Poglavlje 1

Komutatori operatora i relacije neodređenosti

1.1 Komutatori operatora

Zadatak 1.1 *Dokažite da kod algebarskog računa s operatorima vrijedi zakon distribucije, gdje je komutator s operatorima zadan s*

$$\Big[\sum_i \hat{A}_i, \sum_k \hat{B}_k\Big] = \sum_{i,k} [\hat{A}_i, \hat{B}_k]\,.$$

Zadatak 1.2 *Zadani su operatori $\hat{A}$, $\hat{B}$ i $\hat{C}$. Izrazite komutator umnoška $[\hat{A}\cdot\hat{B}, \hat{C}]$ preko komutatora $[\hat{A}, \hat{C}]$ i $[\hat{B}, \hat{C}]$.*

DZ 1.1 *Dokažite da vrijedi*

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}\hat{A}] + [\hat{C}, \hat{A}\hat{B}] = 0\,.$$

DZ 1.2 *Dokažite da vrijedi*

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\hat{D}] + [\hat{B}, \hat{C}\hat{D}\hat{A}] + [\hat{C}, \hat{D}\hat{A}\hat{B}] + [\hat{D}, \hat{A}\hat{B}\hat{C}] = 0\,.$$

DZ 1.3 *Dokažite da vrijedi:*

- ♡ $[\hat{A}, \hat{B}] = 0 \Longleftrightarrow [\hat{B}^{-1}, \hat{A}^{-1}] = 0 \quad ,$
- ♡ $[\hat{B}^{-1}, \hat{C}] = 0 \Longleftrightarrow [\hat{B}, \hat{C}] = 0 \quad .$

Zadatak 1.3 *Pretpostavivši λ malenom veličinom, nađite razvoj operatora $\big(\hat{A} - \lambda\hat{B}\big)^{-1}$ po potencijama od λ.*

Zadatak 1.4 *Izračunajte komutatore komponenti operatora momenta količine gibanja jedne čestice s operatorom količine gibanja, te s operatorom položaja.*

Zadatak 1.5 *Izračunajte komutator $[H, M_z]$, ako je $H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(k_x x^2 + k_y y^2)$.*

Zadatak 1.6 *Dokažite da svaki operator komutira sa svojim kvadratom, tj.*

$$\left[\hat{A}, \hat{A}^2\right] = 0\,, \quad \textit{(DZ)}$$

Općenito, svaki operator komutira s bilo kojom funkcijom tog operatora, tj.

$$\left[\hat{A}, f(\hat{A})\right] = 0\,, \quad \forall f(\hat{A})\,.$$

Zadatak 1.7 *Ako operatori $\hat{A}$ i $\hat{B}$ komutiraju, $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 0$, tada $\hat{A}$ i $\hat{B}$ imaju skup netrivijalnih zajedničkih svojstvenih funkcija.*

1.2 Relacije neodređenosti

Za vezu između operatora komutacije i relacija neodređenosti pročitati:

- http://plato.stanford.edu/entries/qt-uncertainty/
- `http://en.wikipedia.org/wiki/Uncertainty_principle (and references therein)`
- I. Supek: "Teorijska fizika i struktura materije II. dio", pogl. I

Zadatak 1.8 *Pretpostavimo da brzinu neke čestice možemo mjeriti uz točnost od 0.1%. Odredite kolika je neodređenost položaja čestice, ako je riječ o:*

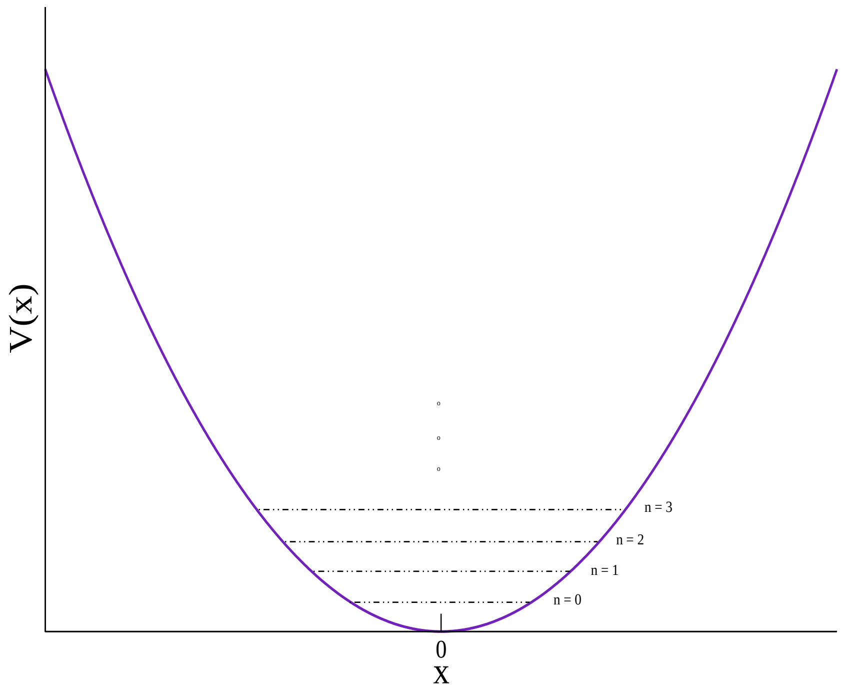
- ♣ *kuglici mase $5\,g$ brzine $2\,m/s$,*
- ♣ *elektronu brzine $3 \cdot 10^6\,m/s$,*
- ♣ *elektronu brzine $1.8 \cdot 10^8\,m/s$.*

Zadatak 1.9 *Čestica mase m ograničena je unutar jednodimenzionalne razmaka duljine a. Pomoću načela neodređenosti izračunajte najnižu energiju koju takva čestica može imati.*

Zadatak 1.10 *Primjenite relacije neodređenosti na određivanje veličine atoma vodika u osnovnom stanju.*

Zadatak 1.11 *Općenito se uzima da se elektron iz pobuđenog stanja vraća u osnovno u intervalu od $10^{-8}\,s$. Kolika će biti neodređenost valne duljine, $\Delta\lambda$, emitirane svjetlosti, koja nastaje tijekom procesa, ako se radi o valnoj duljini od $5 \cdot 10^{-7}\,m$?*

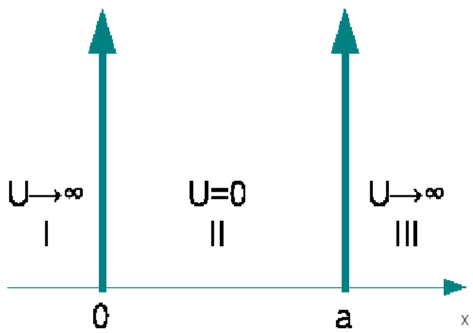
Zadatak 1.12 *Čestica mase m se giba u polju potencijala $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Odredite minimalnu energiju ove čestice.*

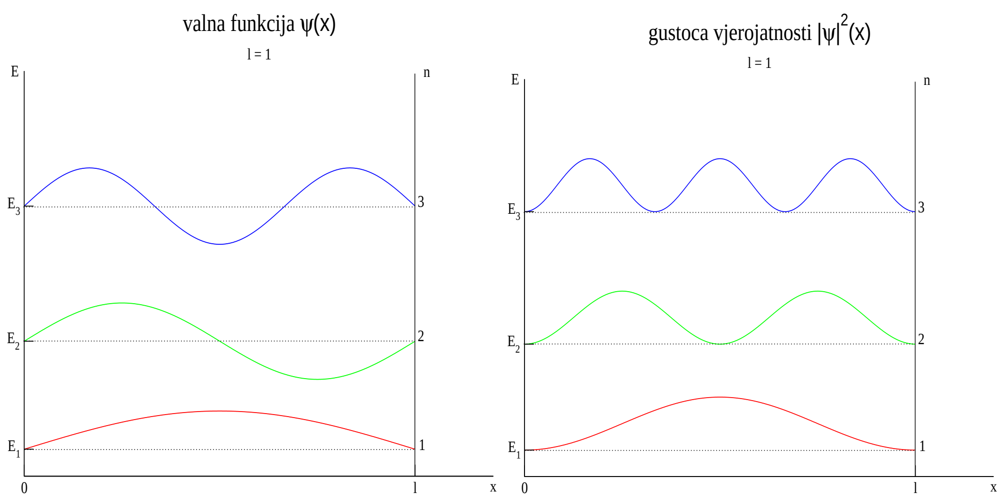

V(x)
n = 3
n = 2
n = 1
n = 0
0
x

Poglavlje 2

Schrödingerova jednadžba

DZ 2.1 *Nađite rješenje Schrödingerove jednadžbe u 1-dimenzionalnoj pravokutnoj potencijalnoj jami s beskonačno visokim zidovima.*



