Kalkulus Peubah Banyak

Modul Pembelajaran

January
UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH MALANG
ALFIANI ATHMA PUTRI ROSYADI, M.Pd

IDENTITAS MAHASISWA

NAMA : ……………………………………………

KLS/NIM :…………………………………………….

KELOMPOK:…………………………………………….

Daftar Isi

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmatnya sehingga modul pembelajaran matakuliah Kalkulus Peubah Banyak ini selesai disusun. Modul ini digunakan sebagai salah satu media pembelajaran guna menunjang terlaksananya proses perkuliahan matakuliah Kalkulus Peubah Banyak.

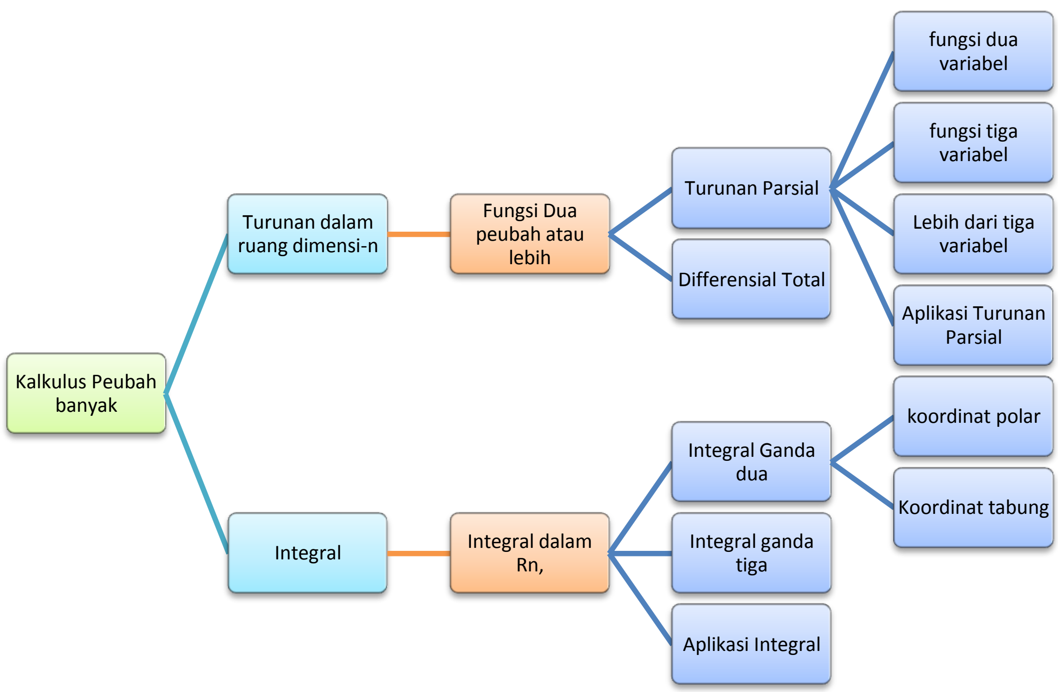
Di dalam modul pembelajaran ini terdapat kilasan materi prasyarat, materi yang dibahas, contoh soal, latihan soal, kegiatan diskusi, dan peta konsep yang dapat memudahkan mahasiswa memahami keterkaitan antar materi. Modul ini bukan satu-satunya media untuk belajar bagi mahasiswa, sehingga diharapkan didampingi dengan buku teks, handout, dan sumber lain yang relevan.

Kritik dan saran yang membangun penulis harapkan dari berbagai pihak demi perbaikan untuk penyusunan modul berikutnya.

Alfiani Athma Putri Rosyadi

PETA KONSEP

Secara garis besar, materi yang dibahas pada matakuliah kalkulus peubah banyak ini dapat disajikan dalam peta konsep berikut:



1

TURUNAN DALAM RUANG DIMENSI-N

Pada Bab 1 ini akan dibahas antara lain sebagai berikut.

A. Fungsi Dua Peubah Atau Lebih

- **Turunan Parsial dan aplikasinya**
- **Differensial Total**

Tema sentral dari bab ini adalah kalkulus dari fungsi peubah banyak (*multivariable*) khususnya dengan dua atau tiga peubah. Kebanyakan fungsi yang digunakan dalam sains dan *engineering* adalah fungsi peubah banyak.

Contohnya: teori peluang, statistik, fisika, dinamika fluida, dan listrik-magnet.

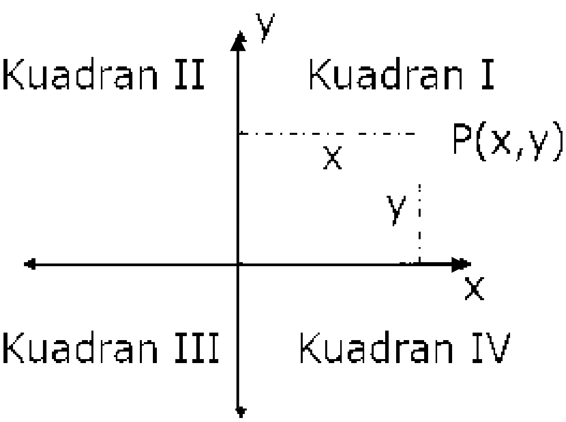
Kalkulus fungsi ini jauh lebih kaya, turunannya juga bervariasi karena terdapat lebih banyak variabel yang berinteraksi. Sebelum mempelajari BAB ini materi prasyarat yang harus diperoleh adalah system koordinat, permukaan bidang dan ruang, serta sketsa beberapa grafik (bola, elipsoida dst)

