L'Italiano per capire e per studiare: la sottrazione con "prestito" in aritmetica

Maria G. Bartolini Bussi*

> Sono a un congresso internazionale. In una pausa, chiacchiero con Sun Xuhua, una collega di Macao che ha appena presentato una ricerca sui problemi aritmetici con frazioni. Accompagna il suo discorso scrivendo sulla lavagna. Scrive le frazioni in un modo strano, per me innaturale, dal basso in alto:
> denominatore → linea di frazione → numeratore.
> Conosco l'attenzione maniacale dei cinesi per l'ordine dei tratti in un carattere e la fermo: "Perché scrivi così?". "E come dovrei scrivere?" Prendo il pennarello:
> numeratore → linea di frazione →denominatore.
> Si mette ridere, sorpresa:"Come fai a dire quanti pezzi prendere, prima di sapere in quanti pezzi hai tagliato?"

Introduzione

La matematica è l'unica disciplina insegnata nelle scuole di base in tutti i paesi del mondo. C'è un generale consenso sull'aritmetica (numeri, operazioni, problemi) presente in tutti i curricoli, in molti casi già prima della scuola primaria, mentre altre parti della matematica (ad es. la geometria, la probabilità, la statistica) sono presenti con modalità diverse. Il fatto che almeno l'aritmetica costituisca uno zoccolo comune non vuole dire, tuttavia, che sia insegnata nello stesso modo ovunque. Soprattutto nei primi anni di scuola, l'insegnamento deve confrontarsi con problemi culturali e linguistici. Si pensi, ad esempio, a tutti quei paesi nei quali l'insegnamento è svolto in una lingua diversa da quella parlata in famiglia, o ai paesi nei quali la cultura locale fa ostacolo alla matematica "universale", che, in realtà, è espressione di una cultura dominante, occidentale e prevalentemente anglofona. Negli ultimi anni, grazie al contributo di studiosi operanti in diverse culture, si è accresciuta la consapevolezza che l'insegnamento della matematica non può essere dissociato dall'analisi delle condizioni linguistiche in cui esso avviene. È prossima la pubblicazione del volume conclusivo dello studio su *Mathematics Education and Language Diversity*, curato da Maria do Carmo Santos Domite (Brasile) e Mamokgheti Setati (Sud Africa) per conto dell'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction), in cui si presenterà lo stato dell'arte sul tema[1].

---

* Università di Modena e Reggio Emilia.

1 http://www.mathunion.org/icmi/conferences/icmi-studies/ongoing-studies/

L'aneddoto narrato all'inizio mostra che l'incontro diretto con colleghi di altre lingue e culture può aprire spazi di riflessione imprevedibili. Non è facile immaginare che il simbolo (prodotto) che rappresenta una frazione sia scritto, intenzionalmente, seguendo un ordine di tratti diverso (dal basso in alto). Il passo successivo, per capire, è cercare nei libri di scuola cinesi le attività e i testi (discorsi) che introducono le frazioni. Si apre così un terreno d'indagine sorprendente per un occidentale.

Figura 1. L'approccio alle frazioni

Le figure dei libri sono simili a quelle che compaiono nei libri italiani (torte da dividere, fogli da tagliare in parti, ecc.)[2].

Nel testo cinese, all'interno del fumetto dell'angiolino, *un mezzo* è scritto così:

二分之一

(*èr fen zhī yī*, letteralmente: *due - parti tagliate – particella strutturale (genitivo) – uno*, da interpretare *di 2 parti 1*. Quindi, la descrizione a parole segue lo stesso ordine in cui in cinese si scrive ½: *denominatore → linea di frazione → numeratore.*

Le sorprese non sono finite. Qualche pagina dopo c'è un riepilogo della terminologia

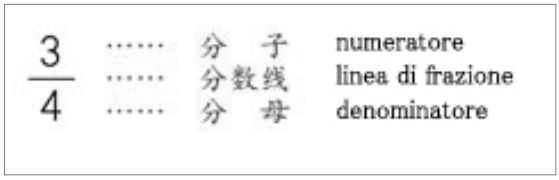

Figura 2: il lessico (quarta elementare)

2 La figura 1 è tratta dal testo di quarta elementare SHUXUE (matematica), edito a Beijing (2005) dalla People Education Press (Traduzione di Enrico Ferraresi). Le figure 2, 4, 5, 6 sono tratte dai testi di prima e seconda elementare della stessa serie.

