Kalkulus 2

Persamaan Differensial Biasa
(*Ordinary Differential Equations* (*ODE*))

Dhoni Hartanto, S.T., M.T., M.Sc.

Prodi Teknik Kimia
Fakultas Teknik
Universitas Negeri Semarang

Persamaan Differensial Biasa

Persamaan Differensial adalah Persamaan yang mengandung beberapa turunan dari suatu fungsi

Persamaan Differensial Biasa adalah Persamaan yang mempunyai fungsi satu variable bebas

Persamaan Differensial Parsial adalah Persamaan yang mempunyai fungsi dengan jumlah variable bebas lebih dari satu

Persamaan Differensial Biasa

Persamaan Differensial **Biasa** adalah Persamaan yang mempunyai fungsi satu variable bebas

$$\frac{dy}{dx} + y = x^2$$

$$xy\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 8x^2y\left(\frac{dy}{dx}\right) + x^2 = 0$$

Persamaan Differensial Biasa

Persamaan Differensial Parsial adalah Persamaan yang mempunyai fungsi dengan jumlah variable bebas lebih dari satu

Heat equation

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Fungsi u(x,y,z,t) digunakan untuk merepresentasikan temperatur pada waktu t pada benda secara fisik dengan koordinat (x,y,z)

α = *thermal diffusivity*.

Persamaan Differensial Biasa

Penggunaan :

- Cabang-cabang ilmu teknik
- Ekonomi
- Biologi dan kedokteran
- Kimia, Fisika dsb.

ODE digunakan untuk mendapatkan formulasi suatu fenomena yang mengalami perubahan terhadap waktu atau tempat

Cooling

- This is a model of how the temperature of an object changes as it loses heat to the surrounding atmosphere:

Temperature of the object: T_{Obj} **Room Temperature:** T_{Room}

<u>Newton's laws states</u>: "*The rate of change in the temperature of an object is proportional to the difference in temperature between the object and the room temperature*"

Form ODE

$$\frac{dT_{Obj}}{dt} = -\alpha(T_{Obj} - T_{Room})$$

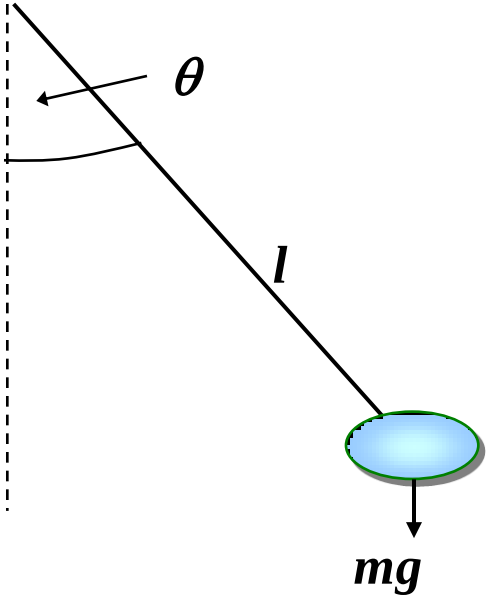
Solve ODE

$$T_{Obj} = T_{Room} + (T_{init} - T_{Room})e^{-\alpha t}$$

Where T_{init} **is the initial temperature of the object.**

Newton's 2nd law for a rotating object:

- **Moment of inertia x angular acceleration = Net external torque**



$$ml^2 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\sin\theta$$

rearrange and divide through by ml^2

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \sin\theta = 0$$

where $\omega^2 = \frac{g}{l}$

This equation is very difficult to solve.

Order (tingkat)

- Order suatu persamaan differensial adalah tingkat turunan tertinggi persamaan differensial tersebut.

