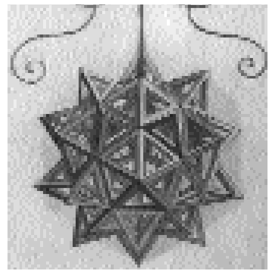
LA CRISI DEGLI INCOMMENSURABILI

*di Silvio Maracchia**

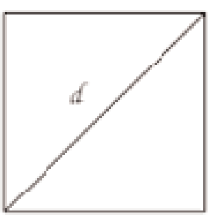
La matematica è un sapere codificato e immutabile come appare nei libri di testo e come pensano tanti studenti? O non è piuttosto il risultato di un travaglio addirittura millenario, il frutto dell'elaborazione di secoli, generato dall'opera di grandi personaggi? Avvicinare le grandi tematiche che hanno prodotto quella matematica che oggi impariamo non è una perdita di tempo, ma un'occasione per suscitare curiosità e interesse. Il contributo che segue, trascrizione di una conferenza tenuta a Civitanova Marche, propone un aspetto affascinante della genesi del concetto di numero irrazionale, uno dei più complessi nella matematica di livello scolastico.



Molte sono le crisi che in vari settori si sono verificate e si verificheranno nel cammino dell'umanità; se esse non sono eccessivamente forti, cioè se non sono tali da causare disastri permanenti, sono crisi che a lungo andare si risolvono positivamente poiché si trasformano in crisi di crescenza. Anche la matematica ha attraversato le sue crisi più o meno violente e da esse ha tratto sempre beneficio. Ci occuperemo qui di una delle più significative, anche se in un primo tempo il suo presentarsi sembrò poter dare discredito all'intera matematica: parliamo della cosiddetta «crisi degli incommensurabili» avvenuta attorno al 500 a.C. nella scuola pitagorica.

Il problema

Anzitutto vediamo che cosa sono le grandezze incommensurabili, aggettivo che è la traduzione esatta del termine greco Ésåmmetroß: due grandezze si dicono incommensurabili quando non esiste alcuna sottomultipla di una che possa essere sottomultipla anche dell'altra, quando cioè la due grandezze non hanno una sottomultipla comune.



$\ell = 2$

Per esempio, se si suppone uguale a 2 la lunghezza del lato di un quadrato, non è possibile esprimere quella della rispettiva diagonale con numeri interi, è facile vedere che tale lunghezza è maggiore di 2 ma minore di 3, ma neppure con una qualsiasi frazione. Questo equivale a dire che la lunghezza della diagonale non potrà essere espressa con alcun numero razionale.

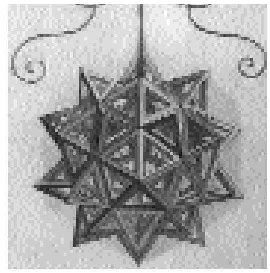
È bene tenere presente che una grandezza non è incommensurabile di per sé, è incommensurabile rispetto ad un'altra grandezza, perché ogni grandezza è sempre commensurabile con se stessa: la sua unità di misura è se stessa.
Per gli antichi greci questa situazione era molto difficile da affrontare. Attualmente siamo abituati a convivere con le grandezze incommensurabili, ma se ci mettiamo nei panni dei matematici del V secolo a.C., possiamo immaginare che il fatto che la dimostrazione dedotta matematicamente dal teorema di Pitagora facesse vedere che esistevano grandezze che non potevano avere una sottomultipla comune colpisse dolorosamente la fantasia dei matematici dell'epoca.
A testimonianza dell'importanza che i greci daranno a questa scoperta c'è il fatto che per indicare la stessa cosa esistono nella lingua greca quattro vocaboli diversi (vedi riquadro a lato). Questa ricchezza di vocaboli sta ad indicare la rilevanza che ha avuto tale questione nella matematica greca, ma anche nella filosofia (Élocoß è più termine filosofico che matematico), come in generale nello sviluppo della scienza greca.

Ésåmmetroß: che non hanno una misura comune
Émetroß: «senza misura», sempre riferito a questo tipo di grandezze
Érrepoß: «irrazionale», grandezza irrazionale
Élocoß: «senza ragione», cioè senza rapporto.

Un po' di storia

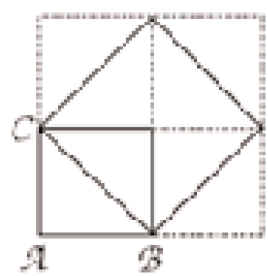
La scoperta dell'incommensurabilità è avvenuta intorno al 500 a.C. e i personaggi principali sono stati i pitagorici.
La testimonianza molto tarda, ma sufficientemente attendibile, di Proclo (V secolo d.C.) dice che fu Pitagora a studiare in maniera più liberale e più scientifica la matematica, e che si deve a lui lo studio delle grandezze irrazionali che lui stesso chiama Élocoß, e successivamente la costruzione delle figure cosmiche, ossia dei poliedri regolari.
Molto è stato studiato, detto e discusso sulla parola Élocoß, anche perché alcuni studiosi l'hanno interpretata come una modificazione da parte dello scrivente della parola lûcoß, oppure della parola Éualûcoß. Non v'è dubbio tuttavia che in quel periodo, forse non proprio per opera di Pitagora - anche se penso ci volesse una grossa personalità matematica per arrivare a risultati di quel genere - ci furono notevoli modificazioni nella concezione del numero e delle figure geometriche in genere.
Sembra che un pitagorico contemporaneo di Pitagora, Ippaso di Metaponto, abbia dimostrato come inscrivere in una sfera un dodecaedro regolare. Si dice anzi che, per aver rivelato questo risultato e aver svelato in maniera ad esso connessa la questione degli incommensurabili, egli sia stato abbandonato dalla scuola e Giove, il dio della matematica, lo abbia perseguitato facendogli fare naufragio e condannando il suo corpo ad essere

