SUMBER BELAJAR PENUNJANG PLPG 2017

KOMPETENSI PROFESIONAL

MATA PELAJARAN : GURU KELAS SD

UNIT II : MATEMATIKA

Penulis
Drs. Latri S, S.Pd., M.Pd.
Dra. Maratun Nafiah, M.Pd.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
2017

BAB I
ARITMATIKA/BILANGAN

A. Kompetensi Inti (KI)

Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan yang mendukung mata pelajaran yang diampu.

B. Kompetensi Dasar (KD)

Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi aritmatika/bilangan, serta penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.

C. Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)

1. Memerinci konsep bilangan bulat dan pecahan dalam pemecahan masalah (termasuk prima, FPB, KPK).
2. Menguji pengetahuan konseptual, prosedural, dan keterkaitan keduanya dalam konteks materi aritmatika/bilangan.
3. Menentukan alat peraga dalam pembelajaran bilangan.

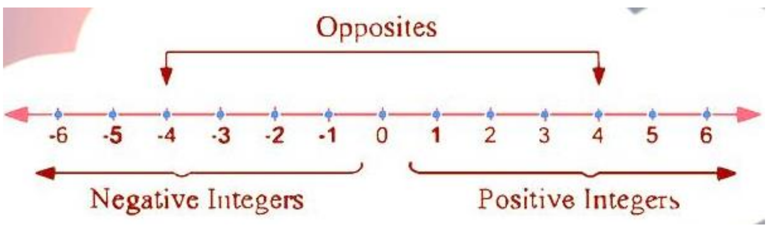
D. Uraian Materi

1. Pengertian Bilangan

Bilangan adalah suatu konsep atau ide yang ada dalam pikiran (abstrak) yang memberikan gambaran tentang banyaknya suatu benda. Untuk menggambarkan bilangan itu dalam dunia nyata digunakan angka-angka. Terdapat sepuluh angka dasar (hindu-arab) yang berbeda, yakni: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

2. Bilangan Bulat

Bilangan bulat merupakan gabungan bilangan nol, bilangan asli, dan negatif bilangan asli. Dengan demikian bilangan bulat meliputi bilangan bulat positif (*positive integers)*, 0, dan bilangan bulat negatif (*negative integers)*. Setiap bilangan bulat mempunyai lawan (*opposites*), misalnya 4 lawannya (-4). Dalam bentuk himpunan, adalah $\boldsymbol{I} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, dengan $\boldsymbol{I}$ singkatan dari *Integers.* Apabila digambarkan dengan garis bilangan bentuknya seperti berikut:



Operasi pada Bilangan Bulat:

a. Operasi Penjumlahan

Sifat-sifat penjumlahan bilangan bulat:

1) Tertutup, yaitu untuk setiap $a, b \in I$ berlaku $a + b \in I$
2) Komutatif (pertukaran), yaitu untuk setiap $a, b \in I$ berlaku $a + b = b + a$.
3) Assosiatif (pengelompokan), yaitu untuk setiap $a, b, c \in I$ berlaku
$(a + b) + c = a + (b + c)$.
4) Mempunyai elemen identitas 0 yaitu untuk setiap $a \in I$ berlaku
$a + 0 = 0 + a = a$.
5) Setiap bilangan bulat mempunyai invers aditif. Invers dari bilangan bulat a adalah $-a$ dan berlaku $a + (-a) = (-a) + a = 0$

b. Operasi Pengurangan

Diketahui a, b dan k bilangan-bilangan bulat. Bilangan a dikurangi b, ditulis $a - b$ adalah bilangan bulat k jika dan hanya jika $a = b + k$. Sifat-sifat yang berkaitan:

1) Bilangan bulat tertutup terhadap pengurangan, yaitu jika a dan b bilangan-bilangan bulat maka $a - b$ juga bilangan bulat.
2) Jika a dan b bilangan-bilangan bulat maka $a - b = a + (-b)$.*
3) Jika a dan b bilangan-bilangan bulat maka $a - (-b) = a + b$.*
4) Jika a bilangan bulat maka $-(-a) = a$.

Catatan: *dibaca pengurangan dua buah bilangan bulat sama dengan penjumlahan dengan lawannya.

c. Operasi Perkalian

Sifat-sifat operasi perkalian pada bilangan bulat:

1) Tertutup, yaitu untuk setiap $a, b \in I$ berlaku $a \times b \in I$
2) Komutatif (pertukaran), yaitu untuk setiap $a, b \in I$ berlaku $a \times b = b \times a$
3) Assosiatif (pengelompokan), yaitu untuk setiap $a, b, c \in I$, berlaku:
$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
4) Mempunyai elemen identitas 1, yaitu untuk setiap bilangan bulat a berlaku $a \times 1 = 1 \times a = a$.
5) Sifat bilangan nol yaitu $a\, x\, 0 = 0 \times a = 0$, untuk setiap bilangan bulat a
6) Sifat distributif (penyebaran)
   a) $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$, dan disebut distributif kiri perkalian terhadap penjumlahan.
   b) $(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$ dan disebut distributif kanan perkalian terhadap penjumlahan

   Coba selidiki, apakah berlaku sifat distributif perkalian terhadap pengurangan?

d. Operasi Pembagian

Diketahui a, b dan k bilangan-bilangan bulat dengan $b \neq 0$. Pembagian a oleh b, ditulis $a : b$, adalah bilangan bulat k (jika ada) sehingga berlaku:

$a : b = k \leftrightarrow a = b \times k$. Pembagian pada bilangan bulat tidak bersifat tertutup, misalnya 7 dan 3 € B, tetapi hasil dari $7 : 3$ bukan anggota bilangan bulat.

Operasi perkalian dan pembagian pada bilangan bulat memiliki pola yang unik dan tetap, sehingga dapat lebih memudahkan pengerjaannya. Perhatikan tabel berikut:

Tabel 1.1. Hasil Operasi Perkalian dan Pembagian pada Bilangan Bulat Positif atau Negatif

Bilangan pertama	Bilangan Kedua	Hasil Perkalian atau Pembagian
Positif	Positif	positif
Positif	Negatif	negatif
Negatif	Positif	negatif
Negatif	Negatif	positif

e. Operasi Perpangkatan

Bilangan berpangkat dapat dituliskan menjadi a^n (a pangkat n), merupakan perkalian bilangan a secara berulang sebanyak n faktor. Bilangan berpangkat dapat dinyatakan dengan rumus di bawah ini:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{sebanyak\ n\ faktor}$$

Keterangan:

a^n : bilangan berpangkat

a : bilangan pokok

n : pangkat

Contoh 1:

4 x 4 x 4 = 4^3, maka 4^3 dapat diartikan sebagai perkalian 4 dengan 4 yang diulang sebanyak 3 kali.

Contoh 2:

a^7 = a x a x a x a x a x a x a

5^5 = 5 x 5 x 5 x 5 x 5 = 3.125

Urutan Hitung Operasi

Operasi hitung campuran adalah operasi hitung yang melibatkan lebih dari satu macam operasi dalam suatu perhitungan. Berikut adalah beberapa kesepakatan pada operasi perhitungan campuran:

a. Operasi perkalian dan pembagian **lebih kuat** daripada operasi penjumlahan dan pengurangan.

b. Operasi perkalian dan pembagian **sama kuat**. Apabila perkalian dan pembagian muncul secara bersama-sama, maka urutan operasinya dari sebelah kiri, yaitu yang muncul di sebelah kiri harus dioperasikan terlebih dahulu.
c. Operasi penjumlahan dan pengurangan **sama kuat**. Apabila penjumlahan dan pengurangan muncul secara bersama-sama, maka urutan operasinya dari sebelah kiri, yaitu yang muncul di sebelah kiri harus dioperasikan terlebih dahulu.
d. Jika dalam operasi terdapat tanda kurung "( )" maka dikerjakan terlebih dahulu.

Contoh 3:

Hitunglah: 48 – 25 + 72 : (12 x 3) = ...

Penyelesaian:

48 – 25 + 72 : (12 x 3) = 48 – 25 + 72 : 36 = 48 –25 + 2 = 23 + 2 = 25.

Contoh 4: $3\ x\ (-6) = \cdots$.

Penyelesaian:

Bilangan positif dikali bilangan negatif maka hasilnya bilangan negatif. Sebelumnya diketahui bahwa $3\ x\ 6\ =\ 18$, maka $3\ x\ (-6) = -18$.

Contoh 5: Diketahui luas suatu sawah berbentuk persegi panjang adalah 120 m^2. Berapa ukuran panjang dan lebar yang mungkin (dalam bilangan cacah)?

Penyelesaian:

Diketahui luas persegi panjang 120 m = p x l. Pertanyaannya adalah menentukan panjang dan lebar yang mungkin, maka dengan menggunakan tabel akan mudah ditentukan panjang dan lebarnya.

Luas sawah berbentuk persegi panjang	panjang	Lebar
120	120	1
	60	2
	40	3
	...	...

Berdasarkan jawaban di atas, ternyata memperoleh lebih dari satu jawaban benar, maka soal semacam ini disebut *open ended* (banyak jawaban atau banyak cara menjawab). Coba Anda mencari soal-soal yang termasuk kategori *open ended*, selanjutnya analisis soal-soal olimpiade siswa, apakah mengandung soal-soal *open ended*?

Jika soal-soal matematika dihubungkan dengan kehidupan sehari-hari akan bermakna bagi siswa (*meaningfull theory*) dan berguna (*usefull*).

Pembelajaran Bilangan Bulat

a. Pembelajaran Penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Bulat

1) Peragaan Gerakan Model

Penjumlahan dan pengurangan pada bilangan bulat dapat dilakukan melalui peragaan gerakan suatu model, yaitu dengan **gerakan maju atau naik (untuk penjumlahan)** dan **gerakan mundur atau turun (untuk pengurangan)** dengan ketentuan sebagai berikut.

(a) Arah menghadap model.
- Bilangan positif : Model menghadap ke kanan
- Bilangan negatif : Model menghadap ke kiri

(b) Titik permulaan selalu dimulai dari titik yang mewakili bilangan 0.

Contoh 6: Ragakan operasi berikut: $7 + (-5) - (-4) = \dots$.

Penyelesaian:

Tetapkan posisi awal model sebagai titik nol, lalu hadapkan model ke kanan (dilihat dari posisi siswa). Kemudian gerakkan/langkahkan model ke kanan sebanyak 7 langkah. Setelah itu, balikkan arah model (hadapkan ke arah negatif/hadapkan ke kiri) kemudian gerakkan/langkahkan model maju sebanyak 5 langkah. Siswa diminta untuk memperhatikan posisi terakhir model berada, yaitu di titik 2. Jadi $7 + (-5) = 2$. Selanjutnya, pada posisi 2, hadapkan arah model ke kiri kemudian gerakkan/ langkahkan model mundur sebanyak 4 langkah. Siswa diminta untuk memperhatikan posisi terakhir model berada, yaitu di titik 6. Jadi $7 + (-5) - (-4) = 6$.

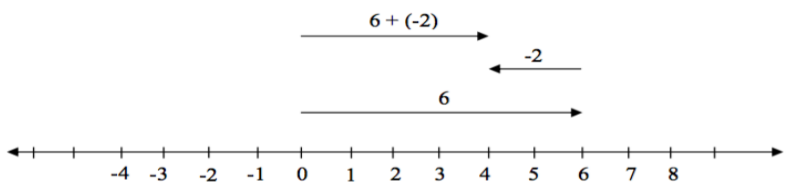
2) Penggunaan Garis Bilangan

Penjumlahan dan pengurangan pada garis bilangan dapat dikatakan sebagai suatu gerakan atau perpindahan sepanjang suatu garis bilangan. Suatu bilangan bulat positif menggambarkan gerakan ke arah kanan, sedangkan bilangan bulat negatif menggambarkan gerakan ke arah kiri. Titik permulaan selalu dimulai dari titik yang mewakili bilangan 0.

Contoh 7: Hitunglah $6 + (-2)$ dengan menggunakan garis bilangan!

Penyelesaian:

$6 + (-2)$ berarti suatu gerakan yang dimulai dari 0, bergerak 6 satuan ke kanan dan dilanjutkan dengan bergerak maju 2 satuan lagi menghadap ke kiri (karena -2). Gerakan ini berakhir di titik yang mewakili bilangan 4. Gerakan tersebut apabila dibuat diagramnya sebagai berikut.

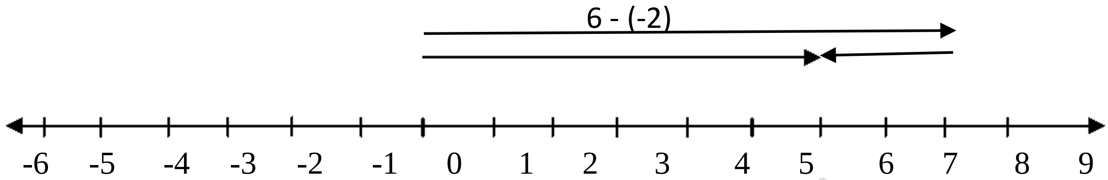


Jadi $6 + (-2) = 4$

Contoh 8: Hitunglah $6 - (-2)$ dengan menggunakan garis bilangan!

Penyelesaian:

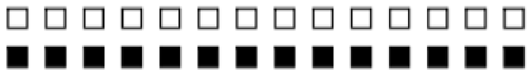
$6 - (-2)$ berarti suatu gerakan yang dimulai dari 0, bergerak 6 satuan ke kanan dilanjutkan dengan menghadap ke kiri dan bergerak mundur 2 satuan. Gerakan ini berakhir di titik yang mewakili bilangan 8, diagramnya sebagai berikut.



Jadi 6 – (-2) = 8.

3) Penggunaan Muatan

Penjumlahan dengan menggunakan muatan dapat divisualisaikan dengan potongan karton berwarna, misal warna putih dan yang lain warna hitam. Penggunaan warna perlu disepakati pula, misal karton berwarna putih dianggap mewakili bilangan bulat positif, sedang karton yang berwarna hitam dianggap mewakili bilangan bulat negatif, sebagai ilustrasi dinyatakan sebagai berikut berikut.



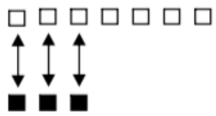
Warna putih (positif)

Warna hitam (negatif)

Contoh 9: Hitunglah 7 + (-3)!

Penyelesaian:

Ambillah 7 karton putih dan kemudian ambil lagi 3 karton hitam. Pasang-pasangkan masing-masing karton hitam dengan karton putih sehingga menjadi seperti keadaan berikut.



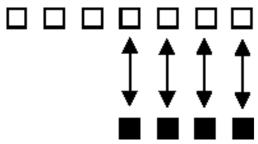
Selanjutnya, amati dan hitung banyaknya karton yang tidak mempunyai pasangan. Ternyata ada 4 karton putih yang tidak mempunyai pasangan. Karena karton putih menyatakan bilangan positif, diperoleh 7 + (-3) = 4.

Contoh 10: Selesaikan (-2) + (-4)!

Penyelesaian: Ambil 2 karton hitam, kemudian ambil lagi 4 karton hitam. Kumpulkan karton-karton tersebut pada satu wadah dan hitung banyaknya seluruh karton hitam yang ada dalam wadah tersebut. Ternyata ada 6 karton hitam. Karena karton hitam menyatakan bilangan negatif, maka (-2) + (-4) = - 6.

Contoh 11: Selesaikan 3 – 7 = ...

Penyelesaian: Ambil 3 karton putih, kemudian akan diambil 7 karton berwarna putih juga, ternyata belum dapat mengambil semua, maka harus memasukkan 4 bernilai netral (4 karton putih dan 4 karton hitam), sehingga seperti keadaan berikut.



Sekarang, 7 karton berwarna putih dari kumpulan karton sudah bisa diambil, sehingga masih bersisa 4 karton berwarna hitam, yang menyatakan bilangan - 4. Jadi 3 – 7 = - 4

Selanjutnya ragakan operasi pengurangan, lakukan dengan muatan, dan buatlah garis bilangannya dari latihan berikut!

4 – 3 = ...   4 – (-3) = ...   (-4) – 3 = ...   (-4) – (-3) = ...

