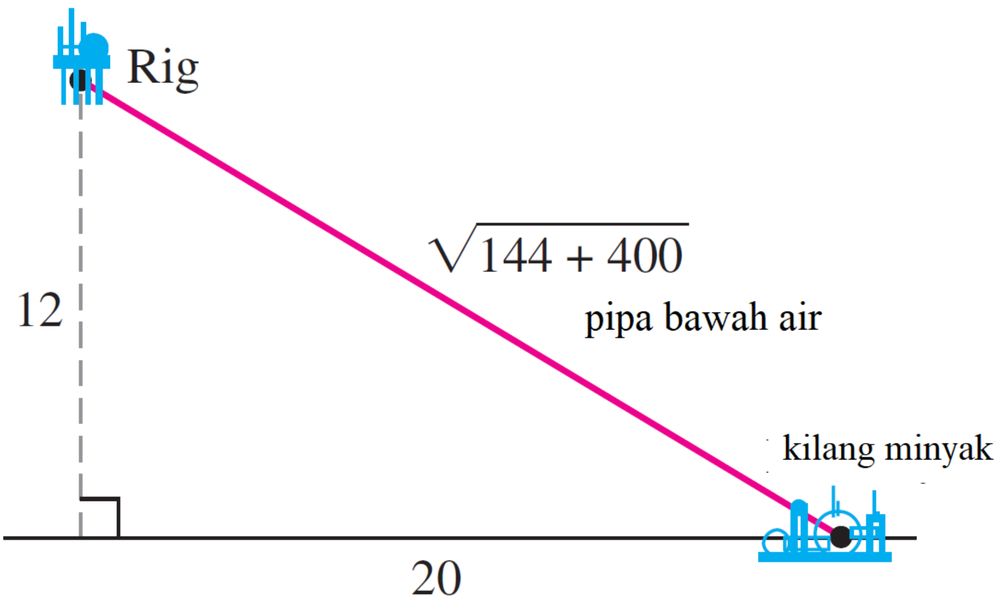
Untuk mengatasi masaah tersebut ada beberapa kemungkinan yang dihitung.

> **Desain 1:** Menggunakan pipa bawah air sesedikit mungkin, karena pipa bawah air lebih mahal. Desainnya adalah pipa dipasang tegak lurus pantai 12 km, dan disambung pipa tanah 20 km ke kilang minyak.



$$Biaya = 12 \cdot 5000\,000\,000 + 20 \cdot 3000\,000\,000$$
$$= 120\,000\,000\,000,-$$
$$= Rp\ 120\ Milyar$$

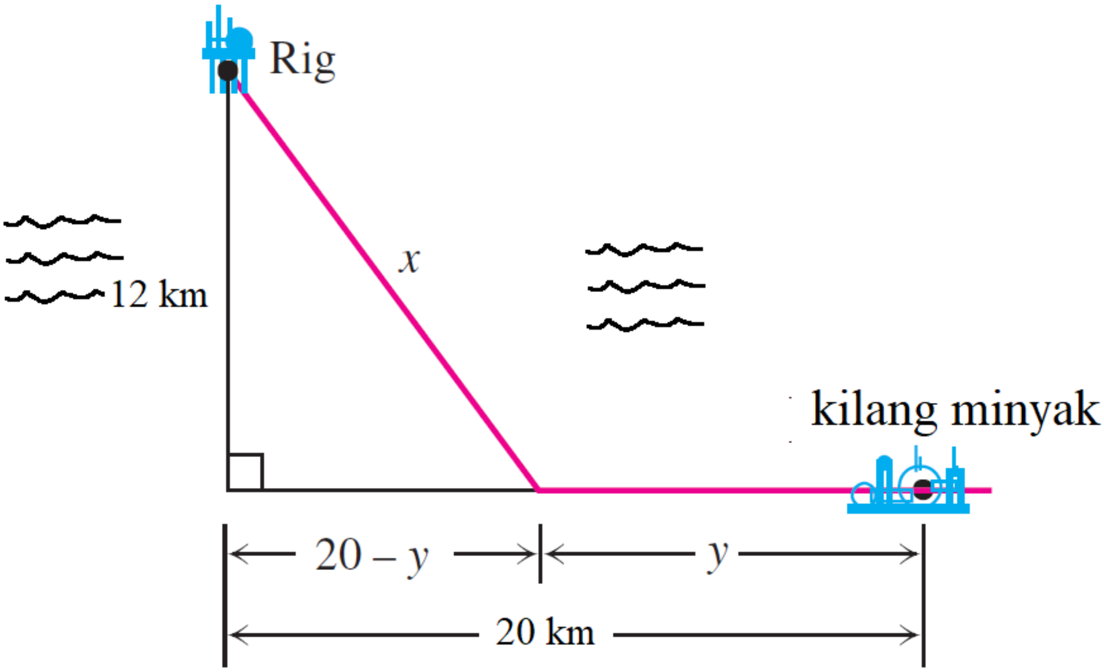
Desain 2: . Menggunakan pipa bawah air langsung ke arah kilang minyak membentuk diagonal, tanpa menggunakan pipa darat seperti gambar dibawah.