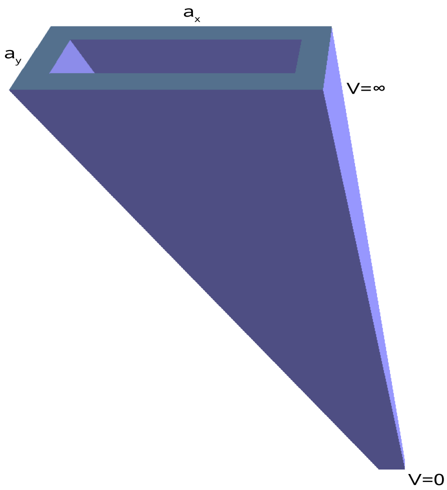


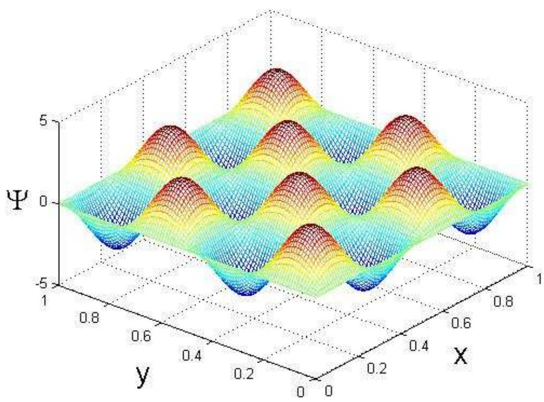
Zadatak 2.1 *Čestica se nalazi u beskonačno dubokoj pravokutnoj potencijalnoj jami. Izračunajte vjerojatnost nalaženja čestice u razmaku između dva uzastopna minimuma gustoće vjerojatnosti.*

Zadatak 2.2 *Za česticu u beskonačno dubokoj pravokutnoj potencijalnoj jami izračunajte:*

- ♠ $\overline{x}$, *srednju vrijednost x-komponente operatora položaja,*
- ♠ $\overline{p_x}$, *srednju vrijednost x-komponente operatora impulsa,*
- ♠ $\Delta\overline{x}$, *srednju vrijednost kvadratne fluktuacije x-komponente operatora položaja,*
- ♠ $\Delta\overline{p_x}$, *srednju vrijednost kvadratne fluktuacije x-komponente operatora impulsa.*

Zadatak 2.3 *Nađite rješenje Schrödingerove jednadžbe u 2-dimenzionalnoj pravokutnoj potencijalnoj jami s beskonačno visokim zidovima.*



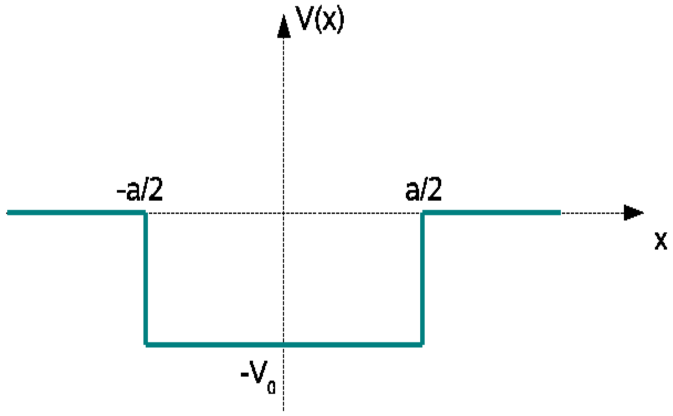


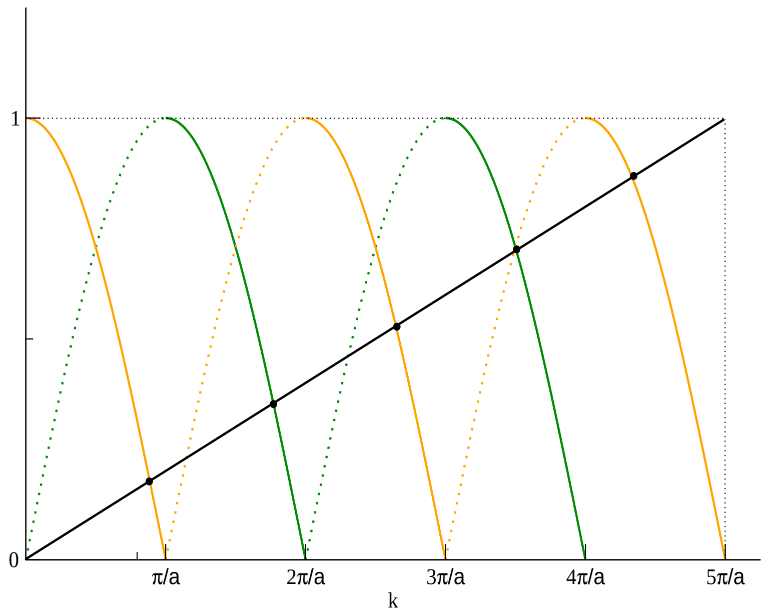
DZ 2.2 *Nađite rješenje Schrödingerove jednadžbe u 3-dimenzionalnoj pravokutnoj potencijalnoj jami s beskonačno visokim zidovima.*

Zadatak 2.4 *Nađite rješenje Schrödingerove jednadžbe u 1-dimenzionalnoj pravokutnoj potencijalnoj jami s konačno visokim zidovima, tj. za potencijal*

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , x < -\frac{a}{2} \\ -V_0 & , -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ 0 & , \frac{a}{2} < x \end{cases} ,$$

gdje je energija čestice $-V_0 < E < 0$.

