

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LE BARYCENTRE DE L'ASSOCIAÈDRE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

ALICE REMAL

MARS 2016

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.07-2011). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je souhaite avant tout dédier ce mémoire à mes parents. En premier lieu car c'est grâce à leur soutien moral et financier que j'ai pu mener à bien mes études mais surtout parce qu'ils méritaient d'être remercié pour les sources d'amour, de détermination et d'inspiration qu'ils étaient. J'espère que cet aboutissement les aurait rendus fiers. Par la même occasion, je tiens aussi à dire merci à mes sœurs qui ont su rester courageuses et m'ont fourni la force de suivre leur exemple.

Aussi, je désire sincèrement remercier Christophe Hohlweg, mon directeur, qui m'a initiée à la théorie des groupes de Coxeter et a su développer mon intérêt pour celle-ci. Je lui suis également reconnaissante d'avoir fait preuve de patience et d'avoir su en toutes circonstances trouver des mots encourageants. Je remercie profondément Vincent Pilaud, à qui ce mémoire doit beaucoup, pour sa facilité d'accès ainsi que la rapidité et la clarté de ses réponses. Merci à Franco Saliola, un des professeurs les plus inspirants que j'ai eu et qui a bien voulu prendre le temps de relire ce travail. De même, j'aimerais remercier Hugh Thomas pour ses commentaires qui m'ont permis d'améliorer ce mémoire. Enfin, j'aimerais remercier Srecko Brlek pour la confiance qu'il m'a témoignée et les opportunités professionnelles qu'il m'a offertes.

Finalement, mais non moindrement, je tiens à remercier mes amis et condisciples qui m'ont accompagnée tout au long de mes études. Particulièrement Alex Provost, dont toutes les qualités forcent le respect et l'admiration, pour tous nos souvenirs. Évidemment, je le remercie aussi pour toute l'aide qu'il m'a apportée et ce, jusqu'à la toute dernière minute. Merci également à Maxime Gélinas pour

ses connaissances en TikZ mais surtout pour sa bonne humeur, son calme olympien et son amitié sincère. À Maxime Scott, j'aimerais dire merci d'avoir été pour moi un collègue, parfois un professeur mais surtout un ami des plus réconfortants. Merci aussi à Emilie Cormier pour tout ce qu'elle est et représente, chère femme forte. Enfin, merci à Marco Robado, pour nos discussions parfois houleuses, toujours intéressantes, à Gale Pettus, pour nos heures d'étude et de non étude, sans oublier José Eduardo Blazek, Hector Blandin, Yannik Vargas, Jérôme Fortier, Lionel Katshingu et tous les autres grâce à qui c'était un plaisir de travailler au LaCIM.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX	vii
LISTE DES FIGURES	ix
RÉSUMÉ	xi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
ASSOCIAÈDRE ET COMPLEXE DE SOUS-MOTS.	7
1.1 Introduction aux systèmes de Coxeter finis.	7
1.1.1 Système de racines et groupe de réflexions.	7
1.1.2 Systèmes de Coxeter finis	11
1.1.3 Éventail de Coxeter	13
1.2 Le Permutaèdre.	16
1.2.1 Description du W -permutaèdre comme \mathcal{V} -polytope.	18
1.2.2 Description du permutaèdre comme \mathcal{H} -polytope.	19
1.3 Réalisation de l'associèdre généralisé	20
1.4 Complexes de sous-mots.	24
1.4.1 Définition des complexes de sous-mots.	24
1.4.2 Facettes et flips	28
1.4.3 Opération sur les mots et complexes amassés	30
CHAPITRE II	
RACINES ET COMPLEXES DE SOUS-MOTS	33
2.1 Racines et flips.	34
2.2 Configuration de racines.	40
2.3 Restriction aux sous-groupes paraboliques.	42
2.4 Complexe de sous-mot à configuration de racines indépendante.	47

2.5	Forme linéaire et faces.	49	
CHAPITRE III			
POLYTOPE DE BRIQUES ET ASSOCIAÈDRE.			55
3.1	Polytope de briques.	55	
3.1.1	Polytopes de briques généralisés.	55	
3.1.2	Polytope de briques d'un complexe de sous-mots à racines indépendantes.	58	
3.2	Associaèdres généralisés et polytope de briques.	62	
3.2.1	Cône normal associé au vecteur de briques.	63	
3.2.2	Vecteur normaux et facettes	67	
3.3	Barycentre de l'associaèdre	73	
CONCLUSION			83
RÉFÉRENCES			87

LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
3.1 Liste des racines de $SC(rstrsr)$ pour $W = S_4$ (avec configurations de racines en rouge)	86

LISTE DES FIGURES

Figure		Page
1.1	Complexe de sous-mots de $SC(ststst, w_0)$ pour W de type B_2 . . .	26
1.2	Réalisation de $SC(rstrstrsr, w_0)$ pour $W = S_4$	26
1.3	Graphe des flips de $SC(ststst)$ pour W de type B_2	28
1.4	Graphe des flips de $SC(rstrstrsr)$ pour $W = S_4$	29
2.1	Graphe des flips de $SC(rstrstrsr)$ pour $W = S_4$ et ρ -flips	54
3.1	Polytope de briques \mathcal{P}_{rstrsr} associé à $W = S_4$	73
3.2	Racines et Graphe des flips de $SC(ststst)$ pour W de type B_2 . . .	85

RÉSUMÉ

L'associaèdre a été introduit dans les années 60 par Stasheff, est aujourd'hui étudié dans divers domaines. Sa version originale est associée aux groupes de Coxeter de type A , mais l'associaèdre classique admet une généralisation à tout groupe de Coxeter fini. Dans (Hohlweg *et al.*, 2011), à partir d'un système de Coxeter et du permutaèdre associé, les auteurs donnent une réalisation de l'associaèdre associé à tout groupe de Coxeter fini comme intersection de demi-espaces. Dans ce mémoire, nous présentons la réalisation qu'ont récemment développée V. Pilaud et C. Stump dans (Pilaud et Stump, 2015a) de l'associaèdre généralisé comme enveloppe convexe de vecteurs en utilisant la notion de complexe de sous-mots. L'étude de ces complexes de sous-mots nous amènera à exposer une nouvelle famille de polytopes définis comme enveloppes convexes de points qui contiennent les associaèdres : les polytopes de briques. Grâce à cette réalisation de l'associaèdre généralisé, nous présenterons la preuve donnée par V. Pilaud et C. Stump dans (Pilaud et Stump, 2015b) que le barycentre des sommets de l'associaèdre coïncide avec celui du permutaèdre.

Mots clés : Système de Coxeter ; Complexes de sous-mots ; Polytope de briques ; Associaèdres ; Barycentre.

INTRODUCTION

Ce mémoire présente une preuve d'une conjecture émise par C. Hohlweg, C. Lange et H. Thomas dans (Hohlweg *et al.*, 2011) : le barycentre des associaèdres généralisés coïncide avec celui des permutaèdres qui leur sont associés pour tout système de Coxeter fini (W, S) . Cette propriété avait déjà été observée par F. Chapoton pour la réalisation de l'associaèdre classique obtenue à partir du permutaèdre dans le type A comme le mentionne J.-L. Loday dans (Loday, 2004).