$$Biaya = \sqrt{144+400} \quad \cdot \quad 5000\,000\,000$$
$$= \sqrt{544} \quad \cdot \quad 5000\,000\,000 \cdot$$
$$= 116\,619\,000\,000$$

Hasil perhitungan menunjukkan biaya **Desain 1:** ini lebih kecil dari **Desain 2:**.

Desain 3: Menggunakan pipa bawah air sesedikit mungkin, karena pipa bawah air lebih mahal. Misalkan panjang x dari pipa bawah air dan panjang y dari pipa darat adalah y seperti gambar dibawah:



Menggunakan teorema Pythagoras didapatkan :

$$x^2 = 12^2 + (20 - y)^2$$

$$x = \sqrt{144 + (20 - y)^2}$$

Hanya akar positif memiliki bisa dipakai untuk desain ini, sehingga

$$Biaya = \quad 5000\,000\,000x + \quad 3000\,000\,000y$$

Kemudian nilai x disubtitusikan sehingga didapatkan:

$$c(y) = 5000\,000\,000 \cdot \sqrt{144 + (20 - y)^2} + 3000\,000\,000y$$

Langkah selanjutnya adalah adalah menemukan nilai minimum $c(y)$ pada interval $0 \le y \le 20$. Turunan pertama dari c (y) yang berhubungan dengan y menurut aturan rantai adalah

$$c' = 5000\,000\,000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2(20 - y)(-1)}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} + 3000\,000\,000$$

$$c' = -5000\,000\,000 \cdot \frac{20 - y}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}} + 3000\,000\,000$$

Nilai minimum didapat saat c'=0; sehingga

$$0 = -5000\,000\,000 \cdot \frac{20-y}{\sqrt{144+(20-y)^2}} + 3000\,000\,000$$

$$5000\,000\,000(20-y) = 3000\,000\,000\sqrt{144+(20-y)^2}$$

$$\frac{5}{3}(20-y) = \sqrt{144+(20-y)^2}$$

$$\frac{25}{9}(20-y)^2 = 144+(20-y)^2$$

$$\frac{16}{9}(20-y)^2 = 144$$

$$(20-y) = \pm\frac{3}{4}\cdot 12$$

$$(20-y) = \pm 9$$

$$y = 20 \pm 9$$

$$y = 11 \text{ atau } y = 29$$

Hanya nilai $y = 11$ yang memenuhi. Sehingga dimasukkan nilai tersebut, didapat

$$x^2 = 12^2 + (20-11)^2$$

$$x^2 = 144 + 81$$

$$x = \sqrt{225} = 15$$

$$Biaya = \ 5000\,000\,000 \cdot 15 + \ 3000\,000\,000 \cdot 11$$

$$Biaya = \ 108\,000\,000\,000$$

$$= \ Rp\ 108\ Milyar$$

Sehingga didapat desain pemasangan pipa sebesar Rp 108.000.000 000, dengan cara ke c, yaitu panjang pipa darat 11 km dan pipa bawah air sepanjang 15 km

