La nascita del calcolo infinitesimale

Andrea Pinto

9 gennaio 2013

Indice

1 Contesto matematico e storico

Elenchiamo brevemente i principali avvenimenti che caratterizzarono il XVII secolo, in modo da poter contestualizzare il lavoro dei matematici di cui tratteremo.

- **Affermazione dell'Assolutismo**
  Si affermò l'Assolutismo nella maggior parte degli Stati europei, come ad esempio la Russia e la Francia.

- **Guerra dei trent'anni (1618-1648)** La guerra dei trent'anni fu costituita da una serie di conflitti armati che dilaniarono l'Europa dal 1618 al 1648. I combattimenti si svolsero inizialmente e soprattutto nei territori dell'Europa centrale appartenenti al Sacro Romano Impero Germanico, ma coinvolsero successivamente la maggior parte delle potenze europee, con le eccezioni di Regno Unito e Russia. Durante questi trent'anni la guerra cambiò gradualmente natura e oggetto: iniziata come conflitto religioso tra cattolici e protestanti, si concluse in lotta politica per l'egemonia tra la Francia e gli Asburgo.

- **Guerra civile inglese (1642-1660)**
  Alla fine di tale guerra, anche se la monarchia riuscì a sopravvivere, grazie al potere che il Parlamento aveva rivendicato, l'Inghilterra non vide mai più sovrani assolutisti sul proprio trono.

- **Rivoluzione scientifica**
  Dal punto di vista scientifico-culturale, il XVII secolo fu una fase di straordinario sviluppo. Infatti con il termine "rivoluzione scientifica" si fa riferimento al periodo compreso tra l'anno di pubblicazione del capolavoro di Copernico De revolutionibus orbium coelestium (1543) e quello dell'opera di Newton Philosophiae naturalis principia mathematica (1687).

  Questa rivoluzione scientifica, che a sua volta aveva avuto alcune sue basi nell'Umanesimo rinascimentale e nell'opera di geni come Leonardo da Vinci, getterà poi le basi culturali per la successiva rivoluzione industriale.

- **Razionalismo** In filosofia trionfava il razionalismo, corrente di pensiero secondo cui, partendo da principi fondamentali individuabili sperimentalmente o intuitivamente, come gli assiomi della geometria o i principi della meccanica e della fisica, si può arrivare tramite un processo deduttivo ad ogni altra forma di conoscenza.

- **Contesto matematico** Nel XVII secolo la matematica europea ricevette un forte impulso. Sebbene non esistesse ancora nessuna organizzazione ufficiale che coordinasse le attività dei matematici di professione, in alcuni stati europei si erano formati spontaneamente alcuni gruppi scientifici, come ad esempio l'Accademia dei Lincei in Italia, la Royal Society in Inghilterra e l'Académie Française in Francia. Inoltre furono istituite le prime cattedre di Matematica nelle università. Tutto ciò favorì indubbiamente lo sviluppo delle tecniche matematiche. In ogni caso, nel secondo trentennio del XVII secolo, la Francia divenne il centro indiscusso dell'attività matematica del tempo. Tra i matematici più famosi dell'epoca possiamo menzionare Descartes, Fermat, Pascal, Barrow, Newton, Leibniz.

2 Le tematiche che sviluppano il "calcolo"

Agli inizi del XVII secolo vari matematici europei rivolsero i loro sforzi alla soluzione di cinque problemi, a prima vista non connessi l'uno con l'altro. Alcuni di questi problemi hanno origini molto più antiche, altri sono invece nati in questo periodo

1. determinare la tangente ad una curva nota;
2. trovare la velocità e l'accelerazione di un corpo in movimento, data una formula che descrivesse la distanza percorsa come funzione del tempo;
3. trovare i massimi e i minimi di una funzione data;
4. calcolare la lunghezza di una particolare curva, l'area racchiusa da una curva o il volume racchiuso da una superficie.
5. calcolare particolari somme infinite

Il lavoro di alcuni autori intorno a tali questioni permetterà per prima cosa di cogliere alcuni nessi tra questi problemi e getterà le basi per la nascita del calcolo infinitesimale, successivamente sviluppato.

2.1 il problema della tangente e il legame con la velocità di un corpo in movimento

Il problema della tangente aveva interesse non solo per la pura speculazione geometrica, ma pure per alcune applicazioni della fisica: l'Ottica a cui nel Seicento si dedicarono, tra gli altri, Huygens, Fermat, Descartes e Newton, necessita della conoscenza dell'angolo tra il raggio di luce e la normale alla curva (costituita dal bordo di una lente) nel punto di incidenza, per poter applicare la legge di rifrazione; determinare la normale è ovviamente equivalente a trovare la tangente alla curva, data la perpendicolarità tra le due rette. Nel 1634 il francese **Gilles Personne de Roberval** (1602-75), nel suo *Traité des indivisibles*, presentò un metodo per determinare le tangenti, che generalizzava le riflessioni anticamente compiute da Archimede per trovare la tangente alla spirale che da lui prende nome.

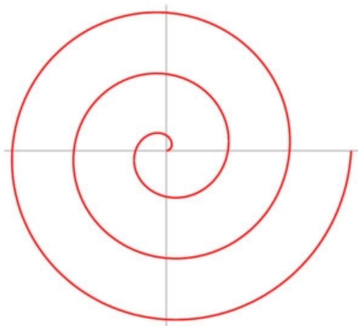

Figura 1: Spirale archimedea

Archimede aveva considerato la spirale come luogo dei punti occupati nel tempo da un corpo che si muova allontanandosi da un centro fisso con velocità costante, lungo una retta che ruoti con velocità angolare uniforme. Il moto di tale corpo risulta dunque dalla composizione di un moto radiale e di uno angolare. Nella notazione moderna delle coordinate polari, la spirale archimedea ha pertanto equazione

$$r = a + b\theta;$$

ove r sia la distanza (crescente) dal centro O.

Roberval, riprendendo le osservazioni di Galileo Galilei sul moto di un proiettile (visto come composizione di un moto verticale e di uno orizzontale), considerò una particolare curva, la cicloide, come traiettoria percorsa da un

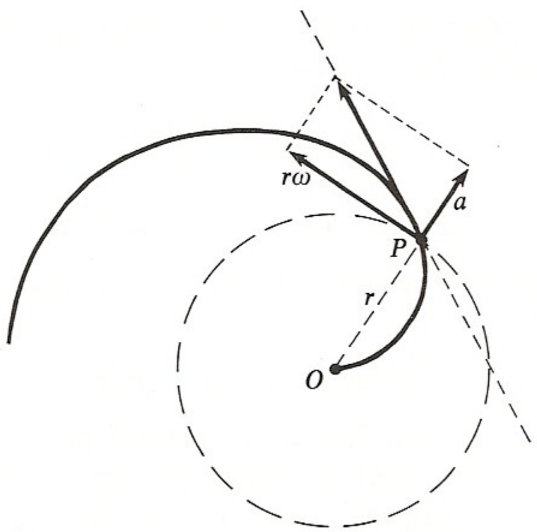

Figura 2: Tangente della spirale archimedea

punto P posto sul bordo di una ruota circolare, che rotoli lungo un asse fisso con velocità angolare unitaria ($\omega = 1 rad/s$). Il moto di quel punto

