

# Unit 9

## PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

---

**Bitman Simanullang**  
**Clara Ika Sari Budhayanti**

### Pendahuluan

Unit 9 dari bahan ajar cetak ini merupakan pemantapan dari semua konsep yang telah kita kaji bersama dari unit 1 sampai dengan 8. Dalam unit ini akan dibahas mengenai pemecahan masalah matematika. Sebenarnya pada unit 8 kita telah mempelajari pemecahan masalah matematika dimana pemecahan masalah-masalah matematika tersebut termasuk pada pemecahan masalah rutin. Pada unit ini selain akan dibahas mengenai pemecahan masalah matematika rutin juga akan dibahas pemecahan masalah matematika yang tidak rutin beserta contoh-contohnya. Kompetensi dasar yang harus Anda kuasai setelah mempelajari unit ini, tentu saja mampu memecahkan masalah matematika baik rutin maupun tidak rutin dengan menggunakan konsep di bidang aritmetika, aljabar, geometri dan pengukuran, trigonometri dan peluang serta menggunakan penalaran matematika yang tepat dan benar.

Unit ini dilengkapi dengan latihan-latihan agar Anda semakin memahami konsep yang dibicarakan. Pelajari unit ini dengan tuntas kemudian kerjakan tes formatif untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi ini. Kunci jawaban untuk tes formatif telah disediakan di akhir unit sehingga Anda dapat segera membandingkan pekerjaan Anda dengan kunci jawaban sehingga Anda dapat mengetahui apakah tingkat penguasaan Anda terhadap materi ini sudah memenuhi standar yang dipersyaratkan. Jika Anda belum mencapai standar tersebut, jangan segan untuk mempelajari ulang materi ini terutama pada konsep yang benar-benar belum Anda kuasai. Bertanyalah pada dosen atau rekan yang Anda anggap mampu, jika Anda mengalami kesulitan. Jangan segan pula untuk memanfaatkan sumber belajar lain yang mendukung seperti bahan ajar berbasis web yang telah disediakan.

**Selamat belajar dan tetap bersemangat, semoga Anda sukses.**

## Subunit 1

### Pemecahan Masalah Matematika

---

Subunit 1 dari unit 9 akan membahas mengenai pengertian masalah dan contoh-contohnya. Pemecahan masalah merupakan salah satu topik yang penting dalam mempelajari matematika. Banyak ahli matematika mengatakan bahwa matematika searti dengan pemecahan masalah yaitu mengerjakan soal cerita, membuat pola, menafsirkan gambar atau bangun, membentuk konstruksi geometri, membuktikan teorema dan lain sebagainya. Dengan demikian belajar untuk memecahkan masalah merupakan prinsip dasar dalam mempelajari matematika (National Council of Supervisors of Mathematics, 1978).

Beberapa ahli pendidikan matematika menyatakan bahwa masalah merupakan pertanyaan yang harus dijawab atau direspon. Namun tidak setiap pertanyaan otomatis merupakan suatu masalah. Suatu pertanyaan disebut masalah tergantung kepada pengetahuan yang dimiliki penjawab. Dapat terjadi bahwa bagi seseorang, pertanyaan itu dapat dijawab dengan menggunakan prosedur rutin tetapi bagi orang lain untuk menjawab pertanyaan tersebut memerlukan pengorganisasian pengetahuan yang telah dimiliki secara tidak rutin. Jadi suatu pertanyaan dapat menjadi masalah bagi seseorang tetapi bisa hanya menjadi pertanyaan biasa bagi orang lain. Hal ini sesuai dengan pernyataan Schoenfeld (1985) yaitu bahwa definisi masalah selalu relatif bagi setiap individu. Kategori pertanyaan menjadi masalah atau pertanyaan hanyalah pertanyaan biasa ditentukan oleh ada atau tidaknya tantangan serta belum diketahuinya prosedur rutin pada pertanyaan tersebut. Hal ini dikatakan oleh Cooney, 1975 bahwa suatu pertanyaan akan menjadi masalah hanya jika pertanyaan itu menunjukkan adanya tantangan yang tidak dapat dipecahkan oleh suatu prosedur rutin yang sudah diketahui oleh si pelaku. Coba Anda simak dua contoh masalah berikut ini. Dari kedua contoh tersebut, contoh manakah yang menurut Anda menjadi masalah buat Anda?

Contoh 1 : Dalam sebuah lomba matematika, Chandra menjadi juara pertama dan memperoleh skor 100. Dalam lomba tersebut jawaban yang benar akan mendapat skor 3 dan jawaban yang salah atau kosong akan dikurangi 1. Tentukan banyak soal dalam lomba tersebut jika diketahui perbandingan jawaban Chandra yang benar dan jumlah skor adalah 1 : 2.

Contoh 2 : Sebuah restoran memberikan kupon berhadiah untuk menarik minat pelanggan. Setiap orang yang membeli makanan di restoran tersebut akan diberikan sebuah kupon yang di balik kupon tersebut tertera salah satu bilangan-bilangan 9, 12, 42, 57, 69, 21, 15, 75, 24, atau 81. Pembeli yang berhasil mengumpulkan beberapa kupon dengan jumlah bilangan-bilangan di balik kupon sama dengan 100 akan diberi hadiah TV 21 inch. Pemilik restoran menyediakan 10 buah TV. Tentukan berapa banyak TV yang harus diserahkan kepada pelanggannya.

Menurut Saudara, dari dua contoh di atas manakah yang menjadi masalah bagi Anda?