Sebelum mempelajari BAB I, akan disajikan beberapa materi pendukung yang bisa membantu mahasiswa untuk menyelesaikan berbagai persoalan dalam materi BAB I. Materi pendukung yang disajikan antara lain sebagai berikut

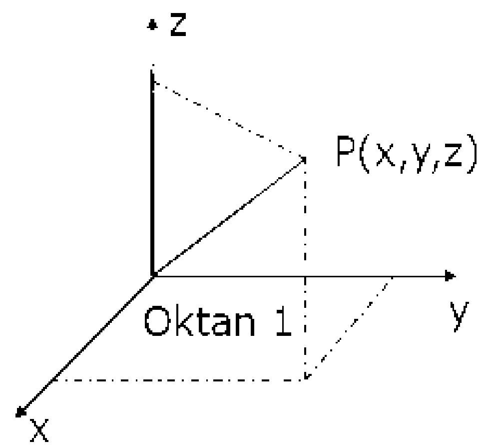
a. Sistem Koordinat
b. Permukaan di ruang
c. Bola, elipsoida, hiperboloida, dan paraboloida

MATERI PRASYARAT

a. Sistem Koordinat



R^2(Bidang)



R^3(Ruang)

b. Permukaan di Ruang

Sebelum belajar tentang fungsi dua peubah, terlebih dahulu kita mengenal permukaan di ruang dan cara membuat sketsa suatu permukaan di ruang (R3). Berikut beberapa fungsi permukaan di ruang, antara lain :

- Bola, mempunyai bentuk umum

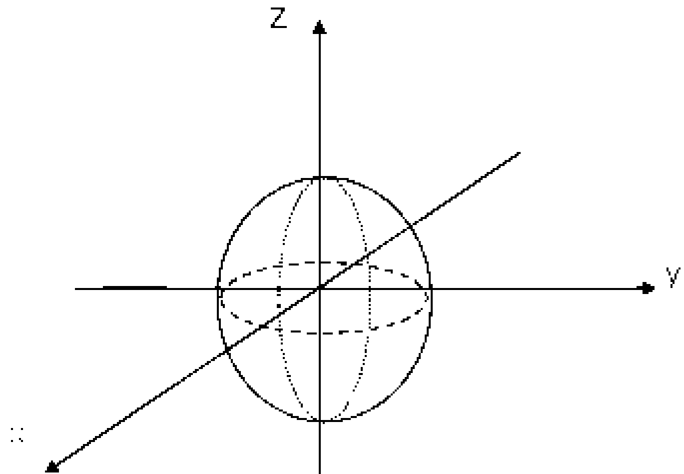
  $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a} > 0$

  Dengan,

  Jejak di bidang XOY, *z=0*, $x^2 + y^2 = a^2$ (berupa lingkaran)

  Jejak di bidang XOZ, *y=0*, $x^2 + z^2 = a^2$ (berupa lingkaran)

  Jejak di bidang YOZ, *x=0*, $y^2 + z^2 = a^2$ (berupa lingkaran)



Gambar 1.1 Bola

- **<u>Ellipsoida</u>**

Ellipsoida mempunyai bentuk umum sebagai berikut.

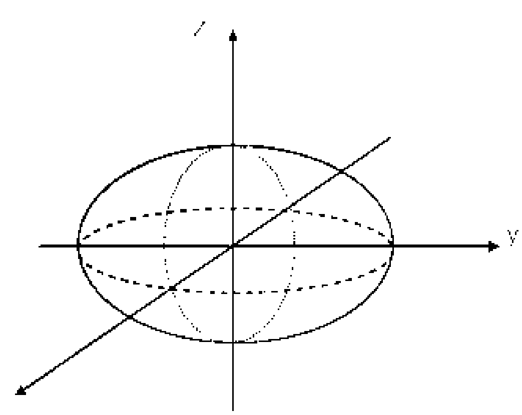
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad a,b,c>0$$

Dengan

Jejak di bidang $XOY,\ z=0$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ berupa ellips

Jejak di bidang $XOZ,\ y=0$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ berupa ellips

Jejak di bidang $YOZ,\ x=0$ $\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ berupa ellips



Gambar 1.2 Ellipsoida

- **Hiperboloida Berdaun satu**

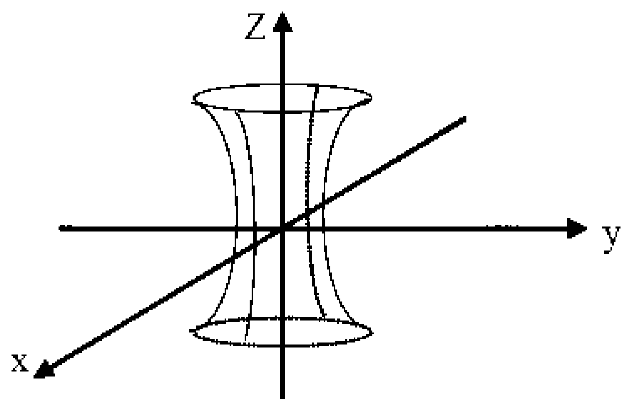
  Hiperboloida berdaun satu mempunyai bentuk umum sebagai berikut.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad a,b,c>0$$