Si osserva ancora lo stesso carattere (*fen* che significa *tagliare con un coltello*) seguito, per il denominatore da *mǔ* (*mamma*) e, per il numeratore, da *zhǐ* (*bambino, figlio*).

Questi termini sono molto antichi, già documentati nel trattato di Sūnzǐ, il famoso autore *dell'Arte della Guerra* vissuto tra il VI e il V secolo a.C. Non ci sono spiegazioni delle ragioni di questa scelta nei testi di storia della matematica cinese. Anche i colleghi cinesi si stringono nelle spalle e dicono che si è sempre fatto così. Immaginiamo che la mamma sia concepita come intero e il bambino, piccolo, come parte. Anche se non è per nulla una spiegazione etimologica, è abbastanza convincente. E' più difficile spiegare perché, nelle lingue occidentali, i numeri al denominatore sono denotati (almeno a partire da 3) come numeri ordinali (terzo, quarto, quinto, ecc.).

Questa breve incursione nei testi scolastici cinesi, suggerita da un dialogo occasionale, offre vari spunti di riflessione. È come se l'incontro con una cultura e una lingua così lontane dalle nostre ci costringesse a divenire consapevoli di opzioni alternative. Come dice François Jullien (2008, p. V), nel confronto con il pensiero cinese, «non si tratta di filosofia comparata o della messa in parallelo delle diverse concezioni bensì di un dialogo filosofico dove ogni pensiero, nel farsi incontro all'altro, si interroga sul proprio impensato».

Nel seguito esamineremo un altro caso di questo incontro, relativo al lessico dell'aritmetica.

"Riporto" e "prestito" negli algoritmi delle operazioni.

Una pratica diffusa nella scuola italiana

In seconda elementare gli allievi incontrano per la prima volta gli algoritmi per l'addizione e la sottrazione in colonna con numeri di 2 cifre. L'approccio è graduale. Prima si considerano i casi più naturali, come ad esempio:

$$45 + 22 =$$
$$37 – 22 =$$

In questi casi si può procedere senza problemi ad aggiungere decine a decine e unità a unità (addizione) e a togliere decine da decine e unità da unità (sottrazione).
Nel passo successivo si considerano i casi in cui la somma delle unità supera la decina (addizione):

$$45 + 27 =$$

oppure il numero di unità del sottraendo supera il numero delle unità del minuendo;

$$37 – 18 =$$

In questi casi, nei libri di scuola italiani si introducono due termini "tecnici", accompagnandoli con l'uso di materiale manipolativo e con narrazioni di vario tipo: *riporto* (addizione) e *prestito* (sottrazione). Nel caso del "prestito" la storia è una variazione sul tema seguente: *le unità (7) non sono abbastanza e dunque vanno in prestito di una decina per cui 8 diventa 18 e così via.* Riprendiamo un esempio da un sito molto consultato dagli insegnanti italiani[3] anche se l'approccio è simile a quello praticato

3 http://www.lannaronca.it/schede%20matematica%20seconda%20p.htm.

in altri paesi[4]. La storia è divisa in tre puntate: 1) la presentazione dei personaggi (unità e decine) e del loro mondo; 2) il comportamento dei personaggi nel caso dell'addizione con "riporto"; 3) il comportamento dei personaggi nel caso della sottrazione con "prestito".

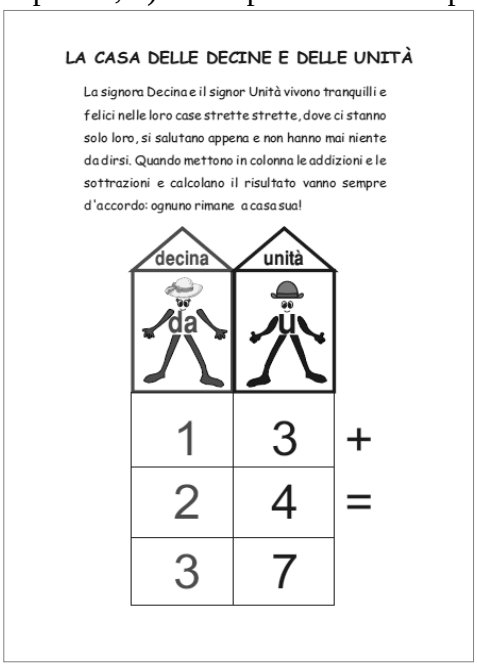

Figura 3: la casa delle decine (rossa) e la casa delle unità (nera).