sbattuto sulle spiagge del Metaponto per l'eternità.
Al di là del racconto mitologico, la testimonianza rivela che già in epoca contemporanea a Pitagora esisteva questo problema. Il dodecaedro è un poliedro le cui facce sono pentagoni regolari; per affrontare il pentagono e la sua costruzione è necessaria una certa cognizione di quella che viene chiamata sezione aurea di un segmento: ebbene, un segmento e la sua sezione aurea sono grandezze tra loro incommensurabili. Ecco perché qualche storico della matematica attribuisce addirittura la scoperta dell'incommensurabilità non, come quasi tutti fanno, alla coppia diagonale-lato del quadrato, bensì alla costruzione del pentagono regolare. Tuttavia va notato che proprio perché tale costruzione richiede una certa consapevolezza della nozione certamente non banale di sezione aurea, appare più spontaneo pensare che la prima coppia di grandezze incommensurabili comparsa nella storia della matematica sia proprio quella del lato e della diagonale di uno stesso quadrato.
Ciò è suffragato dal fatto che Aristotele, circa due secoli dopo Pitagora, nominerà in tutti i suoi libri a noi pervenuti ben trenta volte l'incommensurabilità tra lato e diagonale del medesimo quadrato, non nominando mai l'esempio del pentagono. Anche Platone, che nomina l'incommensurabilità più volte e in maniera più matematica rispetto a quello che farà in seguito Aristotele, non fa mai cenno al pentagono regolare in connessione con l'incommensurabilità, sebbene sia stato, come vediamo nel Timeo, uno studioso dei poliedri regolari. Questo fa dire che molto probabilmente il lato e la diagonale di un medesimo quadrato sono state la prima coppia di grandezze incommensurabili.



Diverse ipotesi

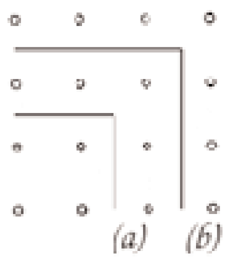
Come è avvenuta la scoperta, e quali sono state le sue conseguenze immediate?
Su come sia avvenuta ci sono tre ipotesi.
La prima ipotesi è di Frajese, il quale afferma che la scoperta dell'incommensurabilità tra lato e diagonale di un medesimo quadrato è stata quella che appare nel Menone di Platone, nel passo in cui Socrate, con un ragionamento di apprezzabile didattica, cerca di portare il ragazzo a determinare il lato il cui quadrato risultasse doppio di un quadrato dato.
Nel Menone Socrate si affida ad una figura in cui si vede proprio che il lato richiesto è la diagonale del quadrato di partenza. L'interesse di tutta la lunga deduzione era originato dal fatto che con i numeri interi non era possibile determinare quella lunghezza, il cui quadrato risultasse doppio di un quadrato assegnato.
Allora si potrebbe pensare che, posto 2 il lato del quadrato di par-



tenza, la lunghezza della diagonale sia un numero razionale compreso tra 2 e 3, cioè 2,4 o 2,6, o meglio un numero sotto forma di frazione (poiché i greci esprimevano i numeri in frazioni e non usavano la scrittura decimale). Questo però non è possibile, perché noi possiamo sempre ricondurci a numeri interi diminuendo l'unità di misura e con i numeri interi si vede immediatamente che il problema non è risolubile.

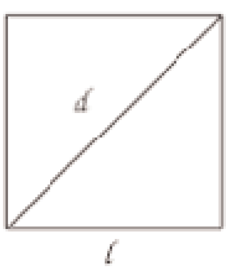
Dunque la questione non è risolvibile né con i numeri interi né con i numeri razionali, che erano gli unici numeri che i greci conoscevano: ecco allora presentarsi il mistero di quel segmento, la diagonale di un quadrato, che si poteva costruire geometricamente, ma la cui lunghezza non si poteva esprimere né con numeri interi né con frazioni, e non era quindi una lunghezza nota.

Una seconda ipotesi è quella avanzata dallo studioso Franciosi. Si sa che nella scuola pitagorica le figure geometriche erano rappresentate per mezzo di sassolini: un triangolo era identificato da tre sassolini corrispondenti ai vertici, un quadrato da quattro sassolini e così via, e alcuni numeri speciali venivano indicati con nomi geometrici, come «numeri triangolari», «numeri quadrati» e altri. Se prendiamo un quadrato di lato 2, quindi con «numero quadrato» 4, e vogliamo costruirne un altro con «numero quadrato» 9, non dobbiamo far altro che aggiungere opportunamente altri sassolini e costruire così una nuova figura.



Così al quadrato di 4 sassolini veniva aggiunta la parte (a), detta gnomone, che permetteva il passaggio al quadrato immediatamente successivo, cioè 9, e così di seguito, da 9 aggiungendo (b) si passa al numero quadrato 16. Questi sassolini erano chiamati yh̃joi (in latino *calculi*).

