

Kalkulus 2

Teknik Pengintegralan ke - 3

Tim Pengajar Kalkulus ITK

Institut Teknologi Kalimantan

Januari 2018

- 1 Teknik Pengintegralan Ke-3
 - Integrasi Fungsi Rasional Menggunakan Pecahan Parsial
 - Dekomposisi Pecahan Parsial (Faktor Linear)
 - Faktor Linear yang Berbeda
 - Faktor Linear yang Berulang
 - Faktor Linear Campuran
 - Dekomposisi Pecahan Parsial (Faktor Kuadrat)
 - Faktor Kuadrat Tunggal
 - Faktor Kuadrat Berulang

Kemampuan yang diinginkan pada Bab Ini adalah mahasiswa memiliki kejelian melihat bentuk soal.

sehingga faktor latihan sangat penting

untuk memperoleh hasil yang diinginkan.

Jadi **BANYAK BERLATIH** dengan soal-soal, maka anda InsyaAllah akan menuai kesuksesan.

Integrasi Fungsi Rasional Menggunakan Pecahan Parsial

Menurut definisi, suatu fungsi rasional adalah hasil bagi dua fungsi polinomial. Contoh - contoh fungsi rasional adalah

$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \quad g(x) = \frac{2x+2}{x^2-4x+8} \quad h(x) = \frac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x}$$

Fungsi f dan g adalah fungsi rasional sejati, bermakna bahwa derajat pembilang lebih kecil dari pada derajat penyebut.

Fungsi rasional tak sejati selalu dapat ditulis sebagai penjumlahan suatu fungsi polinomial dan suatu fungsi rasional sejati.

$$h(x) = \frac{x^5 + 2x^3 - x + 1}{x^3 + 5x} = x^2 - 3 + \frac{14x + 1}{x^3 + 5x}$$

- Oleh karena polinomial mudah diintegrasikan, perhatikan $(x^2 - 3)$.

Fungsi rasional tak sejati selalu dapat ditulis sebagai penjumlahan suatu fungsi polinomial dan suatu fungsi rasional sejati.

$$h(x) = \frac{x^5 + 2x^3 - x + 1}{x^3 + 5x} = x^2 - 3 + \frac{14x + 1}{x^3 + 5x}$$

- Oleh karena polinomial mudah diintegrasikan, perhatikan $(x^2 - 3)$.
- Maka persoalan mengintegrasikan fungsi rasional sebenarnya adalah persoalan mengintegrasikan fungsi rasional sejati.

Integrasi Fungsi Rasional Menggunakan Pecahan Parsial

- Perhatikan untuk kasus f dan g sebelumnya

Integrasi Fungsi Rasional Menggunakan Pecahan Parsial

- Perhatikan untuk kasus f dan g sebelumnya
- Carilah

$$\int \frac{2}{(x+1)^3} dx$$

Integrasi Fungsi Rasional Menggunakan Pecahan Parsial

- Perhatikan untuk kasus f dan g sebelumnya
- Carilah

$$\int \frac{2}{(x+1)^3} dx$$

- dan selesaikan integral

$$\int \frac{2x+2}{x^2-4x+8} dx$$

Integrasi Fungsi Rasional Menggunakan Pecahan Parsial

Contoh

Carilah $\int \frac{2}{(x+1)^3} dx$.

- Misalkan $u = x + 1$, maka $du = dx$. Sehingga

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{(x+1)^3} dx &= 2 \int u^{-3} du \\ &= \frac{2}{-2} u^{-2} + C \\ &= -\frac{1}{(x+1)^2} + C\end{aligned}$$

Integrasi Fungsi Rasional Menggunakan Pecahan Parsial

Contoh

Carilah $\int \frac{2x + 2}{x^2 - 4x + 8} dx$

- Pertama misalkan $u = x^2 - 4x + 8$ sehingga $du = 2x - 4 dx$.
kemudian tuliskan integral tersebut sebagai jumlah dua integral.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x + 2}{x^2 - 4x + 8} dx &= \int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 8} dx + \int \frac{6}{x^2 - 4x + 8} dx \\ &= \ln |x^2 - 4x + 8| + 6 \int \frac{1}{x^2 - 4x + 8} dx\end{aligned}$$