  Jejak di bidang $XOY,\ z=0$ $\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ berupa ellips

  Jejak di bidang $XOZ,\ y=0$ $\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ berupa hiperbolik

  Jejak di bidang $YOZ,\ x=0$ $\quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ berupa hiperbolik



Gambar 1.3 Hiperboloida berdaun Satu

- **Hiperboloida berdaun dua**

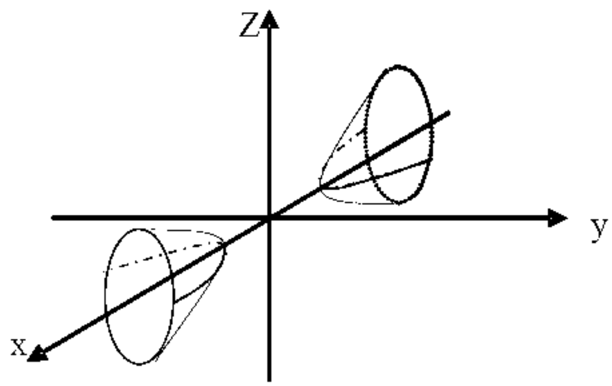
  Hiperboloida berdaun dua mempunyai persamaan umum sebagai berikut.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad a,b,c>0$$

  Jejak di bidang $XOY,\ z=0$ $\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ berupa hiperbolik

  Jejak di bidang $XOZ,\ y=0$ $\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ berupa hiperbolik

Jejak di bidang $YOZ,\ x = 0$ $\quad -\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ tidak ada jejak



Gambar 1.4 Hiperboloida berdaun 2

- **<u>Macam-macam persamaan di R3</u>**

a. Paraboloida eliptik, mempunyai bentuk umum:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \quad a, b, c > 0$$

b. Paraboloida hiperbolik mempunyai bentuk umum:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \quad a, b, c > 0$$

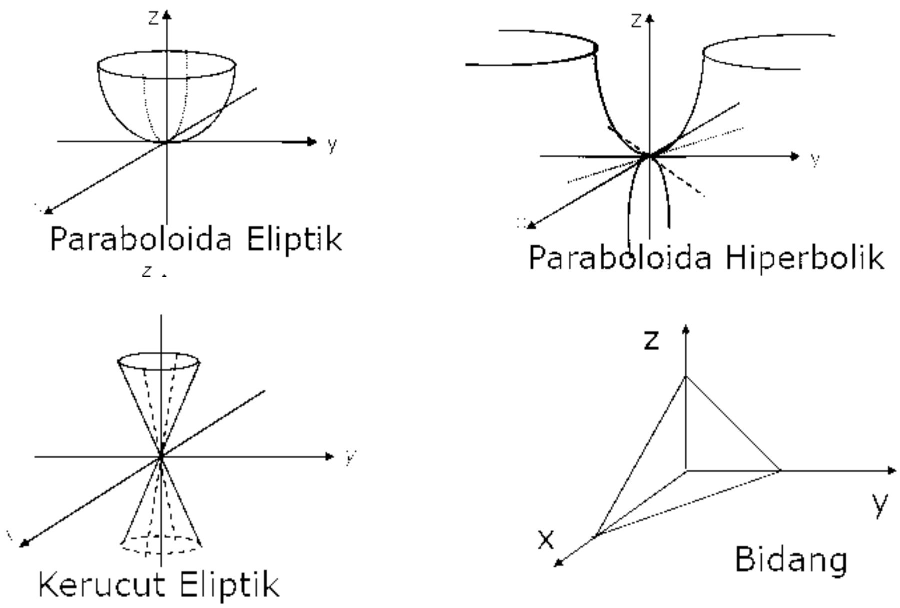
c. Kerucut eliptik mempunyai bentuk umum:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad a, b, c > 0$$

d. Bidang mempunyai bentuk umum:

$$Ax + By + Cz = D$$

Berikut adalah gambar dari masing-masing jenis persamaan di atas



Gambar 1.5 Paraboloida Eliptik, paraboloida Hiperbolik, Kerucut Eliptik dan Bidang

A. Fungsi Dua Peubah Atau Lebih

Fungsi dua peubah atau variabel, misalnya *x* dan *y*, adalah *fungsi yang memetakan tiap pasang (x,y) pada tepat satu bilangan real*. Demikian pula dengan fungsi tiga peubah, misalnya *x*,*y*, dan *z*.