Diskusikan dalam kelompok!

b. Pembelajaran Perkalian dan Pembagian pada Bilangan Bulat

Perkalian pada Bilangan Bulat

Untuk menanamkan konsep perkalian pada bilangan bulat, dapat digunakan muatan seperti berikut.

Contoh 12:

3 x 2 = 2 + 2 + 2 = 6

□□ □□ □□

3 x (-2) = (-2) + (-2) + (-2) = (-6)

■■ ■■ ■■

(-3) x 2 = 2 x (-3) sifat komutatif

= (-3) + (-3) = (-6)

Cara untuk menanamkan konsep perkalian antara bilangan bulat negatif dengan bilangan bulat negatif adalah menggunakan pola bilangan. Berikut cara penanaman konsep pada perkalian dengan menggunakan pola bilangan

Contoh 13: Hitunglah $(-3) \times (-4)$!

Penyelesaian:

Perhatikan pola bilangan berikut:

3 x (-4) = -12
+4
2 x (-4) = -8
+4
1 x (-4) = -4
+4
0 x (-4) = 0
+4
(-1) x (-4) = ?
+4
(-2) x (-4) = ?
+4
(-3) x (-4) = ?

atau

(-3) x 3 = -9
+3
(-3) x 2 = -6
+3
(-3) x 1 = -3
+3
(-3) x 0 = 0
+3
(-3) x (-1) = ?
+3
(-3) x (-2) = ?
+3
(-3) x (-3) = ?
+3
(-3) x (-4) = ?

Amati bahwa pada pola bilangan sebelah kiri, terkali tetap (-4) sedangkan pengali berkurang satu satu demi satu. Ternyata hasil kalinya bertambah empat demi empat. Pada pola bilangan sebelah kanan, pengali tetap (-3) sedangkan terkali berkurang satu demi satu. Ternyata hasil kalinya bertambah tiga demi tiga. Kedua pola bilangan memberikan hasil yang sama yakni $(-3)x(-4) = 12$.

Pembagian pada Bilangan Bulat

Penanaman konsep pembagian pada bilangan bulat sukar ditunjukkan dengan menggunakan alat peraga. Salah satu caranya dapat dilakukan dengan menggunakan konsep perkalian bilangan bulat.

Contoh 14: Hitunglah $10 : (-2) = \cdots$.

Penyelesaian: Karena $10 : (-2)$ = ... berarti $10 = \cdots \times (-2)$ maka untuk mencari hasil dari $10 : (-2)$ dapat dilakukan dengan mencari bilangan bulat yang apabila dikalikan dengan (-2) hasilnya 10, ternyata $(-5)\ x\ (-2) = 10$.

Jadi $10 : (-2) = -5$.

Dapat disimpulkan bila a : b = c $\longleftrightarrow$ a = b x c.

Bagaimana cara mengajarkan suatu bilangan dibagi dengan 0 dan $0 : 0$?

Jika dijumpai bilangan 6 : 2 maka dapat diselesaikan dengan pengurangan secara berulang sampai habis. Jadi 6 – 2 = 4, 4 – 2 = 2, 2 – 2 = 0 (nol), maka hasil dari 6: 2 = 3 (tiga kali pengurangan berulang). Hal ini disebut bilangan habis dibagi.

Dengan cara yang sama $\frac{3}{0}$ = 3 : 0 (tiga dibagi nol) = 3-0-0-0-0-0-0 ... yang mana sampai tak hingga kali, maka jawabannya $\frac{3}{0}$ = ***tak hingga.***

Secara aritmatika, pembagian 0 : 0 ini lebih mudah dipahami seperti berikut ini.

$\frac{0}{0}$ = 1, karena 0 = 0 x 1 = 0;

$\frac{0}{0}$ = 5, karena 0 = 0 x 5 = 0; dan seterusnya bahkan untuk seluruh anggota bilangan real sekalipun akan memenuhi aturan tersebut.

Dengan demikian, maka hasil dari bilangan nol dibagi dengan nol adalah:

a. $\frac{0}{0}$ = 0 (sesuai dengan konsep *nol dibagi berapapun bilangannya maka jawabannya adalah nol).*

b. $\frac{0}{0} = \infty$ (sesuai dengan konsep *bilangan berapapun dibagi dengan nol hasilnya tak hingga/tak terdefinisikan).*

c. $\frac{0}{0}$ = 1 (sesuai dengan konsep *bilangan berapapun jika dibagi dengan dirinya sendiri maka hasilnya adalah satu*).

Cobalah Anda simpulkan tentang pembagian bilangan dengan nol dan $\frac{0}{0}$!

3. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dan Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)

Pembelajaran FPB dan KPK memuat istilah faktor, kelipatan, dan persekutuan yang perlu memperkenalkan istilah-istilah tersebut kepada siswa. Faktor suatu bilangan adalah pembagi habis bilangan tersebut. Kelipatan suatu bilangan adalah bilangan-bilangan yang merupakan hasil perkalian dari bilangan tersebut dengan himpunan bilangan asli. Selain itu, bilangan prima erat hubungannya dengan FPB dan KPK. **Bilangan prima** merupakan bilangan Asli yang lebih besar dari 1 dan tepat mempunyai dua faktor, yaitu bilangan 1 dan dirinya sendiri. Misalnya 2 = 1 x 2, 3 = 1 x 3, 5 = 1 x 5, ... Adapun 4 = 1 x 4 = 2 x 2 = 4 x 1, mempunyai faktor-faktor 1, 2, dan 4. Selanjutnya 6 = 1 x 6 = 2 x 3 = 3 x 2 = 6 x 1, mempunyai faktor-faktor 1, 2, 3, dan 6. Bilangan-bilangan yang mempunyai faktor lebih dari dua disebut **bilangan komposit**. Setiap bilangan dapat dituliskan sebagai perkalian bilangan-bilangan prima. Penyajian perkalian bilangan-bilangan prima ini disebut sebagai faktorisasi prima. faktorisasi prima memudahkan dalam perhitungan FPB dan KPK. Contoh penerapan FPB dalam masalah Matematika misalnya pada pembagian rata-rata yang dapat dilakukan secara maksimal pada sejumlah orang. Adapun pada KPK, beberapa penerapannya terdapat pada perhitungan jarak, waktu, dan kecepatan.

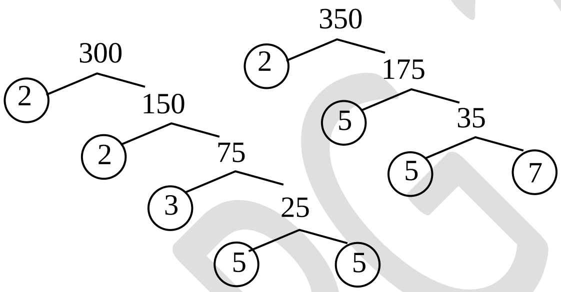
Cara Menentukan FPB dan KPK

Contoh 15: Tentukan KPK dan FPB dari bilangan-bilangan 300 dan 350!

Penyelesaian:

Penentuan KPK dan FPB dapat dikerjakan melalui beberapa cara yaitu: (1) Faktorisasi Prima, dan (2) Tabel.

a. Dengan faktorisasi prima



300 = $2^2 \times 3 \times 5^2$

350 = $2^1 \times 5^2 \times 7$

KPK (300, 350) = hasil kali faktor prima gabungan pangkat yang terbesar.

= $2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 4 \times 3 \times 25 \times 7 = (4 \times 25) \times (3 \times 7) = 2.100$.

FPB (300, 350) = hasil kali faktor prima sekutu pangkat yang terkecil.

= $2^1 \times 5^2 = 2 \times 25 = 50$.

b. Metode Tabel

Cara mengerjakan:

1) Bagilah semua bilangan itu dengan faktor-faktor prima persekutuannya.
2) Setelah semua bilangan menjadi prima relatif satu sama lain (nilai FPB-nya = 1), bagilah hasil-hasilnya dengan faktor-faktor prima yang mungkin (untuk bilangan yang terbagi tentukan hasil baginya, sedang yang tak terbagi tetaplah ditulis apa adanya), hingga hasil bagi terakhirnya = 1.

Contoh 16: Tentukan KPK dan FPB dari bilangan-bilangan 300, 350, dan 400.

Penyelesaian:

		300	350	400
FPB	10	30	35	40
	5	6	7	8
KPK	2	3	7	4
	2	3	7	2
	2	3	7	1
	3	1	7	1
	7	1	1	1

Dapat disimpulkan bahwa: FPB (300, 350, 400) = $10 \times 5 = 50$

KPK (300, 350, 400) = $10 \times 5 \times 2^3 \times 3 \times 7 = 8.400$

Contoh 17:

Ibu Ani berbelanja ke pasar setiap 4 hari sekali. Ibu Bani berbelanja ke pasar setiap 7 hari sekali. Pada tanggal 3 Maret 2017 Ibu Ani dan Ibu Bani berbelanja ke pasar bersama-sama. Tanggal berapa Ibu Ani dan Ibu Bani akan ke pasar bersama kembali untuk kedua kalinya?

Penyelesaian: Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut menggunakan KPK.

KPK dari 4 dan 7 adalah 28. Kemudian 28 + 3 = 31. Jadi Ibu Ani dan Ibu Bani akan ke pasar bersama untuk kedua kalinya pada tanggal 31 Maret 2017.

Contoh 18:

Ibu mempunyai 50 kue lemper, 70 kue pisang dan 80 kue bugis. Kue-kue tersebut akan digunakan untuk arisan dan disajikan dalam beberapa piring dengan sama banyak. Tentukan berapa piring minimal yang diperlukan untuk tempat kue tersebut dan tentukan berapa jumlah masing-masing kue dalam piring tersebut!

Penyelesaian:

Faktorisasi prima dari 50 = 2×5^2, 70 = $2 \times 5 \times 7$, dan 80 = $2^4 \times 5$.

FPB (50, 70, 80) = $2 \times 5 = 10$.

Jadi piring minimal yang diperlukan sebanyak 10 buah, masing-masing berisi 5 buah kue lemper, 7 buah kue pisang, dan 8 buah kue bugis.

Buatlah contoh 5 buah permasalahan yang berhubungan dengan KPK dan FPB dalam kehidupan sehari-hari! Diskusikan dengan teman Anda dalam kelompok!

4. Pecahan

Pengertian Pecahan

Pecahan adalah suatu bilangan yang dapat ditulis melalui pasangan terurut dari bilangan bulat a dan b, dan dilambangkan dengan $\frac{a}{b}$, dengan $b \neq 0$. Pada pecahan $\frac{a}{b}$, a disebut pembilang dan b disebut penyebut. Pada prinsipnya, pecahan digunakan untuk menyatakan beberapa bagian dari sejumlah bagian yang sama. Jumlah seluruh bagian yang sama ini bersama-sama membentuk satuan (unit). Dengan demikian pecahan adalah bagian-bagian yang sama dari keseluruhan. Di sini perlu diberikan penekanan pada konsep keseluruhan sebagai satuan konsep sama pada bagian.

Pecahan dapat diajarkan sebagai perbandingan bagian yang sama dari suatu benda terhadap keseluruhan benda itu.

1	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
Satu-satuan	**seperempat bagian**	**setengah bagian**	**tiga perempat bagian**

Jenis-jenis Pecahan:

a. **Pecahan Biasa**

Pecahan biasa adalah pecahan dengan pembilangnya lebih kecil dari penyebutnya.

$\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ dimana $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$

b. **Pecahan Campuran**

Pecahan campuran adalah pecahan dengan pembilangnya lebih besar dari penyebutnya. $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ dimana $\boldsymbol{a} > b$. Misal: $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

c. **Pecahan Desimal**

Pecahan desimal adalah pecahan yang dalam penulisannya menggunakan tanda koma. Misal: 0,5; 8,75; 0,96, dan lain-lain.

d. **Pecahan Persen**

Pecahan persen adalah pecahan yang menggunakan lambang % yang berarti perseratus. Misal: a % berarti $\frac{a}{100}$.

e. **Pecahan Senilai**

Pecahan senilai adalah pecahan-pecahan yang penulisannya berbeda tetapi mewakili bagian atau daerah yang sama, sehingga pecahan-pecahan senilai mempunyai nilai yang sama. Jika suatu pecahan yang diperoleh dari pecahan yang lain dengan cara mengalikan pembilang dan penyebut dengan bilangan asli yang sama, maka diperoleh pecahan yang senilai. Dengan demikian untuk *a, b, n* bilangan-bilangan bulat maka pecahan $\frac{a}{b}$ dan pecahan $\frac{a \, x \, n}{b \, x \, n}$ senilai.

Operasi Hitung Bilangan Pecahan

a. Operasi Penjumlahan pada Bilangan Pecahan

1) Operasi penjumlahan pada bilangan pecahan dengan penyebut yang sama

Contoh 19: Tentukan Hasil dari $\frac{1}{4} + \frac{2}{4}$ = ...

Penyelesaian:

$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$

2) Operasi penjumlahan pada pecahan dengan penyebut yang tidak sama

Contoh 20: Tentukan Hasil dari $\frac{1}{3} + \frac{2}{4}$ = ...

Penyelesaian:

Untuk pecahan yang berpenyebut tidak sama, langkah pertama yakni menyamakan penyebutnya dengan mencari KPK dari penyebut pecahan tersebut.

$\frac{1}{3} + \frac{2}{4} = \frac{4}{12} + \frac{6}{12} = \frac{10}{12} = \frac{10:2}{12:2} = \frac{5}{6}$

b. Operasi Pengurangan pada Bilangan Pecahan

1) Operasi pengurangan pada pecahan biasa dengan penyebut yang sama

Contoh 21: Hitunglah $\frac{2}{4} - \frac{1}{4}$ = ...

Penyelesaian:

$\frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

2) Operasi pengurangan pada pecahan biasa dengan penyebut yang tidak sama

Contoh 22: Hitunglah $\frac{2}{4} - \frac{1}{5}$ = ...

Apabila penyebutnya tidak sama, maka menyamakan penyebut dengan cara mencari KPK dari penyebut itu. KPK dari 4 dan 5 adalah 20.

$\frac{2}{4} - \frac{1}{5} = \frac{10}{20} - \frac{4}{20} = \frac{6}{20} = \frac{6}{20} : \frac{2}{2} = \frac{3}{10}$

c. Operasi Perkalian Bilangan Pecahan

Untuk operasi perkalian pada bilangan pecahan, kalikanlah pembilang dengan pembilang serta penyebut dengan penyebut.

Contoh 23: Tentukan hasil dari $\frac{4}{5} \times \frac{8}{6}$!

Penyelesaian:

$\frac{4}{5} \times \frac{8}{6} = \frac{32}{30} = 1\frac{2}{30} = 1\frac{1}{15}$. Jadi, $\frac{4}{5} \times \frac{8}{6} = 1\frac{1}{15}$.

d. Operasi Pembagian Bilangan Pecahan

Pembagian pecahan berlaku cara $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Contoh 24: Hitunglah $\frac{1}{3} : \frac{2}{5}$ = ...

Penyelesaian:

Dengan menerapkan cara di atas, maka diperoleh: $\frac{1}{3} : \frac{2}{5} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$

BAB II
LOGIKA, PENALARAN, DAN ALJABAR

A. Kompetensi Inti (KI)

Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan yang mendukung mata pelajaran yang diampu.

B. Kompetensi Dasar (KD)

Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi logika, penalaran, dan aljabar, serta penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.

C. Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)

1. Menerapkan konsep logika dan penalaran dalam pemecahan masalah.
2. Menerapkan konsep relasi dan fungsi linear dalam pemecahan masalah.
3. Melatih konsep sistem persamaan linear dalam pemecahan masalah.
4. Membedakan konsep sistem persamaan linear dalam pemecahan masalah.
5. Menggunakan konsep persamaan/pertidaksamaan kuadrat dalam pemecahan masalah.

D. Uraian Materi

1. Logika dan Penalaran

a. Logika

Logika matematika merupakan sebuah cabang matematika yang merupakan gabungan dari ilmu logika dan ilmu matematika. Logika matematika memberikan landasan tentang bagaimana cara mengambil kesimpulan. Hal paling penting yang Anda dapatkan dengan mempelajari logika matematika adalah kemampuan dalam mengambil dan menentukan kesimpulan mana yang benar atau salah.