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

1. Tangki silinder dengan alas dan tutup, terbuat dari pelat logam tipis. Volume silinder 4 m^3. Berapakah diameter dan tinggi tangki agar luas permukaan logam dapat minimum.
2. Dalam sistem kendali sebuah mesin mempunyai error yang dirumuskan dengan $e(t) = 5t^2 - 2t$, akan diberi pengendali Differential dengan Td =3 s. Berapa nilai aksi setelah diberi pengendali tersebut.
3. Diketahui fungsi sebagai berikut $y = NIM\ t^2 + NIMt - 7$.
   Carilah y'(3), y''(3).
4. Posisi dua sinyal listrik pada suatu kabel memenuhi pada sumbu $s = \cos t$ dan $s_2 = \cos(t + \pi/4)$
5. Seorang pelanggan meminta anda untuk mendesain segi empat terbuka-atas tong stainless steel. Itu harus memiliki basis persegi dan volumeuntuk dilas dari piring seperempat inci, dan untuk menimbang tidaklebih dari yang diperlukan. Dimensi apa yang Anda rekomendasikan?

6.

D. DAFTAR PUSTAKA

Georhe B.Thomas Jr.; Calculus and Analytic Geometry; 4th edition; Addison Wesly; Publishing Company, Reading Massachussets printing, 1975

Thomas - Calculus 11e with Differential Equations HQ, Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide

PERTEMUAN 18:

APLIKASI TURUNAN

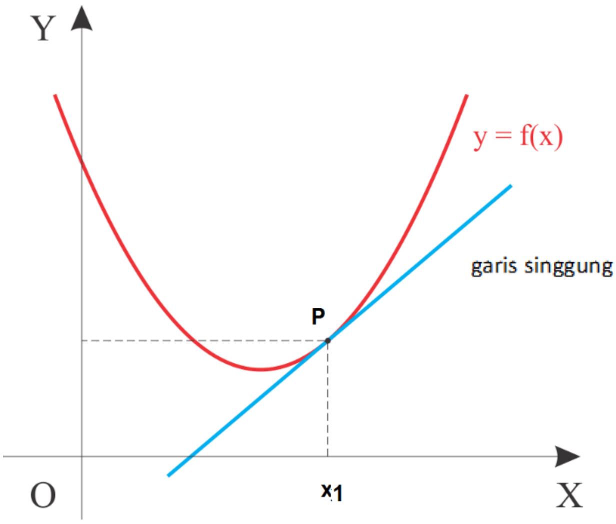
A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan dgn aplikasi turunan.

B. URAIAN MATERI

Penggunaan turunan dapat di terapkan pada beberapa pada masalah matematika seperti menentukan karakterisik fungsi-fungsi matematika. Karakterisitik fungsi seperti garis singgung kurva, nilai minimum-maksimum, nilai monoton, dan perhitungan limit fungsi dan laju.

3. Garis Singgung Kurva



Gambar 18. 1. Garis singgung kurva

Garis singung kurva f(x) pada suatu titik (x_1,y_1) akan membetuk suatu garis lurus yang mempunyai gradien m. Dimana nilai m = $f'(x)$

Oleh karenanya persamaan garis singgung dengan gradien *m* dan melalui titik (x_1,y_1) dirumuskan :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Contoh

Penggunaan turunan untuk menentukan persamaan garis singgung kurva adalah sebagai berikut:

Diketahui suatu fungsi dengan dalam bentuk berikut:

$$y = 5x - x^2$$
$$m = y' = 5 - 2x$$

Persamaan garis singgung pada titik yang berabsis 3 adalah :

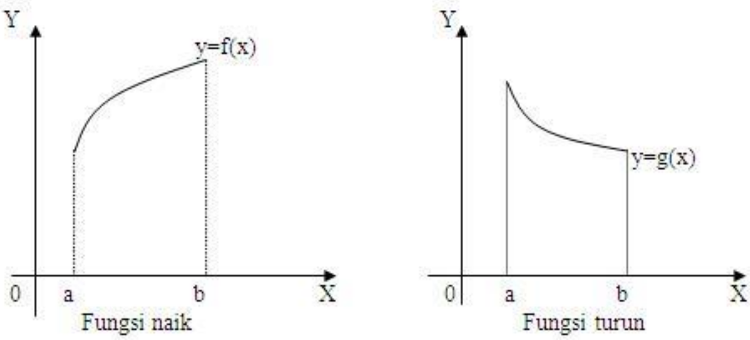
Pertama di cari gradien garis singgung

$$\begin{aligned} y' &= 5 - 2.3 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Selanjutnya ordinat didapat

$$\begin{aligned} y &= 5.3 - 3^2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