Example

1. Berilah contoh fungsi dua peubah dan fungsi tiga peubah !

   Jawaban:
   a. $f(x, y) = x - y$

   b. $f(x, y) = 2x^2 + 3y$

   c. $f(x, y, z) = xy + e^y \sin z$

   d. $g(x, y, z) = 4x^2yz$

Remember

Domain fungsi *f* dua peubah, *x* dan *y*, adalah himpunan dari semua pasangan terurut (*x*,*y*) sehingga fungsi tersebut terdefinisi. Sedangkan **range** suatu fungsi adalah himpunan semua nilai *z*=*f*(*x*,*y*) fungsi itu dengan *x* dan *y* peubah bebas sedangkan *z* adalah peubah tak bebas

2. Tentukanlah domain dari fungsi $f(x, y) = \sqrt{x - y} \quad x, y \epsilon R$

   Jawab:

   Fungsi ini terdefinisi hanya bila $x - y \geq 0 \quad \leftrightarrow x \geq y$

   Sehingga dapat dituliskan $dom\ (f) = \{(x, y) : x \geq y\}$

Exercise

1. Misalkan $f(x,y) = x^2y + \sqrt{y}$, tentukan nilai dari
   a. $f(1,4)$
   b. $f(2,-4)$
   c. $f(\frac{1}{x}, x^4)$
2. Tentukan daerah asal dari setiap fungsi berikut
   a. $f(x,y) = \frac{y}{x} + xy$
   b. $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$
   c. $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{2x-2}}{y^2+z}$
3. Carilah $F(f(t), g(t))$ jika $F(x,y) = x^2y$ dan $f(t) = t\cos t$, $g(t) = sec^2 t$

Lembar Jawaban

Turunan Parsial Fungsi Dua Peubah atau Lebih

Untuk mempelajari turunan parsial, kita perlu mengingat kembali tentang materi turunan. Masih ingatkah kalian definisi dari turunan yang sudah kalian pelajari sebelumnya?

Definisi turunan.

Misalkan *f* sebuah fungsi real dan $x \epsilon D_f$.

Turunan dari *f* di titik *x*, ditulis $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Jika Turunan pada fungsi dengan satu peubah mempunyai arti laju perubahan fungsi jika peubahnya mengalami perubahan nilai. Tentu saja turunan pada fungsi dengan dua atau lebih peubah diinginkan memiliki interpretasi yang sama. Namun dalam hal ini terdapat lebih dari satu peubah. Apa yang terjadi bila hanya satu peubah yang mengalami perubahan nilai? Bagaimana bila lebih dari satu variabel yang berubah? Yang menjadi masalah adalah apabila lebih dari satu variabel berubah, maka terdapat tak hingga kemungkinan cara variabel-variabel tersebut berubah.

Diberikan fungsi dengan dua variabel $f(x,y)$. Sepanjang garis $y = y_0$, nilai variabel *y* konstan, sehingga $f(x,y_0)$ adalah fungsi satu variabel. Turunannya disebut turunan parsial dari *f* terhadap *x*.

<u>Definisi</u>

Diberikan fungsi dua variable $f(x,y)$ dan $y_0 \epsilon R$. Maka turunan parsial dari *f* terhadap *x* di titik (x_0, y_0) adalah

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Sedangkan turunan parsial dari *f* terhadap *y* di titik (x_0, y_0) adalah

$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

<u>Notasi</u>

Jika $z = f(x, y)$, maka notasi-notasi berikut lazim digunakan untuk turunan-turunan parsial dari f

$$f_x(x,y) = \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta f(x,y)}{\delta x} \qquad f_x(x_0,y_0) = \left.\frac{\delta z}{\delta x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\delta f(x,y)}{\delta y} \qquad f_y(x_0,y_0) = \left.\frac{\delta z}{\delta y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Ilustrasi

Tinggi gelombang *T* di laut terbuka bergantung pada laju angin *v* dan lama waktu *t*. Nilai fungsi $T = F(v, t)$ dicatat pada tabel berikut

v \ t	5	10	15	**20**	30	40	50
10	2	2	2	**2**			
15	4	4	5	**5**			
20	5	7	8	**8**			
30	**9**	**13**	**16**	**17**			
40	14	21	25	**28**			
50	19	29	36	**49**			
60	24	37	47	**54**			

Perhatikan kolom t = 20

Jadi fungsi T dari variabel tunggal *v* adalah $T = f(v)$ untuk *t* tetap $H(v) = T(v, 20)$

(Menunjukkan perubahan tinggi gelombang dengan berubahnya laju angin ketika t= 20)

Turunan H saat v = 30 adalah laju perubahan tinggi gelombang terhadap v saat t = 20.

$$H'(30) = \lim_{h\to 0} \frac{H(30+h) - H(30)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{T(30+h, 20) - T(30,20)}{h}$$

Questions

Diskusikan dengan kelompok Anda penyelesaian dari permasalahan berikut!

1. Apakah perbedaan antara turunan dengan turunan parsial? Jelaskan!
2. Berilah satu contoh fungsi dua peubah, kemudian carilah turunan parsialnya terhadap salah satu peubah!

Lembar Jawaban

Turunan Parsial Tingkat Tinggi

Secara umum, karena turunan parsial suatu fungsi *x* dan *y* adalah fungsi lain dari dua peubah yang sama ini, turunan tersebut dapat diturunkan secara parsial terhadap *x* atau *y* untuk memperoleh empat buah **turunan parsial kedua** fungsi *f*

$$f_{xx} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \quad f_{yy} = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} \quad f_{yx} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$$

Questions

Berilah contoh sebuah fungsi dua peubah, kemudian tentukan keempat turunan persial kedua fungsi tersebut!

