PNF – 25 Septembre 2018

La résolution de problèmes en cycle 2

Quels choix d'énoncés pour quelles progressivités ?

Emmanuel Sander
Laboratoire IDEA – Instruction Développement Education Apprentissage
Université de Genève
emmanuel.sander@unige.ch

Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation

UNIVERSITÉ DE GENÈVE

La résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux relève de la cognition numérique et de la cognition langagière

Concepts extra mathématiques et mathématiques sont intriqués dans la résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux

Cette interaction ininterrompue entre concepts extra mathématiques et mathématiques rend possible que ces derniers se développent en s'appuyant sur les premiers.

Résolution de problème « en appui » du sens des opérations

Elèves de CP

(i)Il y a 5 oiseaux et 3 vers. Combien y a-t-il d'oiseaux de plus que de vers ?

(ii)Il y a 5 oiseaux et 3 vers. Combien d'oiseaux n'auront pas de vers ?

Adolescents non scolarisés brésiliens pratiquant le commerce de rue

(i)Combien coûtent 3 objets à 50 cruzeiros l'un ?

(ii)Combien coûtent 50 objets à 3 cruzeiros l'un ?

Elèves de CP

(i)Il y a 5 oiseaux et 3 vers. Combien y a-t-il d'oiseaux de plus que de vers ? [25% de réussite]

(ii)Il y a 5 oiseaux et 3 vers. Combien d'oiseaux n'auront pas de vers ? [96% de réussite]

Adolescents non scolarisés brésiliens pratiquant le commerce de rue

(i)Combien coûtent 3 objets à 50 cruzeiros l'un ? [75% de réussite]

(ii)Combien coûtent 50 objets à 3 cruzeiros l'un ? [0% de réussite]

« Paul a 7 billes dans sa poche. Il en donne 3 à Jean. Combien lui reste-t-il de billes ? »

« Paul a 7 billes. Jean a 3 billes. Combien Jean a-t-il de billes de moins que Paul ? »

Deux années scolaires séparent ces problèmes en termes de réussite.

Peut-on dire d'un élève qui réussit le premier problème et échoue le second qu'il maîtrise la soustraction ?

Et d'un élève qui résout le premier problème par l'opération 7-3=4 et le suivant par l'addition à trou 3+4=7 ?

Comment guider un élève pour qu'il perçoive qu'une soustraction convient pour l'un comme pour l'autre ?

Et qu'il perçoive qu'une ressemblance existe entre ces énoncés, qui justifie l'identité des stratégies applicables pour les résoudre en dépit des différences apparentes entre les situations qu'ils décrivent ?

La résolution de problèmes joue un rôle primordial non pas seulement dans la mise en œuvre mais dans la construction même des notions mathématiques. Elle est un support pour :

(i) Guider l'élève dans l'analyse des relations sémantiques de l'énoncé pour lui montrer comment cette analyse conduit au choix d'une stratégie de résolution

(ii) Orienter l'élève vers le recodage sémantique et l'élaboration de catégories sémantiques génériques.

La perception des situations est biaisée par des propriétés non pertinentes mais saillantes, pouvant faire obstacle à l'acquisition du sens d'une notion. Cela incite à :

(i) Introduire les notions par des situations mettant en scène les propriétés pertinentes sur le plan mathématique et dépourvues de propriétés non pertinentes saillantes, qui biaisent le sens de la notion.

(ii) Ce que les élèves intègrent l'idée qu'un même contenu peut être lu de plusieurs façons (possibilité de recodage)

Quelques mots sur l'analogie

L'analogie est un phénomène adaptatif, fondé sur la référence au connu pour appréhender la nouveauté (Source/Cible).

« *La cible est appréhendée dans les termes de la source* »

Apports des travaux de la psychologie expérimentale

- Un transfert analogique efficace
- Un accès en mémoire incertain et fondé sur des indices inappropriés

Apports des travaux sur les métaphores conceptuelles

- Un DEBAT est un COMBAT : « Camper sur ses positions »
- COMPRENDRE est VOIR : « Changer de point de vue »

Lakoff & Johnson, 1980 ; Holyoak & Thagard, 1995; Trench & Minervino, 2015

Les développements conceptuels par analogie

Nos concepts sont évoqués par les analogies qu'établit notre système cognitif afin d'interpréter ce qui est nouveau et inconnu dans des termes anciens et connus.

Analogies intuitives de l'élève : entrée dans les notions scolaires.

Nos concepts doivent leur existence à des suites d'analogies leur donnant naissance et les enrichissant toute notre vie.

Certaines analogies restent à construire.

L'enseignement peut orienter cette construction.

Hofstadter & Sander, 2013

Le cadre A-S^3

Trois formes d'analogies intuitives :

de Substitution

de Scénario

de Simulation

Parfois facilitatrices parfois obstructives

Dissociations entre ces trois formes, même s'il existe aussi des interdépendances

Hofstadter & Sander, 2013; Sander, 2016, 2018

Le cadre A-S^3

Ces analogies interviennent sur plusieurs plans

Interprétations de l'élève

Progressions de l'élève

Interprétations de l'enseignant

Compréhension de l'enseignant des processus des élèves

Métacognition de l'enseignant (ses propres processus)

Elaborations de progressions d'apprentissage

Sander, 2016, 2018

Le cadre A-S^3

Cadre pour

- Se prononcer sur la difficulté de résolution d'un problème
- Distinguer les cas « d'expertise apparente » de compréhension plus profonde des notions
- Construire des évaluations
- Former des enseignants
- Développer des progressions d'apprentissage

Sander, 2016, 2018

Les Analogies de Substitution

La notion mathématique est perçue par analogie avec une connaissance familière, issue de la vie quotidienne

Domaine de validité partiel

- Favorable à l'intérieur de l'intersection
- Défavorable à l'extérieur

La soustraction

"Inventer un problème de soustraction dont la solution est 8-3=5"

Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000; Sander, 2016, 2018

La soustraction

"Inventer un problème de soustraction dont la solution est 8-3=5"

Paul (Hugo, Théo, Nathan, Léa, Marie, Judith, etc…) a 8 bonbons (billes, gâteaux, pommes, etc…). Il/Elle en donne (mange, perd, etc…) 3 à (pendant, etc…). COMBIEN LUI EN RESTE-T-IL ?

Soustraire c'est perdre, retirer, enlever. Une totalité est donnée, dont une partie est retranchée. La question porte sur la partie subsistante.

Quasi totalité des CM1-CM2 ; étudiants Master Psycho; enseignants du primaire

Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000; Sander, 2016, 2018

L'addition

"Inventer un problème d'addition dont la solution est 5+3=8"

Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000; Sander, 2016, 2018

L'addition

"Inventer un problème d'addition dont la solution est 5+3=8"

Paul (Hugo, Théo, Nathan, Léa, Marie, Judith, etc…) a 5 bonbons (billes, gâteaux, pommes, etc…). Il/Elle en reçoit (gagne, etc…) 3 à (pendant, etc…). COMBIEN EN A T-IL EN TOUT ?

Additionner, c'est ajouter.

(i) Deux parties sont données, qui forment un tout. La question porte sur la valeur de ce tout.

(ii) Un état initial est donné, ainsi qu'un accroissement . La question porte sur l'état résultant.

Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000; Sander, 2016, 2018

La multiplication

“Inventer un problème de multiplication”

“Définir l’opération mathématique de multiplication”

Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000; Sander, 2016, 2018

La multiplication

"Inventer un problème de multiplication"

"Définir l'opération mathématique de multiplication"

La quasi totalité des problèmes inventés décrit une addition réitérée : une réplication sommative.

Exemple : J'ai 3 paquets de 10 gâteaux. Combien cela fait-il de gâteaux en tout ?

Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000; Sander, 2016, 2018

La multiplication

Quelques exemples de définitions (étudiants à l'université) :

Une multiplication est une addition réitérée d'un nombre, un nombre de fois donnée.

Multiplier consiste à ajouter à un chiffre donné ce même chiffre autant de fois qu'on le souhaite.

Multiplier, c'est additionner un certain nombre à lui-même autant de fois que le nombre par lequel on le multiplie l'indique.

La multiplication est un calcul dans lequel on choisit combien de fois on additionne une quantité par elle-même.