4. Fungsi Naik dan Fungsi Turun



Gambar 18. 2. Fungsi naik dan fungsi turun

Syarat :

$$y = f(x) \quad \begin{cases} naik & f'(x) > 0 \\ turun & f'(x) < 0 \end{cases}$$

Menemukan Nilai Mutlak Minimum dan Maksimum sutyu fungsi

Contoh

Temukan nilai absolut maksimum dan minimum fungsi

$$f(x) = x^2 \text{ pada } [-2,1]$$

Fungsi ini dapat diturunkan seluruh domainnya, jadi satu-satunya titik kritis didapat saat $f' = 0$

$$f'(x) = 2x$$

$$x = 0$$

Kita perlu memeriksa nilai fungsi pada $x = 0$, pada $x = -2$, dan $x = 1$,

$$f(0) = 0$$

$$f(-2) = 4$$

$$f(1) = 1$$

Jadi fungsi ini memiliki nilai mutlak maksimum 4 pada $x = -2$ dan nilai mutlak minimum yaitu 0 pada $x = 0$

5. Menghitung Jarak, Kecepatan, dan Percepatan sebuah benda

Kecepatan adalah turunan pertama jarak, percepatan adalah turunan kedua jarak

Jarak ─► S (x)

Kecepatan ─► S '(x)

Percepatan ─► S'' (x)

Contoh

Partikel netron sepanjang garis mendatar mengikuti persamaan :

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 7$$

dengan jarak (S) dalam meter dan waktu (t) dalam detik. Carilah:

a. Kecepatan dan percepatan netron tersebut.
b. Kecepatan dan percepatan netron saat t =5 detik
c. Kapankah netron tersebut akan berhenti.

Penyelesaian :

a. Menghitung kecepatan dan percepatan netron

Fungsi :

$S(t) = t^3 - 6t^2 + 7$

maka

Kecepatan : v(t) = s′(t) = $3t^2 - 12t$

Percepatan : a(t) =s″(t)

=6t−12

b. Menghitung kecepatan dan percepatan netron saat waktu t =5 detik :

Maka kecepatan saat 5 detik

V(5) = $3*5^2-6*5$

V(3)=75−30 = 45 m/s

percepatan netron tersebut saat waktu t =5 detik

$$a(5) = 6 * 5 - 12$$

$$a(5) = 18\ m/s^2$$

Sehingga percepatan netron tersebut adalah $18\ m/s^2$.

c. Netron akan berhenti ketika kecepatannya nol,

v(t)=0 → $3t^2 - 12t = 0$

$$3t(t-4) = 0$$

$$3t = 0 \text{ dan } t - 4 = 0$$

Jadi, netron berhenti atau diam pada saat t = 4 detik.

6. Menghentikan mobil secara mendadak

Pak Onos mengendarai mobil Bujero di jalan tol dengan kecepatan 90 km / jam, saat itu melihat kecelakaan didepan mobil dan seketika Pak Onsos menginjak rem mobilnya. Berapakah perlambatan yang dibutuhkan untuk menghentikan mobil dalam jarak 100 m?

Penyelesaian :

Menentukan percepatan dengan turunan

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\mathrm{k} \quad (\mathrm{konstan})$$

Kondisi awal

$$v0 = \frac{ds}{dt} = 108\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{jam}} = 30\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$vt^2 = v0^2 + 2\mathrm{aS}$$