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}} + \frac{dy}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \textbf{2}^{\textbf{nd}}\ \textbf{order}$$

$$\frac{dx}{dt} = x\boxed{\frac{d^3x}{dt^3}} \quad \Rightarrow \quad \textbf{3}^{\textbf{rd}}\ \textbf{order}$$

Derajat (Degree)

- Derajat suatu persamaan differensial (PD) adalah pangkat dari turunan yang tertinggi di dalam PD tsb.

$$\boxed{xy\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2} + \sin x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 8x^2y\frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \Rightarrow$$ **2nd degree**

Bentuk Umum :

$$y^n + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}(x)y = k(x)$$

Persamaan diferensial (PD) → Linear derajat 1

Penyelesaian Persamaan Diferensial

- Artinya mencari suatu fungsi y=f(x) yang memenuhi PD tersebut
- Fungsi y=f(x) yang memenuhi sebuah PD banyak sekali, kumpulan fungsi-fungsi yang memenuhi sebuah PD disebut **Penyelesaian Umum Persamaan Diferensial (PUPD)**

- Salah satu fungsi di dalam kumpulan fungsi-fungsi yang memenuhi sebuah PD disebut **Penyelesaian Khusus** PD tsb.
- Penyelesaian khusus sebuah PD tsb. juga **harus memenuhi** beberapa kondisi batas

Persamaan Diferensial Biasa Orde 1

Tipe-tipe PD biasa orde 1 :

- PD dengan variabel dapat dipisah
- PD homogen
- PD bentuk $(ax+by+c)\,dx + (px+qy+r)\,dy = 0$
- PD eksak
- PD linear
- PD Bernoulli

1. PD dengan variabel dapat dipisah

Prinsip penyelesaian :

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

diubah menjadi bentuk persamaan

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

1. PD dengan variabel dapat dipisah

Contoh 1 : Cari penyelesaian umum PD berikut

$$\frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y)$$

Penyelesaian

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int (1+x)\,dx$$

$$\ln(1+y) = x + \frac{1}{2}x^2 + \ln C$$

$$\ln(1+y) = \ln e^{x+\frac{1}{2}x^2} + \ln C$$

$$\ln(1+y) = \ln C\, e^{x+\frac{1}{2}x^2}$$

$$1+y = C\, e^{x+\frac{1}{2}x^2}$$

$$y = C\, e^{x+\frac{1}{2}x^2} - 1$$

2. PD Homogen

Suatu fungsi dikatakan homogen derajat n bila ada suatu konstanta n sehingga untuk setiap parameter λ berlaku :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Misal : $a)\ \ f(x, y) = x^2 + xy$ ⇒ Homogen derajat 2

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \lambda^2 x^2 + \lambda^2 xy \\ &= \lambda^2 (x^2 + xy) \\ &= \lambda^2 f(x, y) \end{aligned}$$

2. PD Homogen

Misal : $b)\ \ f(x,y) = \tan\left(\dfrac{x}{y}\right)$ → Homogen derajat 0

$$f(\lambda x, \lambda y) = \tan\left(\dfrac{\cancel{\lambda} x}{\cancel{\lambda} y}\right)$$

λ saling menghilangkan sehingga homogen berderajat 0

PD orde satu berikut :

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

Dikatakan homogen bila P dan Q keduanya homogen berderajat sama yaitu n

2. PD Homogen

Cara Penyelesaian :

PD Homogen dapat diselesaikan dengan subtitusi

$$z = \frac{y}{x} \; ; \; y = zx \;\; ; dy = z\,dx + x\,dz$$

Contoh 2 : Cari penyelesaian umum PD berikut

$$(x + y)\,dx + x\,dy = 0$$

Penyelesaian : Substitusi $z = \dfrac{y}{x} \; ; \; y = zx \;\; ; dy = z\,dx + x\,dz$

PD menjadi : $(x + zx)\,dx + x\,(z\,dx + x\,dz) = 0$

$$(x + zx)\,dx + x\,z\,dx + x^2\,dz = 0$$

2. PD Homogen

(Lanjutan) Contoh 2 :

$$(x + zx)\,dx + x\,z\,dx + x^2\,dz = 0$$

$$(x + 2\,zx)\,dx + x^2\,dz = 0$$

$$x(1+2z)\,dx + x^2 dz = 0$$

$$(1+2z)\,dx + x\,dz = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dz}{1+2z}$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}\ln(1+2\,z) + \ln C$$

$$\ln x = \ln(1+2\,z)^{-1/2} + \ln C$$

$$\ln x = \ln C\ (1+2\,z)^{-1/2}$$

$$e^{\ln x} = e^{\ln C\ (1+2\,z)^{-1/2}}$$

$$x = C\ (1+2\,z)^{-1/2}$$

$$x^2 = C^2\ (1+2\,z)^{-1}$$

$$1+2\,z = \frac{C^2}{x^2}$$

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{C^2}{x^2} - 1\right)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{C^2}{x^2} - 1\right)$$