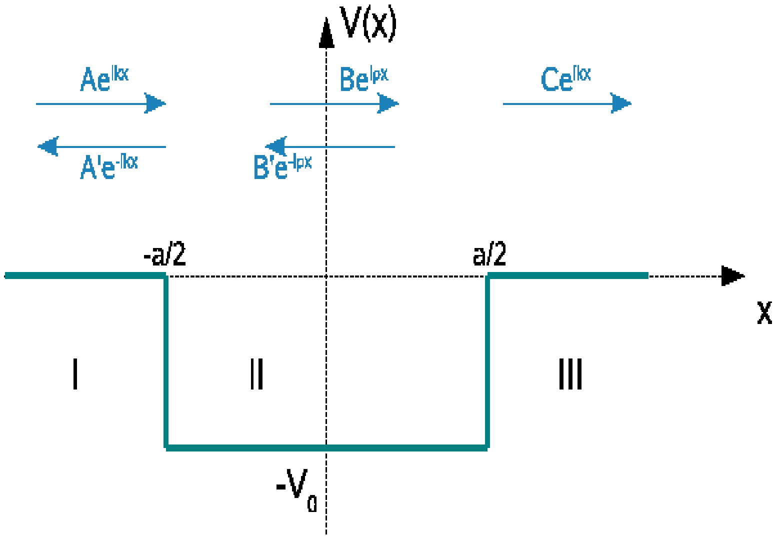


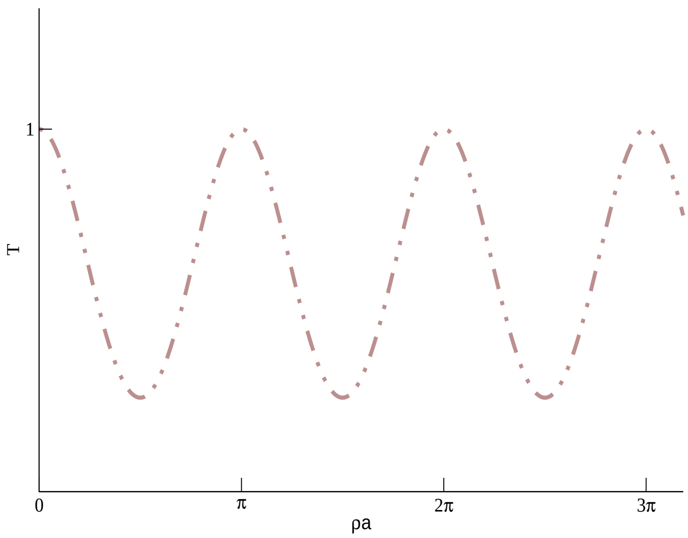


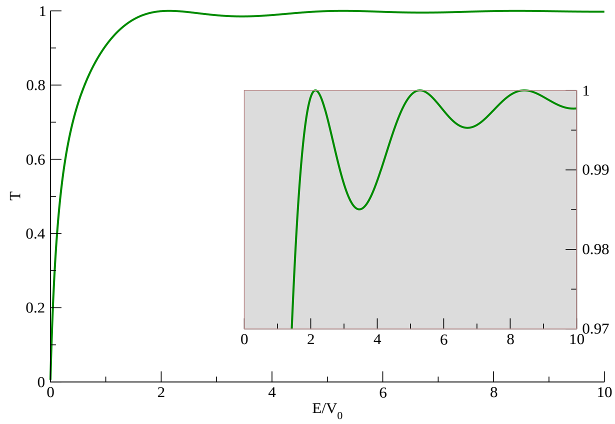
Zadatak 2.5 *Nađite rješenje Schrödingerove jednadžbe u 1-dimenzionalnoj pravokutnoj potencijalnoj jami s konačno visokim zidovima, tj. za potencijal*

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , x < -\frac{a}{2} \\ -V_0 & , -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ 0 & , \frac{a}{2} < x \end{cases} ,$$

gdje je energija čestice $E > 0$.

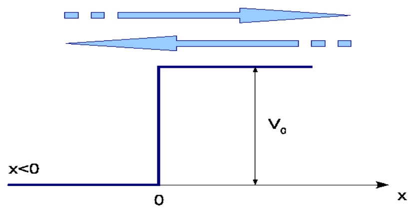


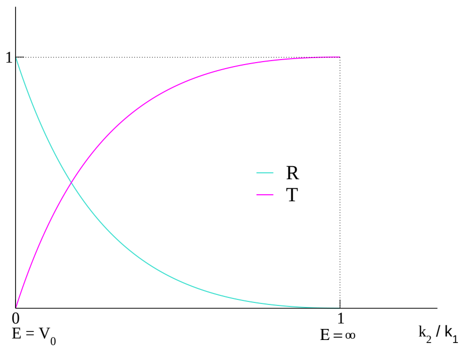




Zadatak 2.6 *Promotrimo potencijalnu jamu na slici za slučaj $E > V_0$.*

a) Pretpostavimo da čestica upada slijeva. Čestica, odnosno, valni paket će se djelomično odbijati na zidu jame, a djelomično će proći preko njega. Nađite oblik vala koji se širi u desno, te odredite izraze za koeficijente refleksije, R i transmisije, $T = 1 - R$.
b) Nađite oblik vala koji se širi u lijevo, te odredite koeficijente refleksije, R' i transmisije, T'.





Zadatak 2.7 *Riješite prethodni zadatak za $E < V_0$.*

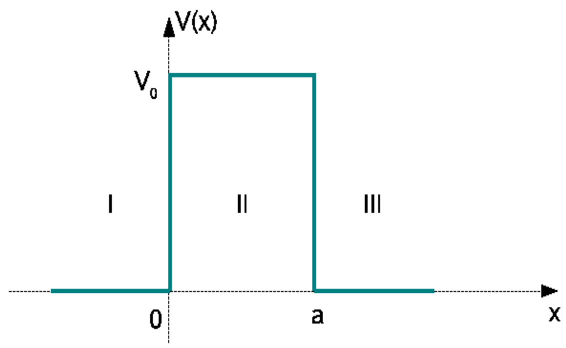
Zadatak 2.8 *Promotrite potencijalnu barijeru opisanu s*

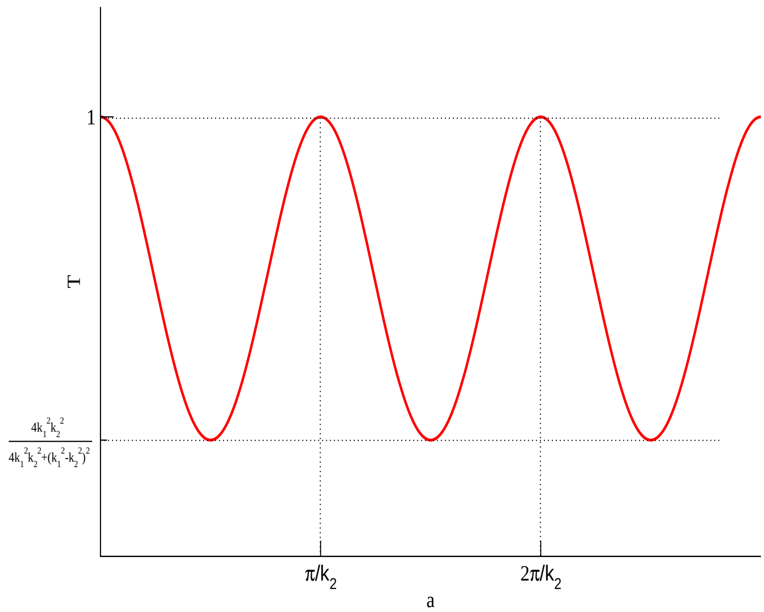
$$V(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ V_0 & , 0 < x < a \\ 0 & , a < x \end{cases} ,$$

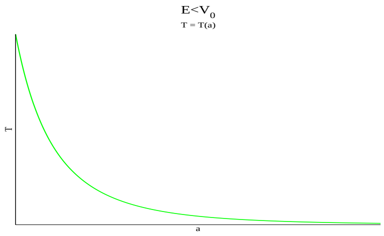
gdje je energija čestice

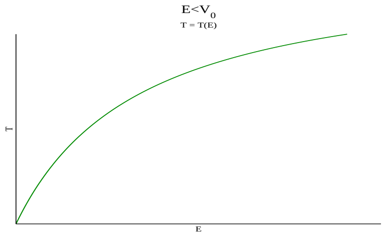
- *veća od potencijala barijere,*
- *manja od potencijala barijere.*

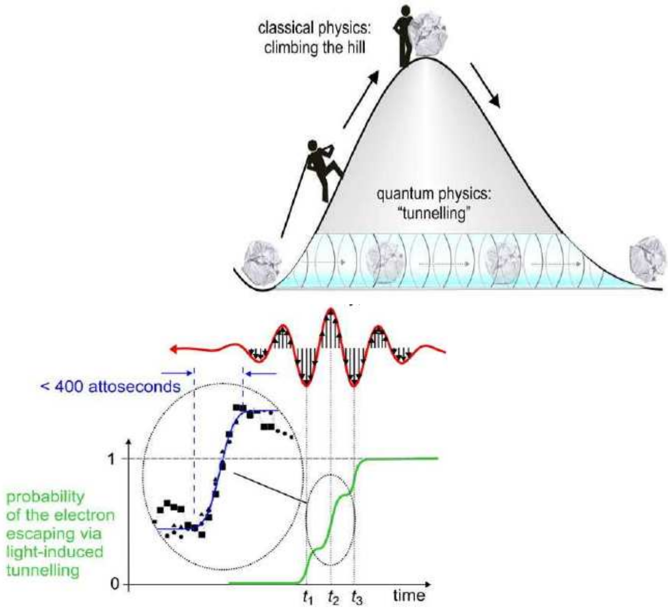
Postavite diferencijalne jednadžbe koje opisuju ponašanje valne funkcije, te ih riješite tako da dobijete koeficijente refleksije i transmisije. Komentirajte rezultat za koeficijent transmisije.