Pour (W, S) un système de Coxeter, le permutaèdre peut se définir comme l'enveloppe convexe de la W -orbite d'un point a se trouvant dans le complément des hyperplans correspondants aux réflexions de W . Il est noté $\text{Perm}^a(W)$. Il peut être aussi défini comme intersection de demi-espaces non-redondants ; c'est sa \mathcal{H} -représentation.

Pour les groupes de type A , J.-L. Loday (Loday, 2004) présente une réalisation de l'associaèdre classique : $\text{Asso}^a(W)$, pour $W = S_n$, est l'intersection de demi-espaces *admissibles* obtenu à partir de la \mathcal{H} -représentation du permutaèdre $\text{Perm}^a(W)$, où $a = (1, 2, \dots, n)$ (voir aussi (Stasheff, 1997)). De plus, il définit un algorithme qui permet de calculer les coordonnées entières des sommets de cette réalisation en paramétrisant ces sommets par des arbres binaires planaires avec $n + 2$ feuilles.

Une question se pose naturellement : existe-t-il une construction similaire à celle de Loday pour les associaèdres d'autres types ?

C. Hohlweg et C. Lange donnent alors dans (Hohlweg et Lange, 2007) une généra-

lisation de la réalisation de Loday pour les associaèdres de type A et B . Pour un certain choix d'un élément de Coxeter c de W , ils construisent le c -associaèdre généralisé $\text{Asso}_c(W)$ à partir du permutaèdre de type correspondant. Pour ce faire, ils définissent une notion plus large de demi-espaces admissibles et donnent un algorithme leur permettant de calculer les coordonnées entières des sommets de leur réalisation. Ils montrent alors que l'associaèdre de Loday correspond à leur réalisation du c -associaèdre généralisé de type A pour un c particulier. Ils conjecturent par ailleurs que le barycentre de ces c -associaèdres (de type A et B) coïncide avec celui du permutaèdre (de même type).

Dans (Hohlweg *et al.*, 2010), C. Hohlweg, J. Lortie et A. Raymond démontrent cette conjecture en utilisant l'algorithme permettant de calculer les coordonnées des sommets donné dans (Hohlweg et Lange, 2007).

Une généralisation de l'approche précédente à tout groupe de Coxeter fini W est donnée dans (Hohlweg *et al.*, 2011) : les auteurs construisent l'associaèdre généralisé à partir de la \mathcal{H} -représentation du permutaèdre $\text{Perm}^a(W)$ et de la donnée d'un élément de Coxeter c . À partir d'une expression réduite particulière du mot le plus long w_0 déterminée par c , appelé le c -mot de w_0 et noté $w_0(c)$, on définit des éléments particulier de W , les c -singletons. Un demi-espace de la représentation de $\text{Perm}^a(W)$ dont la frontière contient un sommet correspondant à un c -singleton est alors appelé un demi-espace c -admissible. L'intersection de tous ces demi-espaces est le c -associaèdre généralisé $\text{Asso}_c^a(W)$.

Nous n'avons alors qu'une \mathcal{H} -représentation de l'associaèdre généralisé.

Dans (Knutson et Miller, 2005), A. Knutson et E. Miller introduisent, pour un système de Coxeter (W, S) , la notion de complexe de sous-mots $\text{SC}(Q, w)$ associé à des mots Q, w sur S dans le but d'étudier la géométrie de Gröbner des variétés de Schubert. Dans les articles (Knutson et Miller, 2004) et (Knutson et Miller,

2005), les auteurs soulèvent alors la question de complexes de sous-mots réalisables comme complexe de frontière de polytopes convexe.

C'est en étudiant la représentation par réseau de tris des complexes de sous-mots pour des groupes de type A , introduite par V. Pilaud et M. Pocchiola dans (Pilaud et Pocchiola, 2012), que C. Stump et V. Pilaud définissent dans (Pilaud et Stump, 2015a) une nouvelle famille de polytopes associés aux groupes de réflexions finis : les polytopes de briques $\mathcal{P}(Q)$. Un polytope de briques est défini par les coordonnées de ses sommets calculées à partir d'un complexe de sous-mots sphérique $SC(cw_0(c), w_0)$, pour c un élément de Coxeter. Ce polytope est noté $\mathcal{P}(cw_0(c), w_0)$. Les auteurs montrent en particulier que cette famille de polytopes contient les associaèdres généralisés $\text{Asso}_c(W)$ de (Hohlweg *et al.*, 2011), dont ceux de type A et de type B . Ainsi, ils fournissent un moyen de calculer les coordonnées des sommets de tout associaèdre généralisé.

Grâce à cette approche, dans (Pilaud et Stump, 2015b), les auteurs donnent une preuve que le barycentre des sommets du W -associaèdre coïncide bien avec celui du W -permutaèdre, pour tout groupe de Coxeter fini W .

Le but de ce mémoire est de présenter en détails les démarches qui ont servi à établir cette preuve. Pour cela, le dit mémoire est divisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous présentons tout d'abord les systèmes de Coxeter (W, S) ainsi que certaines notions qui leurs sont associées, suivant le livre de J. Humphreys (Humphreys, 1990). Dans la deuxième section, nous présentons les différentes réalisations du W -permutaèdre afin de donner, à la section suivante, la réalisation du W -associaèdre à partir du W -permutaèdre telle que définie dans (Hohlweg *et al.*, 2011). Puis, nous présentons les complexes de sous-mots associés à des systèmes de Coxeter tels que définis par A. Knutson et E. Miller dans (Knutson et Miller, 2005), ainsi que leur graphe des flips, qui sont des notions capitales pour

le développement de ce mémoire. Finalement, nous discutons de certains résultats démontrés par C. Ceballos, J.-P. Labbé et C. Stump dans (Ceballos *et al.*, 2014a) sur les complexes amassés à partir des complexes de sous-mots.

Le deuxième chapitre est une étude plus approfondie des complexes de sous-mots, en commençant par la présentation de la fonction racine et de son lien avec le graphe des flips. Pour certains complexes de sous-mots, ce dernier correspond au 1-squelette du polaire de la réalisation polytopale du complexe de sous-mots. Ensuite, dans les deux sections qui suivent, nous définissons la notion de configuration de racines et étudions les propriétés qui s'en dégagent. Notamment, nous explicitons le fait que la configuration de racines caractérise les facettes du complexe de sous-mots et nous montrons son lien avec les sous-groupes paraboliques standards de W . De plus, nous donnons une condition particulière que la configuration de racines doit satisfaire pour que le complexe de sous-mots soit *réalisable*, c'est-à-dire que l'on puisse lui associer un polytope. Nous étudions ensuite les complexes de sous-mots réalisables, et, à l'aide de la configuration de racines, nous donnons une caractérisation des faces de ces complexes à partir de leurs graphes des flips. Cela va nous permettre d'étudier le polytope associé à un complexe de sous-mots réalisable dans le chapitre suivant.