$$y = \frac{x}{2}\left(\frac{C^2}{x^2} - 1\right)$$

3. PD Bentuk $(ax+by+c)\,dx+(px+qy+r)\,dy=0$

Beberapa kemungkinan :

a) c = 0, r = 0 ; sehingga PD menjadi

$$(ax+by)\,dx+(px+qy)\,dy=0$$

Cara penyelesaian sama dengan PD homogen

b) *px + qy = k (ax + by)*, sehingga PD menjadi

$$(ax+by+c)\,dx+(k(ax+by)+r)\,dy=0$$

Cara penyelesaian :

Subst. :

$$z=ax+by$$

$$dz=a\,dx+b\,dy$$

$$dy=\frac{dz-a\,dx}{b}$$

3. PD Bentuk $(ax+by+c)\,dx+(px+qy+r)\,dy=0$

Lanjutan b), PD menjadi

$$(z+c)\,dx+(k\,z+r)\frac{dz-a\,dx}{b}=0$$

$$\boxed{\left((z+c)+\frac{a\,(k\,z+r)}{b}\right)dx+\frac{k\,z+r}{b}\,dz=0}$$

Cara penyelesaian sama dengan PD variabel dapat dipisah

3. PD Bentuk $(ax+by+c)\,dx+(px+qy+r)\,dy=0$

c) a/p ≠ b/q, c ≠ 0, r ≠ 0; cara penyelesaian :

Subst. : $u = ax+by+c \quad ; du = a\,dx + b\,dy$

$v = px+qy+r \quad ; dv = p\,dx + q\,dy$

$$dx = \frac{\begin{vmatrix} du & b \\ dv & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}} = \frac{q\,du - b\,dv}{a\,q - b\,p}$$

$$dy = \frac{\begin{vmatrix} a & du \\ p & dv \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}} = \frac{a\,dv - p\,du}{a\,q - b\,p}$$

3. PD Bentuk $(ax+by+c)\,dx+(px+qy+r)\,dy=0$

(Lanjutan) c) a/p ≠ b/q, c ≠ 0, r ≠ 0; cara penyelesaian : Substitusi ke PD semula

$$u\left(\frac{q\,du-b\,dv}{a\,q-b\,p}\right)+v\left(\frac{a\,dv-p\,du}{a\,q-b\,p}\right)=0$$

$$u\,(q\,du-b\,dv)+v\,(a\,dv-p\,du)=0$$

$$\boxed{(u\,q-v\,p)\,du+(v\,a-u\,b)\,dv=0}$$

Cara penyelesaian sama dengan PD homogen

3. PD Bentuk $(ax+by+c)\,dx+(px+qy+r)\,dy=0$

Contoh 3 : cari PUPD berikut

$$(x+y+1)\,dx+(2x+2y+1)\,dy=0$$

Penyelesaian : (Berdasarkan analisis konstanta kemungkinan persamaan tsb. Dapat diselesaikan dengan no.b)

Subst. $z=x+y\ \ ;y=z-x$

$$dz=dx+dy\ ;\ \ dy=dz-dx$$

3. PD Bentuk $(ax+by+c)\,dx+(px+qy+r)\,dy=0$

Lanjutan contoh 3 : PD menjadi

$$(z+1)\,dx+(2z+1)(dz-dx)=0$$

$$(z+1-2z-1)\,dx+(2z+1)\,dz=0$$

$$-z\,dx+(2z+1)\,dz=0$$

$$\int\frac{2z+1}{z}\,dz=\int dx$$

$$\int\left(2+\frac{1}{z}\right)dz=\int dx$$

$$2z+\ln z=x+c$$

Substitusi z = x + y ke persamaan ini

Sehingga PUPD :

$$2(x+y)+\ln(x+y)=x+c$$

4. PD Eksak

Bentuk $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

Bisa dinyatakan dalam bentuk turunan sempurna dari suatu fungsi F (*x*,*y*)

Syarat PD eksak : $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

$$dF(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$$dF(x,y) = 0$$

$$F(x,y) = C$$

Permasalahan yang muncul adalah bagaimana mencari *F* (*x*, *y*)?