Se vogliamo studiare l'incommensurabilità tra il lato e la diagonale di uno stesso quadrato, ci accorgiamo che se l è il lato e d la diagonale, per il teorema di Pitagora si ha: $d^2 = 2l^2$. Ma poiché l e d si considerano numeri interi, questo non è possibile, cioè che il doppio di un numero quadrato sia ancora un numero quadrato.



Ebbene, afferma Franciosi, se prendiamo questi sassolini e se noi abbiamo due quadrati uguali, combinandoli insieme non riusciremo mai a formare un nuovo quadrato. Questo può aver dato l'idea che la relazione $d^2 = 2l^2$, che è una delle prime relazioni comparse in aritmetica, non sia risolvibile con numeri interi. Ma se dall'osservazione con i sassolini, almeno nei primi casi sperimentabili, si vede che non è valida, allora probabilmente non lo sarà mai, e le due grandezze in questione non sono commensurabili. D'altra parte sappiamo anche che neanche considerando numeri razionali posso arrivare a risultati utili, in quanto avendo numeri razionali posso sempre scriverli in forma di frazione e riportarli allo stesso denominatore, tornando così al caso degli interi.

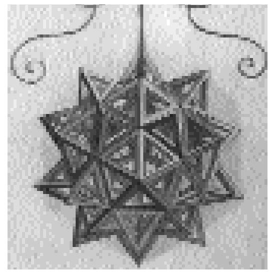
La terza ipotesi, che forse è la più probabile, fa riferimento ad una frase di Aristotele, il quale sta facendo vedere in cosa consiste la dimostrazione per riduzione all'assurdo e ragiona in questo modo: «é come se noi considerassimo commensurabili lato e diagonale [di uno stesso quadrato], in questo caso avremmo che un numero pari è nello stesso tempo dispari. Ora siccome uno stesso numero non può essere contemporaneamente pari e dispari, allora vuol dire che le grandezze non possono essere commensurabili.»
É stata ricostruita la probabile dimostrazione a cui fa riferimento Aristotele, anche perché nel X libro degli *Elementi* di Euclide vi è una dimostrazione geometrica, considerata però da Heiberg una interpretazione, che ricalca questa dimostrazione. Quindi all'epoca di Euclide (circa 300 a.C.) si era costruita una dimostrazione che sembra ricalcare immediatamente l'accenno che ne fa Aristotele e che riportiamo di seguito.
«Abbiamo

$$d^2 = 2l^2 \qquad (1)$$

con d e l primi tra loro (se non lo fossero possiamo sempre cambiare unità di misura e riportarli ad essere primi tra loro). Supponiamo che d e l siano commensurabili, cioè abbiano un sottomultiplo comune. Se è vera la (1) vuol dire che d^2 è un numero pari, e se d^2 è un numero pari facilmente si può dimostrare che d è un numero pari.
Ora, siccome d è pari e d e l sono primi tra loro, cioè non hanno sottomultipli comuni, l dovrà necessariamente essere dispari.
Ma se d è pari, posso scrivere:
$d = 2k$, con k numero intero, e di conseguenza si ha:

$$4k^2 = 2l^2, \text{ cioè } \quad l^2 = 2k^2.$$

Ma allora l^2 è pari, e quindi anche l è pari.
Ciò porta però all'assurdo, che l sia contemporaneamente pari e dispari. Quindi è errato il presupposto che d e l siano commensurabili.»
Ricordiamo che i pitagorici avevano stabilito una serie di dieci opposizioni, la «lista dei contrari» che non potevano verificarsi contemporaneamente: uno-molteplice, finito-infinito, destro-sinistro, rettilineo-curvilineo, maschio-femmina, razionale-irrazionale, pari-dispari, buono-cattivo, luce-ombra, mosso-quiete.
Ne possiamo dedurre che fosse loro già chiaro quello che con Aristotele diventerà il principio di non contraddizione: non posso prendere insieme A e non A. In particolare un numero non può essere contemporaneamente primo e non primo, pari e dispari. Quella che abbiamo visto è una classica dimostrazione di riduzione all'assurdo, da cui scaturisce la incommensurabilità del lato e della diagonale di un medesimo quadrato.