Le troisième chapitre porte sur les polytopes de briques définis par V. Pilaud et C. Stump à partir des complexes de sous-mots. Après en avoir donné la définition, nous voyons dans la première section que, dans le cas où la configuration de racines est linéairement indépendante, le polytope de briques réalise le dual du complexe de sous-mots. Dans la section suivante, nous montrons, à partir des cônes normaux aux sommets des polytopes de briques, que – pour un mot bien choisi – le polytope de briques associé au complexe de sous-mots est un translaté de l'associaèdre. Ceci nous permet, à la section finale, de démontrer le résultat escompté sur le barycentre des sommets de l'associaèdre.

CHAPITRE I

ASSOCIAÈDRE ET COMPLEXE DE SOUS-MOTS.

1.1 Introduction aux systèmes de Coxeter finis.

1.1.1 Système de racines et groupe de réflexions.

Soit $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace \mathbb{R} -euclidien de dimension n . Nous noterons par la suite cet espace uniquement par V pour alléger la notation. Une réflexion de V est une isométrie qui envoie un vecteur non nul de V sur son opposé et fixe l'hyperplan orthogonal à ce vecteur. Elle est ainsi totalement déterminée soit par l'hyperplan qu'elle fixe, soit par un vecteur orthogonal à cet hyperplan. Dans ce mémoire, nous noterons $\alpha_s \in V \setminus \{0\}$ un vecteur normal de l'hyperplan H_{α_s} fixé par la réflexion s , c'est-à-dire que $H_{\alpha_s} = \alpha_s^\perp$ et $s(\alpha_s) = -\alpha_s$. Nous avons pour tout s la formule générale suivante pour tout $v \in V$:

$$s(v) = v - 2 \frac{\langle v, \alpha_s \rangle}{\langle \alpha_s, \alpha_s \rangle} \alpha_s.$$

Les réflexions sont alors des involutions : $s^2 = e$. Aussi, il est bien connu que si t est une isométrie de V et si α est un vecteur non nul de V , alors $ts_\alpha t^{-1} = s_{t(\alpha)}$ ((Humphreys, 1990), section 1.2).

Naturellement, nous appelons *groupe de réflexions fini* W un sous-groupe fini du

groupe orthogonal $O(V)$ engendré par des réflexions. Nous noterons par e l'identité de ce groupe.

Exemple 1.1.1. Considérons le groupe symétrique S_n . Ce groupe peut être vu comme un sous-groupe du groupe $O(n, \mathbb{R})$ en considérant qu'une permutation agit sur \mathbb{R}^n en permutant les vecteurs de la base standard $\{e_1, \dots, e_n\}$. Les transpositions (i, j) envoient les vecteurs $e_i - e_j$ sur leurs négatifs et fixent l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^n dont les coordonnées en i et j sont égales. Ainsi, les transpositions agissent comme des réflexions. Comme le groupe S_n est engendré par les transpositions de la forme $(i, i + 1)$, pour $1 \leq i \leq n - 1$, c'est un groupe de réflexions.

Remarquons que cette action de S_n laisse stable le complément orthogonal de la droite engendrée par le vecteur $(1, 1, \dots, 1)$, c'est-à-dire l'hyperplan

$$V = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_i x_i = 0\}.$$

Ainsi, S_n agit également comme groupe de réflexions fini sur V . Les vecteurs $e_{i+1} - e_i$, pour $1 \leq i \leq n - 1$, forment une base de cet espace.

Étant donné un groupe de réflexions fini W , pour chaque hyperplan de réflexion de ce groupe, nous pouvons choisir une paire de vecteurs orthogonaux à cet hyperplan, de sorte que l'ensemble de ces vecteurs soit stable sous l'action de W . Un tel ensemble, que nous noterons Φ , détermine totalement le groupe W et satisfait les axiomes suivants :

1. $W = \langle s \mid \alpha_s \in \Phi \rangle$;
2. Pour tout $\alpha_s \in \Phi$, la ligne $\mathbb{R}\alpha_s$ intersecte Φ en α_s et $-\alpha_s$ uniquement ;
3. Φ est stable sous l'action de W .

Nous appelons un ensemble satisfaisant ces axiomes un *système de racines* et ses

éléments des racines.

Inversement, à tout système de racines Φ fini correspond un groupe de réflexions fini : $W = \langle s \mid \alpha_s \in \Phi \rangle$. Ce groupe est fini car le morphisme de groupe de W vers le groupe symétrique de Φ est injectif, voir (Humphreys, 1990, §1.2).

Nous pouvons donner deux notions plus fines associées aux systèmes de racines. Étant donné un système de racines Φ fini associé à un groupe de réflexions W , nous pouvons trouver un hyperplan \mathcal{H} dans V qui n'intersecte pas Φ . Cet hyperplan partitionne Φ en deux sous-ensembles de même cardinalité : Φ^+ , que l'on nomme *ensemble des racines positives*, et son opposé $\Phi^- := -\Phi^+$, l'*ensemble des racines négatives*. Il est alors clair que W est engendré par les réflexions s telles que $\alpha_s \in \Phi^+$. Ainsi, nous nous concentrons sur l'ensemble des racines positives Φ^+ .

Il existe un ensemble minimal d'éléments de Φ^+ , noté Δ , tel que $W = \langle s \mid \alpha_s \in \Delta \rangle$ et que chaque vecteur $\alpha \in \Phi$ est une combinaison linéaire d'éléments de Δ dont les coefficients sont tous de même signe (positif ou négatif). L'ensemble $\Delta \subseteq \Phi^+$ est appelé un *système simple* pour le groupe W et est constitué de racines linéairement indépendantes qui sont dites *simples*. L'ensemble Δ une base de l'espace engendré par Φ et si l'on considère que W agit essentiellement sur V , nous pouvons supposer que Δ est une base de V . L'existence et l'unicité de Δ pour tout ensemble de racines positives Φ^+ (ainsi que sa réciproque) sont démontrées dans le livre (Humphreys, 1990, §1.3).

Nous avons la proposition suivante dont le corollaire nous sera utile au Chapitre 3.

Proposition 1.1.1. (Humphreys, 1990, Proposition 1.4) *Soit Δ un système simple contenu dans Φ^+ . Si $\alpha_s \in \Delta$, alors $s(\Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}) = \Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}$.*

Nous noterons par S l'ensemble fini des réflexions s de W correspondant aux

racines α_s de Δ .

Corollaire 1.1.2. *Pour tous $w \in W$ et $s \in S$, on a $ws(\Phi^+) = w(\Phi^+) \Delta \{\pm w(\alpha_s)\}$ (où Δ dénote la différence symétrique).*

Démonstration. D'un côté, supposons que $\gamma \in ws(\Phi^+)$. Alors il existe $\beta \in \Phi^+$ telle que $\gamma = ws(\beta)$. Si $\beta = \alpha_s$, on a $\gamma = -w(\alpha_s)$. Sinon, on a $s(\beta) \in \Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}$, ce qui entraîne que $\gamma \in w(\Phi^+) \Delta \{\pm w(\alpha_s)\}$.