Integrasi Fungsi Rasional Menggunakan Pecahan Parsial



$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 - 4x + 8} dx &= \int \frac{1}{x^2 - 4x + 4 + 4} dx \\ &= \int \frac{1}{(x-2)^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x-2}{2} \right) + C\end{aligned}$$

Integrasi Fungsi Rasional Menggunakan Pecahan Parsial



$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 - 4x + 8} dx &= \int \frac{1}{x^2 - 4x + 4 + 4} dx \\ &= \int \frac{1}{(x-2)^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x-2}{2} \right) + C\end{aligned}$$

- Jadi,

$$\int \frac{2x+2}{x^2-4x+8} dx = \ln|x^2-4x+8| + 3 \tan^{-1} \left(\frac{x-2}{2} \right) + K$$

Dekomposisi Pecahan Parsial (Faktor Linear)

Menambahkan pecahan merupakan latihan aljabar Baku: carilah penyebut bersama dan tambahkan. Sebagai contoh,

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{2(x+1) + 3(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{5x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{5x-1}{x^2-1}$$

- Yang menarik bagi kita sekarang adalah proses kebalikannya yakni dekomposisi suatu pecahan menjadi suatu jumlah pecahan - pecahan yang lebih sederhana.

Faktor Linear yang Berbeda

Contoh

Dekomposisikan $\frac{2x - 1}{x^2 - 4x + 3}$ dan kemudian carilah integral tak tentunya.

- karena penyebutnya diuraikan sebagai $(x - 1)(x - 3)$, hal yang mungkin untuk dekomposisinya adalah berbentuk

$$\frac{2x - 1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x - 3)} \quad (i)$$

Faktor Linear yang Berbeda

Contoh

Dekomposisikan $\frac{2x - 1}{x^2 - 4x + 3}$ dan kemudian carilah integral tak tentuinya.

- karena penyebutnya diuraikan sebagai $(x - 1)(x - 3)$, hal yang mungkin untuk dekomposisinya adalah berbentuk

$$\frac{2x - 1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x - 3)} \quad (i)$$

- Tugas kita adalah menentukan nilai A dan B sehingga pers (i) menjadi suatu identitas.

- Tugas kita akan mudah dengan mengalikan kedua ruas dengan $(x - 1)(x - 3)$, sehingga diperoleh

$$2x - 1 = A(x - 3) + B(x - 1)$$

- Tugas kita akan mudah dengan mengalikan kedua ruas dengan $(x - 1)(x - 3)$, sehingga diperoleh

$$2x - 1 = A(x - 3) + B(x - 1)$$

- Secara ekivalen

$$2x - 1 = (A + B)x + (-3A - B) \quad (\text{ii})$$

- Tugas kita akan mudah dengan mengalikan kedua ruas dengan $(x - 1)(x - 3)$, sehingga diperoleh

$$2x - 1 = A(x - 3) + B(x - 1)$$

- Secara ekuivalen

$$2x - 1 = (A + B)x + (-3A - B) \quad (\text{ii})$$

- persamaan (ii) akan memenuhi jika koefisien pada setiap suku sama di ruas kiri dan ruas kanan

$$A + B = 2$$

$$-3A - B = -1$$

- Tugas kita akan mudah dengan mengalikan kedua ruas dengan $(x - 1)(x - 3)$, sehingga diperoleh

$$2x - 1 = A(x - 3) + B(x - 1)$$

- Secara ekuivalen

$$2x - 1 = (A + B)x + (-3A - B) \quad (\text{ii})$$

- persamaan (ii) akan memenuhi jika koefisien pada setiap suku sama di ruas kiri dan ruas kanan

$$A + B = 2$$

$$-3A - B = -1$$

- dengan menyelesaikan sistem persamaan A dan B , kita peroleh

$$A = -\frac{1}{2} \text{ dan } B = \frac{5}{2}.$$

Dengan demikian persamaan i) menjadi,

$$\frac{2x - 1}{x^2 - 4x + 3} = -\frac{1}{2(x - 1)} + \frac{5}{2(x - 3)}$$

dan

$$\begin{aligned}\int \frac{2x - 1}{x^2 - 4x + 3} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{(x - 1)} dx + \frac{5}{2} \int \frac{1}{(x - 3)} dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln |x - 1| + \frac{5}{2} \ln |x - 3| + C\end{aligned}$$

Faktor Linear yang Berbeda

Contoh

Carilah $\int \frac{5x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx$.