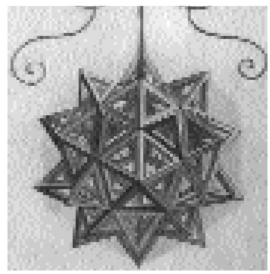
La concezione dei pitagorici

Il risultato non fu ben accetto nella scuola pitagorica, poiché essa basava molto della sua concezione sui numeri interi. I pitagorici ritenevano che ogni cosa fosse governata da un solo numero intero: conoscere le proprietà dei numeri interi significa allora conoscere le proprietà delle cose che ci circondano, e tutto viene governato dal numero.
Quello che particolarmente colpì Pitagora fu la scoperta che i suoni prodotti pizzicando una corda venivano ad essere governati da numeri interi. Infatti se tendiamo una corda tra due punti e la pizzichiamo, essa emetterà una certa nota, se poi dividiamo in due questa corda, le vibrazioni che otterremo daranno la stessa nota ma di una ottava più alta, e in particolare se dividiamo la corda in parti 3/4, 1/2 si formano suoni in grado di armonizzare tra loro.
Se dunque i numeri interi sembrano governare cose così lontane dalla matematica come la musica, allora essi governano tutto ciò che ci circonda. Il mondo è ordinato, comprensibile con i numeri, affermavano i pitagorici. La parola kûsmoß vuol dire universo, ma anche ordine. Quindi, se il mondo è ordinato, ed è ordinato rispetto ai numeri, studiare i numeri vuol dire studiare i substrati ultimi, più profondi del kûsmoß che può essere da noi conosciuto; mentre se il mondo è un capriccio di dei capricciosi, noi non riusciremo mai a capirlo, perché le cose possono essere disordinate e mutevoli. Se il mondo è costruito invece in forma razionale, neanche il dio può contravvenire alla necessità che si manifesta nelle verità matematiche: e ciò farà sorgere piuttosto un problema di carattere filosofico.
Tutto questo orizzonte di pensiero veniva ad essere incrinato dalla scoperta delle grandezze incommensurabili, perché si mostrava che il numero naturale non riusciva a spiegare una misurazione apparentemente possibile. Ecco che una concezione come quella pitagorica, così profonda e così scientificamente valida per lo slancio e lo stimolo che dava allo studio razionale del nostro universo, rischiava di naufragare.

Oltre la crisi: la filosofia

Ci fu allora una reazione: i matematici cercarono di riassorbire la difficoltà dell'esistenza dei segmenti incommensurabili e i filosofi cercarono di trarne le conseguenze per le loro teorie. Per esempio, Platone parla più volte degli incommensurabili, e afferma che sono delle «verità necessarie». Aristotele afferma che la questione delle grandezze incommensurabili è una risposta a chi pensa

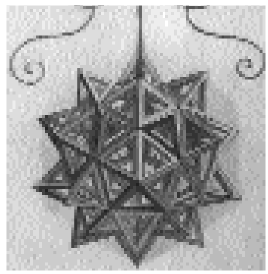
che tutto sia vero o che niente sia vero. Nelle trenta volte che Aristotele nomina l'incommensurabilità una particolarmente merita di essere ricordata, per la maniera accattivante con cui presenta la questione.
Dice infatti: «é un po' come i trucchi dei giocolieri, in cui uno si meraviglia delle cose che accadono, però dopo che ha saputo qual è il trucco si meraviglia di essersi meravigliato.» così per la incommensurabilità, sarebbe strano che oggi un matematico pensasse che tutte le cose sono commensurabili.
Platone invece, nelle *Leggi*, dietro il personaggio dell'Ateniese, confessa di essere venuto a conoscenza tardi del problema degli incommensurabili e, come colui che ha appreso una cosa solo da poco tempo, mostra tutto l'orgoglio di averla appresa e un malcelato disprezzo verso coloro che queste cose ancora non le conoscono.
Dice infatti: «I greci sono ignoranti come giovani maiali», perché ignorano una questione molto importante della matematica cioè la questione degli incommensurabili.
Questo per dire che Platone se ne occupò, anche perché egli tendeva ad una razionalizzazione della matematica. Ad esempio egli diceva: se parlo di un triangolo isoscele, io parlo di un triangolo che ha almeno due lati uguali, ma chi ci dice che i lati sono uguali? Lo pensiamo, ma certamente non li misuriamo; ma anche se li misurassimo, le misure ottenute non sarebbero uguali, ma anche se le misure fossero per avventura uguali, avremo ancora dubbi sapendo che le misure di per sé sono sempre imprecise. Secondo Platone questa misura non ha importanza, non ha importanza che li si disegni in maniera più o meno corretta, l'importante è che li si pensi uguali e su questa presunzione si costruiscono tutte le altre proprietà. Tutto si basa quindi su ciò che si pensa, sulla ragione e non sulle singole figure, che sono soltanto immagini imperfette del pensiero.
La matematica quindi per Platone ci dà questa spinta verso la razionalizzazione, verso la fiducia nella mente e ciò è senz'altro producente dal punto di vista didattico: da Platone in poi la matematica acquisterà infatti un significato didattico che non perderà più. Affermava Platone stesso: «Guarda come sono più svegli coloro che studiano i calcoli numerici nei confronti di coloro che non li studiano.» La matematica nella concezione platonica serve dunque alla maturazione della mente, ma serve anche al dialettico come spinta verso la razionalizzazione, verso la conoscenza del mondo Iperuranio, l'unico mondo vero, inattaccabile: potremmo quasi dire che serve per allenare la mente ad un'aria rarefatta.