Menyelesaikan suatu masalah merupakan proses untuk menerima tantangan dalam menjawab masalah. Seperti yang telah disampaikan di atas, suatu masalah memuat tantangan yang tidak dapat dipecahkan oleh suatu prosedur rutin yang telah diketahui oleh pelaku sehingga untuk menyelesaikan masalah tersebut dibutuhkan waktu yang relatif lebih lama dari proses pemecahan masalah rutin biasa. Menurut NCTM (2000) memecahkan masalah berarti menemukan cara atau jalan mencapai tujuan atau solusi yang tidak dengan mudah menjadi nyata. Sedangkan menurut Poyla (dalam Hudoyo, 1979) definisi pemecahan masalah adalah sebagai usaha mencari jalan keluar dari suatu kesulitan, mencapai tujuan yang tidak dengan segera dapat dicapai. Poyla mengelompokkan masalah dalam matematika menjadi dua kelompok. Pertama adalah masalah terkait dengan menemukan sesuatu yang teoritis atau praktis, abstrak atau kongkrit. Kelompok kedua adalah masalah terkait dengan membuktikan atau menunjukkan bahwa suatu pernyataan itu benar atau salah atau tidak kedua-duanya. Masalah yang terkait dengan menemukan sesuatu lebih tepat digunakan pada matematika yang sifatnya dasar sedangkan masalah yang terkait dengan membuktikan lebih tepat digunakan pada matematika lanjut.

Silahkan Anda mencoba menyelesaikan masalah pada dua contoh yang telah diberikan sebelumnya. Apakah Anda mengalami kesulitan dan kemacetan? Mari bersama-sama kita mencoba mencari solusinya.

Pada contoh pertama dimisalkan banyak soal yang dijawab benar adalah  $a$  maka menurut soal  $a : 100 = 1 : 2$  sehingga diperoleh  $a = 50$ . Diketahui untuk setiap soal yang dijawab benar diberi skor 3 dan untuk setiap soal yang dijawab salah atau kosong dikurangi 1. Misalkan banyak soal yang dijawab salah atau kosong adalah  $b$  maka diperoleh  $3a - b = 100$  padahal  $a = 50$  maka

$$3a - b = 100$$

$$3 \times 50 - b = 100$$

$$150 - b = 100$$

$$b = 50$$

Jadi banyak soal dalam lomba matematika tersebut adalah  $a + b = 50 + 50 = 100$ .

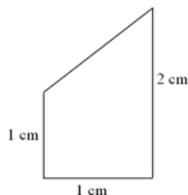
Untuk contoh yang kedua diketahui 10 bilangan yaitu 9, 12, 42, 57, 69, 21, 15, 75, 24, atau 81. Kita akan mencari beberapa bilangan yang jumlahnya sama dengan 100. Jika diperhatikan kesepuluh bilangan tersebut masing-masing habis dibagi 3. Karena masing-masing bilangan tersebut habis dibagi 3 maka hasil penjumlahan dari beberapa bilangan tersebut juga akan habis dibagi 3. Padahal kita akan mencari jumlah beberapa bilangan tersebut sama dengan 100 dimana 100 tidak mungkin habis dibagi 3. Dari sini dapat disimpulkan bahwa tidak mungkin jumlah beberapa bilangan di atas sama dengan 100. Hal ini berarti bahwa pemilik restoran tidak mungkin memberikan TV kepada pelanggannya.

Troutman (1982) menyatakan bahwa ada dua jenis pemecahan masalah matematika. Jenis pertama adalah pemecahan masalah yang merupakan masalah rutin. Pemecahan masalah jenis ini menggunakan prosedur standar yang diketahui dalam matematika.

Contoh : Tentukan luas persegi dengan panjang sisinya sama dengan 100 meter.

Pemecahan masalah jenis kedua adalah masalah yang diberikan merupakan situasi masalah yang tidak biasa dan tidak ada standar yang pasti untuk menyelesaikannya. Penyelesaian masalah ini memerlukan prosedur yang harus diciptakan sendiri. Untuk menyelesaikannya perlu diketahui informasi yang ada, dipilih strategi yang efisien dan gunakan strategi tersebut untuk menyelesaikannya.

Contoh : Bagilah daerah pada gambar berikut menjadi 4 daerah yang kongruen.



Di atas telah diuraikan mengenai pengertian masalah dan pemecahan masalah. Selanjutnya silahkan Anda menyimak ringkasan materi yang telah Anda pelajari, di bawah ini. Kemudian silahkan Anda mengerjakan tes formatif 1 dengan baik dan bandingkan hasil yang Anda kerjakan dengan kunci jawaban di akhir unit 9 ini.

## Rangkuman

Suatu pertanyaan akan menjadi masalah hanya jika pertanyaan itu menunjukkan adanya tantangan yang tidak dapat dipecahkan oleh suatu prosedur rutin yang sudah diketahui oleh si pelaku. Menyelesaikan suatu masalah merupakan proses untuk menerima tantangan dalam menjawab masalah. Memecahkan masalah berarti menemukan cara atau jalan mencapai tujuan atau solusi yang tidak dengan mudah menjadi nyata. Poyla mengelompokkan masalah dalam matematika menjadi dua kelompok. Pertama adalah masalah terkait dengan menemukan sesuatu yang teoritis atau praktis, abstrak atau kongkrit. Kelompok kedua adalah masalah terkait dengan membuktikan atau menunjukkan bahwa suatu pernyataan itu benar atau salah atau tidak kedua-duanya. Sedangkan Troutman mengelompokkan pemecahan masalah matematika menjadi dua jenis. Jenis pertama adalah pemecahan masalah yang merupakan masalah rutin. Pemecahan masalah jenis kedua adalah masalah yang diberikan merupakan situasi masalah yang tidak biasa dan tidak ada standar yang pasti untuk menyelesaikannya.

## Tes Formatif 1

Kerjakanlah tes formatif ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi pemecahan masalah matematika dengan cara memberi tanda silang pada (X) pada salah satu jawaban yang Anda anggap benar.