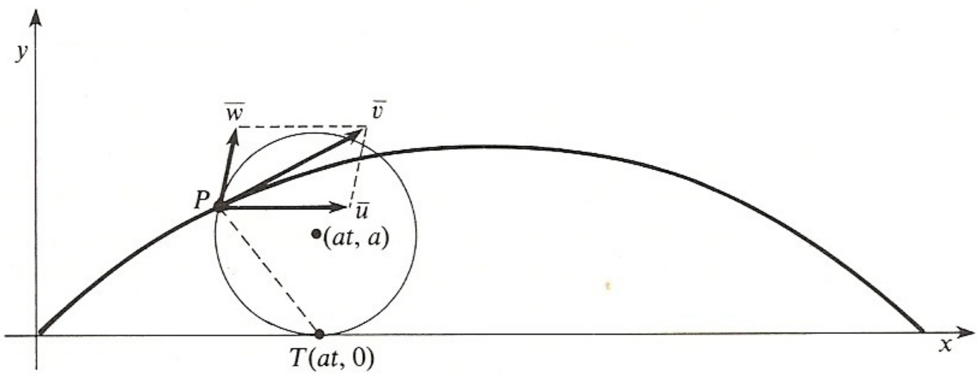

Figura 3: Tangente della cicloide

lungo la cicloide risulta perciò composto di una traslazione uniforme nella direzione dell'asse, e di un moto rotatorio in senso orario. In ciascun punto della cicloide, le rispettive velocità $\bar{u}$ e $\bar{w}$ si compongono perció, secondo la regola del parallelogramma, nella risultante v, che appare essere la tangente alla cicloide nel punto considerato.

È da sottolineare come la nozione stessa di tangente presente in Roberval appaia diversa da quella dei Greci: essa non è più concepita come la linea che tocca la curva in un punto, bensì come la linea avente la direzione della velocità risultante. Arriviamo dunque a una definizione basata su concetti fisici, oltre che geometrici.

Pierre Fermat (1601-1665) propose, nel manoscritto *Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam* (1637), un metodo diverso, sostanzialmente affine a quello ancora oggi usato in analisi, seppur con profonde differenze concettuali. Se la retta PT è l'oggetto del problema, ossia la tangente in P alla curva nota, e interseca in T l'asse delle ascisse, allora la conoscenza della lunghezza TQ, detta subtangente, è sufficiente per individuare univocamente il punto T, e dunque tracciare la tangente in P.

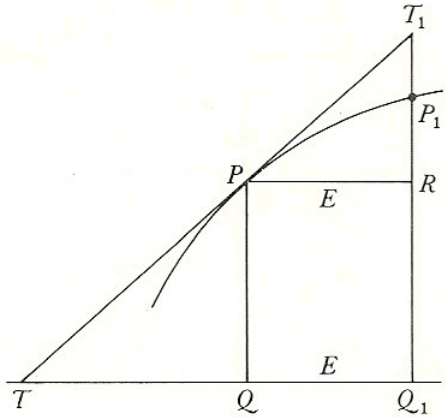

Figura 4: Metodo per ricavare la tangente di Fermat

Fermat considerava un segmento QQ_1 sull'asse delle ascisse, pari ad un incremento della subtangente di valore E. Detti P1 e T1 i corrispondenti punti sulla curva e sulla retta tangente, osservava che i triangoli TQP e PRT_1 erano simili, cosicché:

$$TQ : PQ = E : T_1R.$$

A questo punto Fermat asseriva che i punti P_1 e T_1 erano estremamente vicini, cosicché T_1R era quasi P_1R: pertanto,

$$TQ : PQ = E : (P1Q1 - QP)$$

Utilizzando la moderna notazione, e ponendo $f(x) = PQ$, $f(x+E) = P_1Q_1$, si può scrivere:

$$TQ : f(x) = E : (f(x+E) - f(x))$$

cosicché

$$TQ = \frac{E \cdot f(x)}{f(x+E) - f(x)}$$

Per le curve che Fermat trattava, era possibile, a questo punto, dividere immediatamente per E sia il numeratore che il denominatore della frazione e procedere con delle semplificazioni, grazie al fatto che venivano considerate solo particolari curve polinomiali. Fermat, quindi, (con uno scarto logico rispetto all'operazione appena compiuta) poneva $E = 0$ e otteneva il valore di TQ cercato. Appare evidente che il procedimento del matematico francese aveva la forma delle odierne tecniche del calcolo differenziale, ma aggirava completamente il problema del limite, finendo così per compiere assunzioni tra loro contraddittorie (la divisibilità per E e la posizione di E uguale a 0). Si può, infatti, affermare che, essendo f un polinomio, il procedimento di dividere per E e poi porlo uguale a 0 è equivalente al procedimento odierno di calcolare il limite per E che tende a 0. Insomma, il procedimento funzionava bene in alcuni casi particolari, ma falliva negli altri.

Il metodo di tipo geometrico proposto dall'inglese **Isaac Barrow** (1630-1677) nella sua opera principale, le *Lectiones Geometricae* del 1669 è di particolare interesse, perché, come si vedrà in seguito, influenzò non poco il lavoro del più famoso allievo di Barrow, Isaac Newton. Il ragionamento di Barrow faceva uso del cosiddetto *triangolo caratteristico*, il triangolo rettangolo avente per cateti gli incrementi considerati dell'ascissa e dell'ordinata della curva. Barrow affermava che, considerando archi $PP0$ molto piccoli, essi

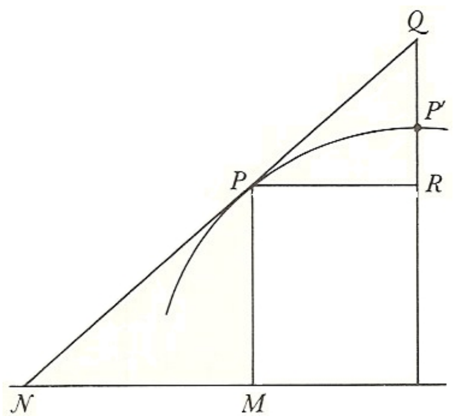

Figura 5: Metodo per ricavare la tangente di Barrow

potevano essere identificati con l'ipotenusa PQ del corrispondente triangolo caratteristico, che risultava simile al triangolo PNM formato dalla tangente alla curva in P con l'asse delle ascisse. La pendenza $\frac{QR}{PR}$, pari al rapporto a e tra gli incrementi, risultava uguale a quella $PM\ MN$ propria della tangente. Le tecniche di calcolo usate poi da Barrow per determinare la tangente erano analoghe a quelle impiegate da Fermat: sostituire, nell'equazione della curva (ad esempio, $y^2 = px$), le variabili x e y con le loro varianti incrementate $x + e$ e $y + a$:

$$(y + a)^2 = p(x + e)$$

sviluppare poi i calcoli algebrici:

$$y^2 + 2ay + a^2 = px + pe$$

; sottrarre infine membro a membro l'equazione originale ($y^2 = px$, nel caso considerato) , rimanendo così con un'equazione in cui potevano comparire termini di secondo grado negli incrementi a ed e:

$$2ay + a^2 = pe$$

: Barrow cancellava ora tali termini di secondo grado (il che è equivalente a far coincidere l'arco di curva considerato con l'ipotenusa del triangolo caratteristico), concludendo, ad esempio, che

$$\frac{a}{e} = \frac{p}{2y}$$

ove, per quanto stabilito nel ragionamento geometrico precedente, $\frac{a}{e} = \frac{PM}{MN} = \frac{y}{NM}$, cosicché:

$$\frac{y}{NM} = \frac{p}{2y}$$

In tal modo Barrow determinava la lunghezza della subtangente NM, e poteva dunque determinare la tangente. Anche in questo caso, però, il procedimento andava a buon fine considerando solo alcune curve di tipo polinomiale.