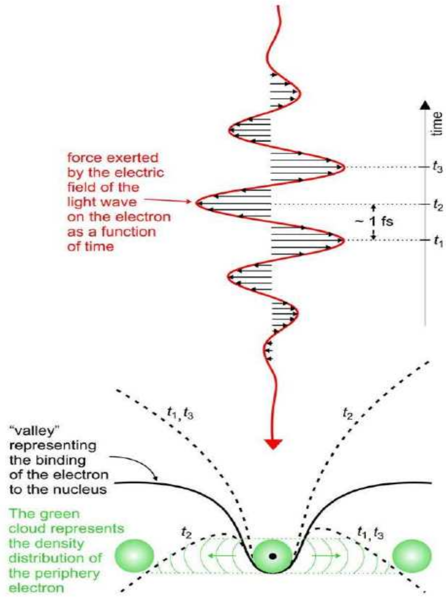












DZ 2.3 *Valna funkcija oblika* $\psi(x) = A_n \sin\left(\frac{2n\pi}{L} \cdot x\right)$ *je definirana isključivo unutar područja* $0 \leq x \leq L$. *Odredite amplitudu* A_n *pomoću uvjeta normiranja.*

DZ 2.4 *U 1-dimenzionalnoj potencijalnoj jami beskonačnih zidova i konfiguracije prema slici nalazi se čestica mase* m.

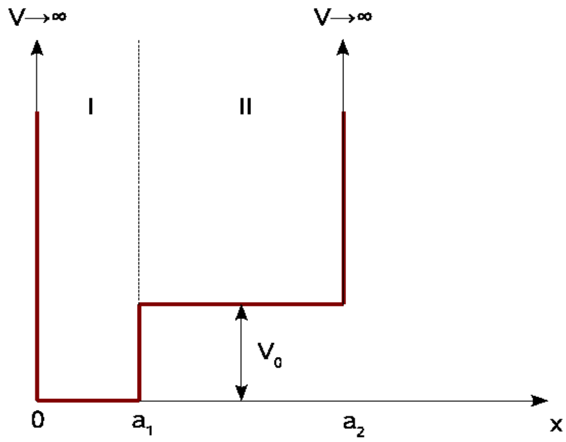
£ *Nađite jednadžbu koja određuje moguće nivoe energije čestice za slučaj kada je* $E > V_0$, *te kada je* $E < V_0$.

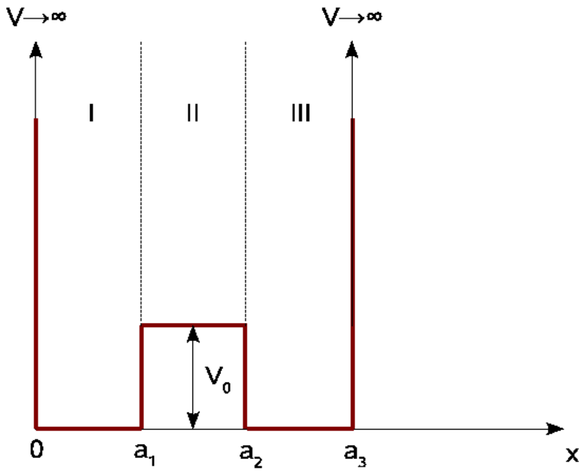
£ *Odredite moguće nivoe energije čestice uz uvjet* $E \gg V_0$.

DZ 2.5 *U 1-dimenzionalnoj potencijalnoj jami beskonačnih zidova i konfiguracije prema slici nalazi se čestica mase* m.

✠ *Nađite jednadžbu koja određuje moguće nivoe energije čestice za slučaj kada je* $E > V_0$, *te kada je* $E < V_0$.

✠ *Odredite moguće nivoe energije čestice uz uvjet* $E \gg V_0$.





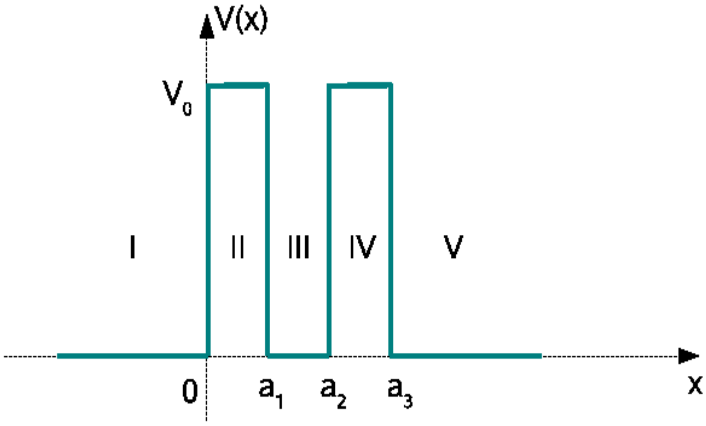
DZ 2.6 *Na 1-dimenzionalnoj potencijalnoj barijeri, konfiguracije prema slici, nalazi se čestica mase m.*

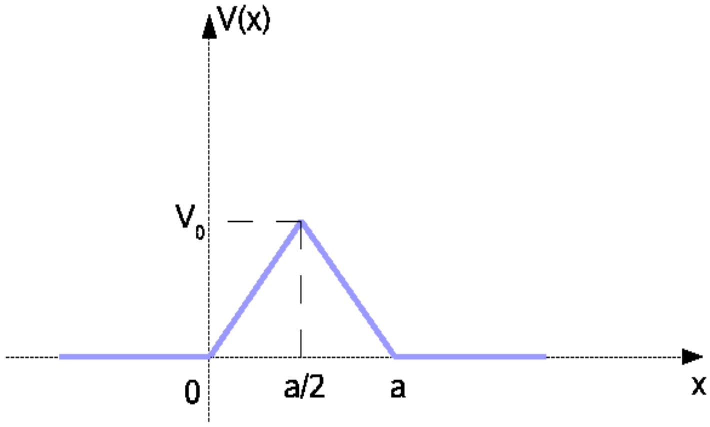
- ✠ *Nađite jednadžbu koja određuje moguće nivoe energije čestice za slučaj kada je $E > V_0$, te kada je $E < V_0$.*
- ✠ *Odredite moguće nivoe energije čestice uz uvjet $E \gg V_0$.*

DZ 2.7 (ULTIMATIVNI ZADATAK) *Na 1-dimenzionalnoj potencijalnoj barijeri, konfiguracije prema slici, i potencijala oblika*

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x & , 0 < x < \frac{a}{2} \\ V_0 - x & , \frac{a}{2} < x < a \\ 0 & , a < x \end{cases} ,$$

nalazi se čestica mase m. Nađite jednadžbu koja određuje moguće nivoe energije čestice za slučaj kada je $E > V_0$, te kada je $E < V_0$.





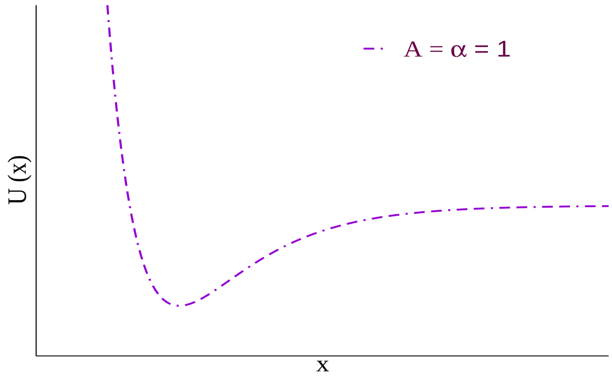
Zadatak 2.9 *Izračunajte matrične elemente X_{nm} za operator položaja i P_{nm} za operator impulsa, za česticu koja se giba u pravokutnoj potencijalnoj jami širine a.*

Zadatak 2.10 *Odredite nivoe energije za česticu koja se giba u polju s potencijalom*

$$U(x) = A\Big(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\Big).$$

DZ 2.8 *Promotrimo česticu opisanu valnom funkcijom $\psi(\vec{r}, t)$. Izračunajte $\dfrac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t}$, gdje je $\rho(\vec{r}, t)$ gustoća vjerojatnosti, te pokažite da vrijedi jednadžba kontinuiteta $\dfrac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) = 0$, gdje je $\vec{J}(\vec{r}, t)$ struja vjerojatnosti.*