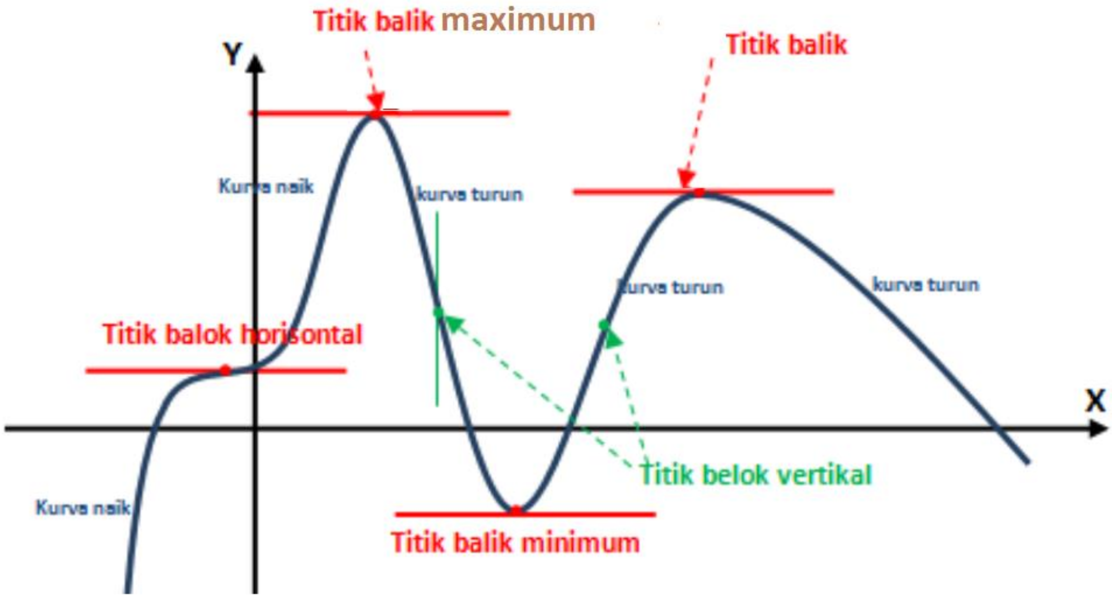
$$0^2 = 30^2 + 2\mathrm{a} * 100$$

$$\mathrm{a} = \frac{900}{200}$$

$$\mathrm{a} = 4{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{s^2}$$

7. Nilai Stasioner Fungsi

Nilai fungsi suatu fungsi stasioner $f(x)$ terjadi saat $f'(x) = 0$. Dimana pada sembarang titik $(x_0, f(x_0))$ dengan $f'(x_0) = 0$ maka titik $(x_0, f(x_0))$ disebut titik-titik stasioner. Titik titik stasioner tersebut dapat berupa : titik balik minimum, titik balik maksimum, atau titik belok seperti diperlihatkkan pada Gambar 18.3.



Gambar 18. 3. Titik balik dan titik belok pada fungsi

a. Titik balik maksimum

Syarat : $f''(x_0) < 0$ dan $f(x_0)$ = nilai maksimum

Sehingga $(x_0, f(x_0))$ = titik balik maksimum

b. Titik balik minimum

Terjadi dengan syarat : $f''(x_0) > 0$ dan $f(x) = \text{nilai minimum}$

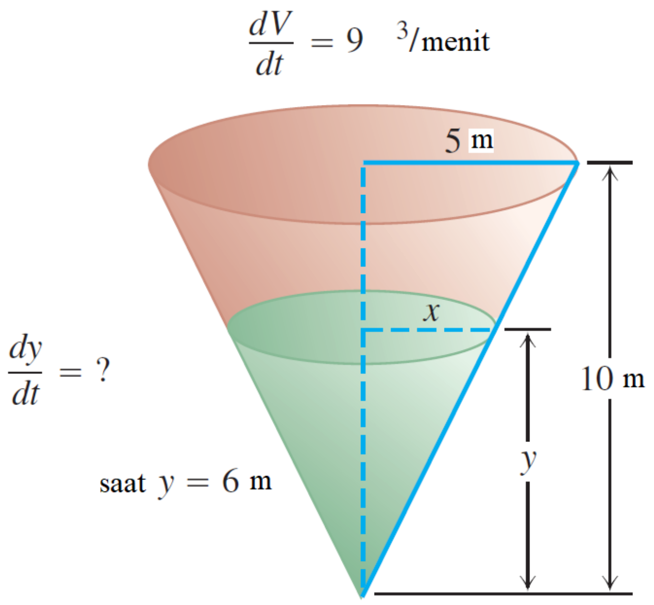
Sehingga $(x_0, f(x_0))$ = titik balik minimum

c. Titik belok

Terjadi dengan syarat : $f''(x_0) = 0$ dan $f(x) = \text{nilai belok}$

Maka $(x_0, f(x_0))$ = titik belok

Contoh : Pengisian tangki kerucut terbalik



Air diisi kedalam kedalam tangki kerucut terbalik dengan debit sebesar 9 m^3/menit. Tangki berdiri setinggi 10 m dan jari jari 5 m. Berapa kecepatan kenaikan air pada ketinggian 6 m.