La signora Decina (tutta rossa) vive in una casetta tutta rossa, mentre il signor Unità (tutto nero) vive in una casetta (tutta nera). Nelle loro casette ammettono solo i loro simili. Quando, per effetto di un'addizione (con "riporto"), il signor Unità si trova una decina in casa, la scaccia in malo modo, con un calcio, spingendola nella casa della signora Decina, che la accoglie volentieri. Qualche tempo dopo, però, il signor Unità è costretto ad andare in "prestito" di una decina dalla vicina di casa per riuscire a realizzare una sottrazione.

Con le notazioni standard, il "riporto" opera in questo modo:

$$45 + 27 = (4\text{ da} + 5\text{ u}) + (2\text{ da} + 7\text{ u}) = 6\text{ da} + 12\text{ u} = 6\text{ da} + 1\text{ da} + 2\text{ u} = 7\text{ da} + 2\text{ u} = 72$$

Il "prestito" opera in questo modo,

$$37 - 18 = (3\text{ da} + 7\text{ u}) - (1\text{ da} + 8\text{ u}) = (2\text{ da} + 17\text{ u}) - (1\text{ da} + 8\text{ u}) =$$
$$(2\text{ da} - 1\text{ da}) + (17\text{ u} - 8\text{ u}) = 1\text{ da} + 9\text{ u} = 19.$$

Dal punto di vista matematico, si opera, nel primo caso, *componendo* 10 unità a formare 1 decina e, nel secondo caso, *scomponendo* 1 decina in 10 unità.

L'origine del lessico in Italia: gli antichi libri d'abaco[5]

4 http://schoolofmonkeys.blogspot.it/2011/10/teaching-place-value-place-value-lane.html.

5 Ringrazio Raffaella Petti del Giardino di Archimede per le informazioni sui trattati di Leonardo Fibonacci e Luca Pacioli.

La procedura del “riporto” è presente nel *Liber abaci* di Fibonacci (1202) con verbi come *retinere (in manibus)* e *reservare*. Pacioli, nella *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni* (1494), fa *tenere a mente* le decine sane da *accozzare* con la fila seguente.
Nel *Liber abaci*, il “prestito” compare in una forma un po’ diversa da quella che conosciamo. Si suggerisce, in caso di necessità, di aumentare di 10 le unità del minuendo e contemporaneamente aumentare di 10 (cioè di una decina) il sottraendo. Questa tecnica realizza una “compensazione” (o “invarianza”) tra ciò che si aggiunge nella prima riga alle unità e ciò che si aggiunge nella seconda alle decine da sottrarre (lasciando quindi immutato il risultato). Nel corso del processo, la decina da aggiungere al sottraendo si deve *reservare in manibus*. Questa tecnica compare con frequenza anche nei trattati successivi come nella *Summa* di Pacioli. Quest’ultimo trattato contiene tre diverse procedure:

- Quella appena citata dell’invarianza;
- Una tecnica per complemento a dieci (che non descriviamo);
- Una tecnica del *prestare e rendere* che ricorda il nostro “prestito”, anche se Pacioli avverte qualche difficoltà nel'uso di questo termine, tanto da cercare di spiegarne il significato.

La tecnica della “compensazione” (o “invarianza”) tra ciò che si aggiunge nella prima riga alle unità e ciò che si toglie nella seconda alle decine è molto comune negli antichi trattati di aritmetica (Bagni, 1994) e può essere rappresentata in questo modo:

- 37 – 18 = (3 da + 7 u) – (1 da + 8 u) = (3 da + 17 u) - (2 da + 8 u) =
- (3 da – 2 da) + (17 u – 8 u) = 1 da + 9 u = 19

Lo stesso Bagni (1994) ritrova il termine “prestito” nel trattato *Aritmetica pratica* (Clavio, 1738: «levare con l’imaginazione l’unità dalla figura superiore, dalla quale è stata virtualmente l’unità pigliata in presto»), ove si descrive un procedimento di “invarianza” che realizza un “prestito virtuale”.

L’origine del lessico in Italia: i libri di aritmetica razionale dell’ultimo secolo

È difficile trovare traccia dei termini “riporto” e “prestito” nei libri di Aritmetica Razionale per le scuole secondarie inferiori e per gli istituti magistrali. Ne abbiamo consultati alcuni relativi ad anni diversi (tra il 1898 e il 1930). In questi, il metodo più comune suggerito per la sottrazione è quello dell’invarianza, in cui si suggerisce di aumentare di 10 le unità del minuendo e contemporaneamente aumentare di 10 (cioè di una decina) il sottraendo.