2.2 Il problema dei massimi e dei minimi

Il problema dei massimi e dei minimi nasceva dalla generalizzazione di problemi geometrici, come quello di determinare la forma del parallelepipedo a base quadrata con il volume massimo tra quelli inscritti in una sfera (già Kepler si era dedicato a questo problema, per ragioni pratiche: la misurazione del volume delle botti, nell'opera *Stereometria Doliorum*). Anche questo problema, come quello trattato in precedenza, condurrà allo sviluppo del calcolo differenziale. **Fermat** adottò, nel *Methodus ad Disquirendam*, un approccio simile a quello con cui aveva affrontato il problema delle tangenti. Come esempio, trattava il problema di determinare, dato un segmento di linea retta, il punto che lo divide in modo tale che il rettangolo delimitato dai due sottosegmenti abbia area massima.

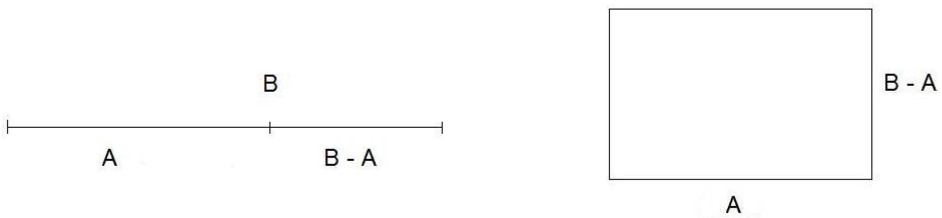

Figura 6: Un esempio di problema di massimo

Fermat chiamava B la lunghezza dell'intero segmento, e A la lunghezza della prima delle due porzioni in cui esso era suddiviso. Il rettangolo aveva pertanto area $A(B - A) = AB - A2$. Anche in questo caso Fermat rimpiazzava il valore generico della variabile nel caso specifico, A con il valore incrementato $A + E$. Il ragionamento a questo punto procedeva, poco linearmente, nella seguente direzione: se A fosse stato il valore che massimizzava l'area, l'area non sarebbe potuta essere inferiore incrementando di poco il valore di A. Pertanto eguagliava le aree relative ad A e A + E, ottenendo un'equazione:

$$(A + E)(B - A - E) = AB + EB - A^2 - 2AE - E^2 = AB - A^2$$

Semplificando l'espressione, e dividendo ambo i membri per l'incremento E, otteneva:

$$B = 2A + E$$

quindi annullava l'incremento E e trovava il risultato (corretto) B = 2A. Anche in questo caso, tuttavia, la trattazione del problema del limite non era rigorosa e inoltre un simile procedimento era applicabile a una casistica ristretta: si inizia, però, a intuire un legame tra punto di massimo o di minimo con la derivata.

2.3 Le serie infinite

L'interesse dei matematici verso le serie infinite è un argomento essenzialmente nuovo che era stato anticipato nell'antichità solo da qualche algoritmo iterativo e dal "metodo" di Archimede che esplicheremo successivamente. Se i greci professavano un *horror infiniti*, i filosofi scolastici del tardo medioevo facevano frequentemente all'infinito, sia potenziale che attuale. In Inghilterra un logico **Richard Suiseth** (attivo verso il 1350) noto col nome di **Calculator** risolse la serie

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

Calculator dava una lunga e tediosa dimostrazione verbale.
Nicola d'Oresme(1323-1382) successivamente diede una dimostrazione utilizzando un metodo grafico da lui ideato. Il contributo di Oresme allo studio delle serie infinite non si limitò a questo esempio ma a molti altri casi.
Un altro matematico che diede un grosso contributo a tale tematica fu **Pietro Mengoli** (1625-1686). Mengoli infatti riuscì, tra le altre cose, per primo a dimostrare la non convergenza della serie armonica (risultato spesso attribuito a Jacques Bernoulli) e la convergenza della serie armonica a segno alternato a $\ln 2$.
Queste considerazioni verranno riprese prima da Wallis per il problema della quadratura e poi da Newton e Leibniz con il calcolo infinitesimale.

2.4 Il problema della quadratura

Il problema di trovare aree di superfici, lunghezze di curve e volumi di solidi aveva anch'esso ovvie implicazioni di natura pratica. La misurazione dei campi o in generale di distanze è sempre stata un'esigenza molto forte. Già le prime civiltà riuscirono a trovare le misure di figure molto regolari.

Archimede (287 a.c. - 212 a.c) fu tra i primi a utilizzare metodi di natura "infinitesimale" per il problema di quadratura. In una sua opera *Il Metodo*, ritrovata nel 1906 infatti fornisce una tecnica del tutto nuova e innovativa per gli anni in cui viveva. *Il metodo*, così come ci è pervenuto, contiene la maggior parte del testo di una quindicina di proposizioni sotto forma di lettere inviate a Eratostene, matematico e bibliotecario del Museo di Alessandria. L'autore nell'introduzione spiega che usava questo metodo,

che a suo avviso mancava di rigore, per trovare un certo risultato e poi usava il metodo di esaustione di Eudosso per dimostrarne la veridicità. Questo suo metodo era basato sull'assunzione che un 'area equivalesse alla somma di segmenti di retta, che una retta equivalesse alla somma di punti e che un volume equivalesse alla somma di superfici. Faceva poi delle considerazioni di natura meccanica per trovare un'area, un volume o una lunghezza.
Nella proposizione 1 per esempio, Archimede calcola l'area di un segmento di parabola mettendo in equilibrio su una bilancia dei segmenti rettilinei allo stesso modo che nella meccanica si mettono in equilibrio dei pesi. Egli immaginava le aree del segmento di parabola ABC e del triangolo AFC (ove FC è tangente alla parabola in C) come formate dalla totalità di un insieme di parallele al diametro QB della parabola, quali OP per la parabola e OM per la parabola e OM per il triangolo (come nella figura 7).

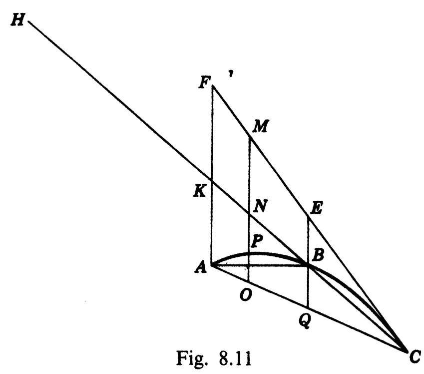

Fig. 8.11

Figura 7: Area di una segmento parabolico col "Metodo" di Archimede.

Se ora si collocasse in H (ove $HK = KC$) un segmento rettilineo uguale a OP, questo farebbe esattamente equilibrio al segmento OM collocato dove è ora, essendo K il fulcro (Ciò può essere dimostrato mediante la legge della leva e la proprietà della parabola). Pertanto l'area della parabola, se collocata con il suo centro di gravità in H, farà equilibrio al triangolo il cui centro di gravità si trovi sulla linea KC a un terzo della distanza da K aC. Da ciò si può vedere facilmente che l'area del segmento di parabola è un terzo dell'area del triangolo AFC, o quattro terzi dell'area del triangolo inscritto ABC.
In tal senso in *Il Metodo* ci sono altre costruzioni simili: Archimede però non riteneva queste come dimostrazioni attendibili per la mancanza di rigore, anche perché suddividendo le aree in segmenti utilizzava il concetto di infinito ancora non metabolizzato nella matematica dell'epoca.