Pernyataan

Pernyataan di dalam logika matematika adalah sebuah kalimat yang di dalamnya terkandung nilai kebenaran yang dinyatakan 'benar = B' atau 'salah = S' namun tidak keduanya (benar dan salah). Sebuah kalimat tidak bisa dinyatakan sebagai sebuah pernyataan apabila tidak bisa ditentukan nilai kebenarannya (benar atau salah). Pernyataan yang bernilai benar saja atau salah saja disebut proposisi.

Contoh 1: $2 + 5 = 7$ proposisi bernilai benar (B).

$5 + 3 = 9$ proposisi bernilai salah (S).

"Jakarta adalah ibukota Republik Indonesia," proposisi bernilai benar (B).

Adapun kalimat: "Tolong ambilkan buku itu!" adalah bukan proposisi.

b. Proposisi Majemuk

Proposisi-proposisi yang dihubungkan dengan perangkai logika “tidak”, “dan”, “atau” disebut proposisi majemuk. Proposisi tanpa perangkai logika disebut proposisi sederhana.

c. Negasi

Suatu proposisi p dinegasikan akan menjadi –p. Negasi proposisi p (ditulis -p) adalah suatu proposisi yang menyatakan “tidak benar bahwa p”. Tabel kebenaran Negasi seperti berikut.

Tabel Kebenran Negasi

P	-p
B	S
S	B

Contoh 2: proposisi (p)

a. 5 + 3 = 8 (bernilai B)
b. Sudut siku-siku besarnya adalah 90^o (bernilai B)

Negasi (-p)

5 + 3 ≠ 8 (bernilai S)

Tidak benar bahwa sudut siku-siku besarnya 90^0.
Atau
Sudut siku-siku besarnya ≠ 90^o (bernilai S)

d. Konjungsi

Konjungsi menggunakan perangkai logika “dan”. Untuk sembarang proposisi p dan q, proposisi “p dan q” (ditulis **pΛq** atau **p&q**) disebut suatu konjungsi yang hanya benar jika dua pernyataan bernilai benar, selain itu bernilai salah.

Tabel Kebenaran Konjungsi

p	q	pΛq
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Contoh 3: proposisi Konjungsi

a. Banyaknya hari pada bulan Januari adalah 31 hari dan KPK dari 6 dan 8 adalah 24. (bernilai B).

Contoh proposisi Konjungsi

b. 2 < 4 dan sungai Ciliwung melalui kota Surabaya. (bernilai S).
c. 4 – 3 = 2 dan Sungai Musi ada di Provinsi Sumatera Barat. (bernilai S)

e. Disjungsi

Disjungsi menggunakan perangkai logika “atau”. Untuk sembarang proposisi p dan q, proposisi “p atau q” (ditulis **pVq**) disebut suatu disjungsi yang hanya bernilai salah jika dua pernyataan bernilai salah, selain itu bernilai benar.

Tabel Kebenaran Disjungsi

p	q	pVq
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Contoh 4: proposisi disjungsi

a. Banyaknya hari pada bulan Maret adalah 30 hari atau FPB dari 6 dan 8 adalah 2. (bernilai B)

Contoh proposisi disjungsi

b. 2 > 4 atau sungai Ciliwung melalui kota Surabaya. (bernilai S)

f. Implikasi (Kondisional) dan Biimplikasi (Bikondisional)

Implikasi (kondisional) menggunakan perangkai logika “jika ..., maka ...”. Untuk sembarang proposisi p dan q, proposisi “Jika p, maka q” (ditulis $\mathbf{p \rightarrow q}$) disebut suatu implikasi yang hanya bernilai salah jika pernyataan pertama bernilai benar dan pernyataan kedua bernilai salah.

Tabel Implikasi (kondisional)

p	q	$p \rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Contoh 5: proposisi implikasi

a. Jika 3 + 4 = 7, maka FPB dari 6 dan 8 adalah 2. (bernilai B)

Contoh proposisi implikasi

b. Jika 2 > 4, maka sungai Ciliwung melalui kota Jakarta. (bernilai B).

Biimplikasi (bikondisional) menggunakan perangkai logika “ ... jika dan hanya jika ...”. Untuk sembarang proposisi p dan q, proposisi “p jika dan hanya jika q” (ditulis $\mathbf{p \leftrightarrow q}$) disebut suatu biimplikasi (bikondisional) yang bernilai salah jika pernyataan pertama bernilai benar dan pernyataan kedua bernilai salah atau sebaliknya jika pernyataan pertama bernilai salah dan pernyataan kedua bernilai benar.

Tabel Kebenaran Biimplikasi (Bikondisional)

p	q	$p \leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Contoh 6: proposisi biimplikasi

a. 3 + 4 = 7 bila dan hanya bila FPB dari 6 dan 8 adalah 4. (bernilai S).

Contoh proposisi biimplikasi

b. 2 > 4 bila dan hanya bila sungai Ciliwung melalui kota Jakarta (bernilai S).

g. Ekuivalen

Ekuivalen adalah dua atau lebih pernyataan majemuk yang memiliki nilai kebenaran yang sama.

Contoh 7: Selidiki menggunakan tabel kebenaran proposisi berikut $-(p \vee q) \equiv -p \wedge -q$ ekuivalen.

Penyelesaian: Tabel Kebenaran ekuivalen $-(p \vee q) \equiv -p \wedge -q$

P	q	-p	-q	pV q	-(pVq)	-pΛ-q
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	B	S	S
S	B	B	S	B	S	S
S	S	B	B	S	B	B

sama

Ayo coba Anda mencari soal yang berhubungan dengan ekuivalens!

h. Tautologi dan Kontradiksi

Tautologi adalah pernyataan majemuk yang selalu bernilai benar.

Contoh 8: Selidiki pernyataan berikut $(p \wedge q) \rightarrow q$ tautologi!

Penyelesaian: Tabel Kebenaran Tautologi:

p	**q**	**$p \wedge q$**	**$(p \wedge q) \rightarrow q$**
B	B	B	B
B	S	S	B
S	B	S	B
S	S	S	B

Ayo berlatih untuk membuktikan bahwa pernyataan berikut tautologi!

a. $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow q)) \rightarrow ((p \vee r) \rightarrow q$
b. $(p \wedge -q) \rightarrow p$

Kontradiksi

Kontradiksi adalah pernyataan majemuk yang selalu bernilai salah.

Contoh 9: Selidiki pernyataan $p \wedge (-p \wedge q)$ kontradiksi!

Penyelesaian: Tabel Kebenaran Kontradiksi

p	**q**	**-p**	$(-p \wedge q)$	$p \wedge (-p \wedge q)$
B	B	S	S	S
B	S	S	S	S
S	B	B	B	S
S	S	B	S	S

Ayo berlatih untuk membuktikan bahwa pernyataan berikut kontradiksi!

$\{(p \rightarrow q) \wedge p] \wedge -q$

i. Kalimat Berkuantifikasi

Proposisi yang memuat kata-kata seperti "semua, beberapa, ada, tidak ada" disebut kuantifikasi. Misalnya: "Semua guru itu cerdik", "Beberapa siswa berminat membaca."

1. Kuantifikasi Universal

Proposisi "*Untuk setiap (semua) x*" disebut Kuantifikasi Universal atau Kuantifikasi Umum (*Universal Quintifier*), dan diberi simbol dengan "($\forall$)". Proposisi umum ditulis dengan notasi $(\forall x)$ Mx. Tanda $\forall$ dibaca "*untuk setiap*" atau "*untuk semua*". Notasi $(\forall x)$ Mx, dibaca "*untuk setiap x, x mempunyai sifat "M*", atau "*untuk setiap x, berlaku Mx*". Akibat adanya kuantifikasi $\forall x$, maka Mx menjadi proposisi (pernyataan).

Contoh 10: Semua bilangan genap habis dibagi dua.
Semua manusia adalah makhluk hidup.
Setiap kucing bukan anjing.

2. Kuantifikasi Eksistensial

Perhatikan proposisi berikut ini, "Ada bilangan prima yang genap", dengan:

- *Ada paling sedikit satu bilangan prima yang genap.*
- *Ada sekurang-kurangnya satu bilangan prima yang genap.*
- *Ada paling sedikit satu obyek, sedemikian rupa sehingga obyek itu adalah bilangan prima yang genap.*

Lebih singkat lagi dapat ditulis: *Ada paling sedikit satu x, sedemikian rupa sehingga Mx.*

Pernyataan "*Ada paling sedikit satu x, sedemikian rupa sehingga*", atau "*Ada sekurang-kurangnya satu x, sedemikian rupa sehingga*" dinamakan "Kuantifikasi Khusus" atau "Kuantifikasi Eksistensial" (*Exitential Quantifier*), dan diberi simbol "(∃x)". Dengan menggunakan smbol (∃x) Mx, dibaca: Ada paling sedikit satu x, sedemikian rupa sehingga Mx, atau beberapa x, sehingga berlaku Mx.

Contoh 10: Ada guru yang rajin.
Ada paling sedikit seorang guru yang berwiraswasta.
Beberapa siswa mengalami obesitas.

3. Negasi Kuantifikasi

Perhatikan 2 proposisi di bawah ini:

(1) Beberapa siswa menganggap matematika sukar.
(2) Tidak ada siswa yang suka menyontek.

Proposisi (1) merupakan negasi dari "Semua siswa tidak menganggap matematika sukar", sedangkan proposisi (2) merupakan negasi dari "Ada siswa yang suka menyontek".

Pada pernyataan-pernyataan di atas, pernyataan (2), yakni "Tidak ada siswa yang suka menyontek" sama dengan "Semua siswa tidak suka menyontek". Ini berarti pernyataan (2) sebenarnya masih mempunyai bentuk kuantifikasi (∀x) Mx. Berikut ini aturan negasi kuantifikasi.

Tabel Aturan Negasi Kuantifikasi

Proposisi	Negasi
Semua p adalah q	Beberapa p tidak q
Beberapa p adalah q	Tidak ada p yang q

Contoh 11:

Tentukan negasi dari proposisi berikut!

1. Semua gajah berbelalai panjang.
2. Beberapa bilangan asli adalah bilangan bulat.
3. Tidak ada bilangan prima yang genap.
4. Semua guru SD tidak suka menganggur.
5. Tidak ada guru SD yang senang menyanyi.

Penyelesaian:

1. Beberapa gajah tidak berbelalai panjang.
2. Tidak ada bilangan asli yang bil. Bulat.
3. Beberapa bilangan prima adalah genap.
4. Beberapa guru SD suka menganggur.
5. Beberapa guru SD senang menyanyi.

j. Penalaran

Penalaran adalah proses berpikir yang bertolak dari pengamatan indera (pengamatan empirik) yang menghasilkan sejumlah konsep dan pengertian. Berpikir kritis merupakan kegiatan berpikir mulai dari mengungkapkan permasalahan, merencanakan penyelesaian, mengkaji langkah-langkah penyelesaian, menduga karena informasi yang tidak lengkap, dan membuktikan teorema. Di dalam proses berpikir kritis ini diperlukan penalaran induktif dan atau penalaran deduktif.

Penalaran Induktif

Menyusun kebenaran suatu generalisasi yang diperoleh dari sejumlah terbatas hasil pengamatan atau eksperimen (dari khusus ke umum). Berperan penting dalam bidang non matematika dan berperan kecil dalam matematika.

Ayo berlatih menyelesaikan soal berikut secara penalaran induktif!

$2 + 4 = \ldots$	$1 + 3 = \ldots$
$2 + 4 + 6 = \ldots$	$1 + 3 + 5 = \ldots$
$\underbrace{2 + 4 + 6 + \ldots}_{100 \text{ suku}} = \ldots$	$\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots}_{100 \text{ suku}} = \ldots$
$\underbrace{2 + 4 + 6 + \ldots}_{n \text{ suku}} = \ldots$	$\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots}_{n \text{ suku}} = \ldots$

Penalaran Deduktif

Kebenaran suatu pernyataan baru harus berdasarkan kepada unsur-unsur yang didefinisikan/tidak didefinisikan, aksioma, sifat, atau teori-teori yang telah dibuktikan kebenarannya (dari umum ke khusus, atau dari rumus ke contoh soal). Berperan besar dalam matematika dan berperan relatif kecil dalam non matematika. Penalaran deduktif tidak menerima generalisasi dari hasil observasi seperti yang diperoleh dari penalaran induktif, tetapi harus dibuktikan, misalnya dengan induksi matematika.

Ayo Anda buktikan bahwa jumlah dua buah bilangan ganjil adalah bilangan genap!

Petunjuk: Misal bilangan ganjil pertama 2m+1, m € B dan bilangan ganjil kedua 2n+1, n € B. Lanjutkan!

2. Relasi

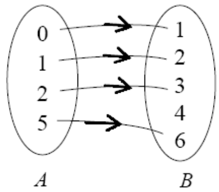
Relasi adalah suatu aturan yang memasangkan anggota-anggota dari himpunan satu ke anggota-anggota himpunan yang lain. Cara menyatakan relasi dapat dinyatakan dengan 3 cara yaitu diagram panah, himpunan pasangan berurutan, dan diagram Cartesius.

Contoh 12: Jika diketahui himpunan $A = \{0, 1, 2, 5\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Nyatakanlah relasi "satu kurangnya dari" himpunan A ke himpunan B (3 cara)!

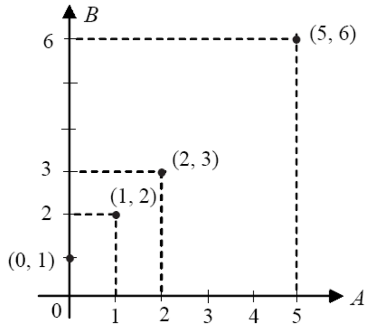
Penyelesaian:

Relasi "satu kurangnya dari" himpunan A ke himpunan B dapat disajikan dalam diagram panah, diagam kartesius, dan himpunan pasangan berurutan.

a. Diagram Panah



b. Diagram Cartesius



b. Himpunan pasangan berurutan

$R = \{(0,1), (1,2), (2,3), (5,6)\}$

3. Fungsi

Fungsi adalah relasi khusus yang memasangkan setiap anggota (dari daerah asal) dengan tepat satu anggota (dari daerah kawan). Jika f adalah suatu fungsi dari A ke B, maka:

- Himpunan A disebut **domain** (daerah asal).
- Himpunan B disebut **kodomain** (daerah kawan) dan himpunan anggota B yang pasangan (himpunan C) disebut **range** (hasil) fungsi *f.*

Aturan yang memasangkan anggota-anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B disebut aturan fungsi *f*.

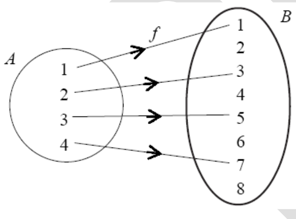
Misal diketahui fungsi-fungsi:

f : A → B ditentukan dengan notasi $f(x)$

g : C → D ditentukan dengan notasi $g(x)$

Contoh 13: Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4\}\ dan\ B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Suatu fungsi f : $A \rightarrow B$ ditentukan $oleh\ f(x) = 2x - 1$. Gambarlah fungsi f dengan diagram panah. Tentukan range fungsi *f*.

Penyelesaian: Diagram panah fungsi *f*



Dari diagram panah terlihat bahwa

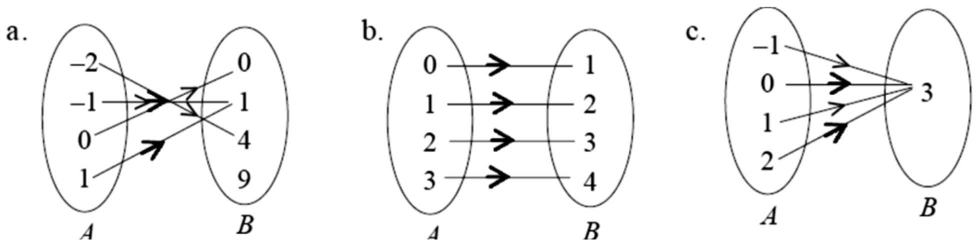
$f(x) = 2x - 1$ → *f(1) = 2.1 – 1 = 1* *f(3) = 2.3 – 1 = 5*

f(2) = 2.2 – 1 = 3 *f(4) = 2.4 – 1 = 7*

Jadi, range fungsi f adalah $\{1, 3, 5, 7\}$

Contoh 14:

Dari himpunan A dan B berikut, manakah yang merupakan fungsi? Sebutkan pula domain, kodomain, dan rumusnya (aturan fungsi)? Ayo selesaikan soal ini sebagai latihan!