Hofstadter & Sander, 2013

La division

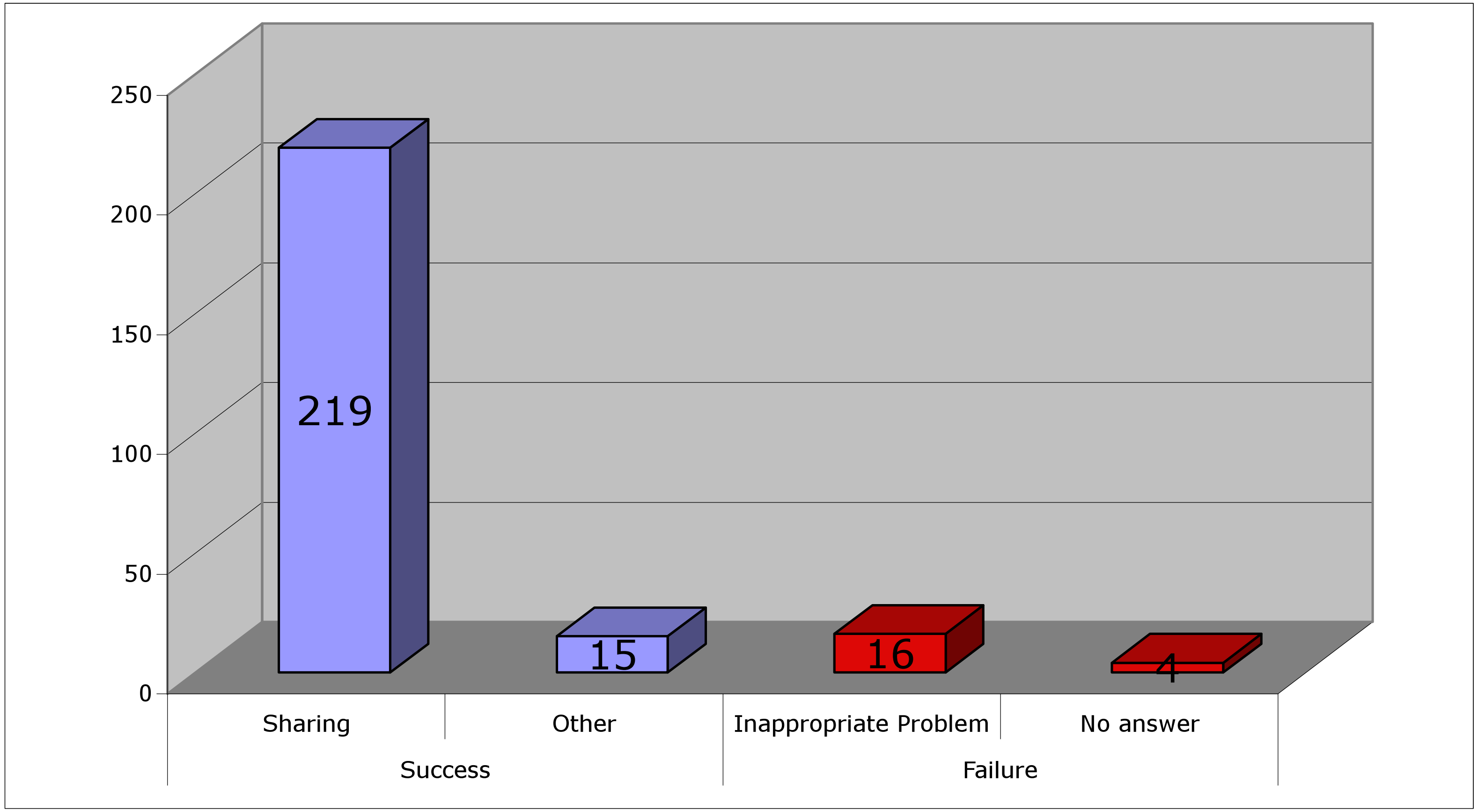
“Inventer un problème de division”

“Définir l’opération mathématique de division”

Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000; Sander, 2016, 2018

La division

"Inventer un problème de division" (élèves de 6ème et de 5ème)



Audo & Sander, 2008 ; Sander, 2008

La division

Tâche 1 (“Inventer un problème de division”) :

93% des problèmes inventés par les adultes sont dérivés de l’analogie “Diviser c’est partager” Division- Partition : le résultat de la division est la taille de la part.

Audo & Sander, 2008 ; Sander, 2008

La division

Quelques exemples de problèmes (étudiants à l'université) :

4 amis se partagent 12 bonbons. Combien de bonbons chaque ami recevra-t-il ?

Un terrain de 90 m2 doit être divisé en 6 parcelles de superficie égale. Quelle sera la superficie de chaque parcelle ?

Au marché, une maman achète 20 pommes pour ses 5 enfants. Combien de pommes chaque enfant aura-t-il ?

Au cinéma, il y a 120 sièges et 10 rangées. Combien y a-t-il de sièges par rangée ?

Pour les vacances, on prépare 20 kilos de vêtements à mettre dans 4 valises. Combien va peser chaque valise ?

On utilise 12 mètres de tissu pour fabriquer 4 robes. Combien de mètres de tissu faut-il pour fabriquer une seule robe ?

Hofstadter & Sander, 2013

Et à l’extérieur du domaine de validité de l’analogie de substitution ?

La soustraction

"Inventer un problème de soustraction dont la solution est 8-3=5 et dans lequel on ne perd rien, on ne fait que gagner"

Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000; Sander, 2016, 2018

La soustraction

“Inventer un problème de soustraction dont la solution est 8-3=5 et dans lequel on ne perd rien, on ne fait que gagner”

Paul a 3 billes. Il en gagne pendant la récréation et maintenant il en a 8. Combien de billes a-t-il gagnées ?

Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000; Sander, 2016, 2018

Tableau 6.1 - Types de problèmes et proportions de réussite en fonction du niveau scolaire (d'après Riley, Greeno et Heller, ibid.).

TYPES DE PROBLEME	Mat.	CP	CE1	CE2
Changement				
1- X avait 3 billes. Puis Y lui a donné 5 billes. Combien de billes a maintenant X?	.87	1.00	1.00	1.00
2- X avait 8 billes. Puis il a donné 5 billes à Y. Combien de billes a maintenant X?	1.00	1.00	1.00	1.00
3- X avait 3 billes. Y lui en a donné. X a maintenant 8 billes. Combien de billes Y a-t-il donné à X?	.61	.56	1.00	1.00
4- X avait 8 billes. Il en a donné à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien a-t-il donné de billes à Y?	.91	.78	1.00	1.00
5- X avait des billes. Y lui en a donné 5 de plus. Maintenant X a 8 billes. Combien Y lui en a-t-il donné?	.09	.28	.80	.95
6- X avait des billes. Il en a donné 5 à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien avait-il de billes?	.22	.39	.70	.80
Combinaison				
7- X a 3 billes. Y a 5 billes: Combien X et Y ont-ils de billes ensemble?	1.00	1.00	1.00	1.00
8- X et Y ont ensemble 8 billes. X a 3 billes. Combien Y a-t-il de billes?	.22	.39	.70	1.00
Comparaison				
9- X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien X a-t-il de billes de plus que Y?	.17	.28	.85	1.00
10- X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien Y a-t-il de billes de moins que X?	.04	.22	.75	1.00
11- X a 3 billes: Y a 5 billes de plus que X. Combien de billes a Y?	.13	.17	.80	1.00
12- X a 8 billes. Y a 5 billes de moins. Combien de billes a Y?	.17	.28	.90	.95
13- X a 8 billes. Il a 5 billes de plus que Y. Combien de billes a Y?	.17	.11	.65	.75
14- X a 3 billes. Il a 5 billes de moins que Y Combien de billes a Y?	.00	.06	.35	.75
Egalisation				
15- X a 3 billes. Y a 8 billes. Que doit faire X pour avoir autant de billes que Y?	.	.	.	.
16- X a 8 billes. Y a 3 billes: Que doit faire X pour avoir autant de billes que Y				

Paul a 8 billes. Il en perd 3 pendant la récréation. Combien lui en reste-t-il ?

Paul a 3 billes de moins que Mathieu. Mathieu a 8 billes. Combien de billes Paul a-t-il ?

Paul a 8 billes. Il en perd pendant la récréation. Il lui en reste 3. Combien de billes Paul a-t-il perdu ?

Paul avait des billes en allant à l'école. Il en gagne 3 pendant la récréation et maintenant il en a 8. Combien de billes Paul avait-il avant la récréation ?

Paul a 3 billes. Mathieu a 8 billes. Combien de billes manque-t-il à Paul pour qu'il en ait autant que Mathieu ?