Jawaban.

V= volume air ditangki saat t

X = jari jari permukaan air saat t

Y= kedalaman air saat t

Diasumsikan bahwa V,x, dan y. Konstanta ukuran tangki, sehingga

$y = 6\,m$ dan

$$\frac{dV}{dt} = 9\,m^3/menit.$$

Air membentuk kerucut dengan volume

$$V = \frac{1}{3}\pi x^3 y$$

$\frac{x}{y} = \frac{5}{10}$ atau $x = \frac{y}{2}$

atau

$$x = \frac{y}{2}$$

Saat y =6

$$x = 3$$

$$9\,m^3/menit.$$

Maka dengan $\frac{dV}{dt}$= 9 untuk mencari kecepatan dy/dt

$$9 = \frac{\pi}{4}(6)^3\frac{dy}{dt}$$

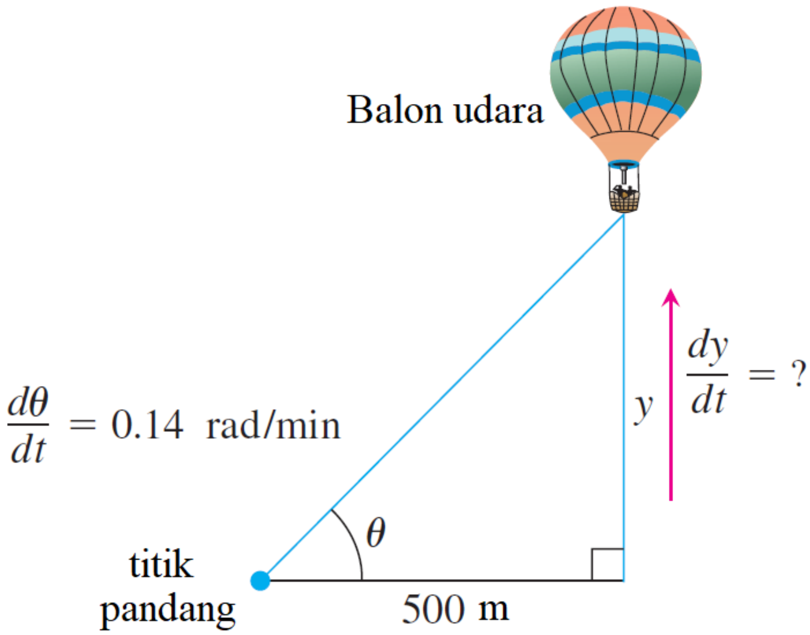
$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\pi} \approx 0{,}32$$

Sehingga kecepatan air naik adalah 0,32 m/menit

Contoh : Menghitung kecepatan naik balon Udara

Balon udara terbang naik keatas dan pada suatu saat tingginya 500 m dari suatu titk yang terletak lurus dari tanah, Pada titik ini sudut terlihat adalah 45° , Sudut ini bertambah dengan kecepatan 0,14 rad/menit. Berapa kecepatan balon pada titik tersebut.

Jawaban:



Diketahui kenaikan sudut

$$\frac{d\theta}{dt} = 0{,}14\ \frac{rad}{menit}$$

$$\frac{y}{500} = \tan\theta$$

$$y = 500\tan\theta$$

Diturunkan dengan menggunakan aturan rantai

$$\frac{dy}{dt} = 500\,(\sec^2\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

Pada titik ini sudut terlihat adalah 45° dan $\frac{d\theta}{dt}$ = 0,14 rad/menit. Maka kecepatan balon adalah:

$$\frac{dy}{dt} = 500(\sqrt{2})^2\ \ 0{,}14$$

$$= 140$$

Sehingga didapatkan kecepatan balon udara saat itu adalah 140 m/menit

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

1. Suatu fungsi $f\,(x) = x^3 + 3x^2 - 5$. Dimanakah letak nilai x untuk fungsi turun dan fungsi naik.
2. Berapakah nilai minimum dari suatu fungsi $\mathrm{f}\,(\mathrm{x}) = 2x^3 + 6x^2 - 48\mathrm{x} + 5$ yang berada pada interval $-2 < \mathrm{x} < 5$
3. Sebuah kotak tanpa tutup dapat dibuat dari kertas berbentuk persegi dengan sisi *k* cm dengan cara menggunting empat persegi di pojoknya sebesar *s* cm. Agar volume kotak maksimum, berapa nilai s yang didapat.