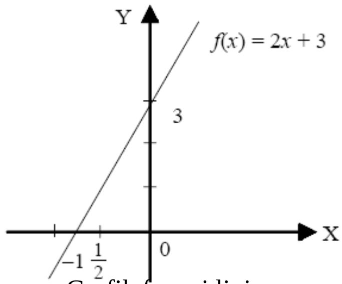


4. Fungsi Linier

Suatu fungsi f(x) disebut fungsi linier apabila fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax + b$, dimana a ≠ 0, a dan b bilangan konstan dan grafiknya berupa garis lurus.

Contoh 15:

Jika diketahui $f(x) = 2x + 3$, gambarlah grafiknya!



Grafik fungsi linier

Penyelesaian:

Untuk $x = 0 \rightarrow f(x) = y = 3$

Untuk y = f(x) = 0 → x = $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

Contoh 16:

Suatu fungsi dinyatakan dengan f(x) = ax + b. Jika nilai dari f(4) = 11 dan f(6) = 15, tentukan fungsi tersebut!

Penyelesaian:

$f(x) = ax + b \qquad f(4) = 4a + b = 11 \ldots (1)$

$f(6) = 6a + b = 15 \ldots (2)$

dengan eliminasi dan subtitusi diperoleh $a = 2 \; dan \; b = 3$ sehingga fungsinya adalah: $f(x) = 2x + 3$.

5. Persamaan Linear

Persaman adalah kalimat terbuka yang mengandung hubungan (relasi) sama dengan. Adapun persamaan linear adalah suatu persamaan yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah satu atau berderajat satu.

- **Persamaan linear satu variabel**

  Bentuk umum: $ax + b = 0$; $a, b \in R$, $a \neq 0$ a adalah koefisien dari variabel x dan b adalah konstanta. Contoh $4x + 8 = 0$.

- **Persamaan Linear Dua Variabel**

  Bentuk umum: $ax + by = c$; $a, b, c \in R$, $a \neq 0$, $b \neq 0$

  a adalah koefisien dari variabel x dan b adalah koefisien dari variabel y sedangkan c adalah konstanta. Misalnya $6x - 3y = 9$ merupakan persamaan linear dua variabel yakni variabel x dan variabel y.

- **Himpunan Penyelesaian Persamaan Linear**

Menentukan himpunan penyelesaian persamaan linear berarti mencari harga yang memenuhi untuk pengganti variabel pada persamaan linear yang bersangkutan.

Contoh 17. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan linear $\frac{2x-1}{5}=\frac{x+1}{2}$

Penyelesaian:

$\frac{2x-1}{5}=\frac{x+1}{2}$ Ingat perkalian silang berikut: $\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \leftrightarrow$ AD = BC

$\Leftrightarrow 2(2x-1) = 5(x+1)$

$\Leftrightarrow 4x - 2 = 5x + 5$

$\Leftrightarrow 4x - 5x = 2 + 5$

$\Leftrightarrow -x = 7$

$\Leftrightarrow x = -7$

$HP = \{-7\}$

6. Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Bentuk Umum

$$\boxed{\begin{array}{c} ax + by = c \\ px + qy = r \end{array}}$$

$a, b, c, p, q, r \in R$

$a, p = koefisien\ dari\ x$

$b, q = koefisien\ dari\ y$

$c, r = konstanta$

$x, y = variabel$

Ada beberapa cara menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel, antara lain cara grafik, subtitusi, eliminasi, atau gabungan (*eliminasi dan substitusi*). Berikut Contoh penyelesaian dengan menggunakan cara gabungan:

Contoh 18. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut:

$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$ dengan cara gabungan antara eliminasi dan substitusi!

Penyelesaian:

Eliminir y

$3x - y = 5$

$\underline{2x + y = 10\ +}$

$5x = 15$

$x = 3$

$x = 3$ substitusi ke $3x - y = 5$

$\Leftrightarrow 3(3) - y = 5$

$\Leftrightarrow 9 - y = 5$

$\Leftrightarrow -y = 5 - 9$

$\Leftrightarrow -y = -4$

$y = 4$. Jadi $HP = \{(3,4)\}$

Menyelidiki apakah kedua garis sejajar, berimpit, atau berpotongan tegak lurus.
Perhatikan persamaan garis:
$y = m_1x + n_1$ dan $y = m_2x + n_2$. Dengan m_1 merupakan gradien dari garis pertama dan m_2 merupakan gradien dari garis kedua.
Kedua garis sejajar bila $m_1 = m_2$.
Kedua garis berpotongan tegak lurus bila $m_1 \times m_2 = -1$.
Kedua garis berimpit bila $m_1 = m_2$, dan $n_1 = n_2$.
Contoh 19: Selidiki apakah garis $y = 2x - 6\ dan\ 2x - y = 4$ sejajar, berimpit atau saling tegak lurus!
Penyelesaian:
$y = 2x - 6$, $m_1 = 2$.
$2x - y = 4 \leftrightarrow y = 2x - 4$, $m_2 = 2$
Karena $m_1 = m_2$, maka kedua garis sejajar.
Ayo carilah persamaan garis lain yang saling sejajar, berimpit, tegal lurus, dan berpotongan!

7. Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat adalah persamaan berderajat dua dalam x yang dinyatakan dengan:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0;\ a, b, c \in R\ ;\ a \neq 0}$$

$a = k$oefisien dari x^2
b = koefisien dari x
c = konstanta

Penyelesaian Persamaan Kuadrat

Ada beberapa cara menyelesaikan persamaan kuadrat, antara lain :

a. *Memfaktorkan*

Contoh 20. Selesaikan $x^2 – 5x + 6 = 0$!

Penyelesaian:

Mencari 2 buah bilangan jika dikalikan adalah 6 dan jika dijumlahkan adalah (-5).
Bilangan-bilangan tersebut adalah (-3) dan (-2).
Jadi: $x^2 – 5x + 6 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 2) = 0$
$\Leftrightarrow x - 3 = 0\ atau\ x - 2 = 0$
$x = 3\ atau\ x = 2.\ Jadi\ HP = \{3, 2\}.$

b. *Melengkapkan Kuadrat Sempurna*

Contoh 21. Selesaikan $x^2 + 10x + 21 = 0$!

Penyelesaian:

$x^2 + 10x + 21 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 10x = -21$

$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 = -21 + 25,\quad 25 = (\frac{1}{2}\text{ koefisien x})^2$

$\Leftrightarrow (x + 5)^2 = 4$

$\Leftrightarrow x + 5 = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$\Leftrightarrow x + 5 = 2 \text{ atau } x + 5 = -2$

$x = -3 \text{ atau } x = -7.\ Jadi\ HP = \{-3, -7\}$

c. *Dengan Rumus ABC*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Contoh 22. Selesaikan $x^2 + 6x - 16 = 0$!

Penyelesaian:

$a = 1,\quad b = 6,\quad c = -16$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6+10}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ atau } x_2 = \frac{-6-10}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

Jadi HP = {2, -8}

8. Pertidaksamaan Linear

Pertidaksamaan linear adalah suatu pertidaksamaan yang variabelnya paling tinggi berderajat satu.

Bentuk umum :

$$\boxed{ax + b \neq 0\ ;\ a, b \in R, a \neq 0}$$

a = koefisien dari x

x = variabel

b = konstanta

$\neq$ berarti salah satu relasi dari pertidaksamaan bertanda <, >, ≤, ≥.

Misal $5x + 5 \geq 25$

Sifat-sifat Pertidaksamaan:

a. Arah tanda pertidaksaman tetap jika ruas kiri dan ruas kanan pertidaksamaan ditambah, dikurangi, dikalikan, atau dibagi dengan bilangan positif yang sama.

1) $a > b \rightarrow a + c > b + c$

2) $a > b \rightarrow a - d > b - d$

3) $a > b\ dan\ c > 0 \rightarrow ac > bc$

4) $a > b \ dan \ d > 0 \rightarrow \frac{a}{d} > \frac{b}{d}$

b. Arah tanda pertidaksamaan berubah jika ruas kiri dan ruas kanan dikalikan atau dibagi dengan bilangan negatif yang sama.

1) $a > b \ dan \ c < 0 \rightarrow ac < bc$

2) $a > b \ dan \ d < 0 \rightarrow \frac{a}{d} < \frac{b}{d}$

Contoh 23. Selesaikan 6x + 2 < 4x + 10 !

Penyelesaian:

$6x + 2 < 4x + 10$

$\Leftrightarrow 6x + 2 - 2 < 4x + 10 - 2$

$\Leftrightarrow 6x < 4x + 8$

$\Leftrightarrow 6x - 4x < 4x - 4x + 8$

$\Leftrightarrow 2x < 8$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} . 2x < \frac{1}{2} . 8$

$x < 4$

Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan Linear

Contoh 24. Tentukan himpunan penyelesaian dari $6x + 4 \geq 4x + 20, x \in R$!

Penyelesaian:

$6x + 4 \geq 4x + 20$

$\Leftrightarrow 6x + 4 - 4 \geq 4x + 20 - 4$

$\Leftrightarrow 6x \geq 4x + 16$

$\Leftrightarrow 6x - 4x \geq 4x - 4x + 16$

$\Leftrightarrow 2x \geq 16$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} . 2x \geq \frac{1}{2} . 16$

$x \geq 8$

Jadi $HP = \{ x / x \geq 8, x \in R\}$

9. Pertidaksamaan Kuadrat

Pertidaksamaan kuadrat adalah suatu pertidaksamaan yang mempunyai variabel paling tinggi berderajat dua dan koefisien variabel pangkat duanya tidak sama dengan nol. Bentuk umum:

$$\boxed{ax^2 + bx + c \neq 0; a, b, c \in R ; a \neq 0}$$

a = koefisien dari x^2

b = koefisien dari x

c = konstanta

$\neq$ berarti salah satu relasi pertidaksamaan bertanda **<, >, ≤, ≥.**

Misal $x^2 + 5x + 6 \geq 0$

Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan Kuadrat

Langkah-langkah menentukan himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan kuadrat adalah sebagai berikut:

(i) Ubah bentuk pertidaksamaan ke dalam bentuk umum.

(ii) Tentukan pembuat nol ruas kiri.

(iii) Letakkan pembuat nol pada garis bilangan.

(iv) Substitusi sembarang bilangan pada pertidaksamaan kecuali pembuat nol. Jika benar, maka daerah yang memuat bilangan tersebut merupakan daerah penyelesaian.

Contoh 25. Tentukan himpunan penyelesaian *dari* $x^2 + 6x + 8 \geq 0$ *untuk* $x \in R$ *!*

Penyelesaian:

(i) $x^2 + 6x + 8 \geq 0$

(ii) Pembuat nol

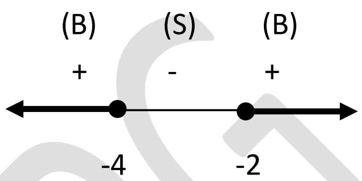
$x^2 + 6x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 4)(x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x + 4 = 0$ atau $x + 2 = 0$

$x = -4$ atau $x = -2$

(iii)



(iv) Ambil $x = 0 \rightarrow x^2 + 6x + 8 \geq 0$

$0 + 0 + 8 \geq 0$

$8 > 0$ (B)

Jadi HP = $\{ x | x \leq -4 \text{ atau } x \geq -2 \}$

10. Aplikasi Persamaan dan Pertidaksamaan Linier

Beberapa masalah dalam kehidupan sehari-hari dapat diselesaikan dengan konsep persamaan maupun dengan pertidaksamaan linier. Langkah pertama yang dilakukan adalah menerjemahkan masalah tersebut ke dalam kalimat matematika. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh 26.

Upah seorang teknisi untuk memperbaiki suatu mesin bubut adalah Rp250.000,00 ditambah biaya Rp75.000,00 tiap jamnya. Karena pekerjaannya kurang rapi, pembayarannya dipotong 10% dari upah total yang harus diterima. Jika teknisi tersebut mendapat upah sebesar Rp798.750,00. Berapa jam mesin bubut tersebut diperbaiki?

Penyelesaian:

Misalkan teknisi bekerja selama x jam, dan upah yang diterima hanya (100 - 10)% = 90%, maka diperoleh persamaan berikut:

(75.000 x + 250.000) x 90% = 798.750
67.500 x + 225.000 = 798.750
67.500 x = 798.750 – 225.000
67.500 x = 573.750
x = 573.750/67.500 = 8.5
Jadi, teknisi tersebut bekerja memperbaiki mesin selama 8,5 jam.

BAB III

GEOMETRI DAN PENGANTAR TRIGONOMETRI

A. Kompetensi Inti (KI)

Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan yang mendukung mata pelajaran yang diampu.

B. Kompetensi Dasar (KD)

Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi geometri dan pengantar trigonometri, serta penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.

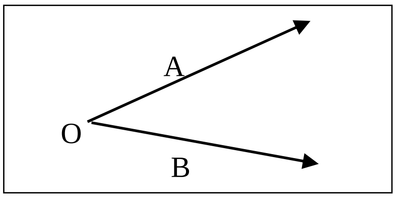
C. Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)

1. Menerapkan Konsep sudut secara kontektual.
2. Memecahkan masalah yang berkaitan dengan sifat-sifat bangun datar.
3. Menentukan bayangan titik-titik terhadap transformasi geometri sederhana (translasi, refleksi, rotasi, dilatasi).
4. Menerapkan pengetahuan konseptual, prosedural, dan keterkaitan keduanya dalam konteks materi geometri.
5. Menerapkan pengetahuan konseptual, prosedural, dan keterkaitan keduanya dalam konteks materi pengantar trigonometri.

D. Uraian Materi

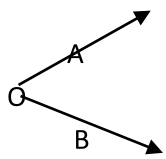
1. Sudut:

Sudut merupakan suatu daerah yang dibentuk oleh dua buah sinar garis yang bertemu di satu titik pangkal yang sama.

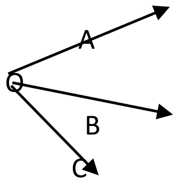


Panamaan sudut di atas adalah < AOB, atau < O, atau < BOA.

Ayo bernalar secara induktif! Buatlah generalisasi untuk n sinar garis!

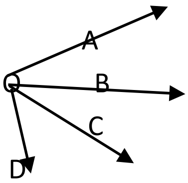
No.	**Banyak sinar garis**	**Visualisasi sudut**	**Banyanya nama sudut**
1.	2		< AOB = 1

2. 3



< AOB
< AOC = 3
< BOC

3. 4

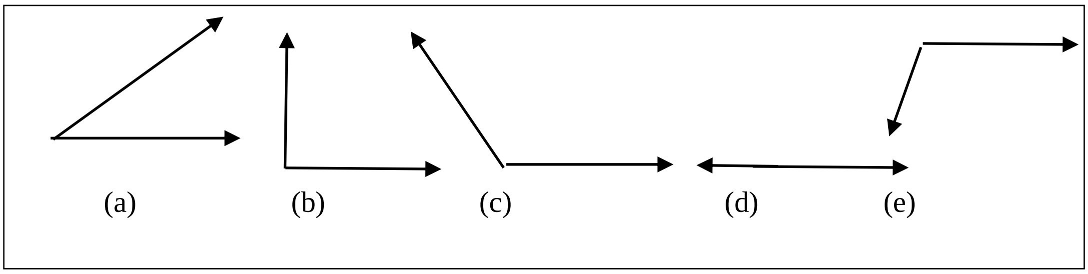


< AOB
< AOC
< AOD = 6
< BOC
< BOD
< COD

...	...	...
n	...	=?