Paul a 3 billes. Mathieu a 8 billes. Combien Mathieu a-t-il de billes de plus que Paul ?

Paul a 3 billes. Il en gagne pendant la récréation et maintenant il en a 8. Combien de billes a-t-il gagnées ?

TYPES DE PROBLEME

Changement

1- X avait 3 billes. Puis Y lui a donné 5 billes. Combien de billes a maintenant X?

2- X avait 8 billes. Puis il a donné 5 billes à Y. Combien de billes a maintenant X?

3- X avait 3 billes. Y lui en a donné. X a maintenant 8 billes. Combien de billes Y a-t-il donné à X?

4- X avait 8 billes. Il en a donné à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien a-t-il donné de billes à Y?

5- X avait des billes. Y lui en a donné 5 de plus. Maintenant X a 8 billes. Combien Y lui en a-t-il donné?

6- X avait des billes. Il en a donné 5 à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien avait-il de billes?

Combinaison

7- X a 3 billes. Y a 5 billes: Combien X et Y ont-ils de billes ensemble?

8- X et Y ont ensemble 8 billes. X a 3 billes. Combien Y a-t-il de billes?

Comparaison

9- X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien X a-t-il de billes de plus que Y?

10- X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien Y a-t-il de billes de moins que X?

11- X a 3 billes: Y a 5 billes de plus que X. Combien de billes a Y?

12- X a 8 billes. Y a 5 billes de moins. Combien de billes a Y?

13- X a 8 billes. Il a 5 billes de plus que Y. Combien de billes a Y?

14- X a 3 billes. Il a 5 billes de moins que Y Combien de billes a Y?

Egalisation

15- X a 3 billes. Y a 8 billes. Que doit faire X pour avoir autant de billes que Y?

16- X a 8 billes. Y a 3 billes: Que doit faire X pour avoir autant de billes que Y

Sur les 11 catégories de problèmes de soustraction que comporte cette typologie qui a émergé dans les années 1980, plus de 90% des propositions se concentrent sur la seule catégorie des recherches de reste dans une situation de retrait.

Cette analogie de substitution donne sens à la notion, mais elle induit une focalisation sur un seul type de situation. Elle est nécessaire mais limitante, car elle éclipse la diversité des situations de soustraction.

Vergnaud, 1982 ; Riley et al., 1983 ; Sander, 2018

Quelles conséquences ?

" Lors d'une course, 108 coureurs prennent le départ. Il y a beaucoup d'abandons : 85 coureurs seulement terminent la course. Combien de coureurs ont abandonné ? "

25% de réussites en début de CE2 ; DEPP 2014

Il est difficile d'envisager de soustraire 85 de 108 car 85 est la valeur du reste.

Etat initial : Les 108 coureurs

Transformation : Les coureurs qui abandonnent

Etat final : Les 85 coureurs qui terminent la course

$$\begin{tikzcd} I = 108 \arrow[rr, bend left, "T\ ?"] & & F = 85 \end{tikzcd}$$

Intervenir sur la conception de la soustraction ou sur la perception du problème.

DEPP, 2014 ; Sander & Richard, 2015

L’addition

“Inventer un problème d’addition dont la solution est 5+3=8 et dans lequel on ne gagne rien, on ne fait que perdre”

Paul avait des billes. Il en perd 3 pendant la récréation et maintenant il lui en reste 5. Combien de billes avait-il avant la récréation ?

Fischbein, 1989; Lakoff & Nunez, 2000; Sander, 2016, 2018

Quelles conséquences ?

Paul avait 3 billes. Il en gagne 5 à la récréation. Combien a-t-il de billes maintenant ?

Paul a 3 billes. Pierre a 5 billes. Combien ont-ils de billes ensemble ?

Paul avait des billes. Il en perd 3 pendant la récréation et maintenant il lui en reste 5. Combien de billes avait-il avant la récréation ?

Paul a 3 billes. Pierre a 5 billes de plus que Paul. Combien de billes Pierre a-t-il ?

Paul a 3 billes. Paul a 5 billes de moins que Pierre. Combien Pierre a-t-il de billes ?

Quelles conséquences ?

Paul avait 3 billes. Il en gagne 5 à la récréation. Combien a-t-il de billes maintenant ?
100% de réussite à 6 ans [Dans le domaine de validité de la connaissance intuitive]

Paul a 3 billes. Pierre a 5 billes. Combien ont-ils de billes ensemble ?
100% de réussite à 6 ans [Dans le domaine de validité de la connaissance intuitive]

Paul avait des billes. Il en perd 3 pendant la récréation et maintenant il lui en reste 5. Combien de billes avait-il avant la récréation ?
28% de réussite à 6 ans [Hors du domaine de validité de la connaissance intuitive]

Paul a 3 billes. Pierre a 5 billes de plus que Paul. Combien de billes Pierre a-t-il ?
17% de réussite à 6 ans [Hors du domaine de validité de la connaissance intuitive]

Paul a 3 billes. Paul a 5 billes de moins que Pierre. Combien Pierre a-t-il de billes ?
6% de réussite à 6 ans [Hors du domaine de validité de la connaissance intuitive]

La multiplication

Définition consensuelle erronée de ce qu'est une multiplication

Si on demande d'inventer un problème de multiplication, presque tout le monde introduit un nombre entier

Croyance erronée que multiplier rend plus grand

Difficulté à un inventer un problème dans lequel multiplier rend plus petit

Difficulté à justifier la commutativité de la multiplication :

3x5=5x3, càd 5+5+5 = 3+3+3+3+3 ? (conséquence de l'asymétrie intuitive entre multiplicateur et du multiplicande)

Quelles conséquences ?

Si un gallon d'essence coûte £1,27, combien coûte 0,22 gallon ?

Si un gallon d'essence coûte £1,27, combien coûte 5 gallons ?

Avec un quintal de blé, on obtient 0,75 quintaux de farine. Quelle quantité de farine peut être obtenue avec 15 quintaux de blé ?

Le volume d'un quintal de gypse est de 15 cm^3. Quel est le volume de 0,75 quintaux ?

Bell, Swann & Taylor, 1981; Fischbein et coll., 1985

Quelles conséquences ?

Si un gallon d'essence coûte £1,27, combien coûte 0,22 gallon ?
44% de réussite [Hors du domaine de validité de la connaissance intuitive]

Si un gallon d'essence coûte £1,27, combien coûte 5 gallons ?
100% de réussite [Dans le domaine de validité de la connaissance intuitive]

Avec un quintal de blé, on obtient 0,75 quintaux de farine. Quelle quantité de farine peut être obtenue avec 15 quintaux de blé ?
77% de réussite [Dans le domaine de validité de la connaissance intuitive]

Le volume d'un quintal de gypse est de 15 cm^3. Quel est le volume de 0,75 quintaux ?
53% de réussite [Hors du domaine de validité de la connaissance intuitive]

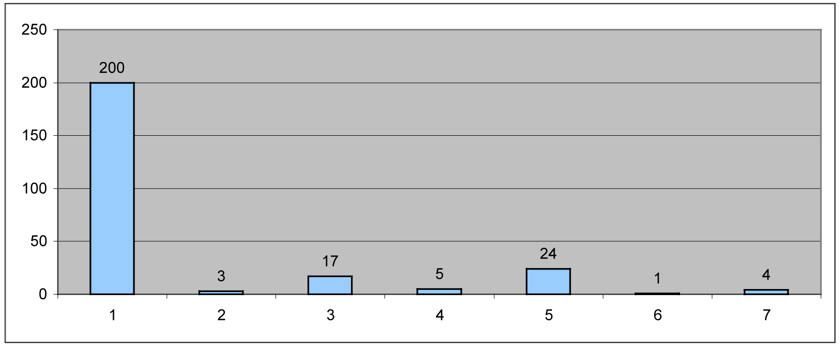
Bell, Swann & Taylor, 1981; Fischbein et coll., 1985

La division

"Inventer un problème de division avec *résultat* plus grand que la *valeur initiale ?*"

Tâche difficile car elle est hors du domaine de validité de la connaissance intuitive du partage équitable, qui conduit toujours à obtenir une quantité *moindre*.

Elèves de 6ème et 5ème :



1: « Impossible ! »
2: Possible, mais pas de problème proposé
3: Possible, mais valeurs numériques uniquement
4: Possible, mais justification erronée
5: Invente un problème inapproprié
6: Réussite
7: Pas de réponse
Une seule réussite sur 254 élèves !