4. PD Eksak

Agar terpenuhi : $dF(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$

Maka :

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

$$* \quad \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$* \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

4. PD Eksak

Cara mencari $F(x, y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$$

$$\int \partial F = \int M(x, y)\,\partial x$$

$$a) \quad F(x, y) = \int M(x, y)\,\partial x + C(y)$$

2 persamaan penting dalam penyelesaian PD eksak

$$karena \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y), maka$$

$$b) \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x, y)\,\partial x\right] + C'(y) = N(x, y)$$

Sehingga nilai $C(y)$ bisa diperoleh

4. PD Eksak

Contoh 4 : Cari penyelesaian umum PD berikut :

$$(3x^2y - y)\,dx + (x^3 - x + 2y)\,dy = 0$$

Penyelesaian :

$$\underbrace{\boxed{(3x^2y - y)\,dx}}_{M} + \underbrace{\boxed{(x^3 - x + 2y)\,dy}}_{N} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{Syarat PD eksak}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 3x^2 - 1 \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 3x^2 - 1 \end{aligned}\right\} \text{Sesuai syarat PD eksak}$$

4. PD Eksak

Lanjutan Contoh 4 : Persamaan Umum PD eksak (a)

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,\partial x + C(y)$$

$$= \int (3x^2 y - y)\,\partial x + C(y)$$

$$F(x,y) = x^3 y - yx + C(y)$$

Persamaan Umum PD eksak (b)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\,\partial x\right] + C'(y) = N(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int (3x^2 y - y)\,\partial x\right] + C'(y) = N(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[x^3 y - yx\right] + C'(y) = x^3 - x + 2y$$

4. PD Eksak

Lanjutan Contoh 4 : Persamaan Umum PD eksak (a)

$$x^3 - x + \frac{dC}{dy} = x^3 - x + 2y$$

$$\frac{dC}{dy} = 2y$$

$$\int dC = \int 2y\, dy$$

$$C(y) = y^2$$

$$sehingga$$

$$F(x, y) = x^3 y - yx + C(y)$$

$$F(x, y) = x^3 y - yx + y^2$$

5. PD Linear

Bentuk : $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

Cara Penyelesaian :

-) Kalikan dengan suatu faktor integrasi sedemikian agar PD Linear berubah menjadi PD dengan variabel yang dapat dipisah

-) Kemudian menyelesaikan bentuk PD variabel yang dapat dipisah

Faktor integrasi : $U = e^{\int P(x)dx}$

PD dikalikan U sehingga menjadi:

$$\frac{dy}{dx} e^{\int P(x)dx} + P(x)y\, e^{\int P(x)dx} = Q(x)\, e^{\int P(x)dx}$$

5. PD Linear

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}e^{\int P(x)dx} + P(x)y\,e^{\int P(x)dx}} = Q(x)\,e^{\int P(x)dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left[y\,e^{\int P(x)dx}\right] = Q(x)\,e^{\int P(x)dx}$$

Pembuktian :

$$\frac{d}{dx}(y\,u) = u\frac{dy}{dx} + y\frac{du}{dx}$$

$$= e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + y\,e^{\int P(x)dx}P(x)$$

$$note: \frac{d}{dx}e^{\int P(x)dx} = e^{\int P(x)dx}P(x)$$

5. PD Linear

Sehingga berdasarkan : $\dfrac{d}{dx}\left[y\,e^{\int P(x)dx}\right] = Q(x)\,e^{\int P(x)dx}$

$$\int d\left[y\,e^{\int P(x)dx}\right] = \int Q\,e^{\int P(x)dx}dx + C$$

$$\boxed{y\,e^{\int P(x)dx} = \int Q\,e^{\int P(x)dx}dx + C}$$

Contoh 5 : Cari penyelesaian umum PD berikut :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x$$

Penyelesaian : Bentuk tersebut merupakan bentuk PD linear, sehingga

$$P(x) = -\frac{2}{x},\ \ Q(x) = x$$

5. PD Linear

Lanjutan Contoh 5 :

$$U = e^{\int -\frac{2}{x}dx} \rightarrow U = e^{-2\ln x} \rightarrow U = e^{\ln x^{-2}} \rightarrow U = x^{-2}$$