Jenis-jenis Sudut:

Perhatikan gambar di bawah ini:

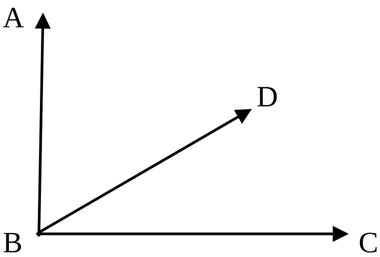


Berdasarkan gambar di atas, maka dapat dideskripsikan:

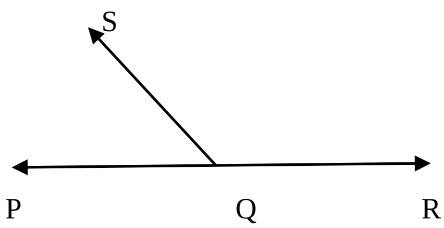
a. **Sudut lancip**, sudut yang besarnya antara 0^0 dan 90^0 atau $0^0 < x < 90^0$.
b. **Sudut siku-siku**, sudut yang besarnya 90^0.
c. **Sudut tumpul**, sudut yang besarnya $90^0 < x < 180^{\,0}$.
d. **Sudut lurus**, sudut yang besarnya 180 ^{o}.
e. **Sudut refleks**, *s*udut yang besarnya 180 ^{o}< x < 360^o.

Hubungan antar sudut:

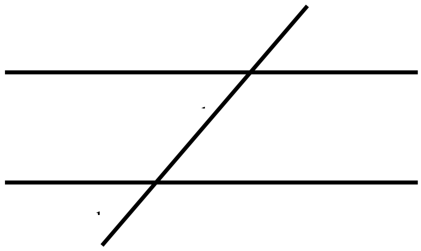
a. Sudut yang saling berpenyiku, dua sudut yang jumlah ukurannya 90^o:
∠ABD + ∠CBD = 90



b. Sudut yang saling berpelurus, dua sudut yang jumlah ukurannya 180^o:
∠ PQS + ∠ RQS = 180^o

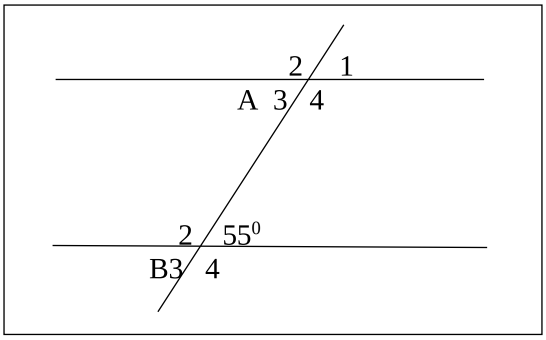


Hubungan antar sudut jika dua garis sejajar dipotong oleh sebuah garis:



1) Sudut sehadap, besarnya sama, yakni $\angle a = \angle e$, $\angle b = \angle f$, $\angle d = \angle h$, $\angle c = \angle g$.
2) Sudut dalam berseberangan, besarnya sama. $\angle c = \angle e$, $\angle d = \angle f$.
3) Sudut luar berseberangan, besarnya sama. $\angle a = \angle g$, $\angle b = \angle h$.
4) Sudut dalam sepihak, jumlah keduanya 180°. $\angle d + \angle e = 180°$ dan $\angle c + \angle f = 180°$.
5) Sudut luar sepihak, jumlah keduanya adalah 180°. $\angle b + \angle g = 180°$, dan $\angle a + \angle h = 180°$.
6) Sudut bertolak belakang, besarnya sama. $\angle a = \angle c$, $\angle b = \angle d$, $\angle e = \angle g$, $\angle f = \angle h$.

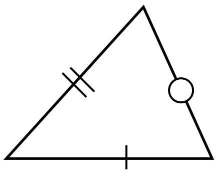
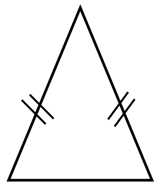
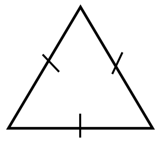
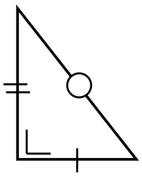
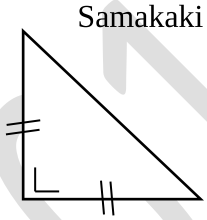
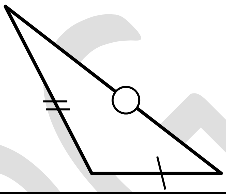
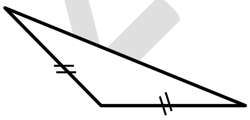
Ayo berlatih: Carilah besar sudut yang lain, jika diketahui $< B_1 = 55^0$!



2. Mengidentifikasi Bangun Datar Segitiga

Segitiga adalah bangun datar yang terjadi dari tiga ruas garis yang dua-dua ujungnya saling bertemu. Segitiga dapat terbentuk apabila panjang sisi terpanjang kurang dari jumlah panjang dua sisi yang lain. Tiap ruas garis yang membentuk segitiga disebut sisi. Pertemuan ujung-ujung ruas garis disebut titik sudut.

jenis-jenis segitiga dan hubungannya satu sama lain dapat digambarkan dengan tabel berikut:

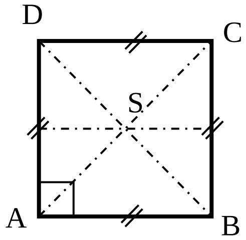
Menurut Sisi-sisinya / Menurut Besar Sudut	Panjang ketiga sisi berlainan	Dua sisi sama panjang	Ketiga sisinya sama panjang
Ketiga sudutnya Lancip	Segitiga lancip sembarang 	Segitiga sama kaki 	Segitiga sama sisi 
Salah satu sudutnya siku-siku	Segitiga siku-siku sembarang 	Segitiga siku-siku Samakaki 	Tidak ada
Salah satu sudutnya tumpul	segitiga tumpul sembarang 	segitiga tumpul sama kaki 	Tidak ada

3. Mengidentifikasi Segiempat Berdasarkan Unsur-Unsurnya:

a. Persegi

Persegi adalah segiempat yang keempat sisinya sama panjang dan keempat sudutnya siku-siku, atau persegi adalah belahketupat yang salah satu sudutnya siku-siku, atau persegi adalah persegi panjang yang dua sisi yang berdekatan sama panjang.

Dengan kata lain, persegi adalah bangun datar segiempat yang paling khusus, dengan sifat semua sudut siku-siku, semua sisi sama panjang, dua pasang sisi sejajar, dan kedua diagonalnya sama panjang.



Sifat-sifat persegi ABCD:

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$

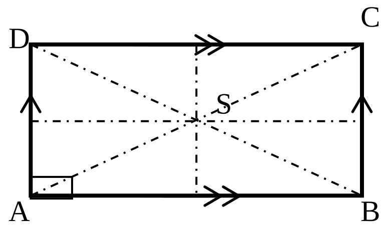
$\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = 90°$

$\overline{AC} = \overline{BD}$

$\overline{AS} = \overline{SC} = \overline{BS} = \overline{SD}$

b. Persegi Panjang

Persegi panjang adalah segiempat yang mempunyai dua pasang sisi sejajar dan keempat sudutnya siku-siku.



Sifat-sifat Persegi Panjang ABCD,

$\overline{AD} // \overline{BC}$ *dan* $\overline{AB} // \overline{DC}$;

$\overline{AB} = \overline{DC}$ dan $\overline{AD} = \overline{BC}$

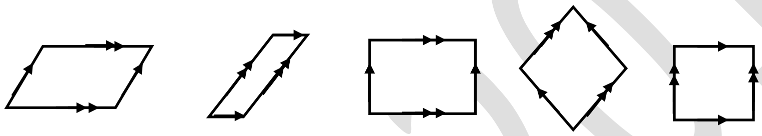
$\overline{AC} = \overline{BD}$; $\overline{AS} = \overline{SC}$

dan $\overline{BS} = \overline{SD}$

$\angle BAD = \angle ABC = \angle BCD = \angle ADC = 90^o$

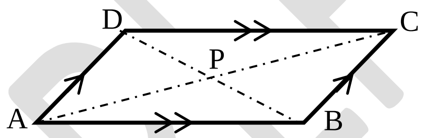
c. Jajargenjang

Jajargenjang adalah segiempat yang sisi-sisinya sepasang-sepasang sejajar, atau segiempat yang memiliki tepat dua pasang sisi yang sejajar. Semua bentuk di bawah ini adalah jajargenjang.



Gb. 1 Gb. 2 Gb. 3 Gb. 4 Gb. 5

Gambar yang ketiga adalah jajargenjang dengan sifat khusus yaitu siku-siku dan disebut persegipanjang. Gambar yang keempat adalah jajargenjang dengan sifat khusus yaitu semua sisi sama panjang dan disebut belah ketupat. Gambar yang kelima adalah jajargenjang dengan sifat khusus yaitu siku-siku dan semua sisi sama panjang dan disebut persegi.



Sifat-sifat jajargenjang ABCD,

$\overline{AD} // \overline{BC}$; $\angle DAB = \angle BCD$;

$\overline{AP} = \overline{PC}$; $\overline{AD} = \overline{BC}$

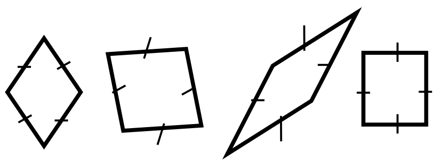
$\overline{AB} // \overline{DC}$; $\angle ABC = \angle ADC$;

$\overline{BP} = \overline{PD}$; $\overline{AB} = \overline{DC}$

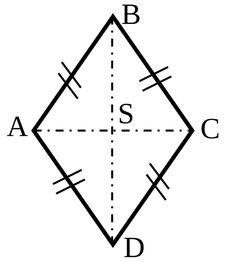
d. Belah Ketupat

Belah ketupat adalah segiempat yang keempat sisinya sama panjang, atau belah ketupat adalah jajargenjang yang dua sisinya yang berdekatan sama panjang, atau belah ketupat adalah layang-layang yang keempat sisinya sama panjang.

Contoh:



Perhatikan, karena persegi juga keempat sisinya sama panjang maka persegi termasuk belah ketupat. Jadi, persegi *termasuk jenis* belah ketupat. Belah ketupat juga *termasuk* layang-layang karena ada dua pasang sisi bergandengan yang sama panjang. Juga, belah ketupat *termasuk jenis* jajargenjang, karena dua pasang sisinya sejajar, tetapi jajargenjang bukan termasuk belah ketupat karena semua sisinya tidak sama panjang.



Sifat-sifat belah ketupat ABCD,

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$

$\angle BAD = \angle BCD$

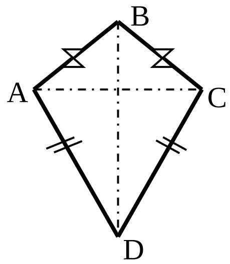
$\angle ABC = \angle ADC$

$\overline{BS} = \overline{SD}$, $\overline{AS} = \overline{SC}$,

$\overline{AB} // \overline{DC}$, $\overline{AD} // \overline{BC}$

e. Layang-layang

Layang-layang adalah segiempat yang dua sisinya yang berdekatan sama panjang, sedangkan kedua sisi yang lain juga sama panjang, atau segiempat yang mempunyai dua pasang sisi berdekatan sama panjang.



Sifat-sifat layang-layang ABCD,

$\overline{AB} = \overline{BC}$; $\overline{AD} = \overline{DC}$.

Sudut-sudut yang berhadapan sama besar.

$\angle ACB = \angle CAB$

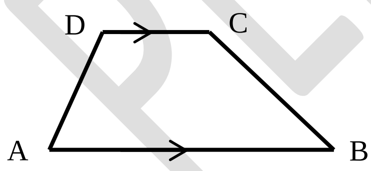
$\angle BAD = \angle BCD$

$\angle ACD = \angle CAD$

Kedua diagonal saling tegak lurus.

f. Trapesium

Trapesium adalah segiempat yang mempunyai tepat sepasang sisinya sejajar.



Sifat-sifat trapesium ABCD,

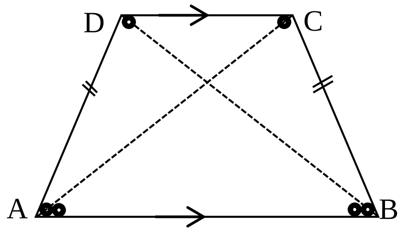
$\overline{AB} // \overline{DC}$

$\overline{AD}$ dan $\overline{BC}$ disebut kaki trapesium

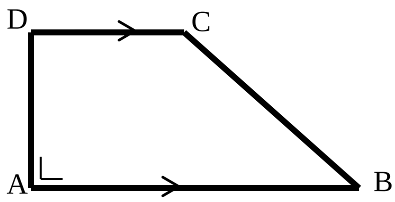
$\overline{AB}$ (sisi terpanjang) dari trapesium disebut alas trapesium.

Selain trapesium sembarang, terdapat dua macam trapesium yang lain, yaitu:

(1) Trapesium samakaki

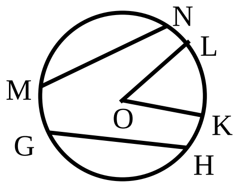


(2) Trapesium siku-siku



4. Mengidentifikasi Bangun Datar Lingkaran

a. Lingkaran



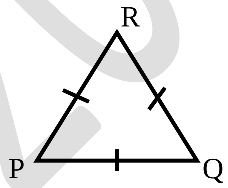
Lingkaran adalah bangun datar yang sisinya selalu berjarak sama dengan titik pusatnya, atau lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang terletak pada suatu bidang, dan berjarak sama terhadap titik tertentu. Titik tertentu tadi disebut pusat lingkaran.

b. Unsur-unsur Lingkaran

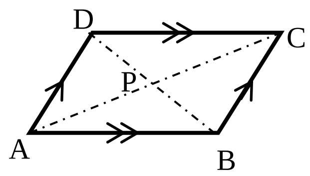
- **Garis tengah** (diameter) adalah garis yang membagi dua sama besar dari suatu lingkaran atau tali busur yang melalui titik pusat.
- **Jari-jari** adalah ruas garis yang menghubungkan titik pusat lingkaran dengan lingkaran.
- Berdasarkan gambar di atas, GH disebut **tali busur**. Sisi lengkung GH **disebut busur.**
- Daerah yang dibatasi oleh tali busur $\overline{MN}$ dan busur MN disebut **tembereng.**
- Daerah yang dibatasi jari-jari OK dan jari-jari OL serta busur KL disebut **juring.**

Ayo berlatih: Isilah titik-titik berikut dengan jawaban yang tepat!

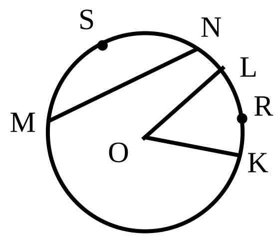
1) a. PQR adalah segitiga ....
   b. PR = ... = ...
   c. $\angle P =$ ....°
   d. Jika PQ = 5 cm , maka QR = ... cm



2) a. ABCD adalah bangun ....
   b. Dua pasang sisi yang sama panjang adalah ... dengan ...;
   ... dengan ....
   c. $\angle A = \angle$... dan $\angle B = \angle$....
   d. $\overline{AP}$ = ... dan $\overline{BP}$ = ...



3) a. $\overline{MN}$ disebut ....
   b. Sisi lengkung MN disebut ....
   c. Daerah MSN disebut ....



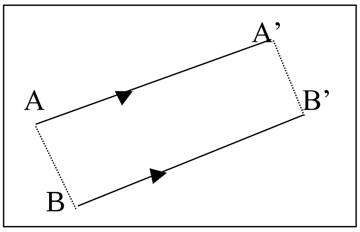
5. Geometri Transformasi Sederhana

Transformasi bidang yaitu pemetaan satu-satu dari himpunan semua titik dalam bidang pada himpunan itu sendiri. Bangun hasil dari transformasi disebut bayangan. Ada empat jenis transformasi pada bidang yaitu: pergeseran (translasi), pencerminan (refleksi), pemutaran (rotasi) dan perkalian (dilatasi).

a. Pergeseran (Translasi)

Pergeseran yaitu transformasi yang memindahkan semua titik dalam suatu bidang dengan besar dan arah yang sama. Besar dan arah pergeseran dapat digambarkan sebagai suatu segmen garis berarah dari suatu himpunan segmen garis berarah dengan besar dan arah yang sama.