Natura delle verità matematiche

Prima di continuare la discussione riflettiamo su alcuni interrogativi.
Se Pitagora non fosse vissuto, il suo teorema sarebbe stato dimostrato da qualcun altro? Gli incommensurabili sarebbero stati scoperti da qualche altro matematico?
Nella risposta a domande di questo tipo gli studiosi si dividono in due categorie: quelli che pensano a un determinismo della scienza, per cui ritengono che piano piano le cose sarebbero venute fuori lo stesso, e coloro che pensano invece che le cose si sono evolute in questo modo proprio perché c'è stato il genio di Pitagora che le ha indirizzate in una certa direzione.
La domanda allora si sposta: se non ci fossero stati Pitagora o altri, la matematica sarebbe andata alla ricerca di altre cose, di altre verità? E se invece della geometria euclidea un genio matematico prima di Euclide avesse dato inizio alle geometrie non euclidee, nelle quali il teorema di Pitagora non è vero, come ad esempio nella geometria iperbolica, le grandezze incommensurabili sarebbero venute fuori lo stesso? Se ciò fosse accaduto, la matematica sarebbe stata completamente diversa, oppure ad un certo punto sarebbe risultata grosso modo quella che è oggi?
Questo punto fondamentale è emerso anche di fronte alle grandezze incommensurabili, perché esse sembravano andare contro il senso comune. Sembrava, come in effetti fu, che la loro esistenza si imponesse necessariamente, contro la credenza della scuola pitagorica, poiché l'esistenza delle grandezze incommensurabili distruggeva buona parte della teoria pitagorica. Si può pensare allora che se questo argomento si impone a prescindere dalle idee iniziali, vuol dire che è inevitabile.
Platone infatti diceva: «I matematici sono come i cacciatori, scovano la selvaggina e la uccidono, poi la devono dare ai cuochi che la dovranno cucinare.»
I matematici scoprono le verità che già preesistono, poi però le devono dare ai filosofi che le capiscono. Le proprietà ci sono, già esistono, ma sono nascoste.
Ma ciò è vero? Cioè i numeri pari o dispari esistono, o esistono solo dal momento in cui i numeri sono divisi in numeri pari e numeri dispari?
Schopenauer afferma che certe verità ci sono solo perché ci sono stati coloro che le hanno scoperte. I matematici però obiettano che certe verità esistono di per sé: basti osservare la questione della geometria iperbolica, che fu scoperta contemporaneamente e indipendentemente da Gauss, Bolyai e Lobacevskij. Anche Ruffini e Abel ottennero gli stessi risultati contemporaneamente e

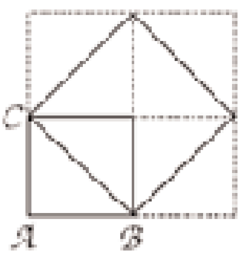
uno indipendentemente dall'altro.
Ma allora si può pensare che la matematica esiste e gli studiosi possono solo scoprirne le proprietà e i vari aspetti. C'è chi crede ad una cosa e chi crede ad un'altra. Secondo me la matematica è un creazione del pensiero dell'uomo, ma allora come si spiegano queste contemporaneità?
Il fatto è che c'è una matematica «locale» e una matematica «in tempi lunghi».
È chiaro che oggi sono impostati certi problemi che non sono ancora risolti, per cui le soluzioni, se verranno, si baseranno sul substrato matematico che oggi noi conosciamo. È come quando si assegna un problema ad una classe: ci saranno due o tre metodi risolutivi, ma non di più. Il livello matematico di oggi è quello che è, quindi i problemi che sono da risolvere e che si conoscono probabilmente si risolveranno in due o tre modi diversi, ma sono solo quelli. Quando nasce un genio, questo cambia la prospettiva matematica. Quindi, mentre possiamo ragionevolmente dire che tra cinquant'anni la matematica risolverà questi problemi con gli strumenti che si hanno a disposizione, non si sa però quale sarà la matematica tra duemila anni.
Per esempio, dopo i tentativi di risolvere la questione del V postulato di Euclide, dopo il libro di Saccheri, dopo gli studi di Legendre, di Lambert, a un certo punto sembra quasi evidente il passaggio successivo, e quindi non ci si deve meravigliare più di tanto se Gauss e Bolyai hanno avuto la stessa idea. Analogamente, quando Abel ha affrontato le funzioni ellittiche non ha fatto altro che invertire il discorso degli integrali ellittici: Legendre aveva impiegato quarant'anni e non aveva scoperto la strada migliore, cioè non aveva capito che invece di affrontarli in un modo doveva invertire il problema. La stessa idea venuta ad Abel è venuta però anche a Jordan; questo non vuol dire solo che esistevano già le funzioni ellittiche, vuol dire che il passaggio era nelle premesse.
Per ricollegarci alla questione che ci interessa, questo fu un problema impostosi ai tempi di Platone anche a motivo della nascita delle grandezze incommensurabili.
Il problema è filosofico, ed è strettamente legato alla concezione della verità, in particolare della verità matematica, tant'è vero che nella scuola di Platone si scontrarono su ciò matematici e filosofi.
C'era la scuola di Platone con i suoi filosofi e anche matematici, ma c'era la scuola di Cizico con Eudosso di Cnido, Menecmo e suo fratello Dinostrato che invece erano i matematici veri e propri.
Il problema sul tappeto era proprio stabilire che cos'era la verità matematica, cosa voleva dire teorema, cosa voleva dire proble-



ma. Un problema sembrava tirar fuori la proprietà costruendo qualche cosa e quindi creandola; il teorema invece sembrava una cosa già scritta nel cielo da dover semplicemente ritrovare con la dimostrazione.
La questione dell'incommensurabilità si è innestata in questo stato di cose, perché sembrava una cosa che, pur andando contro il senso comune, si era imposta da sé, senza pensare che era un prodotto del teorema di Pitagora, cioè della geometria euclidea. Se avessimo avuto un pianeta un po' più curvo, probabilmente la geometria sarebbe stata diversa e tutto quello che diciamo non sarebbe apparso o sarebbe apparso dopo millenni, come è successo per le geometrie non euclidee.

Oltre la crisi: la matematica

Torniamo alla questione puramente matematica.
Anzitutto vediamo come Socrate risolve il problema da lui stesso assegnato allo schiavo.