Adultes universités :

74% échec

27% écrivent " Impossible "

23% construisent un problème incompatible avec la consigne

23% posent une opération (exemple : 4/0.2), mais sans énoncé

Quelles conséquences ?

« Diviser, c'est répartir en parts égales. Alors, chacun a moins que ce qu'il y avait au début ; donc, il est impossible d'inventer un problème où il y a plus à la fin. »

« Impossible, car diviser c'est découper en plusieurs morceaux ; pour avoir plus, il faut multiplier. »

« Lorsqu'on divise par une moitié, on a plus, mais c'est impossible de diviser par une moitié. »

« Jean a 20 bouteilles de vin. Il en vend la moitié à 8 euros la bouteille. Combien d'argent reçoit-il ? »

Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander, 2008

Les Analogies de Substitution

Influence de ces analogies de substitution (conception initiale, place dans l'évaluation)

Persistance des notions y compris chez les enseignants (le maître a à intégrer leur présence chez lui et chez l'élève)

Elaboration de progressions d'apprentissage pour orienter le développement des notions (par exemple l'écart pour la soustraction, la quotition pour la division)

En s'appuyant sur des scénarios – s'appuyer sur les connaissances extra mathématiques pour faire progresser les conceptions mathématiques, car les analogies de substitution sont seulement la partie émergée de l'iceberg

Les Analogies de Scénario

L'énoncé évoque un squelette conceptuel – une catégorie de scénarios. Les résolutions qui s'intègrent dans cette catégorisation sont facilités par l'analogie car les propriétés activées sont cohérentes avec les propriétés mathématiquement pertinentes alors qu'en cas de dissonance, la difficulté de résolution est au contraire accrue.

Par exemple, « 15 gâteaux répartis entre 5 personnes » est facilité par l'analogie de scénario une grande quantité d'objets partagée entre un moins grand nombre d'acteurs alors que « 5 gâteaux répartis entre 15 personnes » ne l'est pas ; et cela malgré la conformité à l'analogie de substitution du partage.

Les Analogies de Scénario

Inventer un problème dans lequel il est question de 12 oranges et 4 pommes

Inventer un problème dans lequel il est question de 12 oranges et 4 paniers

Bassok, Chase & Martin, 1998

Les Analogies de Scénario

Inventer un problème dans lequel il est question de 12 oranges et 4 pommes

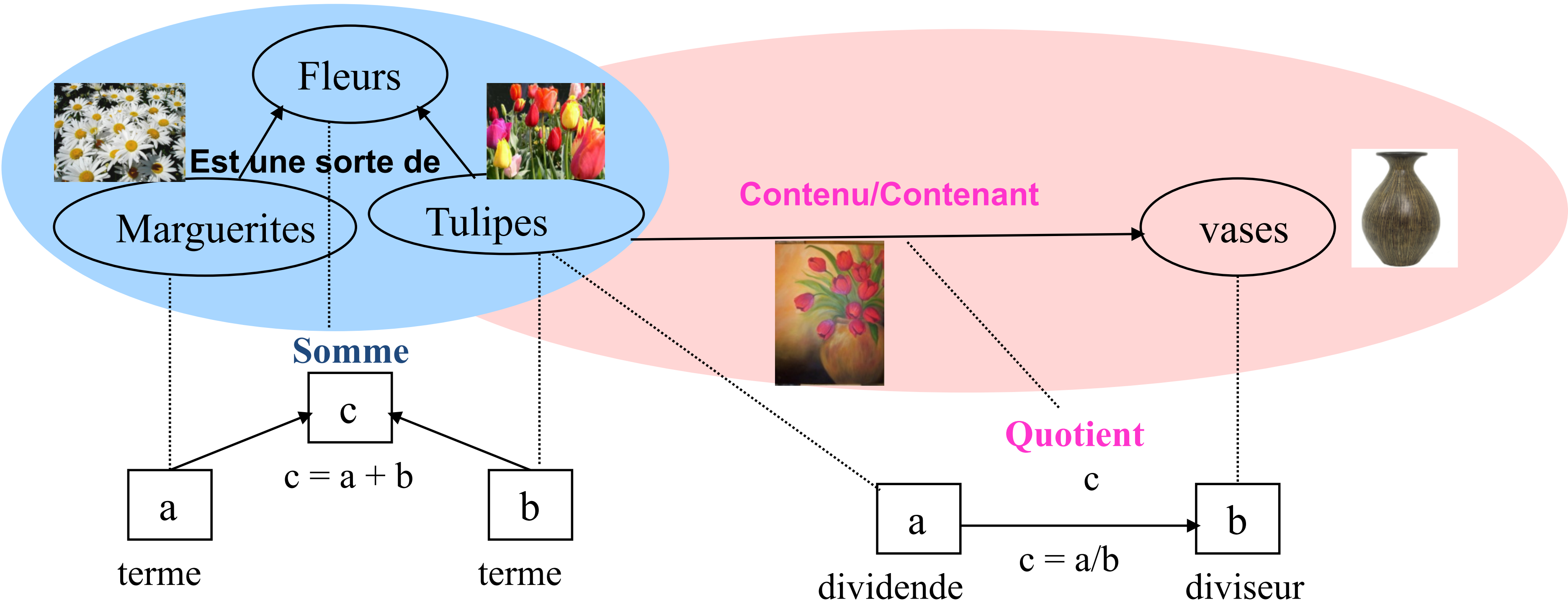
Situation de complémentation ou de comparaison induite par la collatéralité entre les deux catégories

Inventer un problème dans lequel il est question de 12 oranges et 4 paniers

Situation de répartition induite par la relation fonctionnelle de contenance entre les deux catégories

Bassok, Chase & Martin, 1998

Les Analogies de Scénario



Dans les manuels, pour 97% des problèmes à résoudre par addition, les objets additionnés appartenaient à des catégories de même niveau (e.g., des pommes et des poires, ou des billes rouges et noires) alors que 94% des problèmes demandant une division utilisaient des objets reliés fonctionnellement (e.g., des billes et des boites).

Bassok, Chase & Martin, 1998

Les Analogies de Scénario

J'ai 3 paquets de 10 gâteaux. Combien ai-je de gâteaux en tout ?

Conformité aux analogies de substitution (réplication) et de scénario (relation fonctionnelle de contenance)

J'ai 4 oranges. Je reçois 5 pommes en échange de chaque orange.

Combien aurai-je de pommes ?

Conformité à l'analogie de substitution (réplication) mais pas à celle de scénario (collatéraux d'une même catégorie)

Si un gallon d'essence coûte £1,27, combien coûte 0,22 gallon ?

Conformité à l'analogie de scénario (recherche d'un prix payé connaissant le prix unitaire et la quantité) mais pas à celle de substitution (pas de réplication)

Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Il paie 15 euros. Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins que Laurent. Combien coûte l'équerre ?

Gros, Thibaut & Sander, 2017

Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Il paie 15 euros. Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins que Laurent. Combien coûte l'équerre ?

15 – 7 = 8

15 – 3 = 12

12 - 8 = 4

L'équerre coûte 4 euros.

Gros, Thibaut & Sander, 2017

Laurence a suivi des cours de danse pendant 7 ans et s'est arrêtée à 15 ans. Jeanne a commencé au même âge que Laurence et s'est arrêtée 3 ans plus tôt. Combien de temps Jeanne a-t-elle suivi ses cours de danse ?

Gros, Thibaut & Sander, 2017

Laurence a suivi des cours de danse pendant 7 ans et s'est arrêtée à 15 ans. Jeanne a commencé au même âge que Laurence et s'est arrêtée 3 ans plus tôt. Combien de temps Jeanne a-t-elle suivi ses cours de danse ?