Penyelesaian : Karena penyebut diuraikan sebagai $x(x + 1)(x - 3)$, kita tuliskan

$$\frac{5x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x + 1)} + \frac{C}{(x - 3)}$$

- Dengan menghilangkan pecahan - pecahannya kita akan memperoleh

$$5x + 3 = A(x + 1)(x - 3) + Bx(x - 3) + Cx(x + 1)$$

Faktor Linear yang Berbeda

Contoh

Carilah $\int \frac{5x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} dx$.

Penyelesaian : Karena penyebut diuraikan sebagai $x(x + 1)(x - 3)$, kita tuliskan

$$\frac{5x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x + 1)} + \frac{C}{(x - 3)}$$

- Dengan menghilangkan pecahan - pecahannya kita akan memperoleh

$$5x + 3 = A(x + 1)(x - 3) + Bx(x - 3) + Cx(x + 1)$$

- Substitusikan nilai $x = 0$, $x = -1$, dan $x = 3$, menghasilkan

$$3 = A(-3)$$

$$-2 = B(4) \text{ dan } 18 = C(12)$$

- atau $A = -1, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{3}{2}$, sehingga,

$$\begin{aligned}\int \frac{5x + 3}{x^2 - 2x^2 - 3x} dx &= -\int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x - 3} dx \\ &= -\ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x + 1| + \frac{3}{2} \ln|x - 3| + C\end{aligned}$$

Faktor Linear yang Berulang

Contoh

Carilah $\int \frac{x}{(x-3)^2} dx$.

Penyelesaian : Sekarang proses dekomposisi menghasilkan bentuk

$$\frac{x}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

Di mana A dan B harus ditentukan.

- kita peroleh

$$x = A(x-3) + B$$

Faktor Linear yang Berulang

Contoh

Carilah $\int \frac{x}{(x-3)^2} dx$.

Penyelesaian : Sekarang proses dekomposisi menghasilkan bentuk

$$\frac{x}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

Di mana A dan B harus ditentukan.

- kita peroleh

$$x = A(x-3) + B$$

- Jika kita substitusikan nilai yang sesuai $x = 3$ dan sembarang nilai x yang lain, misalkan $x = 0$. Kita peroleh $B = 3$ dan $A = 1$.

Faktor Linear yang Berulang

jadi,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-3)^2} dx &= \int \frac{1}{x-3} dx + \int \frac{3}{(x-3)^2} dx \\ &= \ln|x-3| - \frac{3}{x-3} + C\end{aligned}$$

Beberapa Faktor Linear Berbeda, Beberapa yang Berulang (Campuran)

Contoh

Carilah $\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{(x + 3)(x - 1)^2} dx$

Penyelesaian : Kita dekomposisikan integran dengan cara berikut :

$$\frac{3x^2 - 8x + 13}{(x + 3)(x - 1)^2} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2}$$

- Dengan menghilangkan pecahan - pecahannya, kita memperoleh

$$3x^2 - 8x + 13 = A(x - 1)^2 + B(x + 3)(x - 1) + C(x + 3)$$

Beberapa Faktor Linear Berbeda, Beberapa yang Berulang (Campuran)

Contoh

Carilah $\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{(x + 3)(x - 1)^2} dx$

Penyelesaian : Kita dekomposisikan integran dengan cara berikut :

$$\frac{3x^2 - 8x + 13}{(x + 3)(x - 1)^2} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2}$$

- Dengan menghilangkan pecahan - pecahannya, kita memperoleh

$$3x^2 - 8x + 13 = A(x - 1)^2 + B(x + 3)(x - 1) + C(x + 3)$$

- Substitusikan $x = 1$, $x = -3$, dan $x = 0$ menghasilkan $C = 2$, $A = 4$, dan $B = -1$.

Beberapa Faktor Linear Berbeda, Beberapa yang Berulang (Campuran)

Jadi,

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{(x+3)(x-1)^2} dx &= \int \frac{4}{x+3} dx - \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx \\ &= 4 \ln|x+3| - \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C\end{aligned}$$

Dekomposisi Pecahan Parsial (Faktor Kuadrat)

Dalam menguraikan penyebut suatu pecahan, kita mungkin mendapatkan beberapa faktor kuadrat (misalnya seperti $x^2 + 1$, yang tidak dapat lagi diuraikan menjadi faktor - faktor linear tanpa memperkenalkan bilangan kompleks).