Lembar Jawaban

PEUBAH LEBIH DARI DUA

Andaikan *f* suatu fungsi tiga peubah *x,y,* dan *z*. Turunan parsial *f* terhadap *x* di (*x,y,z*) dinyatakan oleh $f_x(x,y,z)$ atau $\delta f(x,y,z)/\delta x$ dan didefinisikan oleh

$$f_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}$$

Jadi $f_x(x,y,z)$ boleh diperoleh dengan memperlakukan y dan z sebagai konstanta dan menurunkan terhadap *x*. Turunan parsial terhadap *y* dan *z* didefinisikan dengan cara yang serupa.

Example

Jika $f(x,y,z) = xy + 2yz + 3zx$, tentukan f_x, f_y, dan f_z !

Penyelesaian:

Untuk memperoleh f_x, kita pandang *y* dan *z* sebagai konstanta dan turunkan terhadap peubah *x*. Sehingga diperoleh

$f_x(x,y,z) = y + 3z$

$f_y(x,y,z) = x + 2z$

$f_z(x,y,z) = 2y + 3x$

Exercise

Jika $f(x, y, z) = 3x^2y - xyz + y^2z^2$. Tentukan nilai dari:

1. $f_x(x, y, z)$
2. $f_{xy}(x, y, z)$
3. $f_y(0,1,2)$

Lembar Jawaban

DIFFERENSIAL TOTAL

Definisi

Diferensial total dari dari f ditulis dengan $df(x,y)$ didefinisikan oleh

$$dz = df(x,y) = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

Agar Anda lebih memahami definisi tersebut, diskusikan bagian berikut dengan kelompok Anda

Example

Andaikan $z = f(x,y) = 2x^3 + xy - y^3$. Hitung Δz dan dz bila (x,y) berubah dari (2,1) ke (2,03 ; 0,98)

Penyelesaian :

Dengan kalkulator

$$\Delta z = f(2.03\,,0.98) - f(2,1) = \mathbf{0,78}$$

Menggunakan diferensial total

$$dz = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

$$= (6x^2 + y)\Delta x + (x - 3y^2)\Delta y$$

Pada (2,1) dengan $\Delta x = 0{,}03$ dan $\Delta y = -0{,}02$

Maka diperoleh $dz = (25)(0{,}03) + (-1)(-0{,}02) = \mathbf{0,77}$

Exercise

Gunakan diferensial total dz untuk menghampiri perubahan dalam z bila (x,y) bergerak dari P ke Q. Kemudian gunakan kalkulator untuk mencari perubahan eksak Δz

1. $z = 2x^2y^3$; $P(1,1)$, $Q(0.99\,, 1.02)$
2. $ln(x^2y)$; $P(-2,4)$, $Q(-1.98\,, 3.96)$

Ingat bahwa : $Dx\ \ln u = \frac{1}{u}\, D_x\, u$

Lembar Jawaban

Tuliskan aplikasi dari turunan dan turunan parsial dalam bidang teknologi, ekonomi, social, dll

Lembar Jawaban

INTEGRAL 2

MATERI YANG DIBAHAS PADA BAB INI ANTARA LAIN SEBAGAI BERIKUT.

1. **Integral Ganda Dua atas persegi panjang**
2. **Integral Lipat**
3. **Integral ganda dua dalam koordinat kutub**
4. **Integral Ganda tiga dalam koordinat kartesius**
5. **Integral ganda tiga dalam koordinat tabung**
6. **Penerapan integral ganda tiga**

PENDAHULUAN

Masalah-masalah yang dipecahkan oleh integral dengan dua variabel atau lebih serupa dengan yang dipecahkan oleh integral satu variabel, hanya lebih umum. Seperti halnya pada turunan fungsi *n* variabel, integral inipun dibangun berdasarkan pengalaman kita pada integral satu variabel.

Hubungan antara integral dan turunan untuk fungsi multivariable juga sangat erat seperti halnya fungsi satu variabel. Di sini kita dapat mereduksi integral menjadi beberapa integral fungsi satu variabel sehingga Teorema Dasar Kalkulus dapat kembali berperan dalam konteks yang lebih umum ini.