Zadatak 2.11 *Neka su ϕ_1 i ϕ_2 normalizirane svojstvene funkcije, koje odgovaraju istoj svojstvenoj vrijednosti. Ako je $\displaystyle\int \phi_1^* \phi_2 d\tau = d$, gdje je $d \in \mathbf{R}$, nađite normalizirane linearne kombinacije od ϕ_1 i ϕ_2, koje su ortogonalne na*

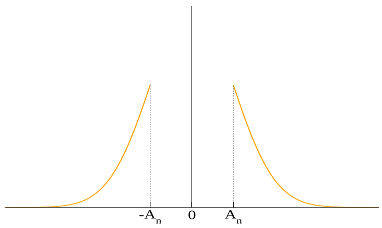


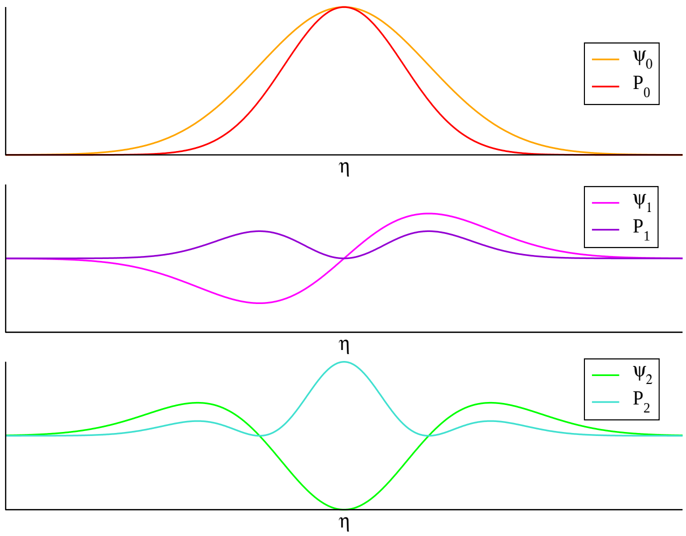
- ♢ ϕ_1,
- ♢ $\phi_1 + \phi_2$.

Poglavlje 3

Kvantni harmonički oscilator

Zadatak 3.1 *Čestica s energijom* $E = \dfrac{\hbar\omega}{2}$ *se giba u potencijalu harmoničkog oscilatora. Izračunajte vjerojatnost da ćemo česticu naći u klasično zabranjenom području. Usporedite taj rezultat s vjerojatnostima nalaženja čestice u višim energijskim stanjima.*





Zadatak 3.2 *Koristeći relaciju neodređenosti $\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$, procijenite energiju osnovnog stanja harmoničkog oscilatora.*

Zadatak 3.3 *Nađite svojstvene funkcije i svojstvene vrijednosti 2-dimenzionalnog izotropnog harmonijskog oscilatora, te degeneraciju energijskih nivoa.*

DZ 3.1 *Nađite svojstvene funkcije i svojstvene vrijednosti 3-dimenzionalnog izotropnog harmonijskog oscilatora, te degeneraciju energijskih nivoa.*

Zadatak 3.4 *Promotrite česticu mase m u 1-dimenzionalnom harmonijskom potencijalu. U trenutku $t = 0$ normalizirana valna funkcija je*

$$\psi(x) = \left(\frac{1}{\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \, ,$$

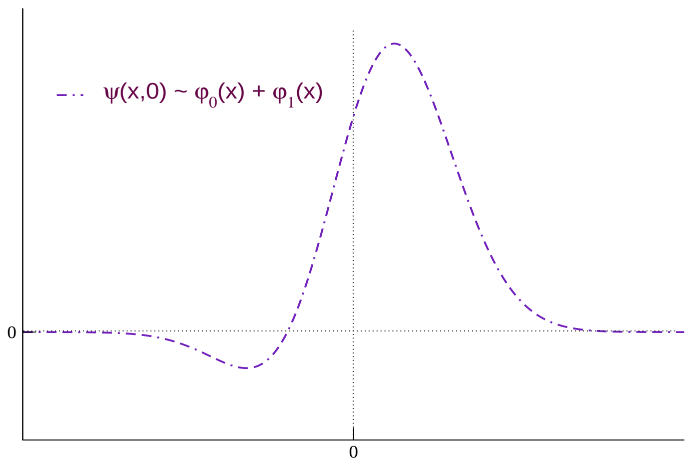
gdje je $\sigma^2 \neq \frac{\hbar}{m\omega}$ konstanta. Nađite vjerojatnost da je impuls čestice u trenutku $t > 0$ pozitivan.

Zadatak 3.5 *Izračunajte*

- *$\psi(x, t)$ iz zadatka (3.4),*
- *očekivanje od x za $t > 0$, ako je u $t = 0$ čestica u stanju*

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_0(x) + \varphi_1(x)] \, ,$$

gdje je $\varphi_n(x)$ svojstvena funkcija 1-dimenzionalnog harmonijskog oscilatora.



Zadatak 3.6 *Izračunajte matrične elemente operatora položaja $\hat{x}$ i impulsa $\hat{p}$ za 1-dimenzionalni harmonijski oscilator.*

Zadatak 3.7 *Promotrimo 1-dimenzionalni harmonijski oscilator s Hamiltonijanom*

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \,.$$

Definirajmo nove operatore:

$$\begin{aligned} P &= \frac{p}{\sqrt{m\omega\hbar}} \\ Q &= x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,, \end{aligned}$$

tdj. $H = \frac{\hbar\omega}{2}\big(Q^2 + P^2\big)$.

- *Izračunajte relaciju komutacije* $[P, Q]$.
- *Za operatore* a *i* $a^\dagger$, *definirane s:*

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(Q + iP\big) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}p\,, \\ a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(Q - iP\big) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}p\,, \end{aligned}$$

  izračunajte $a|n\rangle$ *i* $a^\dagger|n\rangle$, *gdje je* $|n\rangle$ *svojstvena funkcija oscilatora u* n*-tom energijskom stanju.*

Napomena:

$A = (\alpha_{ij})$ *kompleksna matrica* $\Longrightarrow A^\dagger = (\overline{\alpha_{ji}})$ *konjugirana matrica*
$T = T^\dagger \Longrightarrow T$ *je Hermitski operator*

DZ 3.2 *Valna funkcija harmonijskog oscilatora u nekom kvantnom stanju zadana je funkcijom:*

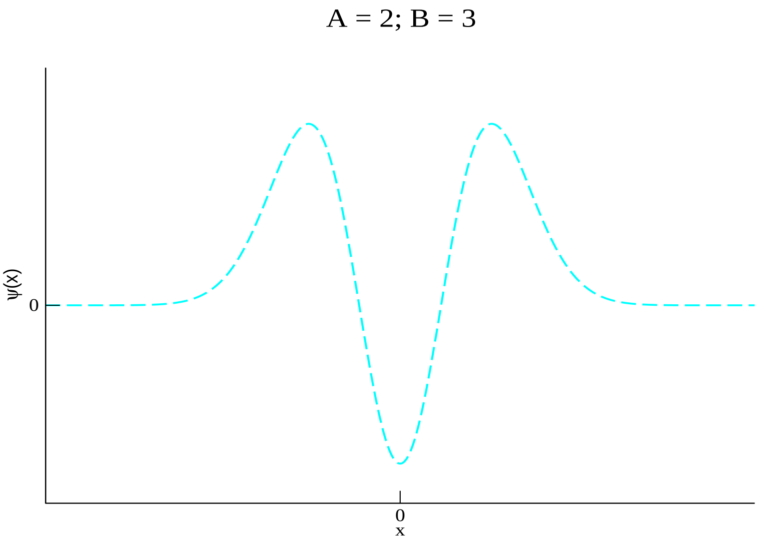
$$\psi(x) = A(Bx^2 - 1)e^{-\frac{B}{4}x^2}\,.$$

Odredite energiju linearnog harmonijskog oscilatora u tom kvantnom stanju.