Faktor Kuadrat Tunggal

Contoh

Dekomposisikan $\frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x + 1)(x^2 + 1)}$ dan kemudian tentukan integral tak - tentunya.

Penyelesaian : Dekomposisi terbaik yang dapat kita harapkan adalah dekomposisi berbentuk

$$\frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{4x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

Untuk menentukan konstanta A , B , dan C kita kalikan kedua ruas persamaan dengan $(4x + 1)(x^2 + 1)$ dan memperoleh

$$6x^2 - 3x + 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(4x + 1)$$

Faktor Kuadrat Tunggal

- Substitusi $x = -\frac{1}{4}$, $x = 0$, dan $x = 1$ menghasilkan

$$\begin{aligned}\frac{6}{16} + \frac{3}{4} + 1 &= A \left(\frac{17}{16}\right) && \implies A = 2 \\ 1 &= 2 + C && \implies C = -1 \\ 4 &= 4 + B - 1)5 && \implies B = 1\end{aligned}$$

Faktor Kuadrat Tunggal

Jadi,

$$\begin{aligned}\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x + 1)(x^2 + 1)} dx &= \int \frac{2}{4x + 1} dx + \int \frac{x - 1}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{4 dx}{4x + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2 + 1} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \ln |4x + 1| + \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) - \tan^{-1} x + C\end{aligned}$$

Faktor Kuadrat Berulang

Contoh

Carilah $\int \frac{6x^2 - 15 + 22}{(x + 3)(x^2 + 2)^2} dx$

Penyelesaian : Di sini dekomposisi yang cocok adalah

$$\frac{6x^2 - 15 + 22}{(x + 3)(x^2 + 2)^2} = \frac{A}{x + 3} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 2)^2}$$

- Setelah melalui proses yang lumayan panjang, kita temukan bahwa $A = 1$, $B = -1$, $C = 3$, $D = -5$, dan $E = 0$.

Faktor Kuadrat Berulang

Jadi $\int \frac{6x^2 - 15 + 22}{(x + 3)(x^2 + 2)^2} dx$ adalah

$$= \int \frac{dx}{x + 3} - \int \frac{x - 3}{x^2 + 2} dx - 5 \int \frac{x}{(x^2 + 2)^2} dx$$

$$= \int \frac{dx}{x + 3} - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 2} dx + 3 \int \frac{1}{x^2 + 2} dx - \frac{5}{2} \int \frac{2x dx}{(x^2 + 2)^2}$$

$$= \ln |x + 3| - \frac{1}{2} \ln (x^2 + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \frac{5}{2(x^2 + 2)} + C$$

1 $\int \frac{3}{x^2 - 1} dx$

Latihan Soal

1 $\int \frac{3}{x^2 - 1} dx$

2 $\int \frac{x - 11}{x^2 + 3x - 10} dx$

Latihan Soal

$$1 \quad \int \frac{3}{x^2 - 1} dx$$

$$2 \quad \int \frac{x - 11}{x^2 + 3x - 10} dx$$

$$3 \quad \int \frac{x + \pi}{x^2 - 3\pi x + 2\pi^2} dx$$

Latihan Soal

$$① \int \frac{3}{x^2 - 1} dx$$

$$② \int \frac{x - 11}{x^2 + 3x - 10} dx$$

$$③ \int \frac{x + \pi}{x^2 - 3\pi x + 2\pi^2} dx$$

$$④ \int \frac{x^3 - 8x^2 - 1}{(x + 3)(x^2 - 4x + 5)} dx$$

Latihan Soal

1 $\int \frac{3}{x^2 - 1} dx$

2 $\int \frac{x - 11}{x^2 + 3x - 10} dx$

3 $\int \frac{x + \pi}{x^2 - 3\pi x + 2\pi^2} dx$

4 $\int \frac{x^3 - 8x^2 - 1}{(x + 3)(x^2 - 4x + 5)} dx$

5 Kerjakan soal bernomor ganjil dari 11 s.d 25.

- Varberg, Purcell, Rigdon, "Kalkulus Ninth Edition, 2", 2007, Pearson Education, Inc.