LA ELIPSE

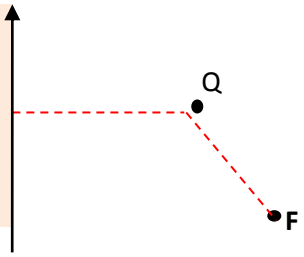
Así como se formo una parábola, tomando una recta llamada Directriz y un punto fijo llamado foco; con la condición de tener la misma distancia; si tomamos el cociente entre ambas distancias dará como resultado 1.

Este resultado se conoce como la excentricidad de la Parábola: $e = \frac{\overline{|QF|}}{\overline{|QL|}} = 1$; igualmente con los mismos argumentos se forma una Elipse pero; el cociente entre estas distancias está entre 0 y 1.

$$0 < e = \frac{\overline{|QF|}}{\overline{|QL|}} < 1$$

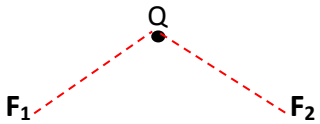
Por ejemplo si este cociente es 0.6, entonces cualquier otro punto en el cual se cumpla esta distancia se tomará.

Todos los puntos formaran la elipse.



Una forma más sencilla para generar una elipse es, tomando 2 puntos fijos a quien denominamos focos y luego un punto cualquiera del espacio de tal manera que se cumpla la siguiente condición:

$$|\overline{QF_1}| + |\overline{QF_2}| = Cte.$$

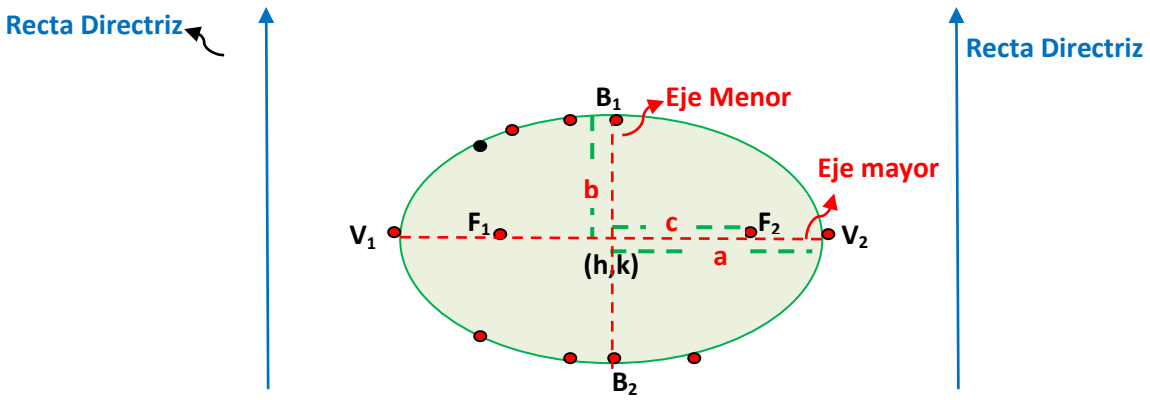


La distancia de este punto a un foco, más la distancia de este mismo punto al otro foco sea una constante.

Cualquier otro punto que cumpla con el valor de esta constante se tomará como punto de la elipse.

Una vez formada la elipse; puede ingresar intuitivamente las rectas directrices, una a cada lado de su respectivo foco, puede comprobar que se cumple la condición de su excentricidad.

Ahora deberá observar detenidamente todos sus puntos característicos y como se posicionan en la elipse.



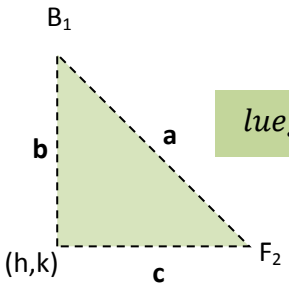
El centro de la elipse es (h,k); que a la vez es punto medio entre los vértices o focos

Note que ya no se menciona un eje o recta focal si no el eje mayor, donde se encuentran los focos y vértices y se cumple:

La distancia del centro al: $\begin{cases} extremo\ del\ eje\ mayor\ es\ "a" \\ extremo\ del\ eje\ menor\ es\ "b" \\ foco\ es\ "c" \end{cases}$ además

Otra propiedad de la elipse es la relación entre las distancias a, b y c; ya que al ser los ejes perpendiculares se forma un triangulo rectángulo que permite relacionarlos.