Réciproquement, supposons en premier temps que $\gamma \in w(\Phi^+) \setminus \{\pm w(\alpha_s)\}$. Alors il existe $\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}$ telle que $\gamma = w(\beta)$, c'est-à-dire que $\gamma = ws(s(\beta))$ tel que voulu. En second temps, dire que $\gamma \in \{\pm w(\alpha_s)\} \setminus w(\Phi^+)$, équivaut à dire que $\gamma = -w(\alpha_s) = w(s_\alpha(\alpha))$, qui est la conclusion voulue. \square

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème 1.1.3. *Soit Δ un système simple associé à un système de racines Φ . Le groupe de réflexions W associé à Φ est engendré par l'ensemble $S := \{s \mid \alpha_s \in \Delta\}$, tel que pour tous $s, t \in S$, $s \neq t$, nous avons les relations suivantes :*

$$\begin{cases} s^2 = e, \\ (st)^{m_{s,t}} = e, \text{ avec } m_{s,t} \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \cup \{\infty\}. \end{cases}$$

Ce théorème est démontré dans le livre (Humphreys, 1990, §1.5).

Exemple 1.1.2. Soit $W = S_4$, le groupe de réflexions agissant sur l'hyperplan $V \subseteq \mathbb{R}^4$ tel que défini dans l'Exemple 1.1.1. Il est engendré par l'ensemble de réflexions $S = \{r, s, t\}$ tel que les racines simples $\alpha_r = e_2 - e_1$, $\alpha_s = e_3 - e_2$ et $\alpha_t = e_4 - e_3$ correspondent aux transpositions adjacentes (12), (23) et (34). Observons qu'une réflexion correspondant à une transposition (ij) fixe l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^4 dont la i -ème coordonnée correspond à la j -ème coordonnée.

Nous arrêtons ici notre présentation des groupes de réflexion finis. Évidemment, celle-ci n'est pas exhaustive et nous suggérons le livre (Humphreys, 1990) au lecteur intéressé d'approfondir l'étude de ces groupes.

1.1.2 Systèmes de Coxeter finis

Nous nous intéressons maintenant à des groupes abstraits définis par les mêmes générateurs et relations que les groupes de réflexion finis.

Un *système de Coxeter* (W, S) est la donnée d'un groupe défini par générateurs et relations, où les générateurs sont les éléments d'un ensemble fini $S \subseteq W$, et où les relations sont de la forme : soit $s, t \in S$, $s \neq t$,

$$\begin{cases} s^2 = e, \\ (st)^{m_{s,t}} = e, \text{ avec } m_{s,t} \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \cup \{\infty\}. \end{cases}$$

Nous appelons W un *groupe de Coxeter*.

Remarquons que si $m_{s,t} = 2$, les générateurs s et t commutent. De plus, nous avons que si $m_{s,t} = \infty$, cela signifie qu'il n'y a pas de relation pour l'élément st . Nous avons vu que les groupes de réflexions finis sont des groupes de Coxeter finis. La réciproque est aussi vraie :

Théorème 1.1.4. *Les groupes de Coxeter finis sont les groupes de réflexion finis.*

Ce résultat est démontré dans (Humphreys, 1990, §6.4) et nous permet ainsi de voir tout groupe de Coxeter fini comme un groupe de réflexions fini d'un certain espace vectoriel de dimension fini. (Dans le cas des groupes de Coxeter infinis, certains peuvent être décrits comme groupes de réflexions d'un espace affine ou hyperbolique ; voir (Humphreys, 1990).) Nous pouvons aussi voir n'importe quel groupe de Coxeter comme un groupe de réflexions dans un cadre non-euclidien,

voir (Björner et Brenti, 2005). Nous associons ainsi à un groupe de Coxeter fini W un système de racines Φ et un système simple Δ tels que définis précédemment, de sorte que $W = \langle s \in S \mid \alpha_s \in \Delta \rangle$ et que les relations sur les générateurs soient préservées.

Exemple 1.1.3. Considérons $W = S_4$. Nous avons vu dans l'Exemple 1.1.2 que S_4 est engendré par l'ensemble $S = \{r, s, t\}$. Nous pouvons vérifier assez facilement que $(rs)^3 = (st)^3 = (rt)^2 = e$.

Présentons maintenant quelques propriétés des groupes de Coxeter finis.

Comme tout élément d'un système de Coxeter (W, S) fini peut s'écrire comme produit fini d'éléments s_i de S , nous pouvons considérer l'expression $w = s_1 s_2 \dots s_r$ comme un *mot* fini sur l'alphabet S . Mais du fait des relations du groupe W , il est possible d'avoir plusieurs mots finis qui représentent un même élément $w \in W$. Aussi, nous définissons la fonction suivante :

Définition 1.1.1. Soit $\ell : W \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction qui envoie un élément w de W sur le plus petit entier r tel qu'il existe une expression $s_1 s_2 \dots s_r$, $s_i \in S$, de w . Cette fonction est appelée la fonction *longueur* et nous dirons que l'expression $w = s_1 s_2 \dots s_r$ est un *mot réduit*.

Par convention nous avons $\ell(e) = 0$. De plus, il est connu qu'il existe un unique élément de W de longueur maximale que l'on notera w_0 . Nous ne donnons pas ici l'ensemble des propriétés de la fonction longueur car elles ne servent pas directement le propos de ce mémoire mais celles-ci sont présentées dans la Section 6 du Chapitre 1 de (Humphreys, 1990). Constatons que cette fonction ne fait pas appel à la présentation de W comme groupe de réflexions fini ; cependant, elle est directement liée à la notion qui va suivre, qui, elle, emploie cette présentation.

Définition 1.1.2. Soit $w \in W$. L'ensemble des racines positives envoyées sur les racines négatives par w^{-1} est appelé *l'ensemble d'inversion* de w . Il est noté $N(w) := \Phi^+ \cap w(\Phi^-)$.

L'une des propriétés de l'ensemble d'inversion est que la cardinalité de cet ensemble pour tout élément $w \in W$ est exactement la longueur du mot w . ((Humphreys, 1990) Corollaire de la Section 1.7.)

Intéressons nous maintenant aux sous-groupes de W .

Proposition 1.1.5. Soit (W, S) un système de Coxeter fini. Soit I un sous-ensemble de S . Le sous-groupe W_I de W engendré par I est un groupe de réflexions fini de système simple $\Delta_I := \{\alpha_s \in \Delta \mid s \in I\}$ pour le système de racine $\Phi_I := \Phi \cap \text{vect}(\Delta_I)$.

Nous renvoyons le lecteur à la section 1.10 du livre (Humphreys, 1990) pour la preuve que Φ_I est bien un système de racines du sous-espace V_I de V engendré par Δ_I .

Définition 1.1.3. Le sous-groupe W_I de W engendré par un sous-ensemble I de S est appelé *sous-groupe parabolique standard*.

1.1.3 Éventail de Coxeter

Commençons notre étude en rappelant quelques définitions concernant les cônes et éventails.

Un cône C sur un espace vectoriel V de dimension n est un ensemble de vecteurs tel que toute combinaison linéaire positive d'un sous-ensemble de vecteurs de C est un vecteur de C . Ainsi, un cône est un ensemble convexe. Nous nous intéressons particulièrement ici à un certain type de cône : les *cônes polyédraux*. Un

cône polyédral est un cône qui est une intersection d'un nombre fini h de demi-espaces non redondants \mathcal{H}_i déterminés par des hyperplans H_i . Nous savons que tout hyperplan peut-être vu comme le noyau d'une certaine forme linéaire. Posons alors ϕ_i la forme linéaire qui a H_i comme noyau. A chaque sous-ensemble J de $\{1, \dots, h\}$ nous associons un sous ensemble de C , noté F_J , et définit par :

$$F_J = \{v \in C \mid \phi_i(v) = 0, \forall i \in J\}.$$

Un tel ensemble F_J est appelé une face de C . Nous appelons les cônes de dimension 1 des *rayons*.