Il lessico in altri paesi occidentali.

Non solo in Italia si utilizzano nella scuola termini come “riporto” e “prestito”. Alcuni dei termini utilizzati in altre lingue ricordano i termini *ritenere* (nelle mani o in mente) degli antichi libri d’abaco. Una piccola indagine con colleghi di altri paesi ha portato a questi risultati.

In tedesco si usano il termine tecnico *übertrag* (riporto per l’addizione) e il termine *“anleihe”* (prestito per la sottrazione), messo tra virgolette come termine improprio.

In spagnolo, come in italiano, si usa il termine *llevar* (riporto per l’addizione) e *prestar* (prestito per la sottrazione).

In francese si usa lo stesso termine *retenue* (per entrambe le azioni).

In greco[6], per l'addizione con riporto 27 + 34, per la somma delle unità si dice Γράφω 1 και κρατάω 1 (*scrivo 1 e tengo in mente 1*), ma, subito dopo si introduce un nuovo termine alludendo all'1 che è stato tenuto in mente come 1 το κρατούμενο (l'1 che è stato *riportato)*. Nella sottrazione si usa il verbo δανείζομαι (*prendere in prestito*).

Sarebbe interessante approfondire ed estendere questa breve indagine alle tradizioni scolastiche di altri paesi europei.

Il caso dell'inglese è interessante poiché disponiamo di uno studio specifico condotto da Ross e Pratt-Cotter (2008) sull'uso dei termini negli Stati Uniti. In breve, gli autori fanno risalire il termine *to borrow (*prendere in prestito) al 1821, segnalando che, comunque, si tratta di un termine improprio, poiché ogni prestito va restituito. Descrivono poi, con riferimento a vari testi del XIX secolo, vari metodi, tra cui quello di "compensazione" o "invarianza" illustrato in precedenza. In generale dalla metà del XX secolo nei testi per insegnanti si preferisce utilizzare il termine scomposizione (*decomposing* o *regrouping*), anche se, nella pratica, continua ad essere utilizzato il termine *borrowing.* Nell'articolo di Fuson & Li (2009), si invita ad utilizzare i termini *grouping* - comporre o raggruppare (addizione) - *ungrouping* – scomporre (sottrazione) - *regrouping* – ricomporre (per addizione o sottrazione), scelti dalla prima autrice (Fuson) nel progetto *Math expressions*. Osserviamo tuttavia che nel materiale[7] on-line dell'University of California, Irvine, si suggerisce di usare il termine *trading* (scambiare), considerato più significativo per gli allievi.

In un testo nigeriano, scritto in inglese, si usano i termini *rename* e *bundle* sia per l'addizione che per la sottrazione.

Le pratiche e il lessico in Cina.

Vediamo come è affrontato lo stesso problema in Cina. È un grande paese non europeo, nel quale i curricoli sono fortemente centralizzati e sono pubblicate pochissime serie di libri di testo molto simili tra loro. Nei curricoli cinesi (nelle indicazioni nazionali, nei libri di testo, nelle guide per insegnanti e anche nella pratica didattica quotidiana) si usano termini derivati dagli schemi d'uso degli antichi artefatti per contare ed eseguire operazioni (le *bacchette* o cannucce; la *tavola da calcolo*, il *suàn pán* o abaco cinese):

addizione: composizione o avanzamento**,**

sottrazione: scomposizione o arretramento.

Il significato della coppia di antonimi *composizione / scomposizione* è facilmente riconducibile al calcolo con le bacchette (vedi anche Bartolini Bussi, 2011). La figura 4 mostra il primo approccio alla decina all'inizio della prima elementare. L'insegnante (1) chiede al bambino di *legare* le bacchette a mazzetti di 10 e di dire i numeri[8]. Il bambino (2) mostra alcuni casi di mazzetti legati e bacchette sparse e dice i nomi in modo preciso.

---

6 Ringrazio Eugenia Koleza dell'Università di Patrasso per la spiegazione molto dettagliata.

7 https://eee.uci.edu/wiki/index.php/Subtraction_with_Regrouping,

8 I bambini hanno già praticato la numerazione orale nella scuola materna fino a 100. Per la numerazione scritta hanno già imparato i caratteri cinesi da uno a dieci e la scrittura dei numerali indo-arabici per copiatura da 1 a 100.