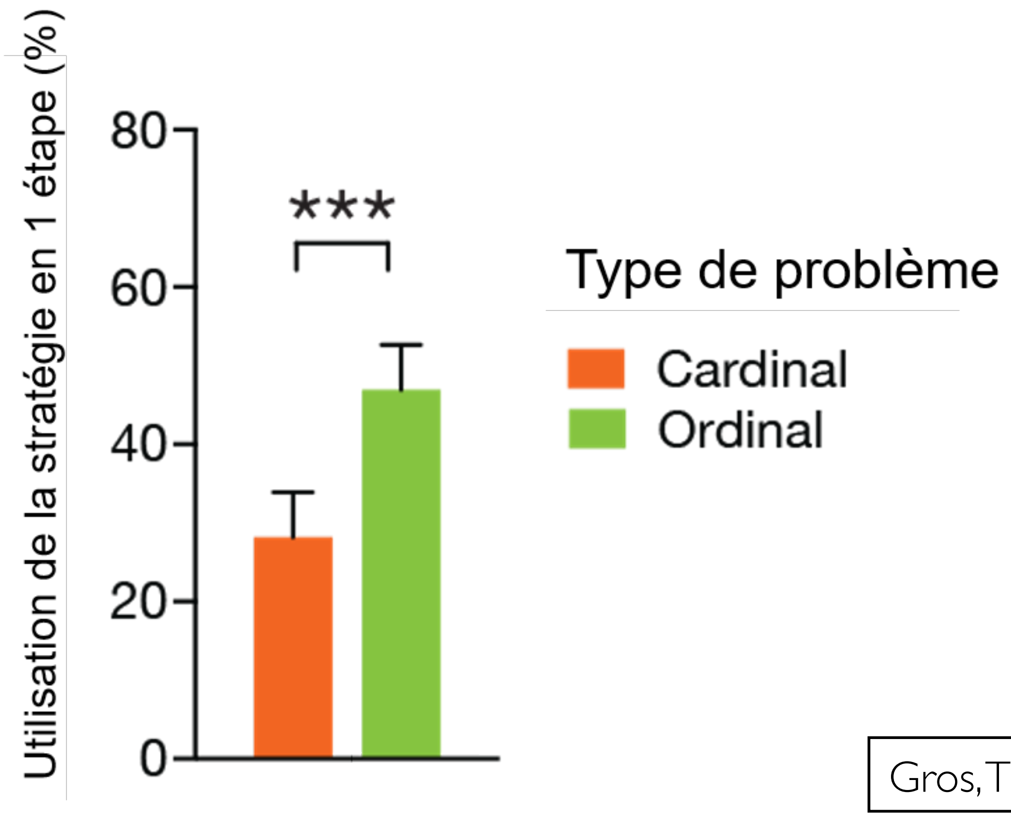
$$7 - 3 = 4$$

Jeanne a suivi ses cours de danse pendant 4 ans.

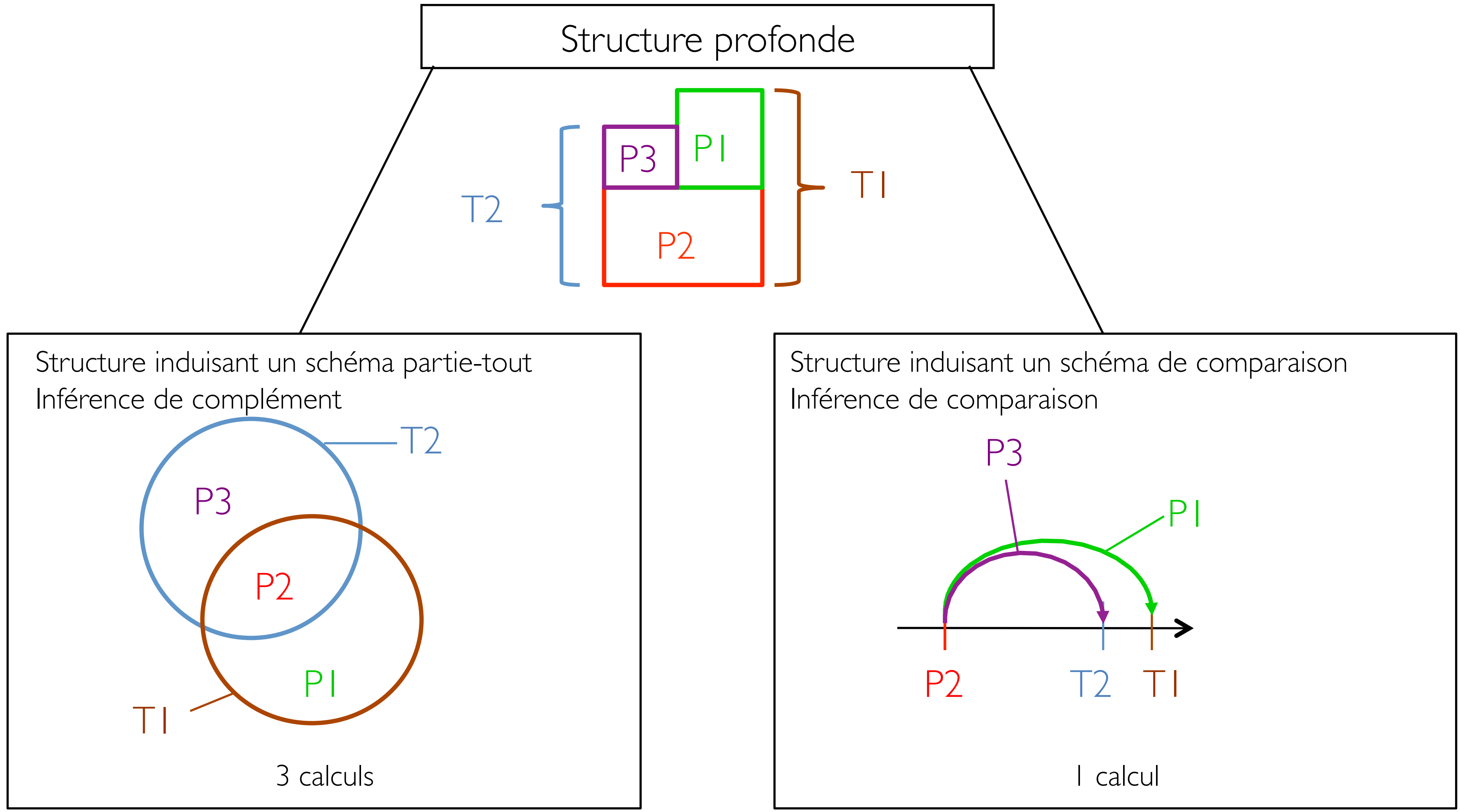
Gros, Thibaut & Sander, 2017

Problème cardinal : "Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Il paie 15 euros. Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins que Laurent. Combien coûte l'équerre ?"

Problème ordinal : "Laurence a suivi des cours de danse pendant 7 ans et s'est arrêtée à 15 ans. Jeanne a commencé au même âge que Laurence et s'est arrêtée 3 ans plus tôt. Combien de temps Jeanne a-t-elle suivi ses cours de danse ?"



Gros, Thibaut & Sander, 2017



Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Il paie 15 euros. Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins que Laurent. Combien coûte l'équerre ?

Laurence a suivi des cours de danse pendant 7 ans et s'est arrêtée à 15 ans. Jeanne a commencé au même âge que Laurence et s'est arrêtée 3 ans plus tôt. Combien de temps Jeanne a-t-elle suivi ses cours de danse ?

Les Analogies de Scénario

La situation évoquée par le problème conduit à induire une structure dont la congruence avec la structure mathématique est déterminante pour la réussite du problème.

En cas de congruence, qui est le cas par défaut dans les manuels scolaires, il n'est pas possible de distinguer ce qui relève de la conception mathématique de ce qui relève de la sémantique des scénarios évoqués.

En cas d'incongruence, les analogies de scénarios peuvent être obstructives.

Les Analogies de Simulation

Lorsque la simulation mentale de la situation spontanément évoquée par l'énoncé mène à la solution, l'analogie de simulation est facilitatrice alors que lorsque la simulation n'est pas praticable, c'est un facteur de difficulté.

Par exemple, « Quel est le prix de 3 objets à 50 cruzeiros ? » versus « Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros ? », malgré la conformité sur les plans de la substitution (réplication) et du scénario (recherche du prix d'un achat groupé).

Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander & Richard, 2017 ; Sander, 2018 Brissiaud & Sander, 2010

Les Analogies de Simulation

Pierre a 15 billes. Il en perd 3 à la récréation. Combien lui en reste-t-il ?

Conformité sur le plan de la substitution (enlever), du scénario (scénario de jeu de billes dans lequel on perd ou on gagne) et de la simulation (comptage mental à rebours de 3).

Pierre a 15 billes. Il en perd 12 à la récréation. Combien lui en reste-t-il ?

Conformité sur le plan de la substitution (enlever), du scénario (scénario de jeu de billes dans lequel on perd ou on gagne) mais pas de la simulation (comptage mental à rebours de 12).

Les Analogies de Simulation

1/ Nicolas va en récréation avec 27 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ?

2/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 27 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ?