Un successivo sviluppo alle idee di Archimede arriva circa 1800 anni dopo. **Galileo Galilei** (1564 -1642), nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* si occupò della questione da un punto di vista prettamente fisico, analizzando il grafico della velocità di un corpo in moto uniformemente accelerato in funzione del tempo: lo scienziato pisano si accorse infatti che l'area del triangolo sottostante la retta della velocità doveva rappresentare la distanza percorsa dal corpo nel tempo considerato. Galilei affermava infatti che il segmento $A'B'$, preso in un generico punto A'

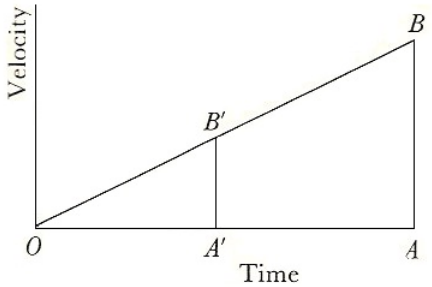

Figura 8: Grafico della velocità di un corpo uniformemente accelerato

dell'intervallo OA, deve rappresentare sia la generica velocità istantanea del corpo nel tempo OA', sia la distanza infinitesima percorsa dal corpo (considerando la velocità stessa moltiplicata per un elemento infinitesimo di tempo) in quell'istante. Essendo il triangolo OAB composto da tutte le infinite linee $A'B'$, corrispondenti agli infiniti istanti che costituivano l'intervallo di tempo OA, la sua area doveva equivalere alla distanza totale percorsa nell'intervallo stesso.

Il ragionamento di Galilei, poco consistente se visto con gli occhi di oggi (non essendo ben definito il concetto di elemento infinitesimo di tempo), fu ripreso e sviluppato in un metodo puramente geometrico da un discepolo dello scienziato toscano, **Bonaventura Cavalieri** (1598 - 1647), nell'opera *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova quadam Ratione Promota* del 1635. Il metodo degli indivisibili di Cavalieri si basava proprio sul principio di considerare l'area di una superficie come unione di infiniti segmenti paralleli, gli indivisibili dell'area, considerati come elementi infinitamente piccoli di area. Analoga trattazione avevano i volumi (costituiti da inifinite rette) e le curve (costituite da infiniti punti). Il metodo degli indivisibili si può far derivare dal *Principio di Cavalieri*: "se due solidi hanno uguale altezza e se le sezioni tagliate da piani paralleli alle basi e ugualmente distanti da queste stanno sempre in un dato rapporto, anche i volumi dei solidi staranno in questo rapporto." Questo enunciato, noto anche come Principio di Cavalieri

degli indivisibili, contiene in sé elementi base del calcolo integrale. Il termine usato da Cavalieri, indivisibile, potrebbe tradursi con l'espressione moderna di figura geometrica di spessore infinitesimo. Per cercare di giustificare questa affermazione osserviamo come egli dimostrò un teorema che, utilizzando la notazione del calcolo infinitesimale, è equivalente alla formula moderna $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ con $n = 1..9$.
Vediamolo nel piano: per dimostrare questa formula egli confrontava le potenze dei segmenti di un parallelogramma paralleli alle basi con le corrispondenti potenze dei segmenti dell'uno o dell'altro dei due triangoli in cui la diagonale divide il parallelogramma. Il parallelogramma $ACDF$ viene diviso dalla

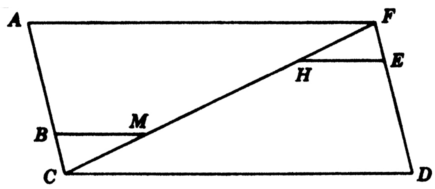

Figura 9: Calcolo di un integrale utilizzando il *Principio di Cavalieri*

diagonale CF in due triangoli e si considera il segmento HE chiamandolo indivisibile del triangolo FCD parallelo alla base CD. Prendendo $CB = FE$ e tracciando BM parallelo a CD si individua un indivisibile BM del triangolo AFC il quale è sovrapponibile a HE e quindi equivalente ad esso. È possibile accoppiare tutti gli indivisibili contenuti nel triangolo FCD con i corrispondenti indivisibili uguali contenuti nel triangolo AFC; i due triangoli hanno dunque aree uguali. Poiché il parallelogramma è la somma degli indivisibili contenuti nei due triangoli, è chiaro che la somma delle prime potenze dei segmenti contenuti in uno dei due triangoli componenti è uguale alla metà della somma delle prime potenze dei segmenti contenuti nel parallelogramma: in termini moderni

$$\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$$

Con ragionamenti simili Cavalieri dimostrò che la somma dei quadrati dei segmenti in un triangolo era 1/3 della somma dei quadrati contenuti nel parallelogramma; per i cubi mostrò che il rapporto era 1/4, fino a giungere nel 1647 all'enunciato generale per le potenze n-esime. Questo teorema aprì la strada a numerosi procedimenti di calcolo effettivo (algoritmi) di aree e volumi, procedimenti successivamente inquadrati nel calcolo infinitesimale. Cavalieri, inoltre, pare aver riconosciuto che il numero degli indivisibili all'interno di un'area dovesse essere infinito, ma non sembra aver elaborato concettualmente il problema: nelle sue *Exercitationes Geometricae Sex* del

1647 paragonava infatti i punti che costituiscono un segmento ai grani che compongono un rosario, le rette che compongono una superficie ai fili che compongono una stoffa e i piani che compongono un solido alle pagine che compongono un libro.

Fermat già nel 1629 riuscì a trovare un modo per calcolare l'area sotto curve del tipo $y = x^m$ Per trovare tale area sembra che Fermat si sia servito in un primo momento di formule per calcolare le somme di potenze di interi, o di disugualianze della forma

$$1^m + 2^m + 3^m ... n^m > \frac{n^{m+1}}{m+1} > 1^m + 2^m + 3^m ... (n-1)^m$$

per stabilire il risultato valido per tutti i valori interi positivi di m. Più tardi, però, Fermat elaborò un metodo migliore, applicabile anche ai casi in cui m aveva un valore frazionario. Presentiamo ora un esempio del metodo usato da Fermat: sia data la curva rappresentata dall'equazione $y = x^n$, e si voglia trovare l'area compresa da tale curva, nell'intervallo fra $x = 0$ e $x = a$. Fermat suddivideva allora l'intervallo $[0, a]$ in un numero infinito di sottointervalli prendendo come estremi i punti aventi le ascisse a, aE, aE^2, aE^3, ... , aE^n ove E era una quantità minore di uno. Da questi punti tracciava le ordinate alla curva e quindi otteneva un'approssimazione dell'area compresa sotto alla curva per mezzo di rettangoli (come nella figura 10).