In questo è facilitato dalla struttura del sistema di numerazione cinese, perfettamente trasparente per la notazione posizionale: *dieci-uno (undici); dieci-cinque (quindici); due-dieci (venti)*

Figura 4. la prima introduzione della scrittura posizionale

L'algoritmo dell'addizione è presentato in modo naturale unendo le unità sparse dei due addendi e le decine. Ogni volta che, nella somma, il numero di unità sparse supera 10, si lega un mazzetto.

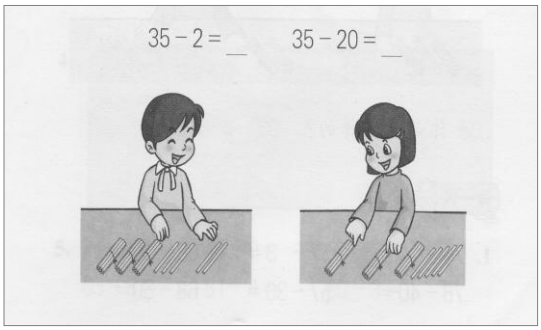

Figura 5. le sottrazioni più semplici

L'algoritmo della sottrazione è presentato in modo naturale togliendo unità da unità e mazzetti da mazzetti. Il caso più complesso del "prestito" è risolto *slegando* un mazzetto. C'è quindi una corrispondenza significativa tra il termine che denota l'azione e il termine tecnico introdotto. Alle due azioni opposte (gli antonimi *legare* – *slegare*) corrispono i due antonimi *comporre* – *scomporre*, che sono termini tecnici della matematica.

Nella scuola cinese, si usano anche altri due antonimi: *avanzare* – *arretrare*. Questi fanno riferimento allo spostamento dei numerali sulla tavola da calcolo o delle palline sul *suàn pán*: avanzare verso la colonna delle unità di ordine superiore (dalle unità alle decine e poi alle centinaia, ecc.); arretrare verso la colonna delle unità di ordine inferiore (dalle centinaia alle decine e da queste alle unità).

Figura 6. Una sottrazione complessa

La tavola da calcolo (Bagni, 1999) è un antico strumento cinese utilizzato già nel IV secolo A. C.. Consiste in una scacchiera con caselle in ciascuna delle quali è rappresentato un numero con bacchette. Ogni colonna corrisponde ad un ordine nella notazione posizionale in base dieci: unità, decine, centinaia, ecc. Per mezzo di questa tavola si rappresentano numeri, si eseguono operazioni anche complesse e si risolvono sistemi lineari. La tavola da calcolo, secondo alcuni storici, sembra essere l'origine dell'abaco a palline (*suàn pán),* il cui uso è più limitato (non si estende ai sistemi lineari). In entrambi i casi, se l'esecuzione di addizioni o sottrazioni non può avvenire mantenendo ogni volta il risultato parziale all'interno dell'ordine (colonna), si *avanza* verso unità di ordine superiore (addizione) o si *arretra* verso unità di ordine inferiore.

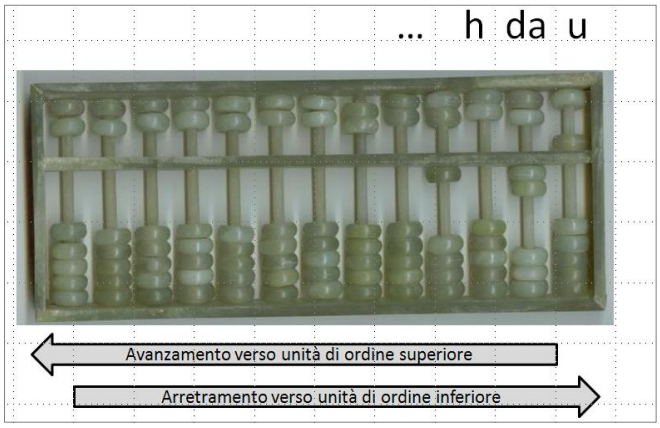

Figura 7: Un antico suàn pán di giada

Le convinzioni degli insegnanti cinesi.

Abbiamo fin qui illustrato i termini utilizzati nei libri di scuola cinesi ricostruendone la storia e il significato. Ci possiamo chiedere quale consapevolezza hanno gli insegnanti cinesi di questi processi.