Dato il quadrato di lato *l*, la costruzione di Socrate prevede il tracciamento della diagonale e delle diagonali degli altri tre quadrati uguali al primo.
Il quadrato costruito sulla diagonale comprende quattro triangoli mentre il primo ne contava solo due: il quadrato costruito sulla diagonale è quindi doppio di quello di partenza.

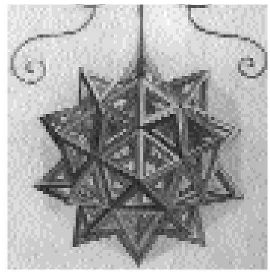
Anche in questo dialogo del Menone si ritrova quanto abbiamo visto: se indico con *d* la diagonale del quadrato e con *l* il lato, con il teorema di Pitagora ottengo $d^2 = 2l^2$, cioè $\frac{d^2}{l^2} = 2$.

Da qui oggi noi proseguiremmo dicendo che allora $\frac{d}{l} = \sqrt{2}$,

ma questo non era possibile ai greci che non conoscevano ancora gli irrazionali.
Il problema geometrico aveva infatti un importante riflesso sul calcolo. I matematici greci, non avendo a disposizione i numeri irrazionali, non avendo a disposizione quindi la teoria dei numeri reali, e non sapendo come classificare, ad esempio, la lunghezza di *d* nota quella di *l*, cercarono di approssimare il più possibile questo rapporto utilizzando i numeri interi. Svilupparono allora un procedimento di approssimazione che prefigura molti dei metodi che ancora oggi usiamo nel calcolo.

Partirono dal fatto che $\frac{d^2}{l^2} = 2$: ora nessuna coppia di numeri interi è tale che possa verificare quella relazione, del resto lo abbiamo già visto quando si è constatato che il rapporto tra due numeri quadrati non può essere 2. Però possiamo trovare dei numeri tali che i loro quadrati abbiano un rapporto quasi uguale a 2. Allora questi, avendo i loro quadrati un rapporto quasi 2, avranno un rapporto prossimo a $\sqrt{2}$, proprio come il rapporto tra la diagonale e il lato di uno stesso quadrato.
Questa è stata la grande reazione dei matematici greci per tentare di risolvere, dal punto di vista numerico, il problema che si era presentato.
Una coppia di numeri i cui quadrati approssimano il 2 è data ad esempio dai numeri 17 e 12. Infatti:

$$\frac{17^2}{12^2} = 2.0069 \approx \frac{d^2}{l^2},$$



e quindi

$$\frac{17}{12} \approx \frac{d}{l} = 1.416666\ldots$$

questo rapporto fornisce quindi un valore approssimato di $\sqrt{2}$ che sappiamo essere 1,414213562…

Se ora prendiamo due numeri più grandi, per esempio 41 e 29, si avrà:

$$\frac{41^2}{29^2} = 1.99881$$

e

$$\frac{41}{29} = 1.413...,$$

ottenendo così un'altra approssimazione di $\sqrt{2}$.

L'idea che ha condotto a questi numeri è stata la seguente: «Due numeri interi d ed l tali che $d^2 = 2l^2$ non possiamo trovarli perché non esistono, però possiamo trovare un numero m e un numero n tali che soddisfino la relazione: $m^2 = 2n^2 \pm 1$.
Se tali numeri esistono, non ho trovato m e n che stanno nella relazione $m^2 = 2n^2$, che so di non poter trovare, ma mi sono avvicinato a questa relazione».

Per esempio:

m	n	$m^2 = 2n^2 \pm 1$
1	1	$1 = 2 \cdot 1 - 1$
3	2	$9 = 2 \cdot 4 + 1$
7	5	$49 = 2 \cdot 25 - 1$
17	12	$289 = 2 \cdot 144 + 1$
41	29	$1681 = 2 \cdot 841 - 1$
...	...	....

I matematici, come dice Teone di Smirne, trovarono questi numeri che chiamarono, gli *m,* numeri diagonali; gli *n,* numeri laterali (già i nomi stanno ad indicare come avessero ben chiara la relazione tra lato e diagonale di un medesimo quadrato, cioè che il rapporto tra questi numeri approssima il rapporto tra diagonale e lato di un medesimo quadrato).
Questi numeri sono costruiti con le seguenti leggi:

$$d_k = d_{k-1} + 2 \cdot l_{k-1}$$
$$l_k = d_{k-1} + l_{k-1}$$

Infatti, dalla tabella precedente:

(7, 5) $\quad 7 = 3 + 2 \cdot 2, \qquad 5 = 3 + 2$
(17, 12) $\quad 17 = 7 + 5 \cdot 2, \qquad 12 = 7 + 5$
....