1. Salah satu ciri suatu pertanyaan menjadi masalah adalah .....
  - A. kesulitan
  - B. kemudahan
  - C. tantangan
  - D. menarik
2. Suatu pertanyaan menjadi masalah bergantung pada .....
  - A. jenis masalah
  - B. pengetahuan yang dimiliki
  - C. prosedur yang dipakai
  - D. rencana yang dibuat
3. Pada dasarnya matematika adalah pemecahan masalah. Belajar matematika berarti belajar memecahkan masalah. Masalah yang lebih tepat digunakan mempelajari matematika lanjut adalah masalah yang terkait dengan .....
  - A. simbol matematis
  - B. kehidupan sehari-hari

- C. membuktikan sesuatu
  - D. penemuan sesuatu yang teoritis atau praktis
4. Biasanya untuk siswa Sekolah Dasar, masalah matematika yang diberikan berbentuk soal cerita. Pemberian masalah ini menurut Polya mempunyai tujuan untuk .....
- A. menyelesaikan masalah
  - B. menemukan suatu konsep atau teori
  - C. membuktikan konsep atau teori
  - D. berlatih soal
5. Masalah matematika yang penyelesaiannya tidak dapat menggunakan standar prosedur yang telah diketahui disebut masalah .....
- A. rutin
  - B. tidak rutin
  - C. teoritis
  - D. praktis
6. Berikut ini pernyataan yang benar adalah .....
- A. menentukan hasil dari  $12345 \times 4$  bukan masalah
  - B. pertanyaan dalam matematika otomatis merupakan masalah
  - C. menyelesaikan persamaan linear bukan masalah bagi semua guru
  - D. menyelesaikan persamaan linear merupakan masalah bagi siswa SD
7. Diberikan masalah sebagai berikut.
- Pola ABBCCCDDDDABBCCCDDDDABBCCCDDDD... berulang sampai dengan tak berhingga. Tentukan huruf yang menempati urutan ke  $2^5 3^3$ .
- Masalah di atas termasuk jenis masalah .....
- A. rutin
  - B. tidak rutin
  - C. teoritis
  - D. praktis
8. Diberikan masalah sebagai berikut.
- Jika  $a > 2$  dan  $b > 3$  apakah  $ab + 6 > 3a + 2b$ ?
- Pertanyaan di atas merupakan jenis pertanyaan atau masalah yang terkait dengan .....
- A. generalisasi
  - B. kehidupan sehari-hari
  - C. membuktikan sesuatu
  - D. penemuan sesuatu yang teoritis atau praktis

9. Pemecahan masalah matematika dikelompokkan menjadi dua jenis yaitu pemecahan masalah rutin dan tidak rutin. Hal ini dikemukakan oleh .....
- A. Cooney
  - B. Poyla
  - C. Silver
  - D. Troutman
10. Usaha untuk mencari dan menemukan cara atau jalan untuk mencapai tujuan yang berupa solusi dari suatu masalah merupakan definisi dari .....
- A. pemecahan masalah
  - B. prosedur pemecahan masalah
  - C. strategi pemecahan masalah
  - D. validasi pemecahan masalah

### Umpan Balik Dan Tindak Lanjut

Setelah mengerjakan tes formatif 1, bandingkan jawaban Anda dengan kunci jawaban yang terdapat pada akhir unit ini. Jika Anda dapat menjawab dengan benar minimal 80%, Anda dinyatakan berhasil dengan baik. Selamat, silahkan Anda mempelajari sub unit selanjutnya. Sebaliknya jika jawaban benar Anda kurang dari 80%, pelajari kembali uraian dalam sub unit ini, terutama bagian-bagian yang belum Anda kuasai dengan baik.

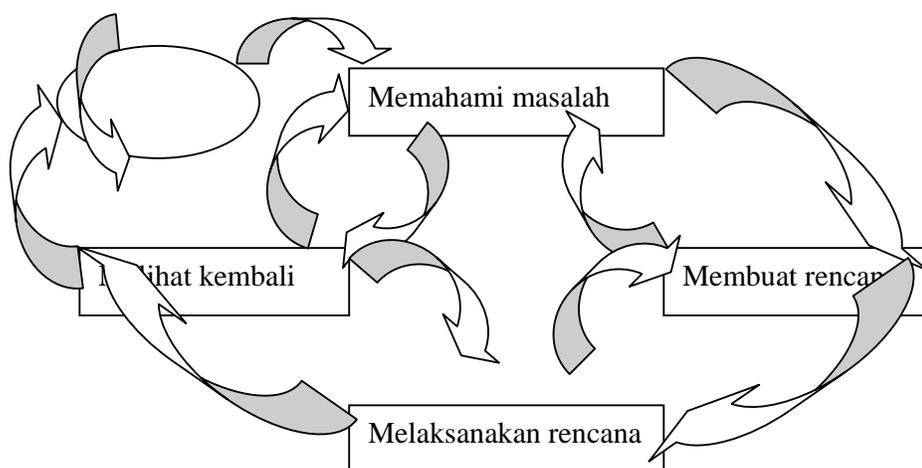
## Subunit 2

### Strategi Pemecahan Masalah

---

Pada subunit 1 telah mengenai pengertian masalah. Ada dua jenis masalah yaitu masalah rutin dan tidak rutin. Masalah matematika yang merupakan masalah rutin adalah masalah yang disusun berkaitan secara langsung dengan konsep-konsep yang diberikan pada suatu topik. Sedangkan masalah tidak rutin adalah masalah yang disusun dengan maksud untuk memperluas wawasan sebagai aplikasi suatu konsep dalam memecahkan masalah nyata yang dihadapi, baik masalah yang berhubungan secara langsung dengan konsep tertentu maupun dengan disiplin ilmu yang lain. Dalam subunit 2 akan dibahas mengenai strategi pemecahan masalah.

Secara umum strategi pemecahan masalah yang sering digunakan adalah strategi yang dikemukakan oleh Polya (1973). Menurut Polya untuk mempermudah memahami dan menyelesaikan suatu masalah, terlebih dahulu masalah tersebut disusun menjadi masalah-masalah sederhana, lalu dianalisis (mencari semua kemungkinan langkah-langkah yang akan ditempuh), kemudian dilanjutkan dengan proses sintesis (memeriksa kebenaran setiap langkah yang dilakukan). Pada tingkatan masalah tertentu, langkah-langkah Polya di atas dapat disederhanakan menjadi empat langkah yaitu memahami masalah, membuat rencana penyelesaian, melaksanakan rencana dan melihat kembali. Berikut ini bagan yang dapat menjelaskan proses pemecahan masalah yang dikemukakan oleh Polya.