Nel 1999 è stato pubblicato negli Stati Uniti un libro di grande successo (Ma, 1999), in cui si confrontano le conoscenze e le competenze degli insegnanti di matematica nelle scuole elementari cinesi e statunitensi. Nel primo capitolo, si discute in particolare la differenza tra le convinzioni sull'insegnamento della sottrazione con "prestito". La

domanda provocatoria rivolta, in un'intervista individuale, a tutti gli insegnanti del campione (23 negli Stati Uniti e 72 in Cina) è la seguente:

> Dedichiamo un po' di tempo a un argomento particolare che vi capita di insegnare. Guardate queste operazioni:
>
> $$\begin{array}{r} 52 \\ \underline{-25} \end{array} \quad \begin{array}{r} 91 \\ \underline{-79} \end{array}$$
>
> Come introdurreste queste operazioni in seconda elementare? Che cosa pensate che gli allievi debbano sapere o essere in grado di fare prima di imparare la sottrazione con il raggruppamento? (Ma, 1999, p. 1).

In generale gli insegnanti statunitensi (supponiamo che anche gli insegnanti italiani darebbero risposte simili) fanno riferimento a materiale manipolativo di vario tipo, incluse le bacchette, ma nella descrizione a parole, in maggioranza, puntano esclusivamente sugli aspetti procedurali (l'esecuzione) e citano ancora il "prestito" (*borrowing*).

Gli insegnanti cinesi in gran parte parlano di raggruppamenti e, anche se alcuni utilizzano la metafora del "prestito"[9], per l' 86% parlano di scomposizione di una unità di ordine superiore. Al di là della terminologia, essi mostrano una comprensione più profonda del significato matematico. Vediamo alcuni esempi dalle interviste.

> Inizierei dalla sottrazione consueta, come 43 – 22 = ?. Dopo averla risolta, modificherei l'operazione in 43 – 27 = ?. In che senso il nuovo problema differisce dal precedente? Che cosa succederà quando cerchiamo di fare i calcoli? Si accorgeranno presto che 7 è maggiore di 3 e che non abbiamo abbastanza unità. Allora direi: Bene, oggi non abbiamo abbastanza unità, ma qualche volta ne abbiamo troppe. Vi dovreste ricordare che quando la settimana scorsa abbiamo fatto l'addizione con il riporto avevamo troppe unità. Che cosa abbiamo fatto allora? Gli allievi diranno che abbiamo composto le unità in decine. Allora, quando abbiamo troppe unità le componiamo in decine. Che cosa possiamo fare quando non ne abbiamo abbastanza? Possiamo scomporre all'indietro una decina in unità. Se nel 40 scomponiamo una decina, che cosa succederà? Avremo abbastanza unità. In questo modo io introdurrei il concetto di "scomposizione di una unità di ordine superiore in dieci unità dell'ordine inferiore" (Ma, 1999, p. 8, insegnante L.)

Compare l'idea che *scomporre* è l'azione inversa di *comporre*.

> Come fare se in 53 non ci sono abbastanza unità per sottrarre 7? 53 è ovviamente maggiore di 6. Dove sono le unità in 53? Gli allievi diranno che le altre unità in 53 sono state composte in decine. Allora chiederò che cosa possiamo fare per avere abbastanza unità per sottrarre 7. Mi aspetto che dicano di scomporre una decina. Altrimenti, lo dirò io (Ma, 1999, p. 9, insegnante P.)

Un insegnante critica l'uso della metafora del "prestito":

> Alcuni miei studenti potrebbero avere imparato (dai loro genitori) che si può "prendere in prestito" una delle decine e guardarla come 10 unità. Io spiegherò loro che non stiamo prendendo in prestito una decina, ma scomponendo una decina. "Prendere in prestito" non può spiegare perché porti 10 alle unità. Ma "scomporre" lo può spiegare. Quando dici "scomporre", significa che le cifre nelle posizioni più "alte" sono composte di fatto da quelle nelle posizioni più basse. Si possono scambiare. Il termine "prendere in prestito" non equivale per nulla al processo di comporre-

---

9 La presenza della parola "prestito" in alcuni casi si giustifica per l'uso alcuni decenni fa di libri di testo tradotti dall'inglese e contenenti tale termine. Da alcuni decenni, invece, i termini della tradizione antica cinese sono stati reintrodotti nei curricoli e nei libri di testo.