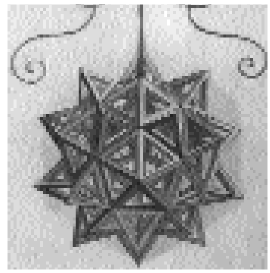
Cioè un numero l_k laterale è dato dalla somma del laterale e diagonale precedenti e il numero diagonale d_k è ottenuto dal numero diagonale precedente più il doppio del laterale precedente.
Platone in un passo del Menone considera il cosiddetto «numero nuziale», quel numero che presiede alla generazione dell'umanità, cioè quel numero che indica gli anni dopo i quali l'umanità ripercorre certi cicli: questo numero valeva 12 960 000 (del resto anche i pitagorici avevano l'idea del ciclo, del ritorno: dopo un certo numero di anni, di generazioni l'umanità sembra riprendere un ciclo già vissuto, cosa che fu ripresa molti secoli dopo da Nietzsche, che parlava del Grande ritorno).
Platone propone diversi metodi per calcolare questo numero (cinque addirittura): in uno di essi parla di «diagonale razionale 7 di un quadrato di lato 5».
Cioè, se un quadrato ha lato 5, Platone considera la sua diagonale razionale uguale a 7: infatti $7 \simeq \sqrt{50}$. Dunque nell'approssimazione Platone usa la coppia 7 e 5, ed è partendo da questa coppia che Teone, che vuole spiegare i passi matematici di Platone, ci dà le notizie sui numeri laterali e diagonali e

ci fa vedere come si costruiscono.
Teone non scrive la formula definitiva dei numeri laterali e diagonali nella forma che diamo noi, ma fornisce tutte le indicazioni per poterla ricavare.
Anzitutto si ha un punto di partenza, cioè la prima coppia (1,1), poi, per induzione, si vede che effettivamente

$$d_k = 2 \cdot l_k^2 \pm 1 \qquad (2)$$

come si ricava dalle formule ricorrenti di Teone già indicate.
La formula (2) possiamo scriverla:

$$\frac{d_k^2}{l_k^2} = 2 \pm \frac{1}{l_k^2},$$



ma sappiamo che le quantità d_k e l_k al crescere di k aumentano il loro valore tendendo all'infinito per cui, con notazioni di oggi e riferendoci al nostro punto di vista, noi scriveremmo:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{d_k^2}{l_k^2} = 2 \quad \left(\text{infatti } \frac{1}{l_k^2} \text{ tende a 0 per k che tende a infinito}\right).$$

Ma allora si ha:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{d_k}{l_k} = \sqrt{2}$$

da cui vediamo che l'approssimazione che tali numeri danno è sempre più spinta verso il valore $\sqrt{2}$.
Inoltre è chiaro anche il fatto dell'alternanza dovuta al termine ±1: una coppia fornirà un rapporto maggiore di $\sqrt{2}$, la successiva fornirà un rapporto inferiore a $\sqrt{2}$.
I numeri laterali e diagonali, che rappresentano una delle più grandi creazioni della matematica antica, anche se sono numeri poco noti, sono, secondo Teone, numeri che «armonizzano le figure».
Per i matematici greci era dunque possibile calcolare, se non *d* oppure *l* separatamente, almeno il loro rapporto, seppure approssimato.
E se invece di $\sqrt{2}$ si dovesse cercare $\sqrt{3}$?
Allora:

$$m^2 = 3 \cdot n^2 \pm 1 \quad (\text{oppure } \pm 2),$$

con questa espressione si trovano coppie di numeri m ed n il cui rapporto si avvicina a $\sqrt{3}$.

Ebbene, quando Archimede ebbe la necessità di approssimare quello che ora noi chiamiamo p, si trovò proprio nella necessità di approssimare $\sqrt{3}$, ed usò anch'egli valori approssimati per difetto e per eccesso, che si possono dedurre da formule di questo tipo.
Allora probabilmente quando un matematico greco voleva approssimare $\sqrt{A}$, bastava che o procedesse per tentativi o trovasse qualche legge ricorrente per l'equazione:

$$m^2 = A \cdot n^2 \pm 1 \ (\pm 2, \pm 3, \ldots)$$

Ebbene, l'equazione:

$$m^2 = A \cdot n^2 + 1$$

dove A non è un quadrato perfetto, rappresenta quell'equazione oggi nota come equazione di Pell-Eulero.
È un'equazione difficile da risolvere con numeri interi; alcune situazioni particolari le abbiamo viste, con 2, con 3, ma risolvere l'equazione nel caso generale è molto difficile.
I greci dovevano avere qualche elemento per poter risolvere queste equazioni, o per lo meno li aveva Archimede, che è stato forse il più grande matematico di ogni tempo. Infatti nel suo famoso problema dei buoi (si trattava di sapere quanti buoi si trovavano nell'isola di Trinacria con le condizioni che lui aveva posto) per poterlo risolvere compiutamente Archimede si scontra con l'equazione di Pell-Eulero, in cui il termine A che compare e che precedentemente abbiamo risolto con facilità nei casi di 2 e 3, questa volta vale 429494! Ebbene, per risolvere questa equazione veniva fuori un numero con più di duecentomila cifre, e questa è la soluzione più piccola, perché si può dimostrare che queste equazioni quando hanno una soluzione, allora ne hanno infinite. Ora ci si chiede come Archimede abbia affrontato la risoluzione di questo problema, e poiché Archimede pose questo problema come sfida ai matematici di Alessandria, è da supporre che lui stesso avesse la possibilità di risolverlo.
Questo problema fu poi affrontato nel XII secolo dal matematico indiano Bhaskara che ne diede soluzioni particolari per i primi cinque casi, in cui A vale 8, 11, 32, 61, 67.
Per esempio, per il caso in cui A vale 61 la soluzione è:

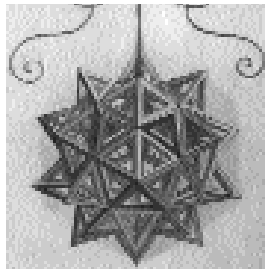
$$m = 1776319049$$
$$n = 22615390$$

Bhaskara prese questa equazione e la trasformò in una equazione a numeri più piccoli, e da questa ad un'altra a numeri ancora più piccoli, fino a trovare le soluzioni viste sopra.