Le aree dei successivi rettangoli circoscritti, a cominciare dal più grande,

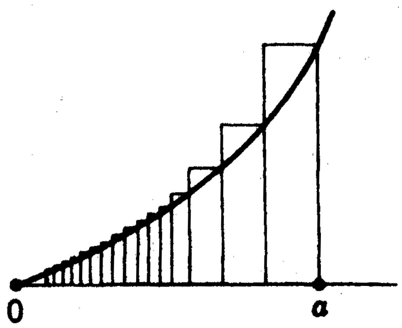

Figura 10: Calcolo di un integrale col metodo di Fermat

erano date dai termini della progressione geometrica $a^n(a - aE)$, $a^nE^n(aE - aE^2)$, $a^nE^n(aE^2 - aE^3)$, .. . La somma di questi termini è

$$\frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}} \quad \text{oppure} \quad \frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+...E^n}$$

Con il tendere di E verso uno, ossia via via che i rettangoli diventano più sottili, la somma delle aree dei rettangoli si avvicina all'area compresa dalla curva. Ponendo $E = 1$ nella formula della somma dei rettangoli otteniamo $\frac{(a^{n+1}}{n+1}$, che è l'area compresa dalla curva $y = x^n$ nell'intervallo che va da $x = 0$ a $x = a$.
Per mostrare che questo risultato è valido anche per valori frazionali di n, facciamo $n = \frac{p}{q}$. La somma della progressione geometrica è allora

$$a^{(p+q)/q}\frac{(1-E^q)}{1-E^{p+q}} = a^{(p+q)/q}\frac{1+E+E^2+...E^{p-1}}{1+E+E^2+...E^{p+q-1}}$$

e quando E=0, tale somma diventa

$$\frac{q}{p+q}a^{(p+q)/q}$$

Se, nella nozione moderna vogliamo ottenere $\int_a^b x^n dx$, basta soltanto osservare che ciò equivale a $\int_0^b x^n dx - \int_0^a x^n dx$. Per valori negativi di n (tranne che per $n = -1$) Fermat usava un procedimento simile, con la differenza che E veniva preso maggiore di uno e tendeva verso uno da un valore superiore: l'area trovata era in questo caso quella compresa dalla curva che andava da $x = a$ all'infinito. PEr trovare $\int_a^b x^{-n} dx$, bastava osservare che ciò era equivalente a $\int_a^\infty x^{-n} dx - \int_b^\infty x^{-n} dx$.

Per $n = -1$ il procedimento si dimostrò inapplicabile. Tuttavia un altro matematico, **Gregorio di San Vincenzo** (1584-1667) aveva risolto questo caso nella sua opera *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni*. Gran parte di quest'opera fu scritta prima che Fermat si occupasse della quadratura e del problema della tangente, anche se venne pubblicata solo nel 1647. In questo trattato Gregorio aveva mostrato che se lungo l'asse della x si segnava a partire da x=a una serie di punti in modo che gli intervalli compresi fra di essi crescessero in proporzione geometrica, e se da questi punti si tracciavano le ordinate all'iperbole $xy = 1$, allora le aree delimitate e dalle ordinate successive erano uguali. Ovvero, col crescere dell'ascissa in proporzione geometrica, l'area compresa tra la curva e l'asse delle ascisse cresceva in proporzione aritmetica. Era dunque noto a Gregorio che $\int_a^b x^{-1} dx = \ln b - \ln a$.

Anche il grande matematico inglese **John Wallis**(1616-1703) diede un contributo alla risoluzione del problema della quadratura riprendendo le considerazioni, viste in precedenzam, di Cavalieri da una parte e le argomentazioni di Nicola d'Oresme e di Pietro Mengoli dall'altra. Nella sua opera *Arithmetica inifinitorum* del 1655 egli aritmetizza la *Geometria indivisibilibus* di Cavalieri. Infatti se , come abbiamo visto, Cavalieri era giunto al risultato

$$\int_0^a x^M dx = \frac{a^{m+1}}{m+1}$$

attraverso un laborioso procedimento consistente nell'accoppiare indivisibili geometrici di un parallelogramma con quelli di uno dei due triangoli in cui esso era diviso da una diagonale, Wallis abbandonò ogni riferimento a considerazioni geometriche dopo avere assegnato valori numerici agli infiniti indivisibili delle figure. Se, per esempio , si vogliono confrontare i quadrati degli indivisibili del triangolo con i quadrati degli indivisibili del parallelogramma, si prende la lunghezza del primo indivisibile uguale a zero , quella del secondo come uguale a uno, quella del terzo come uguale a due, e così via sino all'ultimo indivisibile, la cui lunghezza sarà uguale a $n-1$ se vi sono n indivisibili. Il rapporto tra i quadrati degli indivisibili delle due figure sarebbe allora

$$\frac{0^2+1^2}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

se vi fossero soltanto due indivisibili in ciascuna figura; oppure

$$\frac{0^2+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

se ve ne fossero tre; oppure

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2}{3^2+3^2+3^2+3^2} = \frac{14}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$

se ve ne fossero quattro. Per $n+1$ indivisibili il risultato è

$$\frac{0^2+1^2+...(n-1)^2+n^2}{n^2+n^2+...+n^2+n^2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$$

e se n è infinito il rapporto è ovviamente $\frac{1}{3}$ (per n infinito, il secondo termine $\frac{1}{6n}$ diventa $\frac{1}{\infty}$ ossia zero. Wallis fu qui il primo a usare il simbolo ∞ per indicare infinito). In termini moderni questo si traduce $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. Lo stesso procedimento viene esteso da Wallis a potenze inter superiori di x. Per induzione incompleta concluse che

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$$

per tutti i valori interi di m.
Fermat criticò l'induzione di Wallis, poiché non possedeva il rigore del metodo di induzione completa frequentemente usato da Fermat stesso. Inoltre,

Wallis si avvalse di un principio di interpolazione ancor più discutibile, in base al quale assunse che il suo risultato fosse valido anche per valori frazionari di m, oltre che per valori negativi diversi da -1. Wallis diede altri contributi all'analisi infinitesimale. Riuscì a determinare il valore di $\int_0^1 \sqrt{x - x^2}dx$ anticipando in parte le ricerche di Eulero sulla funzione gamma. Inoltre riuscì a calcolare altri integrali utilizzando alcune considerazioni riguardanti le serie e i prodotti infiniti.

3 La nascita del Calcolo

Il momento in cui si capisce che c'è un legame tra derivata e integrale (Teorema fondamentale del calcolo) è considerato la nascita del Calcolo Infinitesimale. Tale risultato viene raggiunto prima da Newton e poi da Leibniz in maniera completamente indipendente.

3.1 Newton

Isaac Newton (1642-1727), nato nel paesino inglese di Woolsthorpe-by-Colsterworth, è considerato il successore di Barrow, essendo stato anche suo allievo. Uno zio, che aveva studiato a Cambridge, notò le straordinarie doti intellettuali del nipote e persuase la madre di Isaac a mandare il figlio a Cambridge, dove, grazie alle opere dei grandi matematici del passato, come Euclide, si avvicinò e si appassionò alla matematica. Per gran parte dell'anno accademico 1665-1666, mentre Newton frequentava l'università, il suo college rimase chiuso a causa della peste e lui tornò a casa per evitare il contagio. Fu proprio in quei mesi che egli pose le basi per quattro delle sue principali scoperte:

- la formula del binomio;
- il calcolo infinitesimale;
- la legge di gravitazione universale;
- la natura dei colori.

Newton scoprì il calcolo infinitesimale negli anni 1665-1666 e nel corso del decennio successivo stese almeno tre esposizioni esaurienti della nuova analisi. Il *De Analysi* fu fatto circolare tra gli amici, ma Newton non fece nessun passo per pubblicare i suoi risultati. La sua prima esposizione pubblicata del calcolo infinitesimale apparve nel *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, del 1687. Questo libro viene generalmente descritto come quello che presenta i fondamenti della fisica e dell'astronomia utilizzando il linguaggio della geometria pura. Nonostante quest'opera presenti in larga parte un'esposizione in forma sintetica, vi sono alcuni passi in forma analitica. E' infine interessante notare che qui troviamo un tentativo di definizione di limite di una funzione: delle quantità, o dei rapporti di quantità, che in un intervallo di tempo finito qualsiasi convergono con continuità verso l'uguaglianza, e che prima della fine di tale intervallo si avvicinano l'una all'altra così tanto che la loro differenza è inferiore a qualsiasi differenza data e finiscono per diventare uguali.