DZ 3.3 *Linearni harmonijski oscilator u osnovnom stanju prikazan je valnom funkcijom*

$$\psi_0(x) = A_0 e^{\frac{1}{2}\alpha x^2}\,.$$

Odredite konstante A_0 *i* α, *ako je poznata masa* m *i energija* E *oscilatora.*


A = 2; B = 3
ψ(x)
0
0
x

Poglavlje 4

Kutni moment

Zadatak 4.1 *Neka se sistem nalazi u stanju $\psi = \phi_{lm}$, svojstvenom stanju operatora kutnog momenta $\hat{L}^2$ i $\hat{L_z}$. Izračunajte $\langle \hat{L_x} \rangle$ i $\left\langle \hat{L_x}^2 \right\rangle$.*

DZ 4.1 *Dokažite:*

∂ $\langle \hat{L_y} \rangle = 0$,

∂ $\langle \hat{L_y}^2 \rangle = \frac{1}{2}[l(l+1) - m^2]\hbar^2$.

Zadatak 4.2 *Označimo svojstvene funkcije operatora kutnog momenta $\hat{L}^2$ i $\hat{L_z}$, koje imaju svojstvene vrijednosti $l = 1$ i $m = 1, 0, -1$, s ϕ_1, ϕ_0 i ϕ_{-1}. Upotrebom operatora podizanja i spuštanja, $\hat{L_+}$ i $\hat{L_-}$, izračunajte rezultat djelovanja operatora $\hat{L_x}$ na funkcije ϕ_1, ϕ_0 i ϕ_{-1}, te tako nađite svojstvene funkcije i svojstvene vrijednosti operatora $\hat{L_x}$.*

DZ 4.2 *Riješite zadatak (4.2) za operator $\hat{L_y}$.*

Zadatak 4.3 *Za sistem koji pripada kvantnom broju $l = 1$, nađite matrične reprezentacije operatora L_x, L_y, L_z i L^2 u bazi svojstvenih vektora operatora L_z i L^2.*

Zadatak 4.4 *Kolika je vjerojatnost da će mjerenje od L_x dati vrijednost 0 za sistem koji pripada kvantnom broju $l = 1$ i koji je u stanju $\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$?*

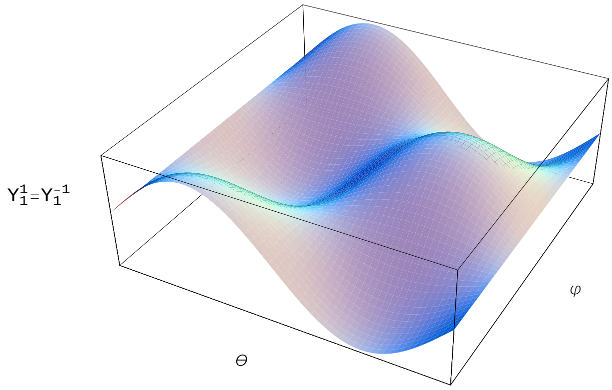
Zadatak 4.5 *Funkcije sfernih harmonika se definiraju s*

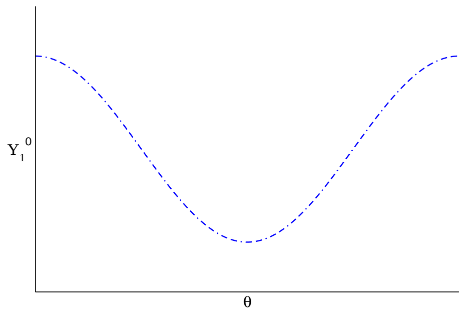
$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = C_l^m P_l^m(\cos\vartheta) e^{im\varphi} \, ,$$

gdje je C_l^m konstanta normalizacije, a $P_l^m(x)$ su pridružene Legendrove funkcije definirane, preko Legendrovih polinoma, s

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{|m|}{2}} \cdot \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} P_l(x) = P_l^{-m}(x) \, .$$

Izračunajte funkcije $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ za $m = 0, \pm 1$.



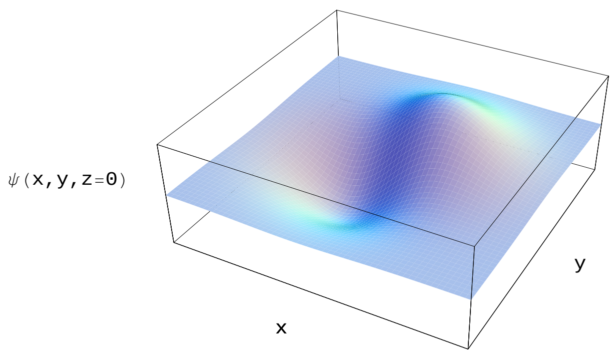


Zadatak 4.6 *Promotrimo česticu s valnom funkcijom*

$$\psi(x,y,z) = N \cdot (x+y+z) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\alpha^2}} ,$$

gdje je N konstanta normalizacije, a α parametar. Mjerimo vrijednosti operatora L^2 i L_z. Nađite vjerojatnosti da mjerenja daju vrijednosti: $L^2 = 2\hbar^2$; $L_z = 0, \pm\hbar$. Upotrijebite rješenja zadatka (4.5):

$$\begin{aligned}
Y_1^1(\vartheta,\varphi) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin(\vartheta)e^{i\varphi} , \\
Y_1^0(\vartheta,\varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos(\vartheta) , \\
Y_1^{-1}(\vartheta,\varphi) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin(\vartheta)e^{-i\varphi} .
\end{aligned}$$

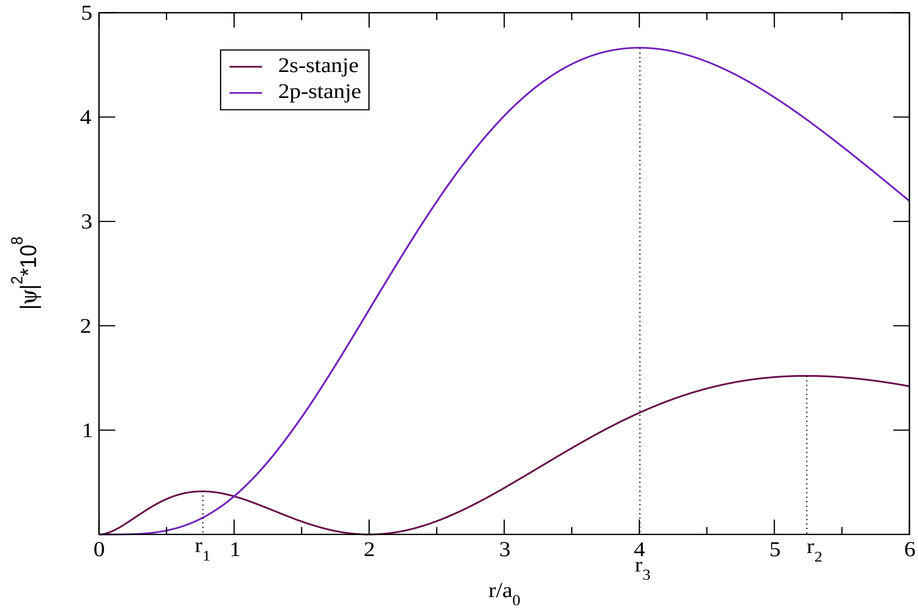

ψ(x,y,z=0)
x
y

Poglavlje 5

Vodik i atomi slični vodiku

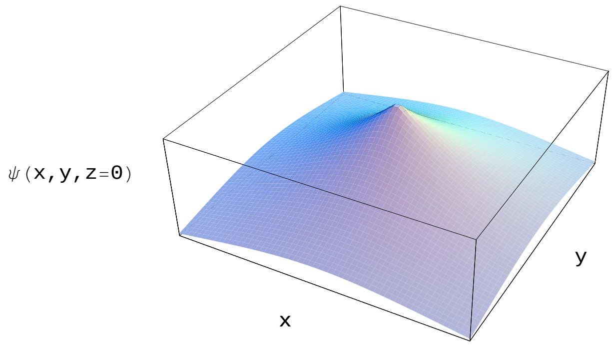
Zadatak 5.1 *Dokažite da su dva Legendreova polinoma ortogonalna.*

Zadatak 5.2 *Atom vodika se nalazi u prvom pobuđenom stanju. Odredite udaljenosti na kojima je vjerojatnost nalaženja elektrona najveća. Poznavajući te udaljenosti, odredite odnose gustoća naboja, kada je $\vartheta = 45°$, a $\varphi = 90°$, za stanja s magnetskim kvantnim brojem $m = 0$.*