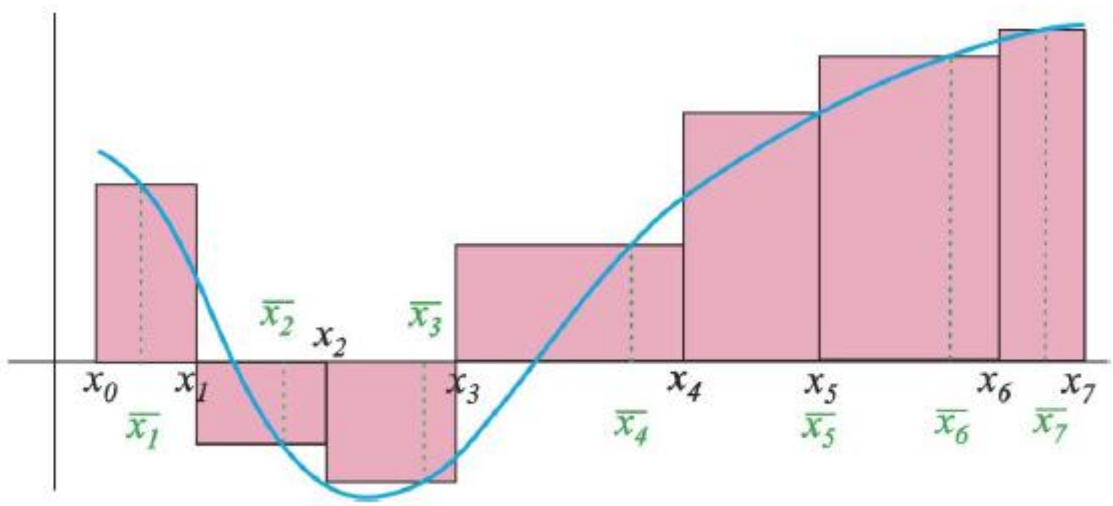
A. Integral Ganda Dua atas persegi panjang

Jumlah Riemann (pada fungsi satu variable)

Kita mencoba mengingat lagi materi integral pada Matakuliah Kalkulus II.

Jumlah Riemann:

Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada interval tutup $[a, b]$.

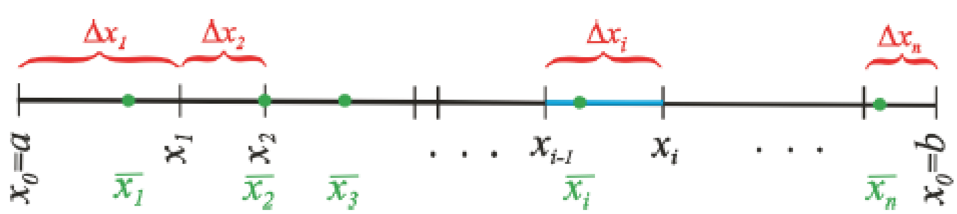


Gambar 2.1 Jumlah riemann

Partisikan interval $[a, b]$ atas n bagian (tidak perlu sama lebar)

$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ dan sebut $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Pada setiap subinterval $[x_{i-1}, x_i]$, pilih *titik wakil* $\overline{x_i}$, $i = 1, 2, \cdots, n$



Jumlahan $R_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\ \Delta X_i$ disebut Jumlah Riemann dari f.

Ingat kembali pada fungsi satu variabel $f(x)$, kita membagi interval $[a,b]$ menjadi interval-interval dengan panjang Δxk, k=1,2,…,n, berdasarkan partisi $P : x1 < x2 < \ldots < xk$, memilih titik sampel xk dari interval ke k, kemudian menuliskan

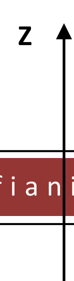
$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = \lim_{|p|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{f(\overline{x}_k)\,\Delta x_k}$$

Kita meneruskan dalam cara yang persis sama untuk mendefinisikan integral untuk fungsi dua peubah. Tetapkan R berupa persegi panjang dengan sisi-sisi sejajar sumbu-sumbu koordinat, yakni ambil

$$R = \{(x,y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

Bentuk suatu partisi P dari R dengan memakai sarana berupa garis-garis sejajar sumbu x dan y, seperti pada gambar 1. Ini membagi R menjadi beberapa persegipanjang kecil, semuanya n buah, yang kita tunjukkan dengan $R_k, k = 1,2, \ldots, n$. Tetapkan Δx_k dan Δy_k adalah panjang sisi-sisi R_k dan $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$ adalah luasnya. Pada R_k, ambil sebuah titik contoh $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ dan bentuk penjumlahan reimann adalah

$$\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta A_k$$



Gambar 2.2 jumlah Riemann di R-3

Dari ilustrasi tersebut di atas, dapat kita definisikan sebagai berikut

Definisi

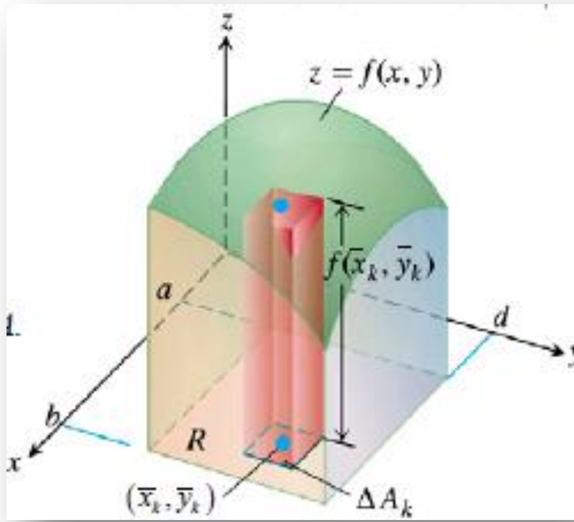
(Integral Ganda Dua). Andaikan *f* suatu fungsi dua peubah yang terdefinisi pada suatu persegi panjang tertutup **R** , jika

$$\lim_{|p|\to 0}\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k}}, \overline{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{k}})\ \Delta \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}$$

ada, kita katakana *f* terintegralkan pada ***R***. Lebih lanjut, $\iint_R \ f(x,y)dA$ yang disebut **integral ganda dua** *f* pada **R**, diberikan oleh

$$\iint f(x,y)dA = \lim_{|p|\to 0}\sum^{n} \boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k}}, \overline{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{k}})\Delta \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}$$