Newton considerava una curva tale che l'area compresa sotto la curva stessa avesse formula $z = ax^m$ con m esponente intero o razionale.

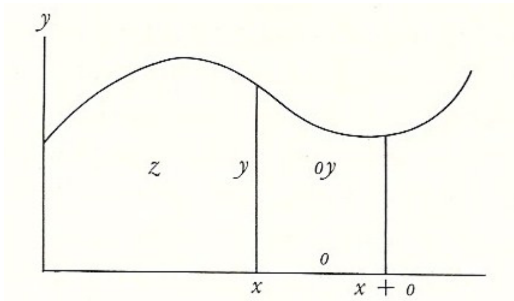

Figura 11: Derivata di una curva di area nota

Un incremento infinitesimo nella variabile x era denotato da Newton con la lettera o, similmente a quanto compiuto da Fermat usando il simbolo E. Inoltre Newton denotava con oy l'incremento dell'area sottostante la curva (dato, evidentemente, dall'incremento infinitesimo dell'ascissa moltiplicato per l'ordinata). L'equazione risultante sostituendo x con $x+o$ e z con $z+oy$ era dunque: $z + oy = a(x + o)^m$ Il matematico inglese applicava a questo punto il teorema binomiale (da lui generalizzato alle serie numeriche già nel 1665) al secondo membro dell'equazione (ottenendo una serie infinita nel caso di m esponente frazionario):

$$a(x+o)^m = ax^m + amx^{m-1}o + a\frac{m^2-1}{m}x^{m-2}o^2 + ...$$

quindi, analogamente a quanto compiuto dai suoi predecessori, sottraeva membro a membro l'equazione dell'area,

$$oy = amx^{m-1}o + a\frac{m^2-1}{m}x^{m-2}o^2 + ..$$

divideva ambo i membri per l'incremento o,

$$y = amx^{m-1} + a\frac{m^2-1}{m}x^{m-2}o + ..$$

cancellava i termini in cui fosse ancora presente o, e otteneva così:

$$y = amx^{m-1}$$

Dato che l'odierna regola di derivazione dei polinomi era nota già a Barrow, ciò ha come diretta conseguenza l'osservazione che la curva assume un valore y pari al tasso di variazione dell'area in funzione dell'ascissa x, ovvero che la quadratura risulta essere l'operazione inversa della differenziazione. Sebbene altri matematici prima di Newton (fra cui Barrow stesso) avessero intuito il teorema fondamentale del calcolo per casi particolari, Newton risulta essere il primo ad averne dato una dimostrazione generale. Si noti che nel De Analysi gli incrementi delle variabili erano visti come quantità statiche e infinitamente piccole, in accordo con la visione di Cavalieri e la sua dottrina degli indivisibili. La concezione di Newton si allontanò però dal modello di Cavalieri quando le sue idee sul calcolo infinitesimale furono esposte nel *Methodus Fluxionum et Serierum In*

nitarum, un libro scritto nel 1671 (ma pubblicato solo più tardi, nel 1736). In tale opera egli affermava di guardare alle variabili coinvolte nel calcolo non come a quantità statiche, determinate dall'aggregazione di elementi infinitesimali, bensì come a quantità dinamiche, corrispondenti al moto nello spazio di oggetti geometrici (punti, linee, piani). Tali quantità variabili nel tempo erano chiamate da Newton *fluenti*, e i loro tassi di variazione nel tempo erano detti *flussioni* (da cui il titolo dell'opera). Se i

fluenti erano denotati dalle lettere x, y, le rispettive flussioni erano denotati con $\dot{x}$, $\dot{y}$. Nelle nuove notazioni, gli incrementi infinitesimi dei fluenti erano scritti come$\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ e ciò consentiva di stabilire il rapporto tra le flussioni,dato quello tra i fluenti. Ad esempio, se

$$y = x^n$$

Newton poteva scrivere

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n$$

e procedere come prima, sviluppando il secondo membro con il teorema binomiale, sottraendo l'equazione originale membro a membro, dividendo ambo i membri per o e trascurando i termini ancora contenenti o. Il risultato era

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$$

Newton condivideva con il suo maestro Barrow l'idea che una dimostrazione matematica avesse bisogno di ricorrere ad argomenti di carattere geometrico per essere davvero rigorosa. Era inoltre consapevole che le tecniche di calcolo adottate nel *De Analysi* e nel *Methodus Fluxionum*, in particolare l'espediente di eliminare i termini contenenti l'incremento o, non erano giustificate in maniera soddisfacente. Nel *Tractatus de Quadratura Curvarum*, scritto nel 1676, sembra che Newton contestasse proprio le basi teoriche di tale procedimento, giacché vi rimarcava che *"in rebus mathematicis errores quam minimi non sunt contemnendi"* ("in matematica gli errori, per quanto piccoli, non devono essere trascurati"): cercò pertanto di emendare il proprio ragionamento: il metodo da lui proposto era detto *"metodo dei primi rapporti delle quantità nascenti e degli ultimi rapporti delle quantità evanescenti"*. Newton considerava non più gli incrementi a sé stanti, bensì i loro rapporti, sia nel caso di quantità inizialmente nulle, che poi crescevano nel tempo ("nascenti"), sia in quello di quantità inizialmente positive che decrescevano verso lo zero ("evanescenti"). Esaminando ad esempio il caso della funzione $y = x^n$, Newton trovava il rapporto tra le rispettive flussioni incrementando la x di una quantità o e sviluppando i calcoli:

$$(x+o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2} + ...$$

poteva confrontare tra loro gli incrementi della y e della x (rispettivamente, $nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o2x^{n-2} + ...$ e o), affermando che il loro rapporto era pari a

$$nx^n - 1 + \frac{n^2-n}{2}ox^{n-2} + ..$$

A questo punto Newton affermava di "lasciar svanire gli incrementi", e otteneva il cosiddetto "ultimo rapporto", pari a $\dot{y} = nx^{n-1}$. Questo procedimento non appare, agli occhi di un moderno, più rigoroso dei precedenti, dato che lascia insoluto il problema dell'incremento evanescente, ma Newton apprezzava il fatto di non dover introdurre quantità infinitamente piccole, e ne percepiva un' identità con i metodi geometrici usati dai matematici dell'antichità, come Archimede.

Ma Newton sapeva di più: scrivendo qualsiasi curva $y = f(x)$ come polinomio di grado infinito $f(x) = ax + bx^2 + cx^3 + ..$, poi eseguiva le derivate su f e sul polinomio e mediante il principio di identità dei polinomi ricavava i coefficienti $(a; b; c; ..)$. Questa idea era probabilmente ricavata dagli scritti di Torricelli, che diceva che se $y = x^n$ allora la sua area era $A = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Inoltre questa osservazione permetteva un metodo per invertire $f(x)$: basta scrivere $x = a + by + cy2 + ..$, inserire in $y = f(x)$, ancora derivare e ricavare infine i coefficienti.