Pada gambar di bawah ini, karena suatu translasi tertentu maka A → A' dan B → B'. Jadi AA'=BB', sehingga AA' = BB' dan AA' // BB'. Juga AB =A'B' dan AB // A'B'.



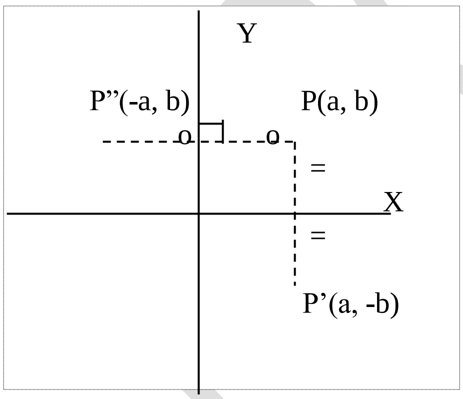
Arti translasi yaitu memindahkan setiap titik pada bidang, misalnya "memindahkan 2 ke kanan dan 3 ke atas" dan ditulis sebagai $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, 2 dan 3 disebut komponen-komponen translasi.

Contoh: Pada translasi $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, titik (5, 3) dibawa ke (5+2, 3+3) yaitu (7, 6).

b. Pencerminan (Refleksi)

Pencerminan yaitu transformasi semua titik pada bidang dengan jalan membalik bidang pada suatu garis tertentu yang disebut sebagai sumbu pencerminan.

Pencerminan dalam bidang koordinat



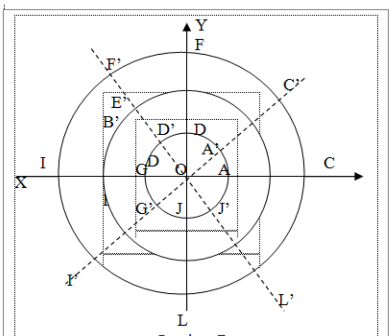
Sumbu X dan sumbu Y dipandang sebagai cermin. Pada gambar di samping, titik P (a, b) karena pencerminan terhadap sumbu X dibawa ke P' (a, -b), dan karena pencerminan terhadap sumbu Y dibawa ke P" (-a, b).

Jadi pada pemetaan X, P (a, b) ↔ P' (a, -b), dan pada pemetaan Y, P (a, b) ↔ P' (-a, b).

Bagaimana jika suatu titik P (a, b) dicerminkan terhadap garis y = x atau y = -x? Ayo berlatih!

c. Pemutaran (Rotasi)

Pemutaran yaitu transformasi semua titik pada bidang, yang masing-masing bergerak sepanjang busur lingkaran yang berpusat pada pemutaran. Setiap pemutaran pada bidang datar ditentukan oleh: i) pusat pemutaran, ii) jauh pemutaran, dan iii) arah pemutaran. Arah pemutaran yang berlawanan dengan arah jarum jam disebut sebagai arah positif, sedang arah yang searah dengan arah jarum jam disebut arah negatif.



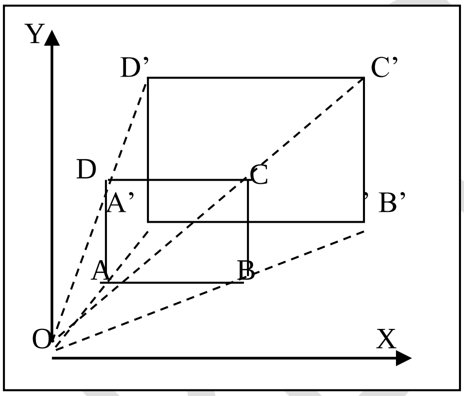
Gambar 7

Pada gambar di samping, O adalah pusat pemutaran. Karena suatu pemutaran pada O, OA → OA', OB → OB', OC → OC', OD → OD' dan seterusnya. Dengan demikian A → A', B → B', C → C', D → D', dan seterusnya.

d. Perkalian (Dilatasi)

Perkalian yaitu suatu transformasi bidang yang memasangkan setiap P pada bidang dengan setiap titik P', sedemikian sehingga $\vec{OP} = k\,\vec{OP}$, dimana O adalah titik tetap dan k suatu konstanta real. Jika pusat dilatasi adalah O dan faktor skalanya k, maka dilatasi ini dapat dinyatakan dengan "perkalian $[O,k]$".

Dalam sistem koordinat, bila dilatasi berpusat pada titik pangkal O, maka koordinat-koordinat titik hasil diperoleh dari koordinat-koordinat titik asal dengan mengalikannya dengan faktor skala.



Pada gambar disamping, A', B', C' dan D' diperoleh dari A, B, C dan D pada dilatasi $[0,2]$

A (1,1) → A' (2,2)

B (4,1) → B' (8,2)

C (4,3) → C' (8,6)

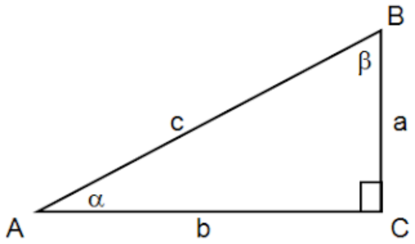
D (1,3) → D' (2,6)

6. Pengantar Trigonometri

Trigonometri berasal dari dua kata pada bahasa Yunani, yaitu trígōnon (segitiga) dari treîs/tri (tiga) + gonia (sudut) dan metrein/métron (pengukuran). Trigonometri berhubungan dengan segitiga. Trigonometri digunakan untuk mendeskripsikan suatu fungsi. Penggunaan trigonometri dapat ditemukan dalam permasalahan yang melibatkan manipulasi aljabar atau analitis. Penggunaan trigonometri yang akan dibahas yang berkaitan dengan permasalahan geometri, yaitu yang berhubungan dengan bidang datar segitiga. Permasalahan yang dapat dimodelkan menjadi permasalahan menentukan panjang sisi atau besar sudut suatu segitiga dapat diselesaikan dengan trigonometri.

Memahami trigonometri dapat dimulai dengan memperhatikan suatu segitiga siku-siku. Perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku terhadap salah satu sudut lancipnya dikenal dengan perbandingan trigonometri. Diperoleh enam perbandingan trigonometri yang diberi nama sinus, cosinus, tangen, kotangen, sekan, dan kosekan.

Hubungan Perbandingan Trigonometri



Sinα = $\frac{sisi\ yang\ berhadapan\ dengan\ sudut \propto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$

Cos α = $\frac{sisi\ yang\ berdampingan\ dengan\ sudut \propto}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$

Tangen α = $\frac{sisi\ yang\ berhadapan\ dengan\ sudut \propto}{sisi\ yang\ berdampingan\ dengan\ sudut \propto}$

$= \frac{\sin\propto}{\cos\propto} = \frac{a}{b}$

Kotangen (cot) α = $\frac{1}{tangen \propto} = \frac{sisi\ yang\ berdampingan\ dengan\ sudut \propto}{sisi\ yang\ berhadapan\ dengan\ sudut \propto} = \frac{b}{a}$

Sekan (sec) α = $\frac{hipotenusa}{sisi\ yang\ berdampingan\ dengan\ sudut \propto} = \frac{1}{\cos\propto} = \frac{c}{b}$

Kosekan (csc) α = $\frac{hipotenusa}{sisi\ yang\ berhadapan\ dengan\ sudut \propto} = \frac{1}{\sin\propto} = \frac{c}{a}$

Ayo berlatih: Tentukan nilai dari sin A, cos A, tangen A, kotangen A, sekan A, dan kosekan A jika diketahui A adalah salah satu sudut Δ ABC dengan B sebagai sudut siku-sikunya dengan AB = 5 cm dan BC = 12 cm. Kerjakan secara berpasangan!

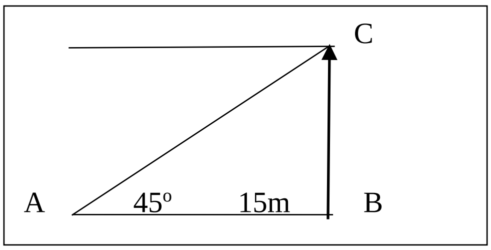
Untuk beberapa sudut α (sudut-sudut istimewa), yaitu: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, kita dapat menghitung secara langsung nilai sin α, cos α, tangen α, seperti pada tabel berikut.

	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
Sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
Cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangen α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Tak tentu

Menentukan Jarak

Contoh soal: Seorang siswa SD sedang berdiri di tepi jalan raya dan melihat lurus ke seberang jalan satunya. Tepat di tepi seberang jalan dari posisinya, terdapat tiang listrik. Sang Anak ingin mengukur lebar jalan itu, dia memutuskan berjalan menyusuri tepi jalan dan setelah berjalan sejauh 15 m dia melihat tiang listrik di seberang sungai tadi dengan sudut elevasi sebesar 45°. Berapakah lebar jalan itu?

Penyelesaian:



Tentukan BC!

Jika AC = r, maka

sin 45°= $\frac{BC}{r} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{BC}{r} \Leftrightarrow BC = \frac{1}{2}\sqrt{2.r}$

cos 45°= $\frac{AB}{r} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{AB}{r} \Leftrightarrow AB = \frac{1}{2}\sqrt{2.r}$

Jadi 15 = $\frac{1}{2}\sqrt{2}.r \leftrightarrow$ r = $\frac{15.2}{\sqrt{2}} = \frac{30}{2}\sqrt{2}$.

BC = $\frac{1}{2}\sqrt{2}.r$ = $\frac{1}{2}\sqrt{2}\ .\ \frac{30}{2}\sqrt{2}$ = 15. Jadi lebar jalan raya = 15 m.

Cara lain: masih ingat sepasang penggaris segitiga, ambillah penggaris segitiga siku-siku sama kaki. Jika kita perhatikan, maka akan membentu sudut 45^o, maka sisi siku-sikunya sama panjang. Jadi tanpa menghitung secara trigonometri, maka BC = 15 m.

Ayo carilah contoh soal yang memuat implementasi trigonometri!

BAB IV
PENGUKURAN

A. Kompetensi Inti (KI)

Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan yang mendukung mata pelajaran yang diampu.

B. Kompetensi Dasar (KD)

Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi pengukuran, serta penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.

C. Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)

1. Menganalisis masalah yang berkaitan dengan pengukuran panjang, keliling, luas, volume, suhu, berat, kecepatan, dan debit.
2. Menerapkan pengetahuan konseptual, prosedural, dan keterkaitan keduanya dalam konteks materi pengukuran.

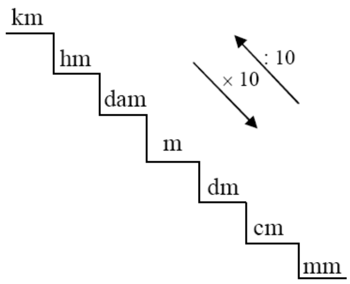
B. Uraian Materi

1. Pengukuran Panjang

Ukuran panjang suatu objek adalah banyaknya satuan panjang yang digunakan untuk menyusun secara berjajar dan berkesinambungan dari ujung objek yang satu ke ujung objek yang lain. Pengalaman belajar siswa tentang pengukuran panjang dimulai untuk mengukur panjang dengan menggunakan satuan tidak baku. Satuan tidak baku yang digunakan disesuaikan dengan benda yang diukur panjangnya. Contoh satuan tidak baku antara lain jengkal, hasta, klip, pensil, dan sebagainya. Pada kegiatan pengukuran panjang yang harus diperhatikan adalah: (1) Benda yang diukur, (2) Satuan ukur tidak baku yang tepat untuk dipilih, (3) Cara mengukur, (4) Hasil pengukuran tergantung satuan yang digunakan.

Pada awal kegiatan untuk penanaman konsep ukuran panjang, yang perlu diperhatikan adalah: (1) Tersedianya satuan ukuran yang digunakan sesuai dengan panjang objek, dan (2) Hasil pengukuran ditunjukkan dengan banyaknya satuan ukuran yang berjejer pada objek yang diukur.

Pada akhir kegiatan siswa memperoleh pemahaman bahwa: (1) Suatu benda diukur dengan menggunakan satuan ukuran yang berbeda akan diperoleh hasil yang berbeda. Oleh karena itu untuk memperoleh pengukuran yang sama, maka satuan yang digunakan harus sama panjang, sehingga mengarahkan siswa ke satuan baku, (2) Mengarahkan siswa untuk menemukan hubungan antara ukuran mm, cm, dm, m, km, (3) Memperkenalkan siswa tentang tangga satuan.

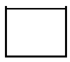
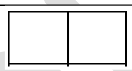
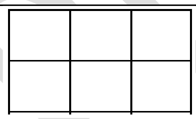
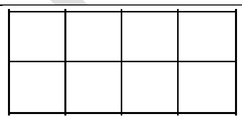
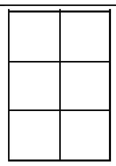


2. Pengukuran Luas dan Keliling

Luas suatu daerah adalah banyaknya satuan ukur luas yang dapat digunakan untuk menutupi daerah itu secara menyeluruh dan tidak berhimpitan. Pengukuran luas dapat menggunakan satuan luas tidak baku dan baku. Satuan luas tidak baku untuk mengukur luas suatu daerah dapat berupa ubin berbentuk segienam beraturan, segitiga sama sisi, persegi panjang, persegi dan lain-lain. Dengan demikian satuan luas tidak baku yang dimaksud adalah satuan luas yang belum dibakukan. Adapun satuan baku adalah satuan luas yang sudah dibakukan secara international antara lain meter persegi (m^2), hektometer persegi (hm^2) atau hektar (ha).

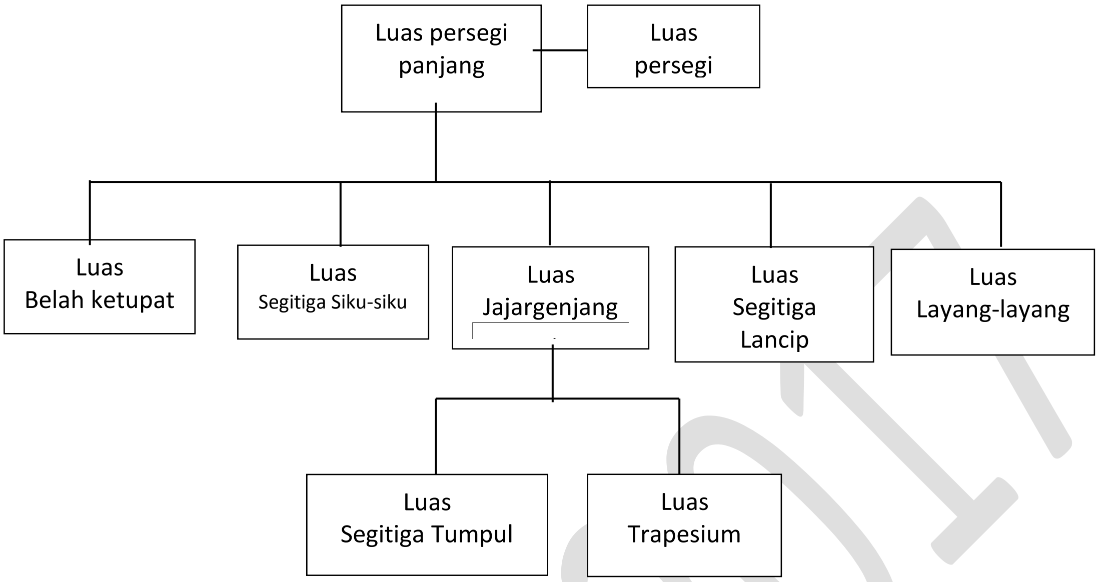
Alternatif penemuan rumus luas daerah bangun datar (persegi, segitiga, jajargenjang, trapesium, layang-layang, belah ketupat) dapat diturunkan dari rumus luas persegi panjang. Bila alternatif tersebut yang dipilih maka rumus laus persegi panjang harus lebih dahulu ditemukan oleh siswa.