Gambar 9.1 Bagan langkah-langkah pemecahan masalah matematika

Bagan di atas menekankan dinamisme dan sifat siklis dari pemecahan masalah yang asli. Pemecah masalah mulai dari masalah itu sendiri dan berusaha memahaminya. Kemudian pemecah masalah membuat rencana dan di dalam proses perencanaan mungkin akan menemukan sesuatu yang dibutuhkan untuk memahami masalah lebih baik. Setelah rencana terbentuk, pemecah masalah akan melaksanakan rencana tersebut. Dalam pelaksanaan bisa jadi diperoleh solusi, tetapi bisa jadi tidak. Jika tidak diperoleh solusi maka pemecah masalah bisa kembali membuat rencana baru atau kembali ke tahap memahami masalah. Jika masih mengalami kemacetan, pemecah masalah bisa mengajukan masalah baru yang mungkin relevan atau menyerupai masalah tersebut.

Selanjutnya kita akan membahas langkah-langkah pemecahan masalah matematika yang dikemukakan oleh Poyla, satu persatu sebagai berikut.

### **1. Memahami masalah**

Pada langkah pertama ini, pemecah masalah harus dapat menentukan apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan. Untuk mempermudah pemecah masalah memahami masalah dan memperoleh gambaran umum penyelesaiannya dapat dibuat catatan-catatan penting dimana catatan-catatan tersebut bisa berupa gambar, diagram, tabel, grafik atau yang lainnya. Dengan mengetahui apa yang diketahui dan ditanyakan maka proses pemecahan masalah akan mempunyai arah yang jelas.

### **2. Merencanakan cara penyelesaian**

Untuk dapat menyelesaikan masalah, pemecah masalah harus dapat menemukan hubungan data dengan yang ditanyakan. Pemilihan teorema-teorema atau konsep-konsep yang telah dipelajari, dikombinasikan sehingga dapat dipergunakan untuk menyelesaikan masalah yang dihadapi itu. Jadi diperlukan aturan-aturan agar selama proses pemecahan masalah berlangsung, dapat dipastikan tidak akan ada satupun alternatif yang terabaikan. Untuk keperluan ini, bila perlu pemecah masalah mengikuti langkah-langkah berikut.

- a. mengumpulkan data/informasi dengan mengaitkan persyaratan yang ditentukan untuk analisis
- b. jika diperlukan analisis informasi yang diperoleh dengan menggunakan analogi masalah yang pernah diselesaikan
- c. apabila ternyata “macet”, perlu dibantu melihat masalah tersebut dari sudut yang berbeda.

Jika hubungan data dan yang ditanyakan sulit untuk dilihat secara langsung, ikutilah langkah-langkah berikut.

- a. Membuat sub masalah. Hal ini akan sangat berguna pada masalah yang kompleks.

- b. Cobalah untuk mengenali sesuatu yang sudah dikenali, misalnya dengan mengingat masalah yang mirip atau memiliki prinsip yang sama.
- c. Cobalah untuk mengenali pola dengan mencari keteraturan-keteraturan. Pola tersebut dapat berupa pola geometri atau pola aljabar.
- d. Gunakan analogi dari masalah tersebut, yaitu masalah yang mirip, masalah yang berhubungan, yang lebih sederhana sehingga memberikan Anda petunjuk yang dibutuhkan dalam memecahkan masalah yang lebih sulit.
- e. Masukkan sesuatu yang baru untuk membuat hubungan antara data dengan hal yang tidak diketahui.
- f. Buatlah kasus
- g. Mulailah dari akhir (Asumsikan Jawabannya) yaitu dengan menganalisis bagaimana cara mendapatkan tujuan yang hendak dicapai.

### **3. Melaksanakan rencana**

Berdasarkan rencana, penyelesaian–penyelesaian masalah yang sudah direncanakan itu dilaksanakan. Didalam menyelesaikan masalah, setiap langkah dicek, apakah langkah tersebut sudah benar atau belum. Hasil yang diperoleh harus diuji apakah hasil tersebut benar-benar hasil yang dicari.

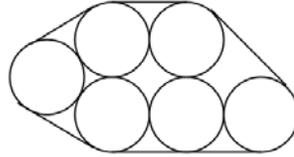
### **4. Melihat kembali**

Tahap melihat kembali hasil pemecahan masalah yang diperoleh mungkin merupakan bagian terpenting dari proses pemecahan masalah. Setelah hasil penyelesaian diperoleh, perlu dilihat dan dicek kembali untuk memastikan semua alternatif tidak diabaikan misalnya dengan cara

- a. melihat kembali hasil
- b. melihat kembali alasan-alasan yang digunakan
- c. menemukan hasil lain
- d. menggunakan hasil atau metode yang digunakan untuk masalah lain
- e. menginterpretasikan masalah kembali
- f. menginterpretasikan hasil
- g. memecahkan masalah baru
- h. dan lain sebagainya.

Berikutnya kita akan mengkaji suatu masalah dan mencoba untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan berdasarkan 4 langkah pemecahan yang dikemukakan oleh Poyla. Silahkan Anda menyimak contoh masalah berikut ini.

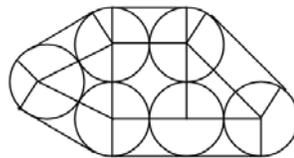
Contoh : Pak Heri mempunyai 6 buah drum yang sama dengan jari-jari alasnya sama dengan 50 cm. Keenam drum tersebut akan diikat menjadi satu dengan posisi seperti pada gambar berikut. Tentukan panjang tali yang diperlukan untuk mengikat keenam drum tersebut.



Penyelesaian :

**Tahap 1. Memahami masalah**

Dari gambar dicari informasi penting yang akan digunakan dalam memecahkan masalah. Dengan menggunakan garis pertolongan sehingga diperoleh gambar di bawah ini, kita akan mengumpulkan informasi yang diperlukan.



Tali yang digunakan untuk mengikat drum, menurut gambar di atas merupakan gabungan dari garis lurus, garis lengkung dan garis miring. Panjang jari-jari alas drum sama dengan 50 cm.

**Tahap 2. Membuat rencana**

Karena tali yang diperlukan merupakan gabungan dari garis lurus, garis lengkung dan garis miring, maka akan dihitung panjang garis-garis tersebut sebagai berikut. Selanjutnya hasil yang diperoleh dijumlahkan untuk mendapatkan panjang tali yang diperlukan untuk mengikat keenam drum.