La excentricidad se calcula de manera sencilla: $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}$



$luego: a^2 = b^2 + c^2$

Nuevamente la ecuación general es difícil de trabajar a menos que se transforme, pero cuando se hace el procedimiento; la ecuación aparece como:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Es decir tiene todas las características de la circunferencia con la única diferencia que los coeficientes de las variables cuadráticas son diferentes.

Recuerde: "***si existen ambas variables al cuadrado, tienen el mismo signo y el mismo coeficiente, podría ser una circunferencia***"

si una ecuaciòn tiene las variables cuadràticas, los mismos signos, pero; diferentes coeficientes podrìa ser una Elipse.

Por ejemplo:

$$4x^2 + 3y^2 + 8x + 6y - 5 = 0$$

Variables cuadráticas, ambas con el mismo signo, pero con diferentes coeficientes; podría ser una elipse, trabajemos como en una circunferencia

Agrupemos: $4x^2 + 8x + 3y^2 + 6y - 5 = 0$

Al tener diferente coeficiente no puede dividir toda la ecuación como en el caso de la circunferencia.

Sacar factor común en cada variable: $4\{x^2 + 2x\} + 3\{y^2 + 2y\} - 5 = 0$

$$4\{(x+1)^2 - 1\} + 3\{(y+1)^2 - 1\} - 5 = 0$$

$$4(x+1)^2 - 4 + 3(y+1)^2 - 3 - 5 = 0$$

$$4(x+1)^2 + 3(y+1)^2 = 12$$

$$\frac{(x+1)^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = \frac{12}{12} \text{ es decir } \frac{(x+1)^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

Observe el modelo de una elipse ya trabajada y compare con la circunferencia:

$$\frac{(x+h)^2}{a^2} + \frac{(y+k)^2}{b^2} = 1$$

En este caso siempre (h,k) es el centro de la elipse igual que en la circunferencia, pero la letra "a" se le asignara al mayor de los denominadores que resulte de su trabajo de reducir la ecuación general; en cambio la letra "b" se le asigna al menor denominador, por esta razón la ecuación mostrada puede variar y "a" puede estar bajo la variable "x" o bajo la variable "y".

Ya se explico de la relación entre "a" , "b" y "c"; por lo tanto: $a^2 - b^2 = c^2$.

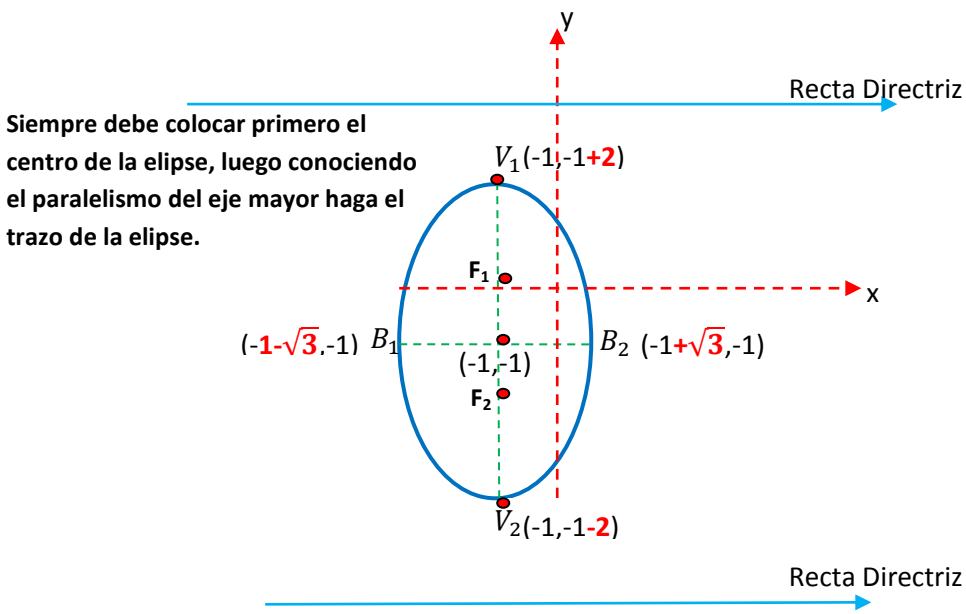
En el ejemplo que se a deducido se observa que el centro de la elipse es C = (-1,-1)

De los denominadores observe que el mayor es 4, por lo tanto asume la letra "a" y el menor es 3, por lo tanto asume la letra "b".

Según la ecuación la letra "**a = 4**" se encuentra bajo la variable "y"; por lo tanto el eje mayor es paralelo al eje "y".