3/ Nicolas va en récréation avec 4 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ?

4/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 4 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ?

Les Analogies de Simulation

1/ Nicolas va en récréation avec 27 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ? (14/20)

2/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 27 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ? (8/20)

3/ Nicolas va en récréation avec 4 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ? (8/20)

4/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 4 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ? (16/20)

Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander & Richard, 2017 ; Sander, 2018 Brissiaud & Sander, 2010

Les Analogies de Simulation

1/ Dans un paquet de 200 images, on fait des tas de 50 images. Combien y a-t-il de tas ?

2/ On partage 200 images en 50 tas. Combien y a-t-il d'images dans chaque tas ?

3/ On partage 200 images en 4 tas. Combien y a-t-il d'images dans chaque tas ?

4/ Dans un paquet de 200 images, on fait des tas de 4 images. Combien y a-t-il de tas ?

Les Analogies de Simulation

1/ Dans un paquet de 200 images, on fait des tas de 50 images. Combien y a-t-il de tas ? (14/20)

2/ On partage 200 images en 50 tas. Combien y a-t-il d'images dans chaque tas ? (4/20)

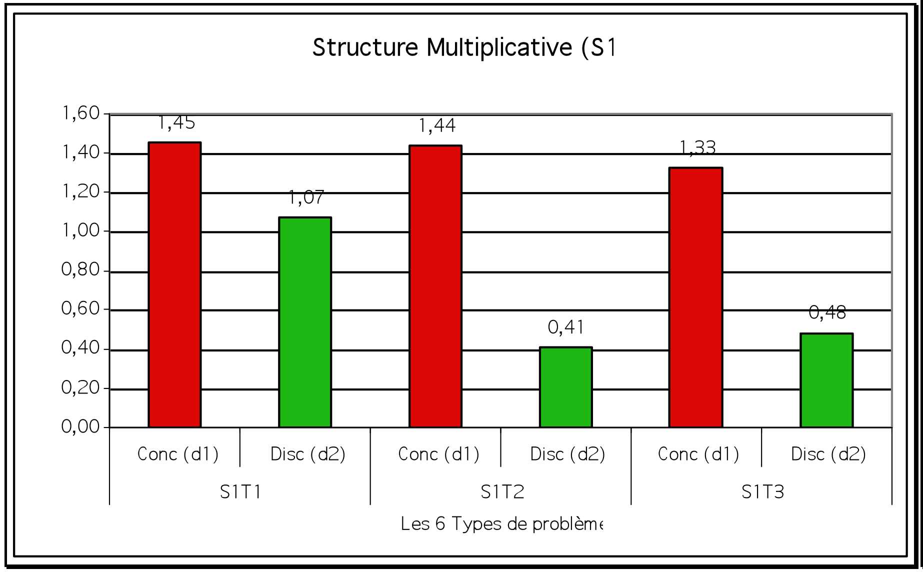
3/ On partage 200 images en 4 tas. Combien y a-t-il d'images dans chaque tas ? (15/20)

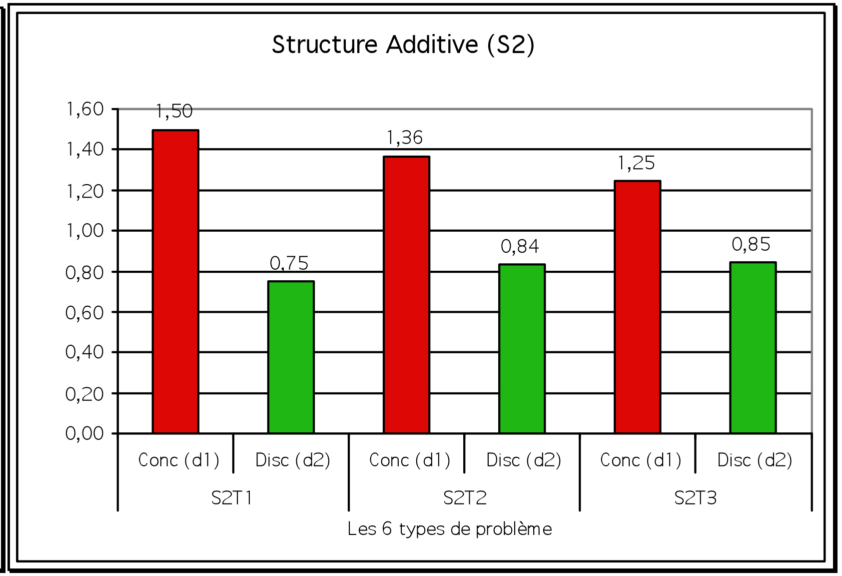
4/ Dans un paquet de 200 images, on fait des tas de 4 images. Combien y a-t-il de tas ? (5/20)

Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander & Richard, 2017 ; Sander, 2018 Brissiaud & Sander, 2010

Les Analogies de Simulation

- Madame Durand a 30 images. Elle partage ces images entre 3 enfants pour que chacun ait la même chose. Combien d'images chaque enfant va-t-il recevoir ?
  – Induit une structure de partage et la simulation X+X+X=30
- Monsieur Dupont a 30 gâteaux. Il partage ces gâteaux entre 10 enfants pour que chacun ait la même chose. Combien de gâteaux chaque enfant va-t-il recevoir ?
  – Même structure de partage mais la simulation associée X+X+.........+X = 30





Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander & Richard, 2017 ; Sander, 2018; Brissiaud & Sander, 2010

Les Analogies de Simulation

La simulation mentale n’est pas uniquement évoquée par une structure dynamique de l’énoncé

Les Analogies de Simulation

- 1/ Il y a 41 oranges et 38 poires dans le panier. Combien y a-t-il de poires de moins que de oranges ?
- 2/ Céline a 29 euros dans sa tirelire et 4 euros dans sa poche. Combien d'euros Céline a-t-elle?
- 3/ Il y a 41 oranges et 3 poires dans le panier. Combien y a-t-il de poires de moins que d'oranges ?
- 4/ Céline a 4 euros dans sa tirelire et 29 euros dans sa poche. Combien d'euros Céline a-t-elle?

Gvozdic & Sander, 2017

Les Analogies de Simulation

1/ Il y a 41 oranges et 38 poires dans le panier. Combien y a-t-il de poires de moins que de oranges ? (14/20)

2/ Céline a 29 euros dans sa tirelire et 4 euros dans sa poche. Combien d'euros Céline a-t-elle? (12/20)

3/ Il y a 41 oranges et 3 poires dans le panier. Combien y a-t-il de poires de moins que d'oranges ? (6/20)

4/ Céline a 4 euros dans sa tirelire et 29 euros dans sa poche. Combien d'euros Céline a-t-elle? (7/20)

Gvozdic & Sander, 2017

Les Analogies de Simulation

Caractère général du phénomène, lié à la prégnance d'un codage situationnel

Support de recodage sémantique pour rendre accessible une stratégie opportuniste, même si elle n'est pas congruente avec le codage spontané

Introduction des situations pivots pour favoriser ce basculement

Enjeux des analogies intuitives pour l'élaboration de progressions d'apprentissage

Les travaux qui portent sur conceptions intuitives indiquent qu'elles sont présentes de manière précoce chez les élèves

Ils indiquent également leur persistance après enseignement et à l'âge adulte

Ils indiquent également leur influence parmi une population enseignante, ce qui est conforme aux connaissances sur la psychologie des concepts

Ils invitent à une démarche métacognitive qui peut orienter le choix des exemples et des situations choisis en classe afin de ne pas accentuer encore l'ancrage des conceptions intuitives

Fischbein, 1987 ; Lautrey, Sander, Rémi-Giraud & Tiberghien , 2008 ; Hofstadter & Sander, 2013

Des interventions pour développer les notions

Même lorsque deux situations relèvent de la même notion sur le plan disciplinaire, la perception d'une analogie entre elles ne va pas de soi pour l'élève.

Cela oriente vers des enseignements destinés à susciter la perception de l'analogie.

Il s'agit d'intervenir pour faire relier. C'est l'enjeu du recodage sémantique.

Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander & Richard, 2017

Recodage sémantique

Le recodage sémantique fait apparaître la ressemblance profonde entre deux situations qui sont analogues sur le plan des notions disciplinaires, en dépit des différences sémantiques.

Son objet est de faire dépasser une compréhension spontanée (« intuitive »), fondée sur les seules connaissances quotidiennes.

Il consiste à attribuer à une situation des propriétés usuellement attribuées à une autre.