DZ 5.1 *Normirajte valnu funkciju atoma vodika u 1s-stanju, ako je ona oblika*

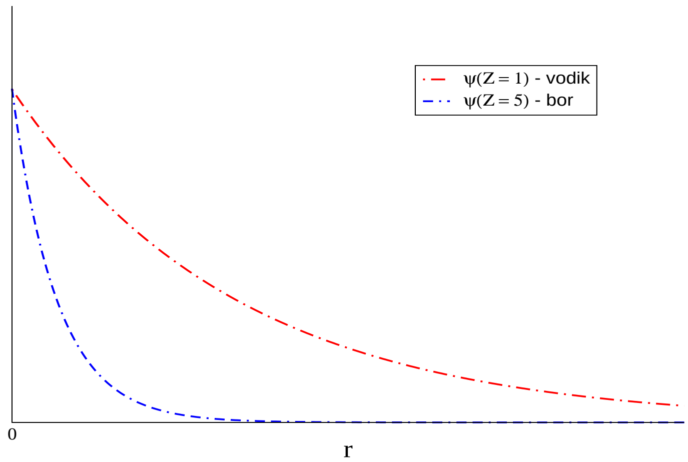
$$\psi_{100}(r) = Ae^{-\frac{r}{a_0}} .$$



DZ 5.2 *Koji je najvjerojatniji polumjer za nalaženje elektrona u osnovnom stanju atoma vodika? Za valnu funkciju uzmite rješenje iz domaće zadaće, zadatak (5.1).*

Zadatak 5.3 *Valna funkcija elektrona u atomu je* $\psi(x) = Ce^{-\frac{r}{a}}$*, gdje je* $a = \dfrac{a_0}{Z}$*, a* $a_0 \approx 0.5\,\AA$ *je Bohrov radijus.*

- $\measuredangle$ *Izračunajte konstantu normalizacije.*
- $\measuredangle$ *Ako je nuklearni broj* $A = 173$ *i atomski broj* $Z = 70$*, kolika je vjerojatnost da će se elektron naći u jezgri? Pretpostavite da je radijus jezgre* $1.2 \cdot A^{1/3}\,fm$.
- $\measuredangle$ *Kolika je vjerojatnost da će se elektron naći u području* $x, y, z > 0$?



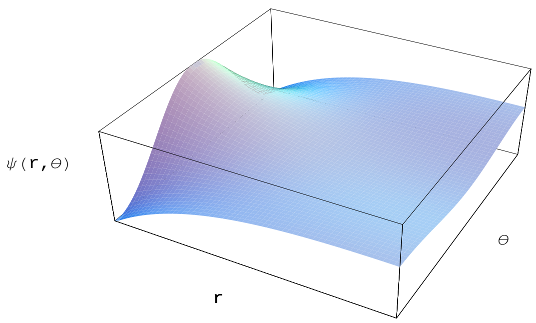
Zadatak 5.4 *Izračunajte normaliziranu distribuciju momenta elektrona u atomu vodika u stanjima 1s, 2s i 2p.*

Zadatak 5.5 *Promotrite valnu funkciju*

$$\psi(r,\vartheta) = \frac{1}{81}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot Z^{3/2}(6 - Zr)Zre^{-\frac{Zr}{3}} \cos\vartheta \,,$$

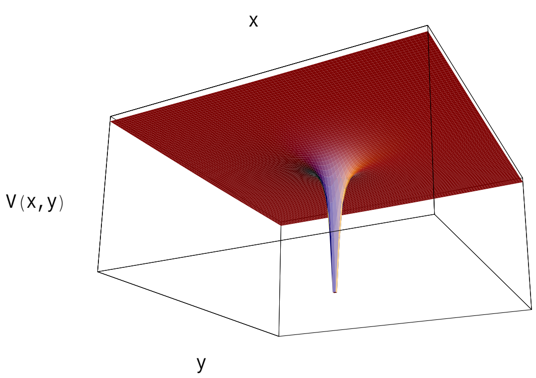
gdje je r u jednicama a_0.

- ℧ *Nađite odgovarajuće vrijednosti kvantnih brojeva n, l i m.*
- ℧ *Iz $\psi(r,\vartheta)$ nađite drugu valnu funkciju s istim vrijednostima n i l, ali s drugim magnetskim kvantnim brojem m+1.*
- ℧ *Izračunajte najvjerojatniju vrijednost za r, za elektron u stanju ψ i za $Z = 1$.*



Zadatak 5.6 *Operator pariteta je definiran sa supstitucijom $\vec{r} \longmapsto -\vec{r}$. Kako on utječe na valnu funkciju elektrona u atomu vodika?*

Zadatak 5.7 *Napišite Schrödingerovu jednadžbu za 2-dimenzionalni atom vodika. Pretpostavite da je potencijal $-\frac{e^2}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Koristeći separaciju varijabli, nađite kutnu i radijalnu jednadžbu. Riješite kutnu jednadžbu.*



Poglavlje 6

Spin

Zadatak 6.1 *Izračunajte komutatore između Paulijevih matrica, tj.* $[\sigma_i, \sigma_j]$; $i, j = x, y, z$.

Zadatak 6.2 *Koristeći svojstvene vektore operatora* S_z *kao vektore baze, izračunajte* $S_i\Big| + \frac{1}{2}\Big\rangle$ *i* $S_i\Big| - \frac{1}{2}\Big\rangle$ $(i = x, y, z)$, *gdje su* $\Big| + \frac{1}{2}\Big\rangle$ *i* $\Big| - \frac{1}{2}\Big\rangle$ *svojstveni vektori sa svojstvenim vrijednostima* $+\frac{\hbar}{2}$ *i* $-\frac{\hbar}{2}$.

Zadatak 6.3 *Neka je z-komponenta spina elektrona* $+\frac{\hbar}{2}$.

- $\sharp$ *Kolika je vjerojatnost da je njegova komponenta duž osi z', koja zatvara kut* ϑ *sa osi z, jednaka* $\pm\frac{\hbar}{2}$*?*
- $\sharp$ *Kolika je srednja vrijednost spina duž osi z'?*

Zadatak 6.4 *Dokažite*

- $\eth$ *da je* $\left[S^2, S_z\right] = 0$, *te*
- $\eth$ *da svojstveni vektori od* S_z *dijagonaliziraju* S^2. *Nađite svojstvene vrijednosti od* S^2.

Zadatak 6.5 *Nađite kako operatori* $S_x + iS_y$, *te* $S_x - iS_y$ *djeluju na vektore* $\Big| + \frac{1}{2}\Big\rangle$ *i* $\Big| - \frac{1}{2}\Big\rangle$.

Zadatak 6.6 *Koristeći operatore* S_+ *i* S_-, *izračunajte metrice operatora* S_x *i* S_y, *te pokažite da je* S^2 *dijagonalna u bazi svojstvenih vektora operatora* S_z.

Zadatak 6.7 *Za česticu sa spinom* $\frac{1}{2}$, *izračunajte očekivanu vrijednost operatora* $iS_xS_yS_z$, *gdje je valna funkcija čestice* $\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\Big| + \frac{1}{2}\Big\rangle + \Big| - \frac{1}{2}\Big\rangle\Big)$,

- $\dashv$ *koristeći operatore* S_+ *i* S_-,
- $\dashv$ *direktno.*

Poglavlje 7

Aproksimativne metode

7.1 Račun smetnje

Zadatak 7.1 *Promotrimo česticu u 1-dimenzionalnom, beskonačno dubokom potencijalu. Čestica je podložna smetnji (perturbaciji) oblika $W = Cx$, gdje je C konstanta.*

- ® *Kolike su svojstvene energije, te kako izgledaju svojstvene funkcije neperturbiranog sustava?*
- ® *Izračunajte popravke prvog reda u energijama.*
- ® *Nađite valne funkcije prvog pobuđenog stanja.*

Zadatak 7.2 *Promotrimo česticu u 1-dimenzionalnom, beskonačno dubokom potencijalu širine a:*

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a \\ \infty, & \textit{inače} \end{cases}$$

Na česticu je narinuta smetnja oblika

$$W(x) = \alpha\omega_0\delta\left(x - \frac{a}{2}\right),$$

gdje je $\alpha \in \mathbb{R}$ dimenzije energije. Izračunajte promjene energije nivoa čestice u prvom redu od ω_0.