Ahora si podemos graficar con gran aproximación la elipse; recuerde que lo más importante en su trazo es; su ubicación y además su forma, todos los demás datos se encuentran aparte: vértices, focos, eje menor y el valor de "c", así como su excentricidad.

Graficando:



Recuerde que lo único real del grafico es el centro y la forma de la elipse todo lo demás ha sido colocado por intuición, los valores deben colocarse a parte, Ud. Solo debe colocar los símbolos, así como las rectas directrices.

Conociendo las distancias se hace sencillo encontrar los focos, los vértices y los extremos de la diagonal menor así como de manera más sencilla la excentricidad.

Con el dato del centro (-1,-1);

vértice $V_1 = (-1,1)$; el vértice $V_2 = (-1,-3)$

foco F_1 = (-1,0) , y el foco F_2 = (-1,-2) ;

Los extremos del Eje menor: $B_1 = (-1-\sqrt{3},-1)$ y $B_2 = (-1+\sqrt{3},-1)$

Finalmente la excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} = 0.5$

En cuanto a las ecuaciones de las rectas directrices, no las considero necesarias, ya que lo importante es graficar la elipse, pero, si quiere hallar sus ecuaciones; recuerde que 2 rectas paralelas tienen una misma ecuación general que las diferencia por una constante.

En el grafico la recta que pasa por el eje menor tiene ecuación:

$$(x,y) = (-1,-1) + \alpha(2\sqrt{3},0)$$

Y como ecuación general: $0.x + 2\sqrt{3}y = -2\sqrt{3}$ es decir: $y = -1$

Las rectas directrices al ser paralelas tienen ecuación: $0.x + 2\sqrt{3}y = k_1$ y $0.x + 2\sqrt{3}y = k_2$ con el dato de la excentricidad encuentra las constantes.

Ejemplo: determinar la cónica, graficarla e indicar todos sus puntos característicos.

$$x^2 + 4y^2 - 12x + 16y + 48 = 0$$

Solución;

Por la característica de las variables cuadráticas, mismo signo y diferentes coeficientes esta cónica podría ser una elipse

Luego, ordenando: $(x-6)^2 - 36 + 4(y^2 + 4y) + 48 = 0$

Queda: $(x-6)^2 - 36 + 4\{(y+2)^2 - 4\} + 48 = 0$

Finalmente: $(x-6)^2 - 36 + 4(y+2)^2 - 16 + 48 = 0$

Es decir: $(x-6)^2 + 4(y+2)^2 = 4$

Puede reescribirse: $\frac{(x-6)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = \frac{4}{4}$ (**4**) es para equilibrar el sistema

Finalmente: $\frac{(x-6)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$

Que representa la ecuación de una elipse. $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Recuerde ***"siempre al mayor valor del denominador se le asigna la letra "a"***

Y la variable que corresponde es la "x", entonces el eje mayor es paralelo a este eje.

Significa que $a^2 = 4, por\ lo\ tanto\ b^2 = 1$; luego **a=2, b= 1**

Ya se indicó que $a^2 = b^2 + c^2$ por lo que **c =$\sqrt{3}$**

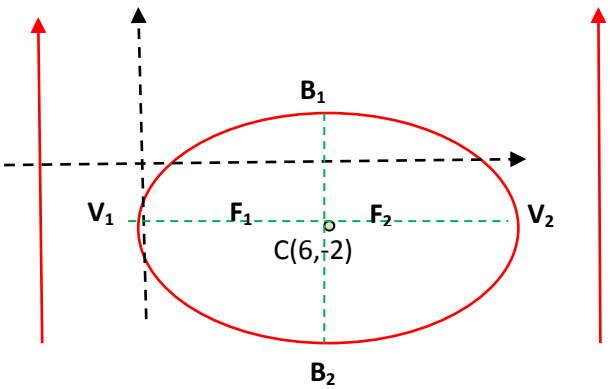
Graficando:

V_1= (6-2,-2) F_1= (6-$\sqrt{3}$,-2)

V_2 = (6+2.-2) F_2 =(6+$\sqrt{3}$,-2)

B_1 = (6,-2+1) B_2= (6.-2-1)

e = $\frac{\sqrt{3}}{2}$



Las siguientes elipses, son de lo más sencillas porque el centro es (0,0)