Penemuan luas persegi panjang

No.	Bangun	Luas (L)	Panjang (p)	Lebar (l)	Hubungan L, p dan l
1.		1	1	1	1 = 1 x 1
2.		2	…	1	2 = … x 1
3.		…	3	…	… = 3 x …
4.		…	…	…	…
5.		…	…	…	…

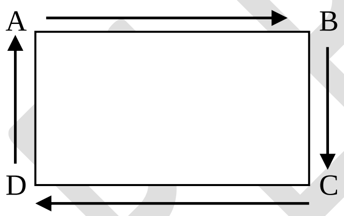
Amatilah isian pada kolom terakhir pada tabel tersebut. bagaimana hubungan antara luas (L), panjang (p) dan lebar (l) untuk persegi panjang secara umum? Hubungan tersebut dinyatakan sebagai berikut: L = … x …

Setelah rumus luas persegi panjang dapat ditemukan, maka untuk rumus luas bangun datar yang lain dapat diturunkan dari rumus luas persegi panjang. Adapun alternatif urutan penemuan rumus luas bangun datar yang lain sebagai berikut (salah satu alternatif dari beberapa alternatif penemuan rumus luas bangun datar.



Diskusikan dengan teman anda bagaimana menemukan rumus luas bangun datar yang ada pada bagan dengan menggunakan rumus luas persegi panjang.

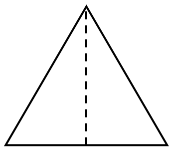
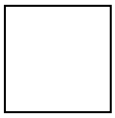
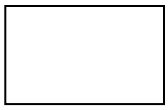
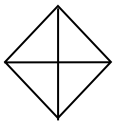
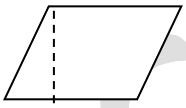
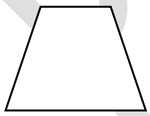
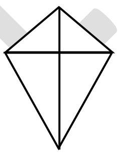
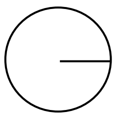
Keliling suatu objek adalah banyaknya satuan panjang yang digunakan untuk mengukur panjang dari objek itu mulai titik awal pengukuran dengan menelusuri semua tepian objek hingga kembali ke titik awal.



Jadi keliling gambar di samping adalah panjang garis dari titik A ke titik B kemudian dijumlahkan dengan panjang garis dari titik B ke titik C, demikian seterusnya sampai ke titik A kembali.

Beberapa kesalahan konsep siswa terhadap materi keliling adalah siswa tidak memahami bahwa keliling adalah menjumlahkan seluruh panjang sisi bangun atau wilayah yang ditentukan kelilingnya. Hal ini nampak ketika siswa diberikan gabungan dari bangun datar. Siswa menganggap bahwa kelilingnya adalah jumlah keliling bangun yang digabungkan bukan menjumlahkan seluruh panjang sisi bangun gabungan tersebut. Begitu juga untuk bangun setengah lingkaran, siswa akan menghitung keliling setengah lingkaran dengan menggunakan rumus tanpa menjumlahkan kembali dengan panjang diameter lingkaran. Jadi, yang perlu ditekankan adalah konsep keliling adalah menjumlahkan panjang sisi bangun atau wilayah yang akan ditentukan kelilingnya.

Berikut rangkuman rumus keliling dan luas bangun datar:

Nama	Gambar	Keliling	Luas	Keterangan
Segitiga		$a + b + c$	$\frac{a\ x\ t}{2}$	Tinggi adalah panjang garis yang ditarik dari titik sudut atas tegak lurus dengan garis/ perpanjangan alasnya
Persegi		s + s + s + s = 4 s	s^2	Sisi (s) pada persegi sama panjang
Persegi Panjang		p + l + p + l = 2 (p +l)	$p\ x\ l$	Sisi pada persegi panjang terdapat dua pasang yang sama panjang
Belah Ketupat		s + s + s + s = 4 s	$\frac{d1\ x\ d2}{2}$	Diagonal (d) adalah garis yang menghubungkan dua titik sudut yang berhadapan
Jajar Genjang		a + b + c + d = 2 (a+sisi miring)	a x t	Simbol a adalah alas dan tinggi adalah garis yang ditarik dari suatu sudut tegak lurus ke garis/perpanjangan garis di depannya.
Trapesium		a + b + c + d	$\frac{(a+b)\ x\ t}{2}$	a dan b adalah garis sejajar dari trapesium
Layang-Layang		Sisi1 + sisi2 + sisi3 + sisi4	$\frac{d1\ x\ d2}{2}$	Diagonal (d) adalah garis yang menghubungkan dua titik sudut yang berhadapan
Lingkaran		2 π r	π r^2	Jari-jari (r) adalah panjang garis dari titik pusat ke lengkungan lingkaran. Phi (π) nilainya tetap yaitu 3,14 atau $\frac{22}{7}$.

Adapun pengukuran satuan luas adalah:

X 100 →

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

← : 100

3. Pengukuran Kapasitas, Isi dan Volume

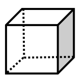
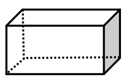
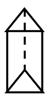
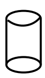
Kapasitas dapat diukur dengan membilang atau menentukan dengan alat ukur tertentu, sehingga pengukuran kapasitas memunculkan banyak benda maksimal, millimeter maksimal, gram maksimal yang dapat dimasukkan/dikemas pada suatu kemasan benda.

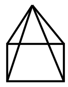
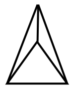
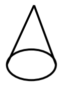
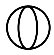
Kesalahan yang sering muncul, kapasitas disamakan dengan istilah isinya, beratnya, volume ataupun banyaknya oleh siswa. Berikut contoh kesalahan konsep yang dimiliki oleh siswa ketika diminta untuk menentukan isi dan kapasitas dari suatu produk minuman dengan diminta menjawab “setelah air mineral diminum, apakah yang berkurang isi, kapasitas atau volume air mineral?”

Volume (isi) suatu bejana (bangun ruang) adalah banyaknya satuan volum (satuan takaran) yang dapat digunakan untuk mengisi hingga penuh bejana tersebut. Rumus-rumus volum bangun ruang dapat diturunkan dari volum bangun ruang balok.

Diskusikan dengan teman kelompok anda bagaimana mengkonstruksi menemukan rumus volum bangun ruang kubus, prisma, kerucut, limas, tabung dengan terlebih dahulu mencari/menemukan rumus volum balok.

Berikut rangkuman rumus volum bangun ruang:

Golongan	**Anggota**	**Gambar**	**Rumus Umum Volume**	**Rumus Rinci Volume**	**Rumus Luas Permukaan**
Golongan Bangun Ruang Prisma (Alas dan Atap Sama)	Kubus		Luas alas x t	$s \times s \times s = s^3$	$6 \times s^2$
	Balok			p x l x t	2 x (p.l +p.t+l.t)
	Prisma Segitiga			$\frac{a \times t}{2} \times t$	2 x L.a + L.selimut
	Tabung			$\pi r^2 t$	$2 \pi r (r + t)$

Golongan	Anggota	Gambar	Rumus Umum Volume	Rumus Rinci Volume	Rumus Luas Permukaan
Golongan Bangun Ruang Limas (Atapnya Runcing)	Limas Persegi		$\frac{L.a\ x\ t}{3}$	$\frac{1}{3}$ x p x l x t	L.a + jumlah luas sisi tegak
	Limas Segitiga			$\frac{1}{3}$ x $\frac{a\ x\ t}{2}$ x t	L.a + jumlah luas sisi tegak
	Kerucut			$\frac{1}{3}\pi$ r^2 t	π r (r + s) dimana s garis pelukis
Bola	-		$\frac{4}{3}\pi$ r^3	$\frac{4}{3}\pi$ r^3	4 π r^2

Adapun pengukuran satuan volum (isi)

X 1000 →

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3

← : 1000

Konversi satuan volume:

1 liter = 1 dm^3 = 1.000 cm^3 = 0,001 m^3

1 cc = 1 ml = 1 cm^3

Coba selidiki untuk menemukan rumus luas permukaan bangun ruang!

4. Pengukuran Jarak, Waktu dan Kecepatan

Kecepatan dari benda yang bergerak ialah besaran yang merupakan hasil pembagian jarak tempuh dalam perjalanan dengan waktu yang digunakan untuk menempuh jarak yang dimaksud. Kaitan antar jarak, kecepatan dan waktu dinyatakan dengan rumus:

$$kecepatan = \frac{jarak\ tempuh\ perjalanan}{waktu\ perjalanan}\ atau\ v = \frac{s}{t}$$

Satuan kecepatan antara lain km/jam atau m/s. Contoh: 130 km/jam, bermakna jarak 130 km ditempuh dalam waktu 1 jam.

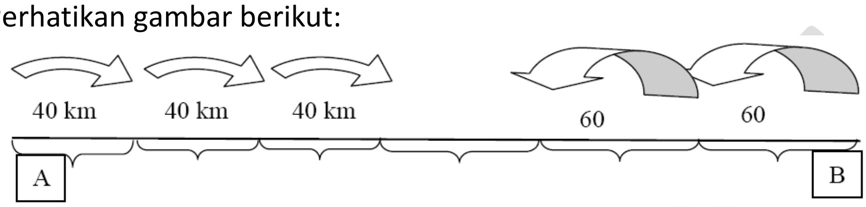
Contoh 1:

Jarak kota A dan kota B adalah 300 km. Dika dari kota A ke kota B mengendarai sepeda motor dengan kecepatan rata-rata 40 km/jam. Riski mengendarai mobil dari kota B ke kota A dengan kecepatan rata-rata 60 km/jam. Mereka berangkat dalam waktu yang sama yaitu pukul 07.00. Jika mereka menempuh jalur yang sama, maka pukul berapa meraka berpapasan?

Penyelesaian:

Cara 1

Perhatikan gambar berikut:



Dika melakukan perjalanan 3 jam akan menempuh jarak 120 km dan Riski dalam waktu 3 jam menempuh jarak 180 km. jadi mereka berpapasan setelah menempuh perjalanan 3 jam yaitu pukul 10.00

Cara 2

Jumlah jarak yang ditempuh oleh Dika dan Riski adalah 40 km + 60 km = 100 km. Karena jarak yang ditempuh 300 km, maka waktu yang diperlukan:

$$t = \frac{300\ km}{100\ km/jam} = 3\ jam$$

Jadi mereka berpapasan setelah menempuh perjalanan selama 3 jam yaitu pukul 10.00

5. Pengukuran Massa dan Berat

Berat merupakan konsep yang seringkali disamakan dengan istilah massa benda. Padahal dua istilah ini berbeda satu dengan yang lain, massa merupakan materi yang memungkinkan suatu benda menjadi berukuran semakin naik tanpa dipengaruhi grativitasi bumi. Massa mempunyai kekekalan, sehingga massa di bumi sama dengan massa di bulan atau dimanapun. Berat merupakan ukuran yang dipengaruhi oleh grativasi bumi, kekuatan grativitasi akan menentukan semakin naik tidaknya ukuran berat. Berat benda di dataran bumi berbeda dengan di puncak gunung walaupun yang diukur beratnya adalah benda yang sama. Ukuran standar massa (yang kebanyakan disebut berat) dalam system numerik antara lain kilogram, gram, kuintal, ton.

X 10 →

Ton	kuintal	...	...	kg	hg	dag	g	dg	Cg	mg

← **: 10**

Contoh 2:

Bibi pergi ke pasar membeli 5 kg gula, 20 dag bawang merah, 3 hg cabe, dan 1 pon bawang putih. Ketika akan pulang bibi membeli lagi 4 kg kentang. Berapa kg belanjaan bibi semuanya?

Penyelesaian:

Kalimat matematika:

5 kg + 20 dag + 3 hg + 1 pon + 4 kg = … kg

20 dag = 20 : 100 = 0,2 kg

3 hg = 3 : 10 = 0,3 kg

1 pon = 1 : 2 = 0,5 kg

Jadi berat keseluruhan belanjaan bibi adalah

5 kg + 0,2 kg + 0,3 kg + 0,5 kg + 4 kg = 10 kg.

6. Pengukuran Suhu

Pengukuran suhu dapat diartikan membandingkan suhu dengan skala yang terdapat pada thermometer dengan satuan untuk mengukur suhu adalah derajat. Skala pengukuran suhu yang umum digunakan di Indonesia adalah derajat Celcius. Selain itu masih ada skala Fahrenheit dan Reamur. Masing-masing skala menetapkan titik didih, titik beku, dan titik absolute yang berbeda.

- Titik didih dan titik beku air dalam Celcius adalah 100^0C dan 0^0C.
- Titik didih dan titik beku air dalam Fahrenheit adalah 212^0F dan 0^0F.
- Titik didih dan titik beku dalam Reamur adalah 80^0R dan 0^0R.

Perbandingan ketiga skala pengukuran Celcius:Reamur:Fahrenheit= C : R : F = 5 : 4 : 9

a. Jika diketahui suhu dalam derajat Celcius maka:

C : R = 5 : 4 maka suhu dalam Reamur = $\frac{4}{5}\ x\ C$

C : F = 5 : 9 maka suhu dalam Fahrenheit = $\frac{9}{5}\ x\ C + 32$

b. Jika diketahu suhu dalam derajat Reamur

C : R = 5 : 4 maka suhu dalam Celcius = $\frac{5}{4}\ x\ R$

R : F = 4 : 9 maka suhu dalam Fahrenheit = $\frac{9}{4}\ x\ R + 32$

c. Jika diketahui suhu dalam derajat Fahrenheit

C : F = 5 : 9 maka suhu dalam Celcius = $\frac{5}{9}\ x\ (F - 32)$

R : F = 4 : 9 maka suhu dalam Fahrenheit = $\frac{4}{9}\ x\ (F - 32)$

Contoh 3:

Seorang pekerja pembuat jalan memanaskan aspal mencapai suhu 482^0F. Berapa derajat suhu tersebut dalam C dan R?

Penyelesaian:

$$C = \frac{5}{9}\,x\,(482 - 32) = \frac{5}{9}\,x\,450 = 250^0C$$

$$R = \frac{4}{9}\,x\,(482 - 32) = \frac{4}{9}\,x\,450 = 200^0R$$

7. Pengukuran Debit

Andi dan Dedi masing-masing mempunyai kolam ikan. Volume kedua kolam tersebut sama. Pada hari Minggu mereka mengisi air kolam ikan yang kosong dengan air sumur yang dialirkan melalui pipa dan keran. Untuk mengisi kolam ikan Andi memerlukan waktu 5 menit, sedangkan Dedi memerlukan waktu 10 menit. Mengapa waktu yang mereka perlukan berbeda? Hal tersebut dikarenakan debit air yang mengalir dari rumah mereka berbeda. Jadi, debit adalah kecepatan aliran zat cair persatuan waktu atau volume zat cair yang mengalir persatuan waktu. Misalkan debit air sungai Bengawan Solo adalah 3000 liter/det (dalam 1 detik volume air yang mengalir 3000 liter). Satuan debit digunakan dalam menghitung kapasitas atau daya tampung air sungai atau bendungan agar dapat dikendalikan.

Rumus debit air adalah:

Debit (Q) = Volume : waktu

Satuan dari debit adalah liter/waktu

Namun untuk dapat menentukan debit air maka harus mengetahui satuan volum dan satuan waktu karena saling berkaitan erat.

Contoh 4:

Sebuah bak mandi diisi air mulai pukul 07.20 sampai dengan pukul 07.50 dengan debit air 10 liter/menit. Berapa liter volume air dalam bak mandi tersebut?

Penyelesaian:

Diketahui: debit (Q) = 10 liter/menit
t = 07.20 – 07. 50 = 30 menit

ditanyakan: Volume air (V) = … ?

Q = Volume (v) : waktu (t)

Volume = debit (Q) x waktu (t)
= (10 liter/menit) x (30 menit)
= 300 liter

BAB V
STATISTIKA

A. Kompetensi Inti (KI)

Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan yang mendukung mata pelajaran yang diampu.

B. Kompetensi Dasar (KD)

Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi statistika, serta penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.

C. Indikator Pencapaian Kompetensi (IPK)

1. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan statistika.
2. Menerapkan pengetahuan konseptual, prosedural, dan keterkaitan keduanya dalam konteks materi Statistika.