D. DAFTAR PUSTAKA

Thomas (2005), alculus 11e with Differential Equations, Pearson Wesley

Weltner, Klaus (2009), Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide, Springer

GLOSARIUM

irasional: bilangan Transendental, seperti π (3,14159265...), bilangan natural atau euler dengan notasi e (2,71828…)

Koordinat Kartesius: sistem koordinat yang di bentuk oleh 2 garis mendatar dan vertikal pada yang saling tegak lurus.

variabel (*variable*): lambang (simbol) yang digunakan untuk menyatakan sembarang anggota suatu himpunan.

Himpunan: kumpulan benda-benda atau obyek yang didefinisikan (di beri batasan) dengan jelas

Basis: nilai okok pada sebuh perpangkatan misal a merupakan nilai basis dari a^n

Lingkaran: tempat kedudukan titik-titik pada sebuah bidang dengan jarak sama terhadap suatu titik tertentu

Komposisi fungsi: metode penggabungan dua fungsi atau lebih secara berurutan sehingga menghasilkan sebuah fungsi baru

Fungsi Invers (fungsi kebalikan): fungsi yang merupakan kebalikan aksi dari suatu fungsi.

Konsep Limit: ide sentral yang membedakan kalkulus dari aljabar dan trigonometri

Turunan: konsep pengembangan dari limit yang menurunkan sebuah pangkat atau fungsi tertentu.

DAFTAR PUSTAKA

Georhe B.Thomas Jr.; Calculus and Analytic Geometry; 4th edition; Addison Wesly; Publishing Company, Reading Massachussets printing, 1975

Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide

Purcel. Edwin J.Varberg; Dale; Kalkulus dan Geometri Analitis, Jilid I, Edisi ke.5, Penerjemah Drs. I Nyoman Susila, M.Sc. Jakarta, Erlanga. 1995

Thomas - Calculus 11e with Differential Equations HQ

Thomas - Calculus 11e with Differential Equations HQ, Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide

Thomas (2005), Calculus 11e with Differential Equations, Pearson Wesley

Thomas (2005), Calculus 11e with Differential Equations Pearson Addison Wesley

Thomas (2005), Calculus 11e with Differential Equations, Pearson Wesley

Weltner, Klaus (2009), Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide, Springer

RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER

(RPS)

Fakultas	:	Teknik	Mata Kuliah/Kode	:	Kalkulus 1/ TEK0013
Prasyarat	:	-	Sks	:	3 Sks
Semester	:	I	Kurikulum	:	KKNI
Deskripsi Mata Kuliah	:	Matakuliah Kalkulus 1 merupakan matakuliah Wajib fakultas teknik yang membahas tentang jenis bilangan riil, Cartesius, Persamaan dan pertidaksamaan, Sistem himpunan, Fungsi eksponen dan logaritma, persamaan garis lurus, persamaan lingkaran, fungsi dan grafik, invers fungsi, limit, turunan dan aplikasi turunan.	Capaian Pembelajaran	:	Setelah menyelesaiakn mata kuliah ini mahasiswa mampu mengaplikasikan turunan pada bidang teknik dengan tepat.
Penyusun	:	Dr. Yoyok Dwi Setyo Pambudi, ST, MT			

PERTEMUAN KE-	KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN	BAHAN KAJIAN (MATERI AJAR)	METODE PEMBELAJARAN	PENGALAMAN BELAJAR MAHASISWA	KRITERIA PENILAIAN	BOBOT NILAI
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	Menguasai materi Sistem Bilangan Riil dalam matematika dan kegunaannya	Jenis –jenis bilangan riil,	ceramah dan diskusi	Latihan 1	Kelengkapan jawaban	6%