PUPD berdasarkan $$y\,e^{\int P(x)dx} = \int Q\,e^{\int P(x)dx}dx + C$$

$$y\,x^{-2} = \int x\,x^{-2}\,dx + C$$

$$y\,x^{-2} = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$y\,x^{-2} = \ln x + C$$

$$y = x^2(\ln x + C)$$

$$y = x^2 \ln x + x^2 C$$

6. PD Bernoulli

Bentuk : $\frac{dy}{dx} + P(x)y = y^n Q(x)$

Bila n → 0, maka PD Bernoulli menjadi PD Linear

Cara penyelesaian :

Subtitusi : $\boxed{z = \frac{1}{y^{n-1}}}$ Sehingga menjadi PD menjadi Linear:

Contoh 6 : Cari penyelesaian umum PD berikut :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x\,y^2$$

6. PD Bernoulli

Penyelesaian Contoh 6 : Substitusi

$$z = \frac{1}{y^{n-1}} = \frac{1}{y^{2-1}} = \frac{1}{y}$$

$$y = \frac{1}{z} \rightarrow \frac{dy}{dz} = -\frac{1}{z^2}$$

$$berdasarkan \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} * \frac{dz}{dx}, maka$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

Sehingga PD menjadi :

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x}\frac{1}{z} = x\left(\frac{1}{z}\right)^2$$

6. PD Bernoulli

Lanjutan Contoh 6 :

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}+\frac{2}{x}\frac{1}{z}=x\left(\frac{1}{z}\right)^2$$ Dikalikan dengan $-z^2$

Sehingga PD menjadi : $\boxed{\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=-x}$ → PD Linear

Penyelesaian berdasarkan PD linear :

$$U=e^{\int -\frac{2}{x}dx}\rightarrow U=e^{-2\ln x}\rightarrow U=e^{\ln x^{-2}}\rightarrow U=x^{-2}$$

$$z\,u=\int Q(x)\,u\,dx+C$$

$$z\,x^{-2}=\int -x\,x^{-2}\,dx+C$$

$$z\,x^{-2}=-\int\frac{dx}{x}+C$$

$$z\,x^{-2}=-\ln x+C$$

$$z=x^2(-\ln x+C)$$

$$y=\frac{1}{x^2(C-\ln x)}$$

Persamaan Diferensial Biasa Orde n (n>1)

Bentuk :

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$$

$$a_0, a_1, a_{n-1}, a_n = \text{konstan}$$

Bila f(x) = 0 → PD Linear order n homogen

Bila f(x) ≠ 0 → PD Linear order n tidak homogen

Persamaan Diferensial Biasa Orde n (n>1)

Teorema :

1. Bila $y = f(x)$ merupakan penyelesaian PD linear homogen, maka $y = C\ f(x)$ juga merupakan penyelesaian
2. Bila $y_1 = C_1\ f_1\ (x)$

   $y_2 = C_2\ f_2\ (x)$

   $\vdots$

   $y_n = C_n\ f_n\ (x)$

   adalah penyelesaian-penyelesaian yang berlainan dari PD linear homogen, maka

$y = C_1\ f_1\ (x) + C_2\ f_2\ (x) + \ldots\ldots + C_n\ f_n\ (x)$ juga merupakan penyelesaian

Persamaan Diferensial Biasa Orde n (n>1)

Cara I :

Penyelesaian Umum PD linear homogen tingkat n dapat diperoleh dengan subtitusi Euler : $y = e^{mx}$

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + a_n y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = m e^{mx}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m^n e^{mx}$$

Sehingga

$$a_0 m^n e^{mx} + a_1 m^{n-1} e^{mx} + a_n e^{mx} = 0$$

$$\boxed{a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + a_n = 0}$$

Persamaan karakteristik

Diperoleh akar-akar persamaan karakteristik $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots, m_n$

Persamaan Diferensial Biasa Orde n (n>1)

Lanjutan Cara I :

Jadi

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{m_1 x} \\ y_2 &= C_2 e^{m_2 x} \\ &\vdots \\ y_n &= C_n e^{m_n x} \end{aligned}\right\}$$

Merupakan penyelesaian (berdasarkan teorema 2)

Sehingga

$$\boxed{y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \ldots.. + C_n e^{m_n x}}$$