Zadatak 7.3 *Promotrite elektron mase m u 3-dimenzionalnoj kutiji (širine a) s energijom $\dfrac{3n^2\hbar^2}{ma^2}$. Slabo električno polje u z-smjeru, jakosti ε, je narinuto sustavu. Smetnja je tada oblika $W = e\varepsilon z$. Izračunajte popravke 1. reda u energiji.*

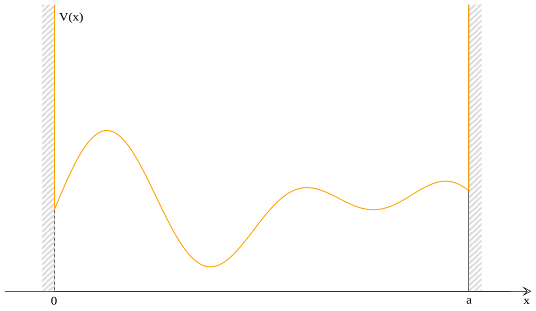
Zadatak 7.4 *Odredite energiju osnovnog i 1. pobuđenog stanja harmoničkog oscilatora, ako su anharmonički članovi $Ax^3 + Bx^4$ zanemarivi.*

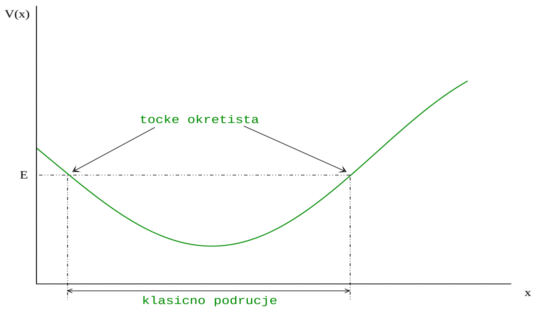
7.2 WKB aproksimacija

Zadatak 7.5 *Pretpostavite da se čestica nalazi u pravokutnom potencijalnom bunaru okomitih zidova s neravnim dnom:*

$$V(x) = \begin{cases} \textit{neka funkcija}, & 0 \leq x \leq a \\ \infty, & \textit{inače} \end{cases}.$$

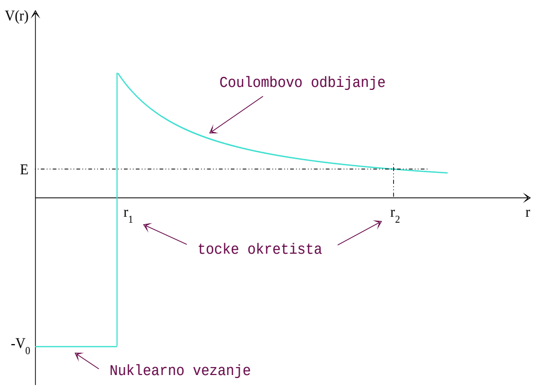
Odredite valnu funkciju, te izračunajte energiju čestice.

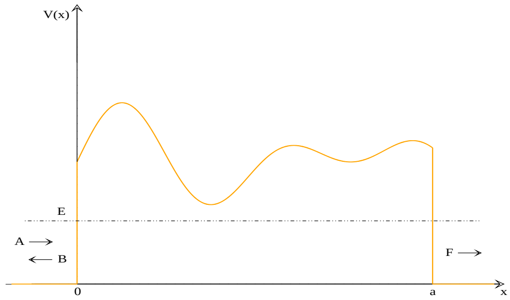


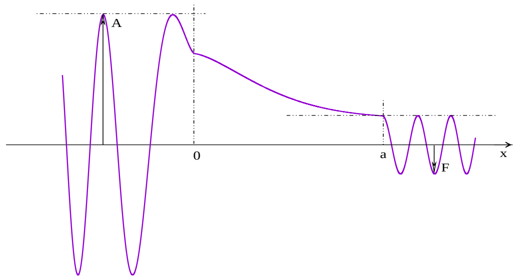


Zadatak 7.6 *1928. godine G. Gamow (te nezavisno od njega, Condon i Gurney) je prvi dao uspješno objašnjenje α-raspada (spontana emisija α-čestice od strane radioaktivne jezgre). Pošto α-čestice iamju pozitivan naboj ($2e$), bit će električki odbijane od strane preostale jezgre (naboja Ze), čim se udalje dovoljno daleko da se oslobode vezanja putem nuklearne sile. No, prvo mora proći potencijalnu barijeru, za koju se znalo (u slučaju atoma urana) da je dvostruko veća od energije emitirajuće α-čestice. Gamow je aproksimirao potencijalnu energiju s konačnom pravoutnom jamom (predstavljala je privlačnu nuklearnu silu), širine r_1 (radijus jezgre), koja se nastavljala na odbojni Coulombov "rep", te je identificirao mehanizam "bijega" s kvantnim tuneliranjem. Ovo je bila prva primjena kvantne mehanike na nauklearnu fiziku.*

Izračunajte vrijeme života roditeljske jezgre.





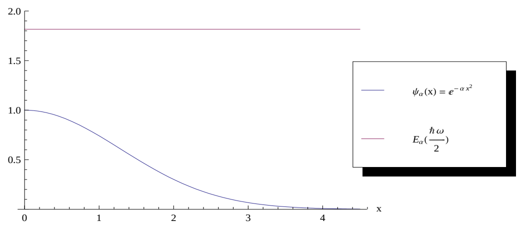


7.3 Varijacijska metoda

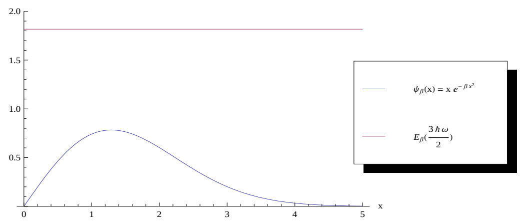
Zadatak 7.7 *Promotrite 1-dimenzionalni harmonijski oscilator*

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \,.$$

- $*$ *Za jednosparametarsku familiju valnih funkcija* $\psi_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2}$, $(\alpha > 0)$, *nađite valnu funkciju koja minimizira* $\langle H \rangle$. *Kolika je vrijedost* $\langle H \rangle_{min}$*?*



∗ *Za drugu jednoparametarsku familiju valnih funkcija* $\psi_\beta(x) = xe^{-\beta x^2}$, $(\beta > 0)$*, nađite valnu funkciju koja minimizira* $\langle H\rangle$ *i izračunajte* $\langle H\rangle_{min}$.

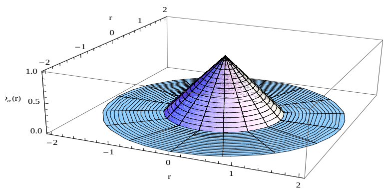


Zadatak 7.8 *Promotrite atom vodika.*

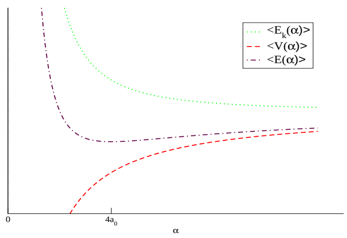
¿ *Koristeći varijacijsku metodu, procijenite energiju osnovnog stanja. Za probnu valnu funkciju izaberite sferno simetrične funkcije,* ϕ_α*, oblika*

$$\phi_\alpha(r) = \begin{cases} C\left(1 - \frac{r}{\alpha}\right), & r \le \alpha \\ 0, & r > \alpha \end{cases} ,$$

gdje je C *konstanta normalizacije, a* α *varijacijski parametar.*



¿ *Nađite ekstremalnu vrijednost od* α*. Usporedite je s Bohrovim radijusom* a_0.



Zadatak 7.9 *Promotrite atom helija.*

✠ *Napišite Schrödingeovu jednadžbu za atom helija. Kako izgleda valna funkcija osnovnog stanja, ako se zanemari međudjelovanje elektrona?*

✠ *Pretpostavite da elektroni čine električno zasjenjenje jedan drugome, te definirajte naboj zasjenjenja,* σ, *kao varijacijski parametar. Upotrebite varijacijsku metodu da izračunate* $\langle H \rangle$ *i naboj zasjenjenja.*