In seguito, chi veramente riuscì a dimostrare che esiste sempre una soluzione, e che quindi possiamo anche applicare il metodo di Bhaskara o il metodo di Eulero, fu Lagrange. Il problema successivamente ha avuto notevoli sviluppi e soltanto la difficoltà di questa equazione l'ha resa meno celebre della notissima equazione di Fermat di cui non è certamente meno importante.

Aritmetica e geometria

I matematici greci non si limitarono a creare questo procedimento, ma giunsero a sciogliere la questione degli incommensurabili anche per un'altra via: infatti tutto il X libro degli *Elementi* di Euclide è rivolto alle grandezze, ai numeri che noi chiamiamo irrazionali. Anzi, Euclide distingue una grandezza razionale da una irrazionale: ma bisogna osservare che non è la stessa distinzione che facciamo noi.
Euclide considera grandezze razionali quelle che sono razionali di per sé, cioè il loro rapporto è un numero razionale, o sono razionali i rispettivi quadrati: se invece neppure i quadrati sono razionali, allora le grandezze vengono dette irrazionali.
Per esempio, se prendo il lato e la diagonale di uno stesso quadrato, il rapporto dei quadrati di queste grandezze è 2: ebbene, per Euclide anche queste grandezze sono razionali.
Al contrario, la sezione aurea di un segmento, che è il segmento che misura $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ rispetto al segmento di lunghezza unitaria, è una grandezza irrazionale, perché rimane incommensurabile con l'intero segmento anche se entrambi elevati al quadrato: se si eleva al quadrato, rimane ancora nel risultato $\sqrt{5}$.
Nella seconda proposizione del libro X Euclide dà un criterio per riconoscere quando due grandezze sono o no commensurabili: se noi abbiamo due grandezze (che Euclide schematizza come segmenti) certamente non uguali, altrimenti sarebbero commensurabili, riporto la più piccola sulla più grande tutte le volte in cui ci entra, successivamente prendo il resto e lo riporto sulla più piccola delle due, se non avanza resto le due grandezze sono commensurabili, se avanza una parte (un nuovo resto) lo riporto sul più piccolo dei due precedenti e così via. Se questo processo non ha fine, Euclide conclude che le due grandezze sono incommensurabili. Questo criterio è stato visto come il criterio delle frazioni continue, perché questo metodo non fa altro che creare delle frazioni continue anche se è molto dubbio che esse fossero conosciute da Euclide.



Nella nona proposizione dello stesso libro Euclide dà poi un altro criterio per la incommensurabilità: «Due grandezze sono incommensurabili se il rapporto tra i loro quadrati è uguale al rapporto tra due numeri quadrati» (criterio dei quadrati).
In un altro punto i Greci affrontarono vittoriosamente il problema della incommensurabilità sia da un punto di vista filosofico, come vediamo per opera di Filolao, sia da un punto di vista matematico attraverso le proporzioni, sempre per opera di Euclide.
Nella teoria delle proporzioni di Euclide troviamo il germe della concezione moderna dei numeri reali, e una definizione di incommensurabilità che diede la possibilità ai geometri greci di operare tutte le similitudini che volevono, sia che le grandezze in gioco siano commensurabili, sia che siano incommensurabili.
Osserviamo che gli antichi Greci si sono maggiormente orientati verso la geometria, perché essa era considerata lo strumento più potente per risolvere certe questioni sulla commensurabilità e sulla incommensurabilità. Infatti Socrate nel problema del quadrato di area doppia di un quadrato assegnato notò che il problema non è risolvibile con i numeri, ma può essere risolto da un punto di vista geometrico con i segmenti: da qui la constatazione che la Geometria è più potente dell'Aritmetica. Da allora la geometria è stata chiamata la scienza del continuo mentre l'aritmetica la scienza del discreto. Certo la geometria ha avuto la capacità di rassicurare, perché in geometria esiste la dimostrazione, mentre spesso con i numeri si intuisce soltanto. Si è quindi continuato a ritenere che la geometria fosse più potente dell'aritmetica, anche se numerosi matematici greci hanno oltrepassato questo giudizio, utilizzando nei problemi geometrici metodi che implicitamente presupponevano elevati concetti di aritmetica.
Dal punto di vista della filosofia, Filolao pur accorgendosi che i numeri interi non riescono ad esprimere tutto, nonostante ciò continuava ad avere la grande considerazione per i numeri interi propria della sua scuola: però affermava anche che in ogni cosa vi è il finito e l'infinito. Egli cioè, venendo a conoscenza di questi incommensurabili, dove anche nel finito vede che c'è qualcosa di infinito, allora non mette più tra i dieci contrari la coppia finito-infinito considerandoli come se fossero ai limiti di un qualcosa, ma ponendoli anche all'interno di ogni cosa. In ogni cosa, dice Filolao, vi è il finito e l'infinito. L'infinito quindi è entrato, proprio per mezzo degli incommensurabili, nel tessuto di ogni cosa, creando molta matematica che ancora oggi studiamo.

**Docente di Storia delle Matematiche*