3.2 Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), filosofo e matematico tedesco nato a Lipsia, è considerato, con Newton, il padre del moderno calcolo infinitesimale. Studiò teologia, legge, filosofia, matematica, ma i suoi interessi iniziali non furono prettamente matematici, infatti conseguì il dottorato in legge e poi prese servizio come diplomatico presso la famiglia degli Hannover. In qualità di influente rappresentante di uomini di Stato, Leibniz viaggiò molto e conobbe Huygens, grazie al quale ebbe origine il suo interesse per la matematica. Nonostante i suoi importanti contributi alla storia del pensiero matematico e filosofo, è da sottolineare come Leibniz avesse una predilezione per l'aspetto pratico delle scienze: al momento della fondazione dell'Accademia delle Scienze di Berlino, da lui promossa, si raccomandò che l'istituzione incoraggiasse particolarmente le invenzioni meccaniche e le scoperte in chimica e fisiologia che risultassero utili all'umanità. Preferì, inoltre, usare il tedesco anziché il latino, nelle proprie opere, affinché fossero maggiormente comprensibili anche ad un pubblico non strettamente accademico. Durante uno dei suoi viaggi capitò anche a Londra e fu prevalentemente intorno a questa visita che si accentrò, più tardi, la polemica sulla priorità della scoperta del calcolo infinitesimale, giacché pareva che Leibniz avesse visto una copia del *De Analysi* di Newton. Ma è da dubitare che a tale data egli potesse trarne alcun vantaggio, poiché non aveva ancora una buona preparazione in geometria e analisi. Nei due anni successivi Leibniz diede vita al suo calcolo differenziale.

L'importanza di Leibniz risiede nell'aver introdotto un'operazione, la differenziazione, che opera non sulle funzioni, che quando Leibniz scriveva ancora non esistevano, ma sulle variabili e sulle loro combinazioni, e che corrisponde a prendere la differenza tra due valori infinitamente vicini delle variabili. Sono queste differenze (o differenziali) che Leibniz prese come parametri principali al posto della sottotangente e indicò con i simboli dx e dy questi incrementi infinitesimi di quantità date x e y. Tale scelta gli permise di superare le difficoltà, grazie alle regole di differenziazione che egli enunciò in dettaglio all'inizio della sua famosa opera del 1684 intitolata *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus ,qua nec irrationales quantitates moratur* (Nuovo metodo per trovare i massimi e i minimi e anche le tangenti, non ostacolato da quantità irrazionali). Qui Leibniz presentò le formule

$$d(xy) = ydx + xdy, \quad d(\frac{x}{y}) = \frac{ydx - xdy}{y^2}, \qquad d(x^n) = nd(x^{n-1}).$$

Queste formule venivano ottenute trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, ad esempio si ha

$$d(xy) = (x+dx)(y+dy)-xy = xy+xdy+ydx+dxdy-xy = xdy+ydx+dxdy$$

e poiché dx e dy sono quantità infinitamente piccole allora il termine $dxdy$ è infinitamente infinitesimo e dunque può essere trascurato, ottenendo la formula voluta.

Si tratta evidentemente di una scelta non facile, non tanto per l'intervento di quantità infinitesime, dato che queste erano ormai entrate da tempo nel linguaggio matematico, quanto perché queste quantità perdevano il loro carattere ausiliario e di artifici tecnici, destinati a sparire nella formulazione finale, per assumere invece il ruolo di parametri fondamentali per la descrizione delle curve. Le difficoltà concettuali di questa formulazione sono evidenti, al punto che Leibniz cercò di mascherarle nascondendo il carattere infinitesimo dei differenziali, d'altronde implicito nelle regole di differenziazione che non potrebbero sussistere altrimenti, ed introducendo questi ultimi per mezzo della tangente, peraltro definita più avanti come quella retta che congiunge punti infinitamente vicini alla curva. Nonostante ciò Leibniz era ben cosciente della superiorità del suo metodo rispetto a quelli precedenti: "Una volta noto l'algoritmo, per cosi dire, di questo calcolo, che chiamo differenziale, tutte le altre equazioni differenziali si possono ottenere mediante il calcolo comune, e così trovare i massimi e i minimi, nonché le tangenti, senza che vi sia bisogno di eliminare le quantità fratte o irrazionali, o altri impicci, come invece si doveva fare con i metodi finora pubblicati." Inoltre, mette in luce il ruolo determinante della sostituzione dei differenziali alla sottotangente: "I metodi finora pubblicati non hanno un tale gradino intermedio [il calcolo del differenziale], ed infatti usano per lo più rette come la sottotangente o altre simili, ma non il segmento dy..., il che scombina tutto; da qui deriva che si debbano in primo luogo eliminare le quantità fratte ed irrazionali che contengono le variabili."

La differenziazione assume, dunque, la posizione centrale nell'elaborazione leibniziana, una chiave che da una parte apre la strada alle molteplici scoperte successive, ma allo stesso tempo richiede una notevole dose di coraggio intellettuale, dato che attraverso di essa le quantità evanescenti fanno il loro ingresso in geometria. Più secondario è invece il ruolo delle quadrature, un problema che, come abbiamo visto, assieme a quello delle tangenti è tradizionalmente associato alle origini del calcolo infinitesimale. Leibniz, poi, enuncia il teorema fondamentale del calcolo: "Fondamento del calcolo:

Le differenze e le somme sono tra loro reciproche, cioè la somma delle differenze della serie è il termine della serie, e la differenza delle somme è lo stesso termine della serie, la prima delle quali scrivo $\int dx = x$, e la seconda $d \int x = x$."

poiché la somma e la differenza sono evidentemente operazioni inverse l'una dell'altra, ne segue immediatamente che invertendo la differenziazione si ottengono le quadrature: "Dunque, come assegnato il valore di una certa quantità, come y, per mezzo di un'altra indeterminata quale x, si può ottenere il valore di dy (differenza tra due y contigue) tramite x e dx (differenza di due x contigue), ovvero come, data una quantità y si può trovare la differenza dy, il che non è altro che trovare le tangenti alle curve; così reciprocamente, dato il valore di dy, nel modo che si è detto, ovvero data la differenza delle y, trovare il termine y è trovare la somma di tutte le differenze dy; poiché la differenza tra due estreme y finite è la somma di tutte le differenze intermedie; e posta una delle estreme essere zero, ossia che crescendo si cominci da 0, la somma sarà l'ultima y. Di qui, dato un termine v che stia alla costante a come dy sta a dx, il rettangolo ay sarà uguale alla somma di tutte le vdx, che si scrive $\int vdx$, cioè sarà uguale all'area della figura composta dalle ordinate v moltiplicate per i rispettivi elementi dx delle ascisse. E così, rimontando dal valore delle differenze dy (ovvero $\frac{vdx}{a}$) al valore di y (ovvero di $\int \frac{v}{a}dx$) si trova la quadratura della figura, la cui ascissa è x e l'ordinata v."

D'altra parte quello delle quadrature non è che un caso particolare del problema generale dell'integrazione delle equazioni differenziali, o come si diceva allora del problema inverso delle tangenti; ed è a quest'ultimo e alle sue applicazioni geometriche e meccaniche che Leibniz e la sua scuola dedicarono le proprie ricerche, cogliendo una serie di successi strepitosi. Ma il problema inverso delle tangenti si poneva nella sua generalità solo successivamente all'introduzione dei differenziali, ed apparteneva dunque non alla fase della scoperta ma a quella degli sviluppi del calcolo. In conclusione, i due problemi classici del calcolo, le tangenti e le quadrature, si trovano in posizione fortemente asimmetrica nell'elaborazione leibniziana: problema chiave il primo, la cui soluzione richiede innovazioni importanti ed ardite; marginale invece il secondo, la cui posizione concettuale si risolve completamente nella relazione tra differenza e somma, dunque nell'ambito di una semplice rilettura di Cavalieri nel linguaggio delle sequenze numeriche. La stessa decisione di Leibniz di limitare la *Nova Methodus*, l'opera cioè in cui egli esponeva per la prima volta i fondamenti del nuovo algoritmo, al solo calcolo differenziale, dopo una prima versione in cui le differenze e le somme giocavano ruoli simmetrici, è un indice ulteriore della preminenza concettuale della differenziazione rispetto all'integrazione, e della riduzione di questa alla prima.