D. Uraian Materi

1. Pengertian Statistik dan Statistika

Statistik dan Statistika sangat diperlukan pada setiap lapangan pekerjaan, baik pemerintahan, pertanian, perdagangan dan terkhusus pada bidang pendidikan karena dari kesemuanya itu tidak terlepas dengan masalah atau persoalan yang dinyatakan dengan angka-angka. Oleh karena itu, menyajikan angka-angka tersebut dalam sebuah daftar atau tabel disebut sebagai statistik, sedangkan untuk menarik suatu kesimpulan informasi yang menjelaskan masalah untuk menarik suatu kesimpulan yang benar tentu melalui beberapa proses, meliputi proses pengumpulan informasi, pengolahan informasi, dan proses penarikan kesimpulan. Hal tersebut memerlukan pengetahuan tersendiri yang disebut statistika.

2. Data statistik

Data adalah sejumlah informasi yang dapat memberikan gambaran tentang suatu keadaan atau masalah, baik yang berupa angka-angka maupun yang berbentuk kategori, seperti baik, buruk, tinggi, rendah dan sebagainya. Pengertian lain tentang data adalah hasil pencatatan peneliti, baik yang berupa fakta maupun angka-angka.

Dalam menarik suatu kesimpulan seorang peneliti memerlukan data yang benar. Apabila data yang salah untuk membuat keputusan, maka keputusan yang dihasilkan menjadi tidak tepat. Agar tidak terjadi kesalahan, maka data yang baik harus memenuhi syarat yaitu, objektif, relevan, sesuai zaman, representatif, dan dapat dipercaya.

a. Distribusi Frekuensi

Distribusi frekuensi adalah suatu susunan data mulai dari data terkecil sampai data terbesar yang membagi banyak data kedalam beberapa kelas. Untuk lebih jelasnya perhatikan data nilai ujian matematika siswa SD berikut:

38	64	43	70	57	52	82	78	79	49
76	81	98	87	88	76	63	88	70	48
66	88	79	59	63	60	83	82	60	67
89	65	70	74	**99**	95	80	59	71	77
75	67	72	90	70	76	93	68	68	86
43	74	73	83	**35**	60	73	74	81	56
38	92	71	76	86	83	93	65	51	85
72	82	67	71	54	67	61	68	60	54

Selanjutnya dilakukan langkah-langkah berikut:

1) Menentukan rentang data yaitu data terbesar dikurangi data terkecil, didapat data terbesar adalah 99 dan data terkecil adalah 35 sehingga rentang data: (r) = 99 – 35 = 64.
2) Menentukan banyaknya kelas misalnya kita gunakan aturan Sturges, dari data tersebut banyaknya data n = 80, maka; banyaknya kelas interval:

   k = 1 + (3,3) Log n = 1 + (3,3) Log 80= 1 + (3,3)x 1,9031 = 7,2802.

   Banyaknya kelas harus bilangan bulat, karena itu kita boleh membuat daftar dengan banyaknya kelas 7 atau 8 buah.
3) Menentukan panjang kelas interval p, jika banyaknya kelas diambil 7.

   $p = \frac{64}{7} = 9{,}14$ dibulatkan ke atas yaitu 10.

   Syarat: p . k ≥ r + 1. Jadi 10 x 7 ≥ 64 + 1 ↔ 70 ≥ 65 benar

   Harga p diambil dengan ketelitian sama dengan ketelitian data.
4) Pilih ujung bawah kelas, misalnya kita pilih 31. Selanjutnya kita siapkan kolom tabulasi dan dengan mengambil banyak kelas 7, panjang kelas 10 dan dimulai ujung bawah kelas pertama sama dengan 31, diperoleh daftar seperti berikut:

Tabel 5.1. Daftar Distribusi Frekuensi

NO	NILAI – UJIAN	TURUS	FREKUENSI
1	31 – 40	𝍷𝍷𝍷	3
2	41 – 50	𝍸	5
3	51 – 60	𝍸 𝍸	10
4	61 – 70	𝍸 𝍸 𝍷	16
5	71 – 80	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	24
6	81 – 90	𝍸 𝍸 𝍷𝍷	17
7	91 – 100	𝍸	5
JUMLAH			80

Ayo Latihan: Buatlah tabel distribusi frekuensi jika kelas pertama mulai dari data terendah yaitu35!

b. Penyajian Data dalam Bentuk Grafik atau Diagram

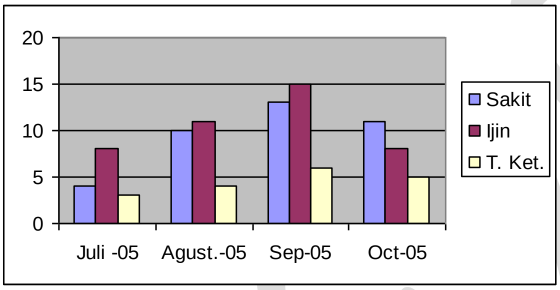
1) Diagram Batang

Contoh 1. Perhatikan data berikut yang disajikan dalam bentuk tabel yang akan dibuat ke dalam bentuk diagram batang. Data tentang keadaan absensi siswa kelas V SD pada semester I tahun pelajaran 2015/2016.

Tabel 5.2. Tabel Absensi Siswa Kelas V SD

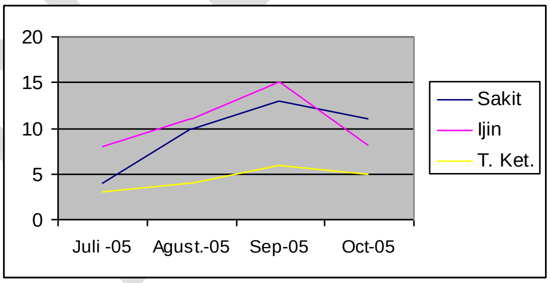
Semester 1	Sakit	Ijin	Tanpa ket.	Jumlah
Juli 2015	4	8	3	15
Agustus 2015	10	11	4	25
September 2015	13	15	6	34
Oktober 2015	11	8	5	24

Diagram batang absensi siswa kelas V SD pada semester I tahun pelajaran 2015/2016 sebagai berikut.



2) Diagram garis

Contoh 2. Perhatikan data seperti pada Tabel 5.2 di atas akan dibuat ke dalam bentuk diagram garis seperti berikut.



3) Diagram Lingkaran

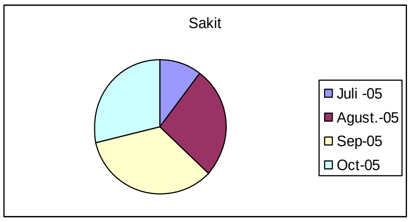
Contoh 3. Perhatikan data pada Tabel 5.2 di atas akan buat ke dalam bentuk diagram lingkaran seperti berikut.

a. Juli = $\frac{4}{38} \times 100\% = 10{,}53\%$

b. Agustus = $\frac{10}{38} \times 100\% = 26{,}31\%$

c. September = $\frac{13}{38} \times 100\% = 34{,}21\%$

d. Oktober = $\frac{11}{38} \times 100\% = 28{,}95\%$



Pembahasan tersebut khusus untuk yang sakit pada bulan Juli sampai dengan Oktober. Bagian "ijin" dan "tanpa keterangan" kerjakan sebagai latihan!

3. Ukuran Pemusatan Data

a. Rata-Rata Data Tunggal

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{\sum \mathrm{X}}{\mathrm{n}}$$

Contoh 4. Perhatikan hasil ujian matematika dari 10 siswa SD adalah 89, 90, 87, 54, 53, 80, 76, 71, 75 dan 55 maka rata-ratanya adalah:

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{89+90+87+54+53+80+76+71+75+55}{10} \leftrightarrow \overline{\mathrm{X}} = \frac{730}{10} = 73$$

Untuk data yang telah disusun dalam daftar distribusi frekuensi rata-rata dihitung dengan:

$$\overline{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \quad ; \quad \sum f_i = n$$

Contoh 5. Nilai Matematika dari SDN 05 Pagi ada 5 siswa mendapat nilai 4; 8 siswa nilainya 5; 15 siswa nilainya 6; 20 siswa nilainya 7; 10 siswa nilainya 8; dan 2 siswa nilainya 9, maka disusun dalam tabel berikut:

Tabel 5.3 Daftar Distribusi Frekuensi Data Tunggal

No	**Nilai X**	f_i	$f_i x_i$
1	4	5	20
2	5	8	40
3	6	15	90
4	7	20	140
5	8	10	80
6	9	2	18
	Jumlah	$\sum f_i$ = 60	$\sum f_i x_i$ = 388

Jadi : $\overline{\mathrm{X}} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{388}{60} = 6{,}3$

b. Rata-Rata Data Kelompok

Contoh 6. Jika data berbentuk data berkelompok dan tersusun dalam daftar distribusi frekuensi dari data nilai ujian Matematika dari 80 siswa yang ditampilkan sebagai berikut:

Tabel 5.4 Daftar Distribusi Frekuensi Data Kelompok

Nilai Ujian	f_i	x_i	$f_i x_i$
31 – 40	3	35,5	106,5
41 – 50	5	45,5	227,5
51 – 60	10	55,5	555
61 – 70	16	65,5	1048
71 – 80	24	75,5	1812
81 – 90	17	85,5	1453,5
91 – 100	5	95,5	477,5
Jumlah	$\sum f_i = 80$		$\sum f_i x_i$ = 5680

maka : $\overline{X} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{5680}{80} = 71$

Cara lain untuk mencari rata-rata adalah dengan cara coding atau cara singkat:

$$\overline{X} = \overline{X}s + p.\frac{\sum f_i c_i}{\sum f_i}$$

Keterangan:
X_s = rata-rata sementara
p = panjang kelas

Tabel 5.5 Daftar Distribusi Frekuensi Tanda kelas, Coding dan Produk fc

No	Nilai – Ujian	f_i	x_i	c_i	$f_i c_i$
1	31 – 40	3	35,5	-3	-9
2	41 – 50	5	45,5	-2	-10
3	51 – 60	10	55,5	-1	-10
4	61 – 70	16	**65,5**	0	0
5	71 – 80	24	75,5	1	24
6	81 – 90	17	85,5	2	34
7	91 – 100	5	95,5	3	15
	Jumlah	$\sum f_i = 80$			$\sum f_i c_i$ = 44

$\overline{x}$ = 65,5 + 10 $\left(\dfrac{44}{80}\right)$ = 65,5 + 5,5 = 71

c. Modus Data Tunggal

Modus adalah nilai data yang paling sering muncul atau nilai data yang frekuensinya paling besar.

Contoh 7. Perhatikan nilai ujian Matematika di suatu SD yang telah diurutkan adalah:

4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9.

Frekuensi terbanyak terjadi pada data bernilai 8, maka Modus M_o= 8.

d. Modus Data Kelompok

Mo = b + p $\frac{b1}{b1+b2}$ dimana:

Keterangan:

b = batas bawah kelas modus, ialah kelas interval dengan frekuensi terbanyak

p = panjang kelas modus

b1 = frekuensi kelas modus dikurangi frekuensi kelas interval terdekat sebelumnya

b2 = frekuensi kelas modus dikurangi frekuensi kelas interval terdekat berikutnya

Contoh 8. Perhatikan data hasil ujian matematika SD dari 80 siswa, tentukan modus dari data yang disusun pada tabel berikut:

No	**Nilai Ujian**	f_i
1	31 – 40	3
2	41 – 50	5
3	51 – 60	10
4	61 – 70	16
5	71 – 80	24
6	81 – 90	17
7	91 – 100	5
	Jumlah	$\sum f_i = 80$

Kelas modus = kelas kelima, batas bawah kelas modus: b = 70,5

p = 10, b_1 = 24 -16 = 8, b_2 = 24 – 17 = 7

Mo = 70,5 + 10 $\left(\frac{8}{8+7}\right)$ = 70,5 + 5,33 = 75,8

e. Median (Me)

Median adalah nilai tengah dari kumpulan data yang telah diurutkan dari data yang terkecil sampai data terbesar atau sebaliknya.

Contoh 9. Perhatikan data hasil percobaan pelemparan dadu sebanyak 13 kali mata dadu yang muncul setelah diurutkan adalah 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6; data paling tengah bernilai 4, jadi Me = 4

Jika data banyaknya genap, maka Me, setelah data disusun menurut nilainya sama dengan rata-rata dari dua data tengah.

Contoh 10. Perhatikan data yang sudah diurutkan: 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6.

Me = ½ (4+5) = 4,5

f. Median data Kelompok

$$\text{Me} = b + p\left(\frac{1/2\,(n) - F}{f}\right)$$

Keterangan:

b = batas bawah kelas median, ialah kelas dimana median akan terletak

P = panjang kelas median, n = ukuran sampel atau banyaknya data

F = jumlah semua frekuensi sebelum kelas median

f = frekuensi kelas median

Contoh 11. Perhatikan nilai hasil ujian matematika untuk 80 siswa SD, maka tentukan median pada data telah disusun tabel berikut:

No	Nilai Ujian	f_i
1	31 – 40	3
2	41 – 50	5
3	51 – 60	10
4	61 – 70	16
5	71 – 80	24
6	81 – 90	17
7	91 – 100	5
	Jumlah	$\sum f_i = 80$

Setengah dari seluruh data : ½ (n) = ½ (80) = 40, Median akan terletak pada kelas interval kelima, karena sampai kelas interval keempat jumlah frekuensi baru 34, berarti data ke-40 termasuk di dalam kelas interal kelima, sehingga:

b = 70,5, p = 10, n = 80, F = 3 + 5 + 10 + 16 = 34, f = 24

$$\text{Me} = 70{,}5 + 10\left(\frac{40-34}{24}\right) = 73$$

DAFTAR PUSTAKA

Arita Marini. 2010. *Matematika Dasar.* Jakarta: Badan Penelitian dan Pengembangan, Kemendiknas.

Copeland, R.W. 1979. *How Children learn Mathematics*. New York: Macmilan Publishing Co. Inc.

Hairuddin. 2016. *Strategi Pembinaan Olimpiade Matematika SD/MI*. Makassar: CV Berkah Utami.

Hall, Arthur H. 1983. *An Introduction to Statistics.* Hongkong: The McMillan Press Ltd.

Kennedy, L.M and Tipps, S. 1994. *Guiding Children's Learning of Mathematics*. California: Wadsworth Publishing Company.

Latri, dkk. 2016. *Pendidikan Matematika II (Edisi Revisi*). Makassar: UNM Press.

Raharjo, Marsudi. 2012. *Modul Bilangan Asli, Cacah, dan Bulat*. Yogyakarta: DPN.

Reys. R.E., et.al. 1998. *Helping Children Learn Mathematics.* Needham Heights: Allyn & Bacon.

Riedesel, C.A., Schwartz J.E., Clements, D.H. 1996. *Teaching Elementary School Mathematics*. Needham Heights: Allyn & Bacon.

Sajidan, dkk. 2013. *Modul PLPG (Pendidikan Latihan Profesi Guru): Guru Kelas SD.* Jakarta: Pusat Pengembangan Profesi Pendidik. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan RI.

Soegyarto Mangkuatmodjo. 1997. *Pengantar Statistik.* Jakarta: PT Rineka Cipta.

Sri Wulandari D. dan Marfuah. 2010. *Bahan Ajar Bagi KKG Daerah Terpencil: Materi Matematika Kelas VI.* Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

Th. Widyantini dan Pujiati. 2004. *Statistika.* Bahan ajar Diklat Instruktur/Pengembang Matematika SD Jenjang Lanjut. Yogyakarta: PPPG Matematika.

Tim Dosen. 2012. *Pembelajaran Pengukuran* di SD. Yogyakarta: P4TK Yogyakarta.

Tim Dosen Prodi PGSD. 2016. *Pengantar Pendidikan Matematika*. Makassar: UNM Press.

Tiro, Muhammad Arif, dkk. 2008. *Pengenalan Teori Bilangan*. Makassar: Andira Publisher.

Usaid Priorotas. 2015. *Pembelajaran Matematika SD di LPTK.*

Wirasto. 1993. *Matematika Untuk Orang Tua Murid Dan Guru (Jilid I).* Jakarta : PT. Indira.