PERTEMUAN KE-	KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN	BAHAN KAJIAN (MATERI AJAR)	METODE PEMBELAJARAN	PENGALAMAN BELAJAR MAHASISWA	KRITERIA PENILAIAN	BOBOT NILAI
2	Mampu menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan dgn bilangan cartesius	Cartesius dan koordinat	ceramah dan diskusi	Latihan 2	Ketepatan perhitungan	6%
3	Mampu menguasai dan menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan dgn sistem persaamaan dalam matematika	Persamaan	ceramah dan diskusi	Latihan 3	Ketepatan perhitungan	6%
4	Mampu menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan dgn sistem pertidaksamaan aljabar	Pertidaksamaan	ceramah dan diskusi	Latihan 3	Ketepatan perhitungan	6%
5	Mampu mengerti konsep sistem himpunan dan menyelesaikan soal yng berkaitan	Sistem Himpunan	ceramah dan diskusi	Tugas 1	Ketepatan perhitungan	6%
6	Mampu mengerti konsep Fungsi eksponen dan Logaritma dan menyelesaikan soal yng berkaitan.	Fungsi eksponen dan Logaritma	ceramah dan diskusi	Tugas 2	Ketepatan perhitungan	6%

PERTEMUAN KE-	KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN	BAHAN KAJIAN (MATERI AJAR)	METODE PEMBELAJARAN	PENGALAMAN BELAJAR MAHASISWA	KRITERIA PENILAIAN	BOBOT NILAI
7	Mampu menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan dgn Persamaan Garis Lurus	Persamaan Garis Lurus	ceramah dan diskusi	Latihan 5	Ketepatan perhitungan	6%
8	Mampu menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan dgn Persamaan Lingkaran	Persamaan Lingkaran	ceramah dan diskusi	Latihan 6	Ketepatan perhitungan	6%
UTS						
9	Mampu mengerti konsep Fungsi dan dan grafik fungsi	Fungsi dan Grafiknya	ceramah dan diskusi	Latihan 7	Ketepatan perhitungan	6%
10	Mampu menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan operasi fungsi dan komposisi	operasi fungsi komposisi	ceramah dan diskusi	Latihan 8	Ketepatan perhitungan	6%
11	Mampu menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan dgn invers fungsi	invers fungsi	ceramah dan diskusi	Latihan 9	Ketepatan perhitungan dan penyimpulan	6%
12.	Mampu mengerti konsep limit dan kekontinuan	Limit	ceramah dan diskusi	Latihan 11.	Ketepatan perhitungan	6%

PERTEMUAN KE-	KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN	BAHAN KAJIAN (MATERI AJAR)	METODE PEMBELAJARAN	PENGALAMAN BELAJAR MAHASISWA	KRITERIA PENILAIAN	BOBOT NILAI
					dan penyimpulan	
13	Mampu menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan dgn Aljabar Hitung Limit	Aljabar Hitung Limit	ceramah dan diskusi	Tugas	Ketepatan perhitungan dan penyimpulan	6%
14.	Mampu menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan dgn Limit tak hingga	Limit Tak Hingga	ceramah dan diskusi	Tugas	Ketepatan perhitungan dan penyimpulan	6%
15.	Mampu menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan dgn Turunan	Turunan	ceramah dan diskusi	Tugas	Ketepatan perhitungan dan penyimpulan	6%
16.	Mampu menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan dgn aturan rantai dalam matematika dan kegunaannya	Turunan aturan rantai	ceramah dan diskusi	Tugas	Ketepatan perhitungan dan penyimpulan	5%
17.	Mampu menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan turunan	Turunan dalam dunia teknik	ceramah dan diskusi	Latihan.	Ketepatan perhitungan dan penyimpulan	5%

PERTEMUAN KE-	KEMAMPUAN AKHIR YANG DIHARAPKAN	BAHAN KAJIAN (MATERI AJAR)	METODE PEMBELAJARAN	PENGALAMAN BELAJAR MAHASISWA	KRITERIA PENILAIAN	BOBOT NILAI
	dalam dunia teknik dan kegunaannya.					
18.	Menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan dgn aplikasi turunan	Aplikasi turunan	ceramah dan diskusi	Latihan.	Ketepatan perhitungan dan penyimpulan	6%
UAS						

Mengetahui,
Ketua Program Studi

Syaiful Bakhri, ST,M.Eng.Sc.Ph.D
NIDN. 0421127402

Ketua Tim Teaching

Dr. Yoyok Dwi Setyo Pambudi, ST, MT
NIDN. 0422047304