> scomporre. I miei studenti potrebbero chiedere come possiamo prendere in prestito dalle decine. Se prendiamo in prestito qualcosa, lo dovremo restituire. Come e che cosa restituiremo? Inoltre, per prendere in prestito, dobbiamo trovare qualcuno disponibile a prestare. Che cosa succederebbe se il posto delle decine non volesse prestare nulla al posto delle unità? Non sareste in grado di rispondere a queste domande, se gli studenti le facessero. (Ma, 1999, p. 9, insegnante S.).

Gli insegnanti sono consapevoli che la scomposizione di unità di ordine superiore è un processo più generale.

> A volte abbiamo bisogno di scomporre non una decina ma un centinaio, ad esempio per calcolare 302 – 17 oppure 10005 – 206. Se i nostri studenti sanno solo che 1 decina è uguale a 10 unità, si confonderanno. Se fino dall'inizio sono esposti all'idea che si possono comporre unità di ordine superiore (e sono esposti al rapporto tra queste) saranno in grado di dedurre la soluzione di questi nuovi problemi, o almeno avranno la possibilità di farlo (Ma, 1999, p. 10, insegnante N.).

> Se insegni agli allievi che 1 decina è uguale a 10 unità, insegni un fatto usato nella procedura. Se chiedi loro di pensare a come si compone una unità di ordine superiore, li conduci ad una teoria che spiega sia il fatto che la procedura. Questa comprensione è più potente di un fatto specifico. Può essere applicata a più situazioni (Ma, 1999, p. 10-11, insegnante M.).

> Cercherò di portare i miei studenti a capire che c'è un unico processo sotto tutti questi modi: Slegare un fascio di cannucce. Questo li porterà a capire il concetto di scomposizione. (Ma, 1999, p. 14, insegnante G.).

In tutti questi casi, e negli altri riportati nel libro citato, si osserva non solo una conoscenza approfondita della matematica e delle sue caratteristiche, ma anche una visione sistemica: l'insegnante è consapevole che i contenuti oggetto dell'insegnamento in seconda elementare sono tutti collegati tra loro e sono la base di insegnamenti successivi. Si sottolineano così la continuità, la generalità, la connessione.

Conclusioni

La pratica delle cannucce nella didattica non è ignota in Italia. A puro titolo di esempio, riportiamo un brano di un libro italiano del 1920.

> Il centesimo, il soldo e il soldone sono d'uso così familiare che molti insegnanti ritengono opportuno di valersene fin dalla prima classe per la rappresentazione concreta dei primi 20 numeri. Però per classi numerose appare poco pratico l'uso di queste monete, in luogo delle quali si preferisce fare uso dei dischi di carta. Certamente l'uso del soldo e del soldone implica un concetto di sostituzione e di equivalenza, che in un primo grado d'istruzione offre difficoltà che non conviene aggiungere alle altre difficoltà offerte dai primi passi. Noi riteniamo preferibile che il fanciullo abbia sotto gli occhi tanti oggetti quante sono le unità del numero rappresentato e troviamo assai pratico l'uso degli stecchini sciolti, e a mazzetti, e a fasci …"(Conti, 1920).

Questo commento, da un lato, spiega bene la potenza delle cannucce e dei mazzetti per costruire all'inizio la decina e poi il sistema posizionale di numerazione, dall'altro, anticipa il necessario abbandono delle cannucce nel momento in cui le decine (e poi le centinaia) saranno pensate come unità di ordine superiore. In questo momento diventerà naturale l'uso dell'abaco, in cui una stessa pallina, convenzionalmente, potrà indicare una

unità, una decina, un centinaio, ecc., una unità di ordine qualsiasi, a seconda della *posizione* che occupa.

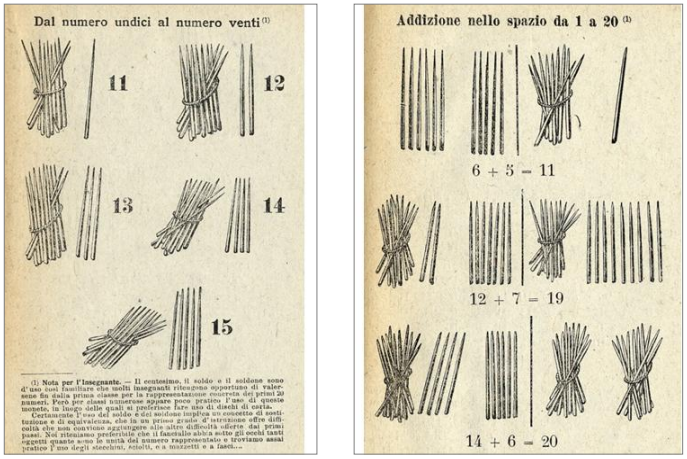

Figura 8: i mazzetti di stecchini.