3.2.1 L'importanza della notazione

Un altro aspetto importantissimo dell'opera di Leibniz è costituito dalle notazioni da lui introdotte. Nel 1676 Leibniz era giunto alla conclusione che Newton aveva raggiunto parecchi anni prima, ossia era in possesso di un metodo di grandissima importanza per la sua generalità. Sia che una funzione fosse razionale o irrazionale, algebrica o trascendente, potevano sempre essere applicate le operazioni del suo metodo per trovarne somme (integrali) e differenze (derivate). Rimanevano dunque da elaborare un linguaggio e una notazione che si addicessero a questa nuova branca della matematica. Leibniz aveva sempre avvertito l'importanza di una buona notazione come utile strumento per il pensiero e la sua scelta nel caso specifico del calcolo infinitesimale fu particolarmente azzeccata, tanto che è quella usata prevalentemente anche ora.

- Dopo vari tentativi fissò la sua scelta su dx e dy per indicare le minime differenze possibili (differenziali) di x e y

- In un primo tempo scrisse semplicemente $omn\ y$ (tutte le y) per indicare la somma di tutte le ordinate di una curva. Più tardi, però, usò il simbolo $\int y$ e, ancora più tardi, $\int ydx$, ove il simbolo dell'integrale è l'ingrandimento della lettera s che stava ad indicare il termine "summa".

- Per trovare le tangenti si richiedeva l'uso del *calculus differentialis*, mentre per trovare le quadrature si richiedeva quello del *calculus summatorius* o *calculus integralis*.

Leibniz fu uno dei più grandi inventori di notazioni (sotto questo aspetto fu superato soltanto da Euler): avvertiva l'importanza di una buona notazione come utile strumento per il pensiero umano. Fu il primo matematico di un certo livello a usare sistematicamente il punto come simbolo della moltiplicazione e a scrivere le proporzioni nella forma $a : b = c : d$. Inoltre fu in gran parte merito suo e di Newton se il segno di uguaglianza =, introdotto da Recorde, ebbe la meglio sul simbolo ∞ di Descartes. A Leibniz, poi, dobbiamo i simboli $\sim$ per "è simile a" e $\simeq$ per "è congruente a". Si osservi che la notazione di Leibniz è ancora oggi tra le più diffuse: la preferenza rispetto alla notazione di Newton (pure presente, ad esempio, in ambiti come la fisica matematica) può essere spiegata notando come le idee di Leibniz siano state riprese nel '700 da matematici come i fratelli Bernoulli o Eulero, mentre la predilezione per i ragionamenti geometrici avrebbe portato la scuola matematica inglese, erede di Newton, ad un sostanziale isolamento rispetto all'Europa continentale.

3.3 La disputa per l'invenzione del calcolo

A partire dal 1695 si accese una disputa tra Newton e Leibniz a causa di un presunto plagio, ad opera di Leibniz, delle scoperte di Newton, poiché sembrava che questi avesse visto alcuni documenti privati (che però oggi sappiamo non aveva mai ricevuto) o addirittura una copia del *De Analysi* ma, come già detto, di certo all'epoca avrebbe capito poco di quello che leggeva. Oggi è dunque abbastanza chiaro che, nonostante la scoperta di Newton abbia preceduto quella di Leibniz di circa 10 anni, quest'ultimo raggiunse i suoi risultati indipendentemente da quelli del matematico inglese. Inoltre a Leibniz va riconosciuta la priorità di pubblicazione: pubblicò infatti una esposizione del suo calcolo nel 1684 in una sorta di periodico mensile scientifico. C'è anche poi da dire che le scoperte di un grande matematico, come Newton, non diventano automaticamente parte della tradizione matematica. Esse possono andare perdute a meno che altri scienziati non le comprendano e non si interessino ad esse in misura sufficiente da considerarle da diversi punti di vista, generalizzandole, chiarendole e sottolineandone le implicazioni. Newton, purtroppo, non comunicava volentieri le proprie idee ai suoi colleghi, di conseguenza il metodo delle flussioni non era molto conosciuto al di fuori dell'inghilterra. Inoltre i principali allievi di Newton, Maclaurin e Taylor, si concentrarono principalmente sullo studio di serie infinite. Leibniz, al contrario, trovò devoti discepoli pronti a imparare il calcolo differenziale e integrale e a divulgarlo. Fra questi ci furono i due fratelli svizzeri Bernoulli e successivamente Euler.

3.4 La critica di Berkeley

Il vescovo e filosofo irlandese **George Berkeley** (1685-1753) propose una critica radicale all'analisi infinitesimale (così come sviluppata al suo tempo) nell'opuscolo *The Analyst*, pubblicato nel 1734. In particolare, Berkeley concentrò i propri appunti al procedimento adottato, come si è visto, dai principali matematici del Seicento, per calcolare i differenziali: apportare un incremento alla variabile e successivamente dopo aver diviso alcuni termini per esso porlo uguale a zero. L'inconsistenza logica di tale procedura fece descrivere a Berkeley i risultati dell'analisi come frutto di una fortuita compensazione di errori: In virtù di un duplice errore giungiamo, se non proprio alla scienza, per lo meno alla verità. La mancanza di rigore era così netta, a suo avviso, da spingerlo a dichiarare che la nuova disciplina fondata da

Newton e Leibniz pretendeva di ”provare i [propri] principi a partire dalle conclusioni”, anziché il contrario.

Inoltre, la critica del filosofo si spingeva fino alla definizione stessa delle flussioni di Newton, mai espressa rigorosamente dallo scienziato inglese: in uno dei passaggi più celebri dell'*Analyst* l'autore si domandava ”Che cosa sono queste flussioni? Le velocità di incrementi evanescenti? Essi non sono né quantità finite né quantità infinitesime, e tuttavia non sono un nulla. Perché non chiamarli spiriti di quantità sparite (ghosts of departed quantities)?”

Berkeley, infine, poneva rilievi alla stessa nozione di velocità istantanea che i lavori di Newton sulla fisica (e sul suo legame con il calcolo infinitesimale) avevano portato a considerare. Egli infatti concepiva il moto solo all'interno di un intervallo spazio-temporale definito, relativamente al quale si può calcolare la velocità media. Dal momento che affermava di non capire il significato delle quantità ”evanescenti” e ”nascenti” introdotte da Newton, era per lui dunque impossibile dare un senso alla proporzione tra flussioni che nella teoria newtoniana era alla base del concetto di velocità istantanea.

Riferimenti bibliografici

[1] Baldacci G., Garofalo M., *La nascita del calcolo infinitesimale*,relazione del 2011

[2] Boyler, *Storia della matematica*(1968)

[3] Boyler *The history of calculus*(1958)

[4] Bottazzini *Il flauto di Hilbert*(1990)

[5] Castelnuovo *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*(1938)

[6] Edwards *The Developments of the Calculus*(1979)

[7] Poggiali.D, *Da Tartaglia a Cauchy: nascita e sviluppo del calcolo differenziale*, relazione del 2012