Il incite à faire abstraction des différences entre situations et favorise le développement d'une conception plus abstraite qui fonde l'analogie.

Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander & Richard, 2017

Recodage sémantique

Madame Durand achète dans une librairie pour chacun de ses 5 enfants, 3 stylos. Combien de stylos achète-t-elle en tout ?

On demande de faire une addition.

Recodage sémantique

Madame Durand achète dans une librairie pour chacun de ses 5 enfants, 3 stylos. Combien de stylos achète-t-elle en tout ?

On demande de faire une addition.

3+3+3+3+3

Recodage sémantique

Madame Durand achète dans une librairie pour chacun de ses 5 enfants, 3 stylos : 1 stylo rouge, 1 stylo bleu et un stylo vert. Combien de stylos achète-t-elle en tout ?

On demande de faire une addition.

$3+3+3+3+3$

Recodage sémantique

Madame Durand achète dans une librairie pour chacun de ses 5 enfants, 3 stylos: 1 stylo rouge, 1 stylo bleu et un stylo vert. Combien de stylos achète-t-elle en tout ?

On demande de faire une addition.

3+3+3+3+3 MAIS AUSSI 5+5+5

Recodage sémantique

Madame Durand achète dans une librairie pour chacun de ses 5 enfants, 3 stylos rouge, 6 stylos bleu et 4 stylos vert. Combien de stylos achète-t-elle en tout ?

$5 \times 3 + 5 \times 6 + 5 \times 4$ MAIS AUSSI $5 \times (3+6+4)$

Recodage sémantique

Madame Durand achète dans une librairie pour chacun de ses 5 enfants, 3 stylos rouge, 6 stylos bleu et 4 stylos vert. Combien de stylos achète-t-elle en tout ?

5x3 + 5x6 + 5x4 MAIS AUSSI 5x(3+6+4)

Il ne s'agit pas simplement de deux algorithmes concurrents mais de deux codages alternatifs d'une même situation qui conduisent à des stratégies distinctes.

Dans le premier cas, on privilégie le codage par couleur en procédant à l'addition successive des stylos de chaque couleur : 5x3 + 5x6 + 5x4

Dans le second cas, on privilégie le codage par objets en procédant d'abord à l'addition des types de stylo : 5x(3+6+4)

Recodage sémantique

Inventer un problème dans lequel il est question de 12 oranges et 4 pommes

Inventer un problème dans lequel il est question de 12 oranges et 4 paniers

Bassok, Chase & Martin, 1998

Recodage sémantique

Inventer un problème dans lequel il est question de 12 oranges et 4 pommes

Combien y a t-il de fois plus d'oranges que de pommes ?

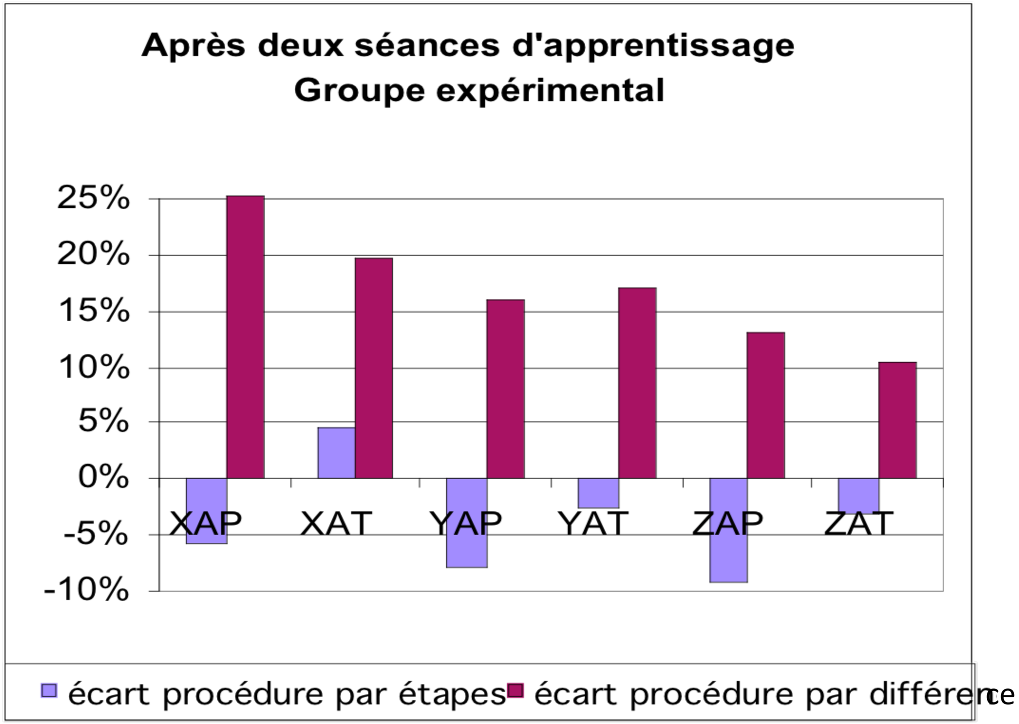
Recodage, car il s'agit d' « attribuer à une situation des propriétés usuellement attribuées à une autre », en l'occurrence d'attribuer à la situation « oranges, pommes » les propriétés habituellement attribuées à « oranges, panier ».

Hofstadter & Sander, 2013 ; Sander & Richard, 2017

Le recodage par comparaisons de situations

En s'appuyant sur des contenus adaptés, on peut faire acquérir à des élèves d'école primaire des points de vue « invisibles » à des adultes.

Un apprentissage fondé sur la recherche d'analogie entre situations peut favoriser un recodage sémantique



Mengue, Richard, Sander, 2015   Gamo, Sander & Richard, 2010

Interventions par introduction de situations pivots

Lors d'une course, 108 coureurs prennent le départ. Il y a beaucoup d'abandons : 85 coureurs seulement terminent la course. Combien de coureurs ont abandonné ?

25% de réussites en début de CE2 ; DEPP 2014

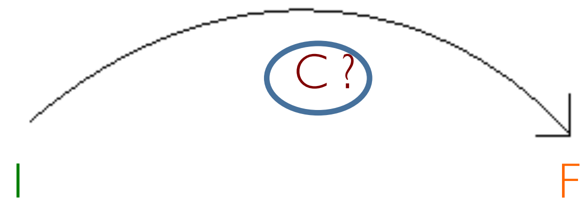
Comment faire concevoir le nombre d'abandons comme la partie manquante ?

Codage (spontané) transformation

Etat initial : Les 108 coureurs

Transformation : Les coureurs qui abandonnent

Etat final : Les 85 coureurs qui terminent la course

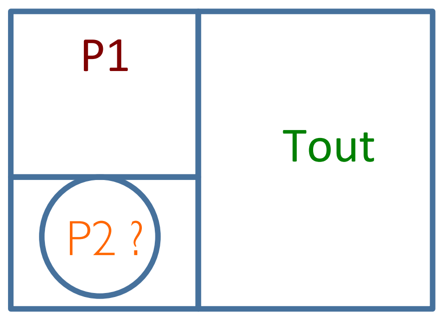


Recodage combinaison

Partie 1 : Les 85 coureurs qui terminent la course

Partie 2 : Les coureurs qui abandonnent

Tout : Les 108 coureurs



Interventions par introduction de situations pivots

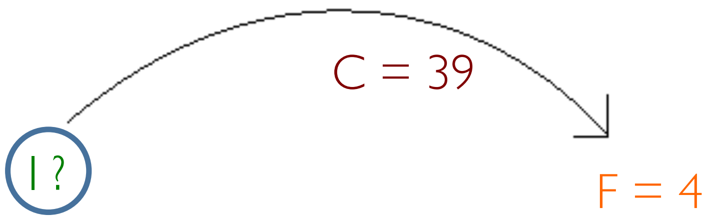
Pierre va à l'école avec des billes . A la récréation, il perd 39 billes . Maintenant il lui reste 4 billes . Combien de billes Pierre avait-il avant la récréation ?