Ilustrasi dari definisi tersebut dapat dilihat pada gambar 4.3 berikut



Gambar 2.3

Berikut adalah sifat-sifat integral ganda dua yang mewarisi hampir semua sifat-sifat tunggal

1. Integral ganda-dua adalah linear yaitu
   a. $\iint_R \; kf(x,y)dA = k \iint_R \; f(x,y)dA$
   b. $\iint_R \; [f(x,y) + g(x,y)]dA = \iint_R \; f(x,y)dA + \iint_R \; g(x,y)dA$
2. Integral ganda dua adalah aditif pada persegi panjang yang saling melengkapi hanya pada suatu ruas garis

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$$

3. Sifat perbandingan berlaku. Jika $f(x,y) \leq g(x,y)$ untuk semua (x,y) di ***R*** , maka

$$\iint_R f(x,y)dA \leq \iint_R g(x,y)dA$$

Exercise

1. Hampiri $\iint_R f(x,y)dA$ dengan $f(x,y) = \frac{64-8x+y^2}{16}$

   Dan $R = \{(x,y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 8\}$

2. Andaikan f adalah fungsi tangga yaitu

$$f(x,y) = \begin{cases} 1\,, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y < 1 \\ 2\,, 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y < 2 \\ 3\,, 0 \leq x \leq 3, 2 \leq y < 3 \end{cases}$$

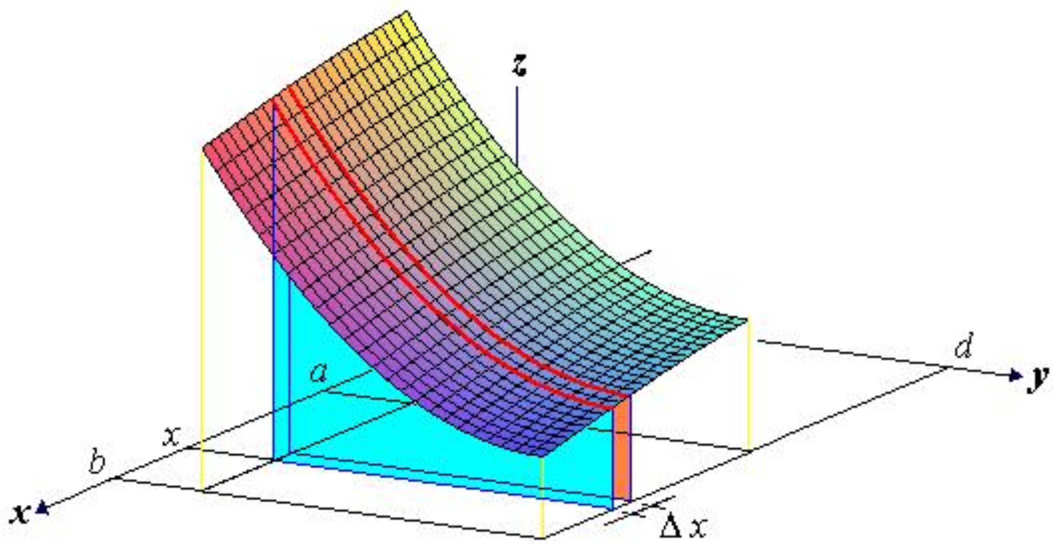
   Hitung $\iint_R f(x,y)dA$ dengan $R = \{(x,y): 0 \leq x < 3, 0 \leq y \leq 3\}$

Lembar Jawaban

B. Integral Lipat

Masalah integral erat kaitannya dengan volume. Maka kita coba mendekati masalah menghitung integral dengan masalah menghitung volume. Misalkan kita ingin menentukan volume benda pejal dibawah bidang $z=f(x,y)$ di atas persegi panjang R: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$,

dengan mengirisnya. Misalnya benda tersebut diiris tegak lurus terhadap sb-x selebar Δx. Misalkan luas penampang irisan benda pejal dengan bidang x adalah $A(x)$.



Gambar 2.4

Volume ΔV dari kepingan secara hampiran diberikan oleh $\Delta V \approx A(y)\Delta y$. Selanjutnya kita bisa menuliskan dengan $V = \int_c^d A(y)dy$

Sebaliknya untuk y tetap kita boleh menghitung $A(y)$ dengan menggunakan integral tunggal biasa, sehingga diperoleh $A(y) = \int_a^b f(x,y)dx$

Jadi dapat disimpulkan bahwa

$$V = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$$

Yang selanjutnya kita sebut dengan **integral lipat (iterasi)**

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy}$$

Kemudian apabila kita mengiris benda pejal dengan bidang-bidang yang sejajar dengan bidang *yz* kita akan memperoleh integral lipat lain dengan pengintegralan yang berlangsung dalam urutan berlawanan