Le bacchette sono, in Italia[10], scomparse dalla pratica con l'introduzione dei materiali strutturati che hanno accompagnato l'avvento della cosiddetta "nuova matematica". In questo caso, uno strumento potente e significativo è stato estromesso dalla scuola.

Nelle narrazioni citate all'inizio che riguardano il signor Unità e la signora Decina, l'attenzione è portata sul colore e non sulla posizione. Inoltre non è focalizzata sulle azioni matematiche ma sulle azioni dei protagonisti. E' un aiuto utile e necessario per la costruzione del significato matematico oppure un trucco mnemonico? Si sceglie, con discutibili scelte pedagogiche e sociali (scacciare un diverso; andare a prenderlo se serve), un "fanciullo tutto intuizione, fantasia e sentimento" dei programmi del 1955, abbondantemente superato dalla visione del "bambino competente" dei programi del 1985 e non si affronta in maniera seria e culturalmente adeguata il problema lessicale. Le argomentazioni degli insegnanti cinesi possono essere condivise con i nostri insegnanti, introducendo con naturalezza termini semplici che ricordano l'azione concreta e rinforzano la semantica.

In questo lavoro, da un problema lessicale, attraverso una specie di giro del mondo, abbiamo esplorato un problema pedagogico e didattico. L'incontro con la Cina, suggerito da Jullien, ci sta offrendo, in questi anni, molte sorprese e occasioni di ripensamento sulla didattica della matematica. Oltre alle questioni lessicali, sempre provocatorie in una lingua che ha una forte componente pittografica, abbiamo l'occasione di esplorare punti di vista insospettati su altri temi, come il testo dei problemi aritmetici e il collegamento del testo con le strategie risolutive. Non c'è lo spazio necessario per illustrare le ricerche sui problemi espressi a parole, suggerite da questo incontro con la Cina. Basta qui fare riferimento al progetto di Alessandro Ramploud per il XXVI ciclo della scuola di dottorato in Scienze Umanistiche e al vario materiale relativo contenuto nel sito

http://www.mmlab.unimore.it/site/home/shuxue-matematica.html.

10 Continuano ad essere utilizzate e suggerite in US (vedi ad esempio https://eee.uci.edu/wiki/index.php/Subtraction_with_Regrouping.

La parte empirica della ricerca si sta avviando con una affollatissima scuola estiva per insegnanti di scuola primaria e secondaria di primo grado, nella quale i partecipanti saranno condotti a questo incontro con la Cina per interrogarsi sul proprio impensato[11].

Riferimenti ibliografici

Bagni G. (1994), I metodi pratici di sottrazione nei manuali di aritmetica, *La matematica e la sua didattica* 4, 432-444

Bagni G. (1999), Bacchette da calcolo e sistemi di equazioni: analisi semiotica e prospettiva ermeneutica, *Progetto Alice*, 28, 5–32.

Bartolini Bussi M. G. (2011), Culture lontane come risorsa: la Cina, in L. Cerrocchi e A. Contini (a cura di), *Culture migranti. luoghi fisici e mentali d'incontro*, pp. 281-299, Trento: Erickson.

Conti A. (1920), *Aritmetica per la prima classe elementare* , Firenze: Bemporad e Figlio.

Fuson K. & Li Y. (2009), Cross-cultural issues in linguistic, visual-quantitative, and written-numeric supports for mathematical thinking, *ZDM*, vol. 41, 793-808

Jullien J. (2008), Parlare senza parole, Bari: Laterza.

Ma L. (1999), Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States, Taylor & Francis Group.

Ross, Pratt-Cotter (2008), Subtraction in the United States: An Historical Perspective, *The Mathematics Educator*, Vol. 8, No.1.

11 Ringrazio Gabriele Pallotti per l'invito a partecipare al XVII Convegno Nazionale GISCEL e per la sollecitazione a fissare per iscritto questi pensieri; i colleghi del Dipartimento di Educazione e Scienze Umane sempre pronti a smontare barriere e a costruire ponti tra le diverse discipline; i compagni di viaggio (e in particolare Alessandro Ramploud) in questa esplorazione della cultura cinese per interrogarci sul nostro impensato.