Ejemplo: $4x^2 + 5y^2 = 20$

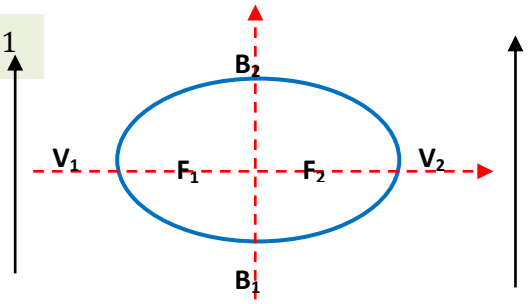
Nuevamente observe las variables cuadráticas, los mismos signos y diferentes coeficientes por lo tanto puede ser una elipse, luego: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = \frac{20}{20}$

Entonces: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ la ecuación ordinaria $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = \mathbf{1}$

Donde (h,k) = (0,0) se convierte en la ecuación canónica: $\frac{(x)^2}{a^2} + \frac{(y)^2}{b^2} = \mathbf{1}$

Luego corresponde que el eje mayor sea paralelo al eje "x", la grafica será:

$a^2 = 5;\ b^2 = 4\ y\ c^2 = 1$



Luego: $V_1 = (-\sqrt{5}, 0)\ y\ V_2 = (\sqrt{5}, 0)$; $F_1 = (-1,0)\ y\ F_2 = (1,0)$; $B_1 = (0,-2)\ y\ B_2 = (0,2)$

$$finalmente\ la\ excentricidad: \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}}$$

Ejemplo: $9x^2 + y^2 = 9$

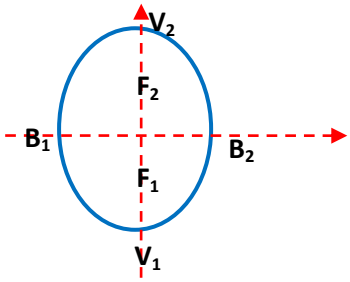
Tiene toda la característica de una elipse, luego: $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = \frac{9}{9}$

Entonces: $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$ la ecuación ordinaria $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = \mathbf{1}$

Donde (h,k) = (0,0) se convierte en la ecuación canónica: $\frac{(x)^2}{a^2} + \frac{(y)^2}{b^2} = \mathbf{1}$

Luego corresponde que el eje mayor sea paralelo al eje "y", la grafica será:

$a^2 = 9, b^2 = 1\ y\ c^2 = 8$



Luego: $V_1 = (0,-3)\ y\ V_2 = (0,3)$; $F_1 = (0, -\sqrt{8})\ y\ F_2 = (0, \sqrt{8})$;$B_1 = (0,-1)\ y\ B_2 = (0,1)$

Para terminar decimos que podría ser una elipse porque puede suceder que no exista o simplemente sea un punto igual como la circunferencia.

Ejemplo:

$$x^2 + 4y^2 + 6x + 8y + 15 = 0$$

Solución;

Por la característica de las variables cuadráticas, mismo signo y diferentes coeficientes esta cónica podría ser una elipse

Luego, ordenando: $(x+3)^2 - 9 + 4(y^2 + 2y) + 15 = 0$

Queda: $(x+3)^2 - 9 + 4\{(y+1)^2 - 1\} + 15 = 0$

Finalmente: $(x+3)^2 - 9 + 4(y+1)^2 - 4 + 15 = 0$

Es decir: $(x+3)^2 + 4(y+1)^2 = -2$

No es posible que una suma de cuadrados sea negativa, este grafico no existe.

Ejemplo:

$$2x^2 + 6y^2 - 4x + 12y + 26 = 0$$

Solución;

Por la característica de las variables cuadráticas, mismo signo y diferentes coeficientes esta cónica podría ser una elipse

Luego, ordenando: $2(x^2 - 2x) + 6(y^2 + 2y) + 26 = 0$

Queda: $2\{(x-1)^2 - 1\} + 6\{(y+2)^2 - 4\} + 26 = 0$

Finalmente: $2(x-1)^2 - 2 + 6(y+2)^2 - 24 + 26 = 0$

Es decir: $2(x-6)^2 + 6(y+2)^2 = 0$

Resulta un punto que coincide con el centro (6,-2)

Ahora todas las elipses, tienen otra particularidad, si “a” = “b”, entonces la ecuación ordinaria sería: $\boldsymbol{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2}$

La canónica sería: $\boldsymbol{\frac{(x)^2}{a^2} + \frac{(y)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow (x)^2 + (y)^2 = a^2}$

Es decir una circunferencia, luego las cónicas resultan ser solamente 3 y no 4 como los griegos solían decir.