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx}$$

Example

Hitung $\int_0^2 \int_1^3 x^2 y \; dydx$

Penyelesaian

$$\int_0^2 \int_1^3 x^2 y \; dydx = \int_0^2 \left(\left[x^2 \cdot \frac{1}{2} y^2 \right]_1^3 \right) dx = \int_0^2 \left(\left(\frac{9}{2} x^2 \right) - \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \right) dx = \int_0^2 4x^2 dx$$

$$= \left[\frac{4}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{32}{3}$$

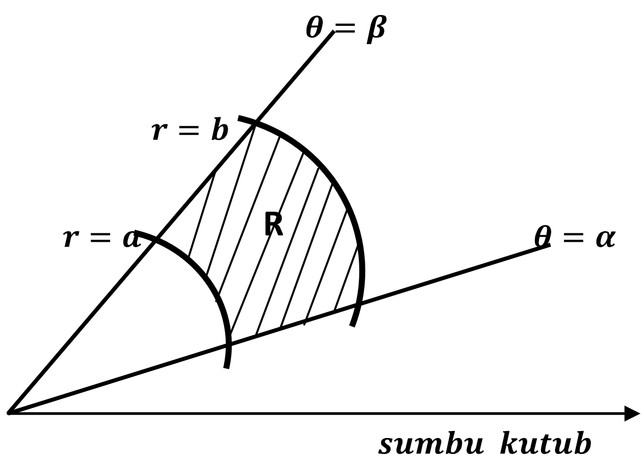
Exercise

1. $\int_{-1}^{4}\int_{1}^{2}(x+y^2)\ dydx$
2. $\int_{-1}^{1}\int_{1}^{2}(x^2+y^2)dxdy$
3. $\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1} x\ \sin y\ \ dx\ dy$

Lembar Jawaban

c. Integral Ganda Dua dalam Koordinat Kutub

Banyak integral yang lebih mudah dihitung bila dengan menggunakan koordinat polar. Pada bagian ini akan dipelajari mengubah integral menjadi koordinat polar dalam koordinat polar dan menghitungnya.



Gambar 2.4

Misalkan R adalah suatu persegi panjang kutub . Andaikan $z = f(x, y)$ menentukan suatu permukaan atas R dan andaikan f adalah kontinu dan tak negative, maka Volume (V) diberikan sebagai berikut.

$$V = \iint_R f(x, y)\ dA$$

Karena koordinat kutub, maka suatu persegi panjang kutub R berbentuk

$$R = \{(r, \theta): a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

Dengan $a \geq 0, \beta - \alpha \leq 2\pi$. Serta persamaan permukaan dapat dituliskan sebagai

$$z = f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = F(r, \theta)$$

Dengan menggunakan tehnik partisi, diperoleh rumus V

$$\boxed{\iint_R f(x, y)\ dA = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\ dr\ d\theta}$$

Exercise

1. Tentukan volume V dari benda padat di atas persegi panjang kutub , dengan $R = \{(r, \theta)\}$

Lembar Jawaban

BAB V INTEGRAL GANDA TIGA

1.1 Integral Ganda tiga dalam koordinat kartesius/siku

Konsep yang diwujudkan dalam integral tunggal dan ganda-dua meluas pada integral ganda tiga bahkan ke ganda-n. Langkah yang dilakukan juga hampir sama yaitu melakukan partisi sehingga membentuk balok-balok bagian. Akibatnya, integral ganda tiga dapat didefinisikan

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \lim_{|p|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_k},\overline{y_k},\overline{z_k})\Delta V_k$$

Sifat yang ada pada integral ganda dua juga berlaku pada integral ganda tiga. Akibatnya, dapat dituliskan sebagai integral lipat tiga

Contoh 2

Hitunglah $\iiint_B x^2yz\ dV$ dengan B adalah kotak

$$B = \{(x,y,z): 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 1, 1 \le z \le 2\}$$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
\iiint_B x^2yz\, dV &= \int_0^2\int_0^1\int_1^2 x^2yz\, dx\, dy\, dz \\
&= \int_0^2\int_0^1 \left[\tfrac{1}{3}x^3yz\right]_1^2 dy\, dz \\
&= \int_0^2\int_0^1 \left[\tfrac{7}{3}yz\right] dy\, dz \\
&= \tfrac{7}{3}\int_0^2\int_0^1 [yz]\, dy\, dz \\
&= \tfrac{7}{3}\int_0^2 \left[\tfrac{1}{2}y^2z\right]_0^1 dz \\
&= \tfrac{7}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\int_0^2 [z]\ dz \\
&= \tfrac{7}{6}\left[\tfrac{1}{2}z^2\right]_0^2 dz \\
&= \tfrac{7}{6}(2\,) = \tfrac{7}{3}
\end{aligned}$$

1.2Integral ganda tiga dalam koordinat tabung

Hubungan antara koordinat tabung dan kartesius adalah

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

Sehingga dapat diperoleh

$f(x, y, z) = f(r\ \cos\theta, r\ \sin\theta, z) = F(r, \theta, z)$

1.3Penerapan integral ganda tiga

Carilah sumber yang relevan untuk mencari aplikasi integral ganda tiga!

Lembar Jawaban

Lembar Jawaban