PUPD linear homogen tingkat n

Persamaan Diferensial Biasa Orde n (n>1)

Cara II :

Menggunakan operator : $D = \dfrac{d}{dx}$

PD menjadi

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \ldots.. + a_n y = 0$$

$$y(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots.. + a_n) = 0$$

$$\boxed{a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots.. + a_n = 0} \Rightarrow \text{Persamaan karakteristik}$$

Akar-akar : $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$

$$(D - \alpha_1)(D - \alpha_2)\ldots\ldots(D - \alpha_n) = 0$$

Sehingga :

$$\left[(D - \alpha_1)(D - \alpha_2)\ldots\ldots(D - \alpha_n)\right] y = 0$$

Persamaan Diferensial Biasa Orde n (n>1)

Lanjutan Cara II :

Ditinjau salah satu akar :

$$(D-\alpha_k)y=0$$

$$(\frac{d}{dx}-\alpha_k)y=0$$

$$\frac{dy}{dx}-\alpha_k y=0$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\alpha_k dx$$

$$\ln y_k=\alpha_k x+\ln C_k$$

$$\ln y_k=\ln e^{\alpha_k x}+\ln C_k$$

$$\ln y_k=\ln C_k e^{\alpha_k x}$$

$$y_k=C_k e^{\alpha_k x}$$

$$PUPD$$

$$y=\sum_{k=1}^{n}C_k e^{\alpha_k x}$$

Persamaan Diferensial Biasa Orde n (n>1)

Contoh 7 : Selesaikan persamaan diferensial berikut :

$$y''' - y' = 0$$

$$note : x = 0$$

$$y(0) = 3{,}4; \quad y'(0) = -5{,}4; \quad y''(0) = -0{,}6$$

Penyelesaian : Substitusi Euler $y = e^{mx}$

$$m^3 e^{mx} - m e^{mx} = 0$$

$$m^3 - m = 0$$

$$m(m^2 - 1) = 0$$

$$m(m-1)(m+1) = 0$$

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = -1$$

Persamaan Diferensial Biasa Orde n (n>1)

Lanjutan Contoh 7 : Berdasarkan persamaan

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + ... + C_n e^{m_n x}$$

maka

$$y = C_1 e^{(0)x} + C_2 e^{(1)x} + C_3 e^{(-1)x}$$

$$y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x}$$

$$y' = C_2 e^{x} - C_3 e^{-x}$$

$$y'' = C_2 e^{x} + C_3 e^{-x}$$

Persamaan Diferensial Biasa Orde n (n>1)

Lanjutan Contoh 7 :

$$* \; y(0) = 3{,}4$$

$$3{,}4 = C_1 + C_2 e^0 + C_3 e^{-0}$$

$$3{,}4 = C_1 + C_2 + C_3$$

$$* \; y'(0) = -5{,}4$$

$$-5{,}4 = C_2 - C_3$$

$$* \; y''(0) = -0{,}6$$

$$-0{,}6 = C_2 + C_3$$

Berdasarkan substitusi diperoleh masing-masing nilai :

$$C_1 = 4; \;\; C_2 = -3; \;\; C_3 = 2{,}4$$

PD :

$$y = 4 - 3e^x + 2{,}4e^{-x}$$

Persamaan Diferensial Biasa dalam kasus Teknik Kimia

Pembuatan sabun disebut saponifikasi, dalam proses tersebut lemak yang berasal dari hewan atau tumbuhan direaksikan dengan KOH atau NaOH untuk memproduksi gilcerol dan *fattyacid salt* (sabun). Sabun dipisahkan dari gliserol melalui presipitasi dengan penambahan natrium klorida. Lapisan air bagian atas yang mengandung natrium klorida dipisahkan dari campuran sebagai limbah.

Kementerian Lingkungan Hidup (KLH) mengharuskan konsentrasi maksimum natrium klorida pada limbah yang dibuang ke lingkungan tidak lebih dari 11.00 gram / liter. Natrium klorida ini merupakan limbah utama dalam proses produksi sabun.