- Codage transformation

Etat initial : billes de Pierre avant la récré

Transformation : 39 billes (rouge)

Etat final : 4 billes (bleues)



Sander & Fort, 2014 ; De Longuemar & Sander, 2016

Interventions par introduction de situations pivots

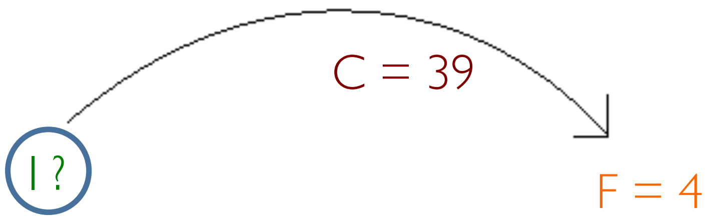
Pierre va à l'école avec des billes bleues et des billes rouges. A la récréation, il perd ses 39 billes rouges. Maintenant il lui reste ses 4 billes bleues. Combien de billes Pierre avait-il avant la récréation ?

- Codage transformation

Etat initial : billes de Pierre avant la récré

Transformation : 39 billes (rouge)

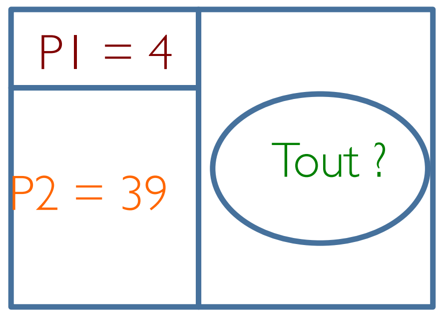
Etat final : 4 billes (bleues)



- Codage combinaison

Partie 1: 39 billes rouges perdues
Part 2: 4 billes bleues restantes

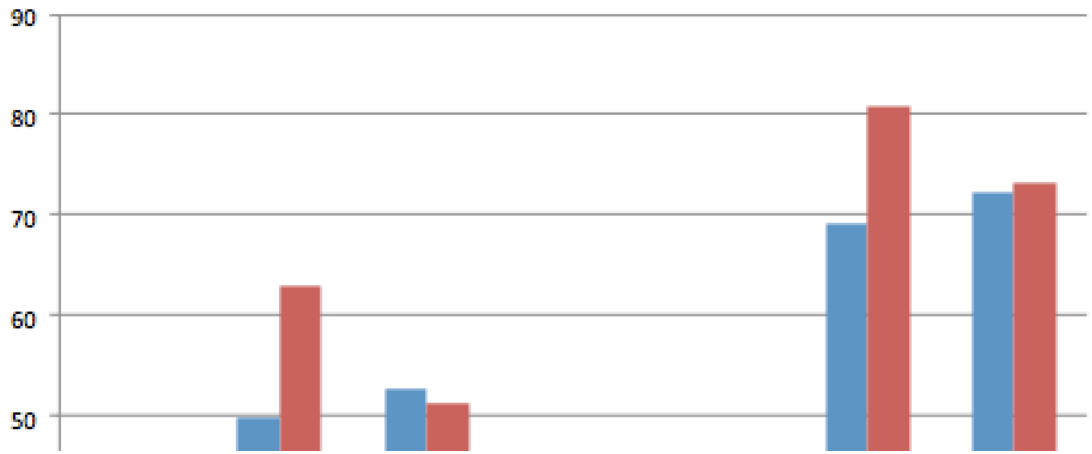
Tout : Les billes de Pierre avant la récréation



Sander & Fort, 2014 ; De Longuemar & Sander, 2016

Interventions par introduction de situations pivots

	Groupe "Classique" (C) (N=115)	Groupe "Flexibilité" (F) (N=111)
CE1 (N=78) Âge (7A 6M)	39	39
CE2 (N=148) Âge (8A 7M)	76	72
Prétest	Problèmes de combinaison Problèmes de transformation	
Intervention	Problèmes "Classiques"	Problèmes Ambigus
Posttest	Problèmes de combinaison Problèmes de transformation	



Sander & Fort, 2014

Conclusion

Trois formes d'analogies intuitives : Substitution, Scénario, Simulation

Trois configurations de congruence relativement indépendantes

Interaction dans les progressions d'apprentissage

Concerne l'élève et l'enseignant

Elaborations de progressions intégrant ces trois formes d'analogies intuitives et suscitant des recodages sémantiques

Audo, S., & Sander, E. (2008). Les sources de difficulté dans la résolution de problèmes de division. Congrès de la Société Française de Psychologie, Bordeaux, septembre 2008.

Brissiaud, R., & Sander, E. (2010). Arithmetic word problem solving: a Situation Strategy First Framework. Developmental Science, 13(1), 92-107.

Fischer, J.-P., Sander, E., Sensevy, G., Vilette, B. & Richard, J-F. (2018). Can young students understand the mathematical concept of equality? A whole-year arithmetic teaching experiment in second grade. European Journal a of Psychology of Education .

Gamo, S., Nogry, S., & Sander, E. (2014). Apprendre à résoudre des problèmes en favorisant la construction d'une représentation alternative chez des élèves scolarisés en éducation prioritaire. Psychologie Française, 59(3)

Gamo, S., Sander, E., & Richard, J-F. (2010). Transfer of strategies by semantic recoding in arithmetic problem solving. Learning and Instruction, 20, 400-410.

Gros, H., Thibaut, J-P., & Sander, E. (2015). Robustness of semantic encoding effects in a transfer task for multiple-strategy arithmetic problems. Proceedings of the 37th Annual Meeting of the Cognitive Science Society, Pasadena, California, USA, pp. 818-823.

Gros, H., Thibaut, J-P., & Sander, E. (2017). The nature of quantities influences the representation of arithmetic problems: evidence from drawings and solving procedures in children and adults. Proceedings of the 39th Annual Meeting of the Cognitive Science Society, London, UK

Gvozdic, K., & Sander, E. (2016). Persistence of intuitive strategies on word problems - extension of the Situation Strategy First framework. Budapest CEU Conference on Cognitive Development, Budapest, Hungary

Gvozdic, K., & Sander, E. (2017). Solving additive word problems: Intuitive strategies make the difference. . Proceedings of 39th Annual Meeting of the Cognitive Science Society, London, UK

Hofstadter, D., & Sander, E. (2013). L'Analogie : cœur de la pensée. Paris, Odile Jacob.

Lautrey, J., Rémi-Giraud, S., Sander, E., & Tiberghien, A. (2008). Les connaissances naïves. Paris, Armand Colin.

de Longuemar, G., Sander, E. (2016). Learning to overcome inadequate intuitive strategies in arithmetic word problem solving. Communication affichée présentée à la Budapest CEU Conference on Cognitive Development, Budapest; 01/2016

Sander, E. (2008). Les connaissances naïves en mathématiques. Dans J. Lautrey, S. Rémi-Giraud, E. Sander et A. Tiberghien, Les connaissances naïves (pp. 57-102). Paris, Armand Colin.

Sander, E. (2016). Enjeux sémantiques pour les apprentissages arihtmétiques. Bulletin de Psychologie, 69(6), 463-469.

Sander, E. (2016). L'impératif analogique. Séminaire international de l'IFÉ Apprendre et Faire apprendre : perspectives internationales, « L'analogie. Quelles conceptions et quelles conséquences éducatives ? », 12e session des 29 et 30 juin 2016, Lyon, France

Sander, E. (2017). Le développement conceptuel. Dans R. Miljkovitch, F. Morange-Majoux et E. Sander (Dir.). Psychologie du développement (pp. 107-116). Masson, Paris

Sander, E. (2017). Les connaissances issues de la vie quotidienne et les apprentissages scolaires. Dans R. Miljkovitch, F. Morange-Majoux et E. Sander (Dir.). Psychologie du développement (pp. 217-226). Masson, Paris

Sander, E. (2018). Une perspective interprétative sur la résolution de problèmes arithmétiques : le cadre A-S3. Actes du Séminaire de didactique des mathématiques (ARDM 2018)

Sander, E., & Fort, C. (2014). Semantic ambiguity as basis for promoting learning in the case of arithmetic problem solving. Proceedings of ICAP 2014, 28th international congress of applied psychology, 8-13 July 2014, Paris.

Sander, E., & Richard, J-F. (2005). Analogy and transfer: encoding the problem at the right level of abstraction. Proceedings of the 27th Annual Conference of the Cognitive Science Society, Stresa, Italy, pp. 1925-1930.

Sander, E., & Richard, J-F. (2017). Les apprentissages numériques. Dans R. Miljkovitch, F. Morange-Majoux et E. Sander (Dir.). Psychologie du Développement (pp. 251-258). Paris : Masson.

Scheibling-Sève, C., Sander, E. & Pasquinelli, E. (2017). A recategorization method to improve pupils' cognitive flexibility. Budapest CEU Conference on Cognitive Development. Budapest, Hongrie, 6-8 janvier.