Une collection \mathcal{K} non vide de cônes polyédraux est appelée un *éventail* si toute face non vide d'un cône de \mathcal{K} est incluse dans \mathcal{K} et si l'intersection de n'importe quels deux cônes de \mathcal{K} est une face de ces deux cônes. Un éventail est dit *complet* si l'union de tous ses cônes donne l'espace V ; *essentiel* si l'intersection de tous ses cônes est l'origine et *simplicial* si tous ses cônes sont engendrés par des vecteurs linéairement indépendants. On dit qu'un éventail K *raffine* un éventail K' si tout cône dans K' peut s'exprimer comme union de cônes dans K . Dans ce cas on dit également que K' est un *grossissement* de K .

Intéressons-nous maintenant aux hyperplans de réflexion d'un groupe de Coxeter W fini. Sachant qu'un arrangement d'hyperplans est un ensemble fini d'hyperplans dans un espace vectoriel V , nous constatons que l'ensemble de tous les hyperplans de réflexion H_{α_s} associés aux réflexions s de W dans V est un arrangement d'hyperplan. Nous l'appelons *l'arrangement de Coxeter* et nous le notons \mathcal{A} . L'arrangement de Coxeter \mathcal{A} décompose V en cône polyédraux.

Définition 1.1.4. L'ensemble des cônes polyédraux obtenu par décomposition de V par \mathcal{A} forme un éventail \mathcal{E} appelé *éventail de Coxeter*.

Cet éventail satisfait les propriétés suivantes :

Théorème 1.1.6. *L'éventail de Coxeter est complet, simplicial et essentiel.*

Une démonstration se trouve dans (Humphreys, 1990, Sections 1.12-1.15).

On appelle *chambres* les intersections non vides des demi-espaces ouverts déterminés par les hyperplans de \mathcal{A} . L'adhérence d'une chambre est alors un des cônes polyédraux de \mathcal{E} . Une face d'un cône de \mathcal{E} qui appartient à un unique hyperplan de \mathcal{A} est appelée un *mur*. Deux chambres sont adjacentes si elles partagent un même mur.

Fixons une chambre particulière de l'ensemble des chambres défini par \mathcal{A} :

Définition 1.1.5. Soit $\Delta = \{\alpha \mid s_\alpha \in S\}$ un système simple. Notons par \mathcal{C} la chambre définie comme suit :

$$\mathcal{C} = \bigcap_{s \in S} \{v \in V \mid \langle v, \alpha_s \rangle \geq 0\}.$$

Nous l'appelons la *chambre fondamentale*.

Nous définissons donc la chambre fondamentale de sorte que les racines simples $\alpha_s \in \Delta$ soient des vecteurs normaux aux murs de \mathcal{C} .

Une fois la chambre fondamentale fixée, le résultat suivant est une propriété des plus importantes sur l'arrangement de Coxeter :

Théorème 1.1.7. *Les chambres de l'arrangement de Coxeter sont en correspondance bijective avec les éléments de W . Ainsi, en considérant que la chambre fondamentale correspond à l'identité e de W , toute chambre de l'éventail de Coxeter s'écrit $w(\mathcal{C})$ avec $w \in W$.*

Ce théorème est prouvé dans (Humphreys, 1990, Théorème 1.12), et nous pouvons voir aussi (Borovik et Borovik, 2010, Théorème 12.2).

Remarquons que l'élément w_0 de W envoie la chambre \mathcal{C} sur $-\mathcal{C}$.

Pour finir, nous allons maintenant décrire les rayons de cet éventail. Définissons, en fonction de l'ensemble Δ des racines simples, un ensemble de vecteurs positifs $\nabla := \{\omega_s \mid s \in S\}$ qui engendre la chambre fondamentale.

Définition 1.1.6. L'ensemble $\nabla = \{\omega_s \mid s \in S\}$ est appelé l'ensemble des *poids fondamentaux* de W . Il est défini tel que $s(\omega_t) = \omega_t - \delta_{s,t}\alpha_s$ pour tous s et t dans S , où $\delta_{s,t}$ est le symbole de Kronecker. En d'autres mots, pour s et t appartenant à S , $\langle \alpha_s, \omega_t \rangle = \delta_{s,t}\langle \alpha_s, \alpha_s \rangle/2$.

L'ensemble ∇ n'est autre que la base duale de Δ . Géométriquement, les poids fondamentaux sont alors des multiples positifs des rayons v_s , $s \in S$, de la chambre \mathcal{C} . Ainsi, comme chaque chambre peut s'écrire $w(\mathcal{C})$, il est assez intuitif que, pour $w \in W$, les rayons de la chambre $w(\mathcal{C})$ sont des multiples positifs de $w(\omega_s)$.

Exemple 1.1.4. Pour $W = S_4$ (voir l'Exemple 1.1.3) l'ensemble des poids fondamentaux est $\nabla = \{\omega_r, \omega_s, \omega_t\}$, où $\omega_r = e_2 + e_3 + e_4$, $\omega_s = e_3 + e_4$, et $\omega_t = e_4$.

1.2 Le Permutaèdre.

Nous pouvons associer à un système de Coxeter un polytope simple que nous appelons le *permutaèdre*.

Rappelons tout d'abord quelques notions portant sur les polytopes.

Il existe deux façons de décrire un polytope : nous pouvons le définir comme l'enveloppe convexe d'un ensemble de points, ou bien comme l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces non redondants. L'ensemble des faces d'un polytope forme un

ensemble partiellement ordonné, l'ordre étant donné par la relation d'inclusion. Une *facette* d'un polytope de dimension n est une face de dimension $n - 1$.

Définition 1.2.1. Le *cône normal* associé à une face F d'un polytope P est le cône formé par les vecteurs $v \in V$ tels que la forme linéaire $x \mapsto \langle x, v \rangle$ sur P est maximisée par tous les points x de F , c'est-à-dire que $\langle x, v \rangle \geq \langle y, v \rangle$ pour tous $x \in F, y \in P$. En particulier, si F est un sommet de P , le cône normal associé à F est engendré par les vecteurs normaux aux facettes de P qui contiennent F .

Bien que nous n'utilisons pas la définition qui va suivre pour énoncer des résultats dans cette section, celle-ci est un rappel sur les polytopes, aussi nous choisissons de la mettre ici.

Définition 1.2.2. Soit P un polytope dans \mathbb{R}^n qui contient l'origine. Le *polaire* (ou *dual*) de P , noté P° , est le polytope

$$P^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \leq 1, \forall x \in P\}.$$

Remarque 1. La polarité envoie l'ensemble des faces d'un polytope sur l'ensemble de faces opposé (au sens d'ensemble partiellement ordonné) de son polaire (voir (Ziegler, 1995), section 2.3). En particulier, les faces de dimension k d'un polytope P de dimension n correspondent aux faces de dimension $n - k$ de P° .