Persamaan Diferensial Biasa dalam kasus Teknik Kimia (lanjutan)

Sebuah pabrik sabun tersebut hanya memiliki 1 tangki dengan kapasitas 15 liter untuk penampungan limbah. Dalam proses pengisian tangki limbah tersebut, sebanyak 15 liter air dan 750 gram natrium klorida dimasukkan. Untuk proses kontinuitas proses produksi pabrik dan menjaga agar limbah yang terbuang ke lingkungan konsentrasinya tidak melebihi aturan KLH, maka diperlukan pompa yang dioperasikan untuk memompa air ke tangki dengan laju 2 liter setiap menit dimana limbah garam yang mengandung 45 gram garam per liter ditambahkan dengan laju 1,5 liter per menit.

Persamaan Diferensial Biasa dalam kasus Teknik Kimia (lanjutan)

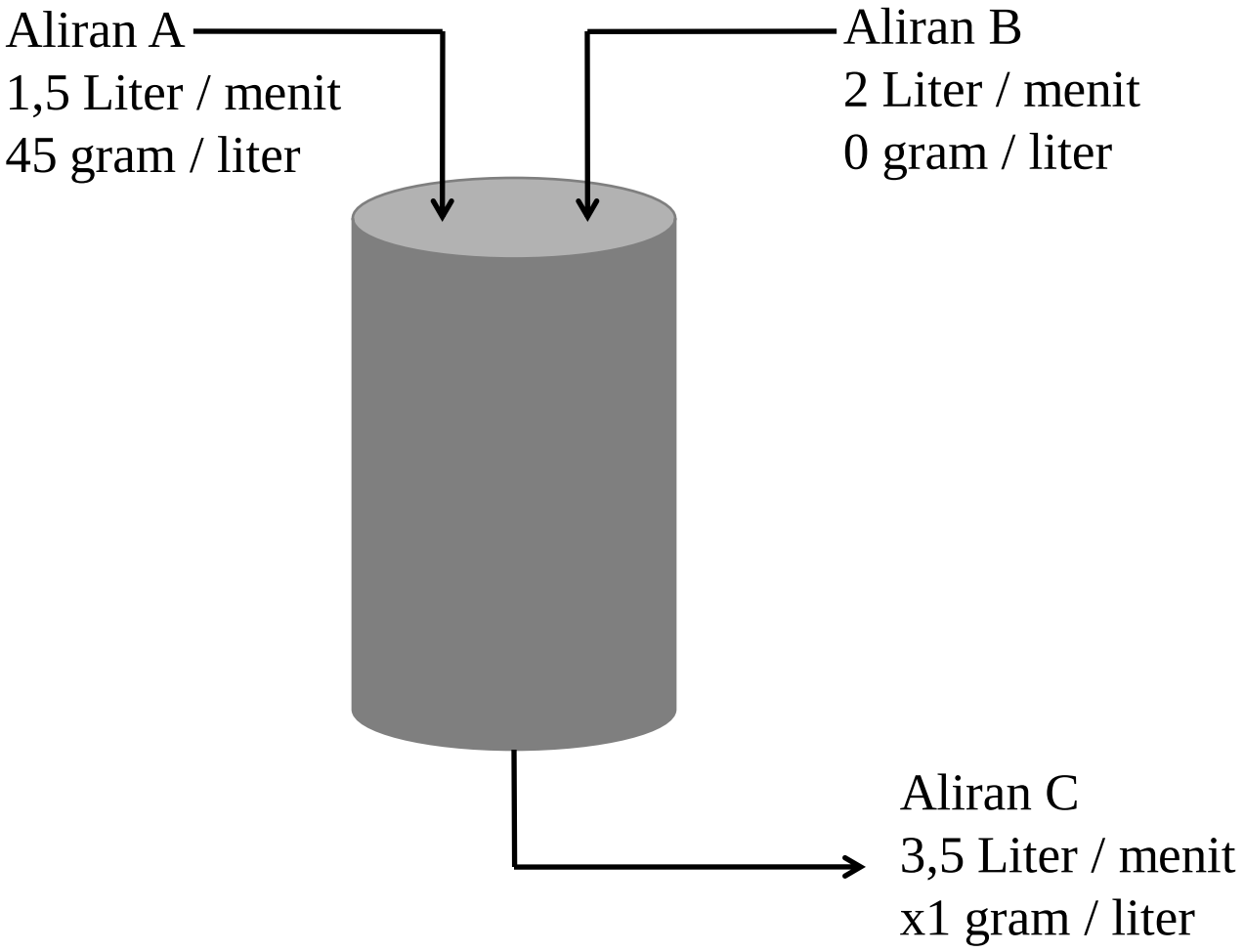
Untuk menjaga volume larutan dalam tangki tetap pada level 15 liter, maka limbah yang terdapat di dalam tangki dikeluarkan (*discharge*) sebanyak 3,5 liter per menit