**Tahap 3. Melaksanakan rencana**

Pada tahap ini, kita akan menghitung panjang garis lurus, garis lengkung dan garis miring sebagai berikut.

Panjang tali yang berbentuk garis lengkung adalah

- Panjang garis lengkung di sisi atas, kiri dan kanan =  $2 \times \frac{1}{8}$  keliling lingkaran  
 $= \frac{1}{4}$  keliling lingkaran
- Panjang garis lengkung di sisi kiri =  $\frac{1}{4}$  keliling lingkaran

- Panjang garis lengkung di sisi bawah kiri =  $\frac{1}{8}$  keliling lingkaran
- Panjang garis lengkung di sisi kanan =  $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$  keliling lingkaran

Jadi panjang seluruh garis lengkung yang ada sama dengan  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = 1$  keliling lingkaran. Jadi panjang tali yang merupakan garis lengkung sama dengan  $2\pi r = 2 \times 3,14 \times 50 = 314$  cm.

Selanjutnya akan dihitung panjang tali yang merupakan garis lurus.

- Panjang garis lurus di sisi atas =  $r + r = 2r$
- Panjang garis lurus di sisi bawah =  $r + r + r + r = 4r$

Jadi panjang seluruh garis lurus yang ada adalah  $2r + 4r = 6r = 6 \times 50 = 300$  cm.

Panjang tali yang merupakan garis miring adalah

- Panjang garis miring di sisi kiri, atas dan bawah =  $r + r + r + r = 4r$
- Panjang garis miring di sisi kanan merupakan sisi miring dari segitiga sama kaki sehingga dengan menggunakan dalil Pythagoras diperoleh panjang garis miring tersebut yaitu

$$\begin{aligned}\sqrt{(2r)^2 + (2r)^2} &= \sqrt{4r^2 + 4r^2} \\ &= \sqrt{8r^2} \\ &= 2r\sqrt{2}\end{aligned}$$

Jadi panjang tali yang merupakan garis miring sama dengan  $4r + 2r\sqrt{2} = 4 \times 50 + 2 \times 50 \times 1,41 = 200 + 141 = 341$  cm.

Dengan demikian panjang tali yang dibutuhkan mengikat keenam drum tersebut adalah  $314 + 300 + 341 = 955$  cm.

Tahap 4. Melihat kembali

Pada tahap ini, dicek kembali apakah ada yang terlewat.

Pemecahan masalah merupakan sebuah proses. Berikut ini kita akan mengkaji ruang lingkup proses pemecahan masalah. Untuk menjadi pemecah masalah dalam matematika, dia harus memiliki pengetahuan matematika sebagai dasar. Sejauh mana efektivitas pengorganisasian pengetahuan mempunyai kontribusi untuk keberhasilan pemecahan masalah. Menurut Silver (1979) menyatakan bahwa keberhasilan pemecah masalah lebih dikarenakan bagaimana mereka dapat menggolongkan masalah matematika berdasarkan kesamaan dalam struktur

matematika. Jadi ruang lingkup pertama dalam proses pemecahan masalah adalah pengetahuan matematika sebagai dasar.

Ruang lingkup proses pemecahan masalah matematika yang kedua adalah terkait dengan algoritma. Algoritma adalah sebuah prosedur, yang dapat diaplikasikan pada soal latihan dimana jika prosedur tersebut benar maka dapat dipastikan akan memberikan jawaban yang benar untuk soal tersebut. Algoritma merupakan hal penting dalam matematika, tetapi proses penggunaan algoritma bahkan untuk algoritma yang rumit bukan pemecahan masalah. Proses membentuk algoritma dan generalisasinya dalam aplikasi khusus dapat merupakan pemecahan masalah. Jadi pemecahan masalah dapat membuat pemecah masalah membangun algoritma sendiri. Contoh pembentukan algoritma disini antara lain membangun proses dalam faktorisasi persamaan kuadrat, proses membagi ruas garis hanya dengan menggunakan konstruksi Euclidean.

Ruang lingkup yang ketiga dalam pemecahan masalah adalah penggunaan strategi *heuristic*. *Heuristic* adalah strategi, teknik dan aturan-aturan dalam pemecahan masalah. Teori pemecahan masalah matematika merupakan fokus mayor dalam aturan *heuristic*. Poyla dalam *How to Solve It* menyatakan bahwa pemecahan masalah matematika jauh lebih kompleks dibandingkan teori manapun yang telah dibangun sejauh ini. George Polya (1973) melalui pengalaman mengajar selama 40 tahun sebagai guru matematika menganjurkan strategi heuristic dalam pemecahan masalah matematika. Strategi ini dimaksudkan agar dalam proses pemecahan masalah dapat dibuat keputusan (*decide*) berdasarkan analogi, keputusan induktif, peragaan dan mensketsa gambar masalah. Strategi ini menuntut kemampuan menemukan hubungan yang ada dan tepat dalam suatu masalah. Polya menganjurkan dalam pemecahan masalah matematika perlu dipersiapkan sejumlah contoh soal yang bervariasi yang dimulai dari contoh sederhana, kemudian melalui proses pemecahannya dapat ditemukan metode yang paling baik sebagai konsekuensi dari pemecahan masalah sederhana itu hingga langkah-langkah solusi yang dilakukan berikutnya. Pemecahan masalah menurut Polya merupakan proses pendidikan yang cukup baik asalkan jawaban itu dipresentasikan. Strategi *heuristic* Polya terdiri atas tujuh macam yaitu

### 1. Generate and Test.

Suatu proses pemecahan masalah yang dilakukan terlebih dahulu secara acak (apa yang terpikirkan sebagai jawaban yang mungkin), kemudian terhadap solusi-solusi acak itu dilakukan pengecekan (validasi) kemudian diambil generalisasi solusi. Langkah-langkahnya adalah

- a. pilih jawaban yang mungkin

- b. uji jawaban itu
- c. jika jawaban itu valid berarti masalah selesai, dan jika jawaban itu invalid maka lakukan langkah itu kembali mulai dari a.

## 2. Hill Climbing.

Setiap langkah yang dilakukan harus progressif hingga mendekati hasil akhir. Alternatif solusi berikutnya harus diketahui jika muncul masalah pada langkah-langkah yang dilakukan (masalah minimal atau maksimal). Jika tidak diketahui alternatif berikutnya berarti *hill climbing* berakhir.

## 3. Best First Search.

Proses ini dilakukan dengan memilih langkah terbaik yang akan diteruskan di antara sejumlah langkah alternatif yang telah dipersiapkan. Bila langkah yang dipilih itu mengalami kebuntuan maka dapat dipilih langkah lain yang telah dipersiapkan sebelumnya.

## 4. Problem Reduction.

Proses ini mereduksi masalah menjadi masalah-masalah sederhana. Selanjutnya dengan memecahkan bagian bagian masalah sederhana secara benar maka masalah sesungguhnya telah terpecahkan.

## 5. Constraint Satisfaction.

Dalam hal ini konstrain (syarat) yang diberikan harus dipenuhi terlebih dahulu, dengan demikian dicari alternatif solusi . Di antara alternatif solusi inilah dipilih suatu jawaban akhir. Jadi dalam proses pemecahan masalah terjadi pengambilan keputusan dimana pengambilan keputusan ini didefinisikan sebagai pemilihan solusi terbaik dari sejumlah alternatif solusi yang diperoleh (Hunsaker, dalam Lasmahadi, 2005).

## 6. Means Ends Analysis.

Hunsaker dalam Lasmahadi (2005) mendefinisikan pemecahan masalah sebagai suatu proses penghilangan perbedaan atau ketidaksesuaian yang terjadi antara hasil yang diperoleh (*current state*) dan hasil yang diinginkan (*goal state*). Jadi dalam proses ini perlu dilakukan deteksi antara *current state* dan *goal state*. Ketidaksesuaian jawaban yang ditemukan segera disisihkan. Susunlah submasalah kemudian lakukan deteksi pada submasalah yang dibuat. Temukan jawaban yang paling tepat di antara jawaban yang mungkin dari solusi submasalah.

## 7. Heuristic Vee.

Dalam proses ini terlebih dahulu dipahami struktur masalah kemudian dikonstruksikan pemecahannya. Elemen-elemen konseptual (teori, prinsip) masalah utama, metodologi diketahui secara baik. Setiap kejadian atau obyek dirangkai dan

dimengerti bagaimana masing-masing elemen yang ada saling berhubungan satu sama lain yang akan berakibat pada penemuan pengetahuan baru.

Pencarian yang luas mengenai pengetahuan dasar sebagai informasi dasar dalam pemecahan masalah matematika, algoritma dan daftar strategi *heuristic* belum cukup untuk memecahkan suatu masalah matematika. Pemecah masalah harus juga mengkonstruksi mekanisme keputusan untuk memilih strategi *heuristic* yang ada atau membuat yang baru seperti situasi masalah yang ditemukan. Secara pasti Polya mengharapkan bahwa pemecah masalah harus berpikir mengenai berbagai macam taktik, pola, teknik dan strategi yang mungkin untuk memecahkan masalah tersebut.

Seperti yang telah dikemukakan pada subunit 1 bahwa ada dua jenis pemecahan masalah matematika. Jenis pertama adalah pemecahan masalah rutin dan yang kedua adalah pemecahan masalah yang tidak rutin atau tidak biasa. Berikut ini kita akan membahas proses kedua pemecahan masalah tersebut. Tabel berikut mengilustrasikan proses kedua pemecahan masalah tersebut.

Tabel 9.1 Tahap pemecahan masalah rutin dan tidak rutin

Masalah Rutin	Masalah tidak rutin
<ul style="list-style-type: none"> <li>a. memahami masalah dan pilih prosedur yang memenuhi</li> <li>b. melaksanakan prosedur dan mencari solusi</li> <li>c. mengevaluasi solusi</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>a. membuat masalah menjadi familiar</li> <li>b. mengumpulkan informasi yang relevan dengan masalah</li> <li>c. temukan beberapa strategi untuk memecahkan masalah dan evaluasi strategi-strategi tersebut</li> <li>d. pilih strategi dan melaksanakannya untuk mencari solusi serta evaluasi solusi tersebut.</li> </ul>

Pemecahan masalah rutin sebenarnya telah kita pelajari pada unit 8. Pada unit 8 telah dibahas bagaimana menterjemahkan masalah atau soal cerita ke dalam model matematika sehingga dapat diselesaikan secara matematis. Oleh karena itu dalam unit ini kita hanya akan membahas pemecahan masalah yang tidak rutin.

Banyak masalah matematika yang merupakan masalah tidak biasa dimana tidak ada metode atau prosedur standar dalam menyelesaikannya. Pada tabel di atas telah dikemukakan proses pemecahan masalah tidak rutin. Berikut ini kita akan membahas proses tersebut satu persatu.

### **1. Membuat masalah menjadi familiar**

Untuk membuat masalah menjadi familiar dapat dilakukan dengan dua cara yaitu yang pertama adalah mencoba mengenali ciri-ciri dari obyek atau konsep matematika yang mungkin telah dipunyai. Cara yang kedua adalah untuk menyatakan kembali masalah dalam berbagai macam bentuk atau cara. Ungkapkan masalah tersebut dengan kata-kata Anda sendiri, buat diagram, tabel, atau grafik dan temukan kalimat matematika untuk membuat pernyataan ulang yang sesuai dengan masalah itu.

### **2. Mengumpulkan informasi**

Langkah selanjutnya adalah mengumpulkan informasi dengan melihat pola dan mengidentifikasi hubungan yang ada. Ada beberapa cara untuk mengumpulkan informasi yaitu

- a. menemukan persamaan dan perbedaan.
- b. mengklasifikasi obyek atau konsep matematika
- c. menentukan apakah informasi yang diperoleh cukup untuk menyelesaikan masalah dan mengeliminasi informasi yang tidak relevan
- d. menemukan hubungan dan pola
- e. menentukan sistematika kasus atau alternatifnya
- f. menentukan aproksimasi atau pendekatan
- g. memperluas informasi yang diperoleh
- h. membandingkan obyek atau konsep dengan kriteria

### **3. Menemukan dan mengevaluasi strategi**

Setelah pemecah masalah mempunyai masalah yang telah diformulasi dan mempunyai informasi yang cukup, maka langkah selanjutnya adalah menemukan strategi untuk menemukan solusi. Pada tahap ini diperlukan kemampuan untuk berpikir secara matematis.

### **4. Menggunakan strategi untuk menemukan solusi**

Gunakan strategi yang telah ditentukan pada langkah ketiga untuk menemukan solusi dan selanjutnya solusi tersebut dievaluasi. Untuk mengevaluasi solusi dapat digunakan cara sebagai berikut.

- a. Lihat kembali apakah solusi yang ditemukan benar-benar merupakan solusi dari masalah

- b. Temukan solusi dengan menggunakan lebih dari satu strategi
- c. Lihat kembali perhitungan, kesimpulan dan lain sebagainya.

Materi mengenai strategi pemecahan masalah telah selesai kita bahas. Rangkuman berikut ini, semoga dapat membantu Anda memahami materi secara garis besar.

## Rangkuman

Pada tingkatan masalah tertentu, Polya membuat 4 langkah penyelesaian atau pemecahan masalah yaitu memahami masalah, membuat rencana penyelesaian, melaksanakan rencana dan melihat kembali. Pemecahan masalah merupakan sebuah proses. Dalam proses tersebut diperlukan pengetahuan matematika yang harus dimiliki oleh pemecah masalah sebagai dasar dalam pemecahan masalah matematika. Keberhasilan pemecahan masalah biasanya berdasarkan kesamaan masalah dalam struktur matematika. Selain pengetahuan matematika, diperlukan suatu prosedur yang dapat diaplikasikan pada soal atau masalah matematika. Prosedur tersebut adalah algoritma. Penggunaan algoritma bukan merupakan bagian dari proses pemecahan masalah, namun proses pembentukan algoritma dan generalisasinya merupakan bagian dari proses pemecahan masalah. Bagian lain dalam proses pemecahan masalah adalah strategi pemecahan masalah yang dalam hal ini adalah strategi *heuristic* yang dinyatakan oleh Polya. Strategi *heuristic* ini mempunyai 7 macam proses pemecahan masalah yaitu *generate and test*, *hill climbing*, *best first search*, *problem reduction*, *constraint satisfaction*, *means ends analysis*, dan *heuristic vee*.

Jenis masalah matematika yang akan dipecahkan terdiri dari dua jenis yaitu masalah rutin dan tidak rutin. Masalah rutin merupakan masalah yang telah diketahui prosedur penyelesaiannya sedangkan masalah tidak rutin merupakan masalah yang tidak dapat segera diketahui prosedur penyelesaiannya. Untuk memecahkan masalah yang tidak rutin diperlukan cara lain dari pemecahan masalah rutin. Proses pemecahan masalah yang tidak rutin biasanya melalui beberapa tahap. Tahap pertama adalah membuat masalah tersebut menjadi masalah yang dikenali dengan cara membuat diagram, tabel atau grafik. Selanjutnya mengumpulkan informasi seperti menemukan persamaan dan perbedaan, mengklasifikasi, menemukan hubungan dan lain sebagainya. Tahap ketiga adalah menemukan strategi-strategi untuk memecahkan masalah dan mengevaluasi strategi-strategi tersebut. Dari evaluasi dipilih satu strategi yang tepat untuk menemukan solusi. Kemudian jangan lupa untuk mengevaluasi solusi yang sudah diperoleh.

## Tes Formatif 2

Kerjakanlah tes formatif ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi strategi pemecahan masalah matematika dengan cara memberi tanda silang pada (X) pada salah satu jawaban yang Anda anggap benar.

1. Dalam pemecahan masalah, melihat kembali hasil yang diperoleh merupakan tahap yang paling sulit dan penting. Berikut ini adalah cara yang dapat digunakan untuk melihat kembali hasil pemecahan masalah yaitu .....
  - A. mulai dari akhir
  - B. menemukan hasil lain
  - C. menggunakan analogi
  - D. mengetahui yang ditanyakan
2. Berikut ini merupakan bagian dari proses pemecahan masalah, **kecuali** .....
  - A. penggunaan algoritma
  - B. pembentukan algoritma
  - C. generalisasi algoritma
  - D. penggunaan strategi *heuristic*
3. Pemecahan masalah merupakan proses penghilangan perbedaan yang terjadi antara hasil yang diperoleh dan hasil yang diinginkan. Hal ini merupakan salah satu proses strategi *heuristic* yaitu .....
  - A. *problem reduction*
  - B. *constraint satisfaction*
  - C. *means ends analysis*
  - D. *heuristic vee*
4. Dalam proses *hill climbing*, hal yang dilakukan adalah .....
  - A. memilih jawaban yang mungkin secara acak
  - B. memilih langkah terbaik dari sejumlah alternatif langkah
  - C. memahami masalah dan mengkonstruksikan pemecahannya
  - D. menemukan alternatif solusi jika muncul masalah pada langkah penyelesaian

5. Diberikan masalah sebagai berikut.

Pak Ketut menggunakan mobil dengan daya angkut 750 kg barang untuk keperluan belanja. Suatu hari ia membeli 3 kwintal gula dan 7 karung beras yang masing-masing berisi 50 kg. Sisa daya angkut mobil akan diisi dengan terigu. Berapa kg terigu yang dapat dibeli oleh pak Ketut?

Dalam memecahkan masalah tersebut, seorang siswa menuliskan seperti berikut ini.

Diketahui : daya angkut mobil 750 kg

3 kwintal gula sama dengan 300 kg

7 karung beras masing-masing 50 kg sama dengan 350 kg

Ditanyakan : berapa kg terigu sehingga jumlah kg barang sama dengan 750 kg.

Proses yang dilakukan siswa tersebut merupakan tahap pemecahan masalah yaitu tahap .....

- A. memahami masalah
- B. merencanakan cara penyelesaian
- C. melaksanakan rencana
- D. melihat kembali

6. Dari masalah yang diberikan pada soal 5, diketahui siswa lain menuliskan seperti berikut ini.

Misalkan banyak terigu yang dibeli adalah  $x$  maka  $x + 300 + 350 = 750$ .

Apa yang dilakukan siswa tersebut adalah .....

- A. memahami masalah
- B. membentuk algoritma
- C. generalisasi algoritma
- D. menggunakan strategi

7. Diberikan masalah matematika sebagai berikut.

Besar salah satu sudut segitiga sama dengan  $20^\circ$ . Besar sudut kedua sama dengan 3 kali besar sudut yang ketiga. Berapa besar sudut yang ketiga?

Misalkan seorang pemecah masalah menyelesaikan masalah tersebut sebagai berikut.

Langkah 1. Diketahui salah satu besar sudut sebuah segitiga sama dengan  $20^\circ$ . Besar sudut kedua sama dengan 3 kali besar sudut ketiga. Jumlah besar ketiga sudut suatu segitiga sama dengan  $180^\circ$ .

Langkah 2. Ditanyakan besar sudut ketiga dari segitiga tersebut.

Langkah 3. Misalkan besar sudut kedua sama dengan  $x$  dan besar sudut ketiga sama dengan  $y$  maka  $x = 3y$  dan  $20 + x + y = 180$ .

Langkah 4.

$$20 + 3y + y = 180$$

$$4y = 180 - 20$$

$$4y = 160$$

$$y = 40$$

Langkah 5. Karena  $y = 40$  maka  $x = 3 \times 40 = 120$ .

$$20 + 120 + 40 = 180$$

Langkah 6. Jadi besar sudut ketiga dari segitiga tersebut adalah sebesar  $40^\circ$ .

Penyelesaian pada langkah 5 merupakan tahap .....

- A. memahami masalah
- B. merencanakan cara penyelesaian
- C. melaksanakan rencana
- D. melihat kembali

8. Pada soal nomor 7, langkah yang ketiga merupakan proses .....

- A. penggunaan algoritma
- B. pembentukan algoritma
- C. generalisasi algoritma
- D. penggunaan strategi *heuristic*

9. Diberikan suatu masalah berikut ini.

Diberikan himpunan bilangan  $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 9\}$ . Buatlah bilangan terbesar yang disusun dari bilangan-bilangan dalam himpunan tersebut dimana setiap bilangan hanya boleh digunakan sekali.

Masalah di atas merupakan masalah .....

- A. rutin
- B. tidak rutin

- C. aljabar
- D. peluang

10. Diberikan suatu masalah penarikan kesimpulan berikut ini

1. Diketahui  $x = 1$
2. Karena  $x = 1$  maka  $x^2 = 1$
3. Karena  $x = 1$  dan  $x^2 = 1$  maka  $x^2 = x$
4. Karena  $x^2 = x$  maka  $x^2 - 1 = x - 1$
5. Dari  $x^2 - 1 = x - 1$  diperoleh  $(x - 1)(x + 1) = (x - 1)$
6. Dengan aturan kanselasi diperoleh  $x + 1 = 1$
7. Padahal diketahui  $x = 1$  maka  $1 + 1 = 1$  atau  $2 = 1$

Pada proses penarikan kesimpulan di atas diperoleh kalimat atau pernyataan yang salah yaitu  $2 = 1$  maka pasti ada kesalahan dalam pengerjaannya. Langkah yang salah dalam proses penarikan kesimpulan di atas adalah langkah ke .....

- A. 3
- B. 4
- C. 5
- D. 6

## Umpan Balik Dan Tindak Lanjut

Setelah mengerjakan tes formatif 2, bandingkan jawaban Anda dengan kunci jawaban yang terdapat pada akhir unit ini. Jika Anda dapat menjawab dengan benar minimal 80%, Anda dinyatakan berhasil dengan baik. Selamat, sudah siapkah Anda mengikuti Ujian Akhir Semester?. Sebaliknya jika jawaban benar Anda kurang dari 80%, pelajari kembali uraian dalam sub unit ini, terutama bagian-bagian yang belum Anda kuasai dengan baik.

## Kunci Tes Formatif

---

### Kunci Tes Formatif 1

1. C.
2. B.
3. D.
4. B.
5. B.
6. D.
7. B.
8. C.
9. D.
10. A.

### Kunci Tes Formatif 2

1. B.
2. A.
3. C.
4. D.
5. A.
6. B.
7. D.
8. B.
9. B.
10. A.

## Daftar Pustaka

---

- Cooney, T. J. 1975. *Dynamics of Teaching Secondary School Mathematics*. Boston: Houghton Mifflin Company
- Hudoyo. 1979. *Pengembangan Kurikulum Matematika dan Pelaksanaannya di Depan Kelas*. Surabaya: Usaha Nasional
- National Council of Supervisors of Mathematics. 1978. *Position Paper on Basic Mathematical Skills*. Mathematics Teacher. (Reprinted from position paper distributed to members January 1977)
- National Council of Teachers of Mathematics. 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM
- Poyla, G. 1973. *How to Solve It*. Princeton, NJ: Princeton University Press
- Shadiq, F. 2004. *Pemecahan Masalah, Penalaran dan Komunikasi*. [Online]. Tersedia di: <http://www.p3gmatyo.go.id/> [4 Desember 2006].
- Schoenfeld, A. H. 1985. *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press
- Silver, E. A. 1979. *Student Perceptions of Relatedness among Mathematical Verbal Problems*. Journal for Research in Mathematics Education
- Troutman, A. P. 1982. *Mathematics: A Good Beginning Strategies for Teaching Children*. Monterey, California: Brooks/Cole Publishing Company

## Glosarium

---

*Algoritma* : sebuah prosedur, yang dapat diaplikasikan pada soal latihan dimana jika prosedur tersebut benar maka dapat dipastikan akan memberikan jawaban yang benar untuk soal tersebut.

*Heuristic* : strategi, teknik dan aturan-aturan dalam pemecahan masalah.

## KONSORSIUM PROGRAM PJJ S1 PGSD