Nous verrons que nous en avons besoin pour énoncer l'un des buts de ce mémoire dans la dernière section de ce chapitre.

Dans cette section nous présentons ces deux descriptions pour un polytope associé à un système de Coxeter (W, S) .

1.2.1 Description du W -permutaèdre comme \mathcal{V} -polytope.

Soit a un point *générique*, c'est à dire qu'il n'est fixé par aucune réflexion de W . L'enveloppe convexe de la W -orbite de a est appelé le W -permutaèdre et est noté $\text{Perm}^a(W)$.

$$\text{Perm}^a(W) = \text{conv}\{w(a) \mid w \in W\}.$$

Nous appelons cette description comme enveloppe convexe de sommets la \mathcal{V} -représentation (\mathcal{V} pour vertex) du permutaèdre associé à (W, S) .

A.-V. Borovik et A. Borovik prouvent (Borovik et Borovik, 2010, Théorème 14.1) que l'ensemble $\text{vert}(\text{Perm}^a(W))$ des sommets de $\text{Perm}^a(W)$ pour le point générique a correspond exactement à la W -orbite de ce point (en particulier $|\text{vert}(\text{Perm}^a(W))| = |W|$) et que chaque chambre de l'éventail de Coxeter contient exactement un sommet de $\text{Perm}^a(W)$. Ainsi, nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.2.1. *Nous pouvons associer bijectivement à chaque sommet $w(a)$ du permutaèdre $\text{Perm}^a(W)$ l'élément w de W .*

Démonstration. Voir [(Borovik et Borovik, 2010), Théorème 15.2]. □

Dans leur article (Borovik et Borovik, 2010), A.-V. Borovik et A. Borovik montrent aussi que chaque arête du W -permutaèdre émanant du sommet a est dirigée par le négatif d'une racine simple du système simple. Nous remarquons alors qu'une facette F_a du W -permutaèdre contenant le sommet a appartient à un hyperplan engendré par l'ensemble $\Delta \setminus \{\alpha\}$, où α est la racine qui ne dirige aucune des arêtes de cette facette. Les facettes adjacentes à a sont alors en lien avec les sous-ensembles $I := S \setminus \{s\}$, pour tout $s \in S$. Nous notons ces facettes $F_a(s)$. Comme un sous-groupe parabolique standard W_I est un groupe de Coxeter fini,

son enveloppe convexe de la W_I -orbite de a est un permutaèdre :

$$\text{Perm}^a(W_I) := \text{conv}\{w(a) \mid w \in W_I\}.$$

Celui-ci se trouve être une face de dimension $|I|$ de $\text{Perm}^a(W)$ qui contient le sommet a . En fait, toute face de $\text{Perm}^a(W)$ de dimension k est un permutaèdre de la forme $\text{Perm}^{w(a)}(W_I)$ pour un $w \in W$ et un $I \subseteq S$ de dimension k (Hohlweg, 2012, Proposition 2.1).

1.2.2 Description du permutaèdre comme \mathcal{H} -polytope.

Nous voyons ici la représentation du permutaèdre comme intersection de demi-espaces. Il nous faut alors définir des demi-espaces tels que les hyperplans qui les définissent contiennent les facettes de $\text{Perm}^a(W)$ et dont l'intersection est notre permutaèdre.

Soit a un point générique de V . Sans perte de généralité, nous pouvons prendre a à l'intérieur de la chambre fondamentale \mathcal{C} , c'est-à-dire que nous posons $a = \sum_{s \in S} a_s \omega_s$ avec $a_s > 0$ pour tout $s \in S$.

Rappelons que nous avons vu que les facettes de $\text{Perm}^{w(a)}(W)$ sont des permutaèdres $\text{Perm}^{w(a)}(W_I)$, tels que $I = S \setminus \{s\}$ et $w \in W$, à la fin de la §1.2.1. Les hyperplans qui supportent les facettes de $\text{Perm}^a(W)$ sont ainsi les hyperplans engendrés par les racines de $w(\Delta \setminus \{\alpha_s\})$ passant par $w(a)$, pour tout $w \in W$. Nous remarquons alors qu'ils sont orthogonaux aux rayons $w(v_s)$ de l'éventail de Coxeter \mathcal{E} (Hohlweg *et al.*, 2011, Section 2.1). Alors, pour tout rayon $v := w(v_s)$ de l'éventail de Coxeter nous définissons les demi-espaces clos

$$\mathcal{H}_v^a = \{v \in V \mid \langle v, w(\omega_s) \rangle \leq \langle a, \omega_s \rangle\},$$

pour $w(v_s) = k.w(\omega_s)$, avec $k \in \mathbb{R}^+$. Les hyperplans H_v^a définis par l'égalité stricte contiennent alors les facettes de $\text{Perm}^a(W)$. Nous pouvons ainsi définir $\text{Perm}^a(W)$ comme intersection de ces demi-espaces :

$$\text{Perm}^a(W) = \bigcap_{v \text{ rayons de } \mathcal{E}} \mathcal{H}_v^a.$$

Ceci est la \mathcal{H} -représentation du W -permutaèdre.

Le cône normal associé à un sommet $w(a)$ du permutaèdre $\text{Perm}^a(W)$ est alors le cône engendré par les vecteurs $w(\omega_s)$ pour $s \in S$. Nous avons donc que

Théorème 1.2.2. *L'éventail normal de $\text{Perm}^a(W)$ est l'éventail de Coxeter.*

Pour plus de détails nous vous référons à (Hohlweg *et al.*, 2011).

Définition 1.2.3. Lorsque $a = \sum_{\omega \in \nabla} \omega$, (en particulier, a appartient à la chambre C) nous dirons que $\text{Perm}^a(W)$ est *équilibré* et nous le noterons $\text{Perm}(W)$. Si de plus $w_0(a) = -a$, nous dirons que $\text{Perm}(W)$ est *bien équilibré*.

Notons que le barycentre des sommets du W -permutaèdre bien équilibré est l'origine.

1.3 Réalisation de l'associèdre généralisé

Dans cette section, nous nous familiarisons avec *l'associèdre généralisé*, qui est au cœur du sujet principal de ce mémoire. Nous voyons la réalisation de ce polytope simple à partir de la \mathcal{H} -représentation du permutaèdre $\text{Perm}^a(W)$ donnée par C. Hohlweg, C. Lange et H. Thomas dans (Hohlweg *et al.*, 2011).

L'idée de cette réalisation est d'introduire une notion convenable d'*admissibilité* de demi-espaces, et de n'intersecter que les demi-espaces admissibles parmi ceux

intervenant dans la réalisation de $\text{Perm}^a(W)$. Afin de définir cette notion d'admissibilité, il nous faut introduire certaines classes particulières d'éléments de W .

Tout d'abord, il nous faut choisir un élément de W qui sera très important pour notre réalisation, appelé élément de Coxeter, et fixer une expression réduite de cet élément comme mot sur l'alphabet S .

Définition 1.3.1. On dit que $c \in W$ est un *élément de Coxeter* si c est le produit de toutes les réflexions simples de S dans un certain ordre et sans répétition.