Misalkan A merupakan aliran limbah dari proses, B merupakan aliran air (*fresh water*), dan C adalah aliran keluar limbah dari tangki ke lingkungan.

Diasumkan saat aliran A dan B masuk ke dalam tangki, maka secara cepat terjadi perubahan konsentrasi klorida ke arah konsentrasi keluar tangki x1 dan di dalam tangki tidak terjadi reaksi kimia

a) Berapa lama waktu yang dibutuhkan untuk memperoleh konsentrasi sesuai dengan standar dari KLH untuk limbah kloride di lingkungan, apakah pabrik tersebut bisa memenuhi standard dari KLH?
b) Pada waktu 3 detik berapa konsentrasi limbah yang keluar dari tangki
c) Dalam kondisi *steady state*, berapa konsentrasi garam yang dikeluarkan oleh pabrik tersebut

Persamaan Diferensial Biasa dalam kasus Teknik Kimia (lanjutan)



Persamaan Diferensial Biasa dalam kasus Teknik Kimia (lanjutan)

Neraca massa untuk natrium klorida pada sistem tangki :

Akumulasi = input – output + ~~generasi~~ (pembuangan karena reaksi)

$$\frac{dx_1}{dt} = (45\,g/L)(1.5\,L/\min) + (0\,g/L)(2L/\min) - (x_1\,g/L)(3.5\,L/\min) + 0$$

$$\frac{dx_1}{dt} + 3.5x_1 = 67.5$$

$$t = 0, x_1(0) = \frac{750\,g}{15\,L} = 50\,g/L$$

Penyelesaian dengan menggunakan PD Linear

$$\frac{dx_1}{dt} + 3.5x_1 = 67.5$$

$$U = e^{\int dt} = e^t$$

$$P(x) = 3.5 \quad ; \quad Q(x) = 67.5$$

$$y\, e^{\int P(x)dx} = \int Q\, e^{\int P(x)dx} dx + C$$

$$x\, e^t = \int 67.5\ e^t + C$$

$$x\, e^t = 67.5\ e^t + C$$

$$x = \frac{67.5\ e^t + C}{e^t}$$

$$x = 67.5 + \frac{C}{e^t}$$

Penyelesaian dengan menggunakan PD Linear

$$t = 0, x_1(0) = \frac{750\,g}{15\,L} = 50\,g/L$$

$$x = 67.5 + \frac{C}{e^t}$$

$$50 = 67.5 + \frac{C}{e^0}$$

$$50 - 67.5 = C$$

$$C = -17.5$$

Sehingga persamaan menjadi :

$$x = 67.5 - \frac{17.5}{e^t}$$

a) -1,1724 minutes, artinya pabrik tidak bisa memenuhi standar KLH karena waktu yang dibutuhkan bersifat minus sehingga tidak dapat memenuhi persamaan

b) 50.8535 g/L

c) *Steady state* berarti

$$\frac{dx_1}{dt} = 0$$

$$0 + 3.5x_1 = 67.5$$

$$x_1 = 19.285\,g/L$$

Let's play

Find the solution (PUPD) from the problems below :

1) $(x-2y+1)\,dx+(2x-y-1)\,dy=0$

2) $2xy\,dx+(x^2+1)\,dy=0$

3) $(x^2+y^2)\,dx=2x\,y\,dy$

4) $y\,dx+x\,dy=0$

5) $(2x+3y)\,dx+(3x+4y)\,dy=0$

6) $(15x^2y^2-y^4)\,dx+(10x^3y-4xy^3-5y^4)\,dy=0$

7) $y'-y=2e^x$

8) $y'-2y=\cos 2x$

9) $y''-3y'+2y=0$

10) $y''+2y'+y=0$

THANK YOU FOR YOUR ATTENTION IN THIS CLASS