Exemple 1.3.1. Soit $W = S_4$ et $S = \{r, s, t\}$. L'élément $c = str$ est un élément de Coxeter de W , ainsi que rst .

Remarque 2. Soit $c \in W$ un élément de Coxeter. Pour $I \subseteq S$, notons par $c_{(I)}$ le sous-mot de c ne contenant que les réflexions simples dans I . Alors, $c_{(I)}$ est un élément de Coxeter de W_I .

Un élément de Coxeter fixé $c \in W$ nous permet de déterminer une expression réduite particulière de w_0 :

Définition 1.3.2. Soit c un élément de Coxeter, c une expression réduite de c , et w_0 le mot le plus long de W . Il existe une unique expression réduite de w_0 sur l'alphabet S , notée $w_0(c)$, telle que

$$w_0(c) = c_{(K_1)}c_{(K_2)}\dots c_{(K_p)},$$

où chaque $K_i \subseteq S$ est non-vide, $K_p \subseteq K_{p-1} \subseteq \dots \subseteq K_1$ et $\ell(w_0) = \sum_{i=1}^p |K_i|$. On appelle $w_0(c)$ le *c-mot* de w_0 .

Exemple 1.3.2. Soit $W = S_4$, $S = \{r, s, t\}$. Nous avons les *c-mots* de w_0 suivants : $w_0(rst) = rst \cdot rs \cdot r = c_{(S)}c_{(S \setminus \{t\})}c_{(S \setminus \{s,t\})}$ et $w_0(str) = str \cdot str = c_{(S)}c_{(S)}$.

Au fait de ces nouvelles définitions, nous pouvons maintenant introduire la notion de c -singleton :

Définition 1.3.3. Soit c un élément de Coxeter et $w \in W$. On dit que w est un c -*singleton* si un certain mot réduit pour w apparaît comme préfixe d'un mot obtenu à partir $w_0(c)$ en considérant les relations de commutation entre les éléments de S .

Exemple 1.3.3. Soit $W = S_4$ et $c = rst$ un élément de Coxeter. Nous avons vu que $w_0(c) = rstrsr$. Les c -singletons sont : $e, r, rs, rst, rsr, rstr, rstrs$, et $rstrsr$.

Remarque 3. Nous observons que rsr n'est pas un préfixe de $w_0(c)$; cependant, comme les réflexions simples r et t commutent, il apparaît comme préfixe de $rsrtsr$.

Nous voilà en mesure de définir la notion de demi-espace c -admissible de la réalisation du permutaèdre intervenant dans celle de l'associaèdre généralisé. Pour cela, rappelons tout d'abord la \mathcal{H} -réalisation de $\text{Perm}^a(W)$: Soit a un point à l'intérieur de la chambre fondamentale C . Alors,

$$\text{Perm}^a(W) = \bigcap_{\nu \text{ rayon de } \mathcal{E}} \mathcal{H}_\nu^a.$$

Définition 1.3.4. Soit c un élément de Coxeter. Un demi-espace \mathcal{H}_ν^a de $\text{Perm}^a(W)$ est c -admissible si l'hyperplan H_ν^a qui le définit contient au moins un sommet de $\text{Perm}^a(W)$ qui est un c -singleton.

Le c -associaèdre généralisé est obtenu à partir de $\text{Perm}^a(W)$ en ne gardant que les c -demi-espaces admissibles :

Définition 1.3.5. Soit $c \in W$ un élément de Coxeter. Alors,

$$\text{Asso}_c^a(W) = \bigcap_{\substack{w \in H_v^a \\ w \text{ un } c\text{-singleton}}} \mathcal{H}_v^a.$$

est appelé un *c-associaèdre généralisé* de W .

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.3.1. Soit c un élément de Coxeter de W et a un point à l'intérieur de la chambre fondamentale C .

1. $\text{Asso}_c^a(W)$ est un polytope convexe simple de dimension $|\Delta|$.
2. $\text{vert}(\text{Asso}_c^a(W)) \cap \text{vert}(\text{Perm}^a(W)) = \{w(a) \mid w \text{ est un } c\text{-singleton}\}$.

Démonstration. Voir (Hohlweg et al., 2011, Théorème 3.4). □

Chaque facette de Asso_c^a est contenue dans l'hyperplan définissant exactement un demi-espace c -admissible. Ainsi, le cône normal à un sommet $w(a)$ que partagent $\text{Asso}_c^a(W)$ et $\text{Perm}^a(W)$ est engendré par les vecteurs $w(\omega_s)$, $s \in S$ tels que w est un c -singleton. Les cônes normaux aux sommets de $\text{Asso}_c^a(W)$ qui diffèrent de ceux de $\text{Perm}^a(W)$ sont des unions de cônes de l'éventail de Coxeter.

Dans (Hohlweg et al., 2011, section 3), les auteurs montrent le théorème suivant :

Théorème 1.3.2. (Hohlweg et al., 2011, Théorème 3.4) L'éventail normal de l'associaèdre généralisé est l'éventail c -Cambrian.

De plus, nous avons le lien suivant entre l'éventail normal de l'associaèdre généralisé et l'éventail de Coxeter :

Théorème 1.3.3. (Reading et Speyer, 2009) L'éventail c -Cambrian est un grossissement de l'éventail de Coxeter \mathcal{E} .

Définition 1.3.6. Nous dirons que $\text{Asso}_c^a(W)$ est *équilibré* ou *bien équilibré* si $\text{Perm}^a(W)$ l'est (voir 1.2.3). On le notera alors $\text{Asso}_c(W)$.

On notera par $\mathfrak{B}^a(c)$ le barycentre des sommets du c -associaèdre $\text{Asso}_c^a(W)$ et $\mathfrak{B}(c)$ si le c -associaèdre est (bien) équilibré.

1.4 Complexes de sous-mots.

Ainsi, nous avons vu la \mathcal{H} -représentation de l'associaèdre à partir de celle du permutaèdre associé à tout groupe de Coxeter fini. Cependant, pour présenter sa \mathcal{V} -représentation, il nous faut introduire une famille de complexes simpliciaux : les complexes de sous-mots. Avant de présenter la définition de complexe de sous-mots, nous rappelons au lecteur de la définition de complexe simplicial.

1.4.1 Définition des complexes de sous-mots.

Définition 1.4.1. Un *complexe simplicial* sur un ensemble de points est une collection finie \mathcal{F} d'ensembles finis et non vides, telle que $F \in \mathcal{F}$ et $G \subseteq F$ entraîne $G \in \mathcal{F}$. Les éléments de \mathcal{F} sont appelés des *faces* du complexe, et on dit que G est *une face de F* si $G \subseteq F$. Une face maximale (c'est-à-dire, qui n'est contenue dans aucune autre face) est appelée une *facette*. La *dimension* d'une face $F \in \mathcal{F}$ est $|F| - 1$, et une face de dimension 0 est appelée un *sommet*. Un complexe simplicial est *pur* si toutes ses facettes ont la même dimension.

Nous allons maintenant définir un complexe simplicial important associé à un élément w de W et à un mot Q contenant au moins une expression de w .

Soit (W, S) un système de Coxeter fini et soit $Q = q_1 q_2 \dots q_m$ un mot sur l'alphabet S . Notons par $[1, m] := \{1, 2, \dots, m\}$ l'ensemble des positions dans Q .

Définition 1.4.2. Soient $Q = q_1q_2\dots q_m \in S^*$ et $w \in W$ tel que Q contient une expression réduite de w comme sous-mot. On note par $SC(Q, w)$ le complexe simplicial dont les faces de dimension k sont : $F \subseteq [1, m]$ telle que

1. $Q|_{[1, m] \setminus F}$ est un sous-mot contenant une expression réduite de w
2. $|F| = k$.

On appelle ce complexe $SC(Q, w)$ un *complexe de sous-mots* associé à Q et w .

Remarquons que deux lettres de Q à des positions différentes peuvent-être les mêmes mais leurs positions sont bien distinctes dans $SC(Q, w)$. Un sommet de $SC(Q, w)$ est noté par la position d'une lettre dans Q .

Une facette de $SC(Q, w)$ est le complément de l'ensemble des positions qui forment une expression réduite de w dans Q .

Exemple 1.4.1. Soient $W = S_3$, $S = \{s, t\}$, $Q = q_1q_2q_3q_4q_5 = ststs$. Prenons $w = st$. Alors l'ensemble des sommets de $SC(Q, w)$ est $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Comme $q_1q_2 = st = w$, l'ensemble des positions $\{2, 3, 5\}$ est une facettes de $SC(Q, w)$. De même, comme $q_3q_4 = q_1q_4 = w$, nous avons que $\{1, 2, 5\}$ et $\{3, 4, 5\}$ sont des facettes de ce complexe de sous-mots. En fait, ces 3 facettes sont les seules facettes de $SC(Q, w)$.

Exemple 1.4.2. Soient W de type B_2 , $S = \{s, t\}$, $Q = ststst$. Les expressions réduites de w_0 sont $stst$ et $tsts$. Alors les facettes de $SC(Q)$ sont : $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$, $\{5, 6\}$, et $\{1, 6\}$.

Exemple 1.4.3. Soient $W = S_4$, $S = \{r, s, t\}$, $Q = rstrstrsr$. Prenons ici encore $w = w_0$. Du fait de l'expression de Q , on s'intéressera ici aux expressions réduites de w_0 suivantes : $rstrsr$, $srtstr$, $srtstr$, $strstr$, $strsrt$ et $stsrst$. Alors $\{1, 2, 3\}$, est une des quatorze facettes de $SC(Q, w_0)$. Les autres facettes sont données dans la Figure 1.2.

Figure 1.1 Complexe de sous-mots de $SC(ststst, w_0)$ pour W de type B_2

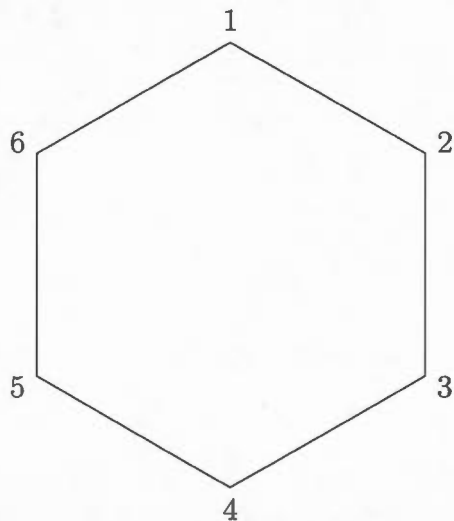
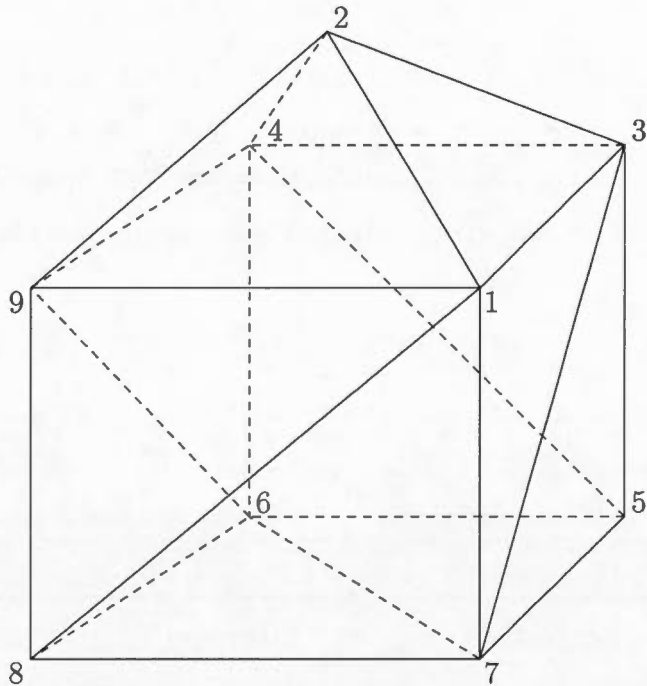


Figure 1.2 Réalisation de $SC(rstrstrsr, w_0)$ pour $W = S_4$.



Soient (W, S) un système de Coxeter fini et $Q \in S^*$. Nous définissons le *produit*

de Demazure comme étant la fonction $\delta : S^* \rightarrow W$ telle que

$$\delta(e) = e \text{ et } \delta(Qs) = \begin{cases} \delta(Q)s & \text{si } l(\delta(Q)s) = l(\delta(Q)) + 1 \\ \delta(Q) & \text{si } l(\delta(Q)s) = l(\delta(Q)) - 1. \end{cases}$$

Remarque 4. Comme son nom le suggère, $\delta(Q)$ correspond au produit des lettres de Q dans l'algèbre de Demazure de (W, S) ((Knutson et Miller, 2004, §3), pour plus de détails).

Remarque 5. A. Knutson et E. Miller dans les articles (Knutson et Miller, 2004) et (Knutson et Miller, 2005) soulèvent alors la question de complexes de sous-mots réalisables comme complexe de frontière de polytopes convexe. Ils montrent le théorème suivant :

Théorème 1.4.1. *Le complexe de sous-mots $SC(Q, w)$ associé à un système de Coxeter fini (W, S) est homéomorphe à une sphère si et seulement si $w = \delta(Q)$. Sinon c'est une boule.*

Pour la preuve de ce théorème nous vous renvoyons au Théorème 3.7 dans (Knutson et Miller, 2004).

Dans la suite de ce mémoire, nous considérerons uniquement les complexes de sous-mots sphériques, c'est-à-dire ceux tels que $w = \delta(Q)$, où δ est le produit de Demazure. C. Ceballos, J.P. Labbé et C. Stump montrent dans (Ceballos et al., 2014a) que tout complexe de sous-mots sphérique est isomorphe à un complexe de sous-mots de la forme $SC(Q, w_0)$. Nous nous intéresserons donc qu'aux cas où $w = w_0$ et Q contient au moins une expression réduite de w_0 . Nous écrirons alors $SC(Q)$ au lieu de $SC(Q, w_0)$ pour simplifier les notations.

Observons que les Exemples 1.4.2 et 1.4.3 sont sphériques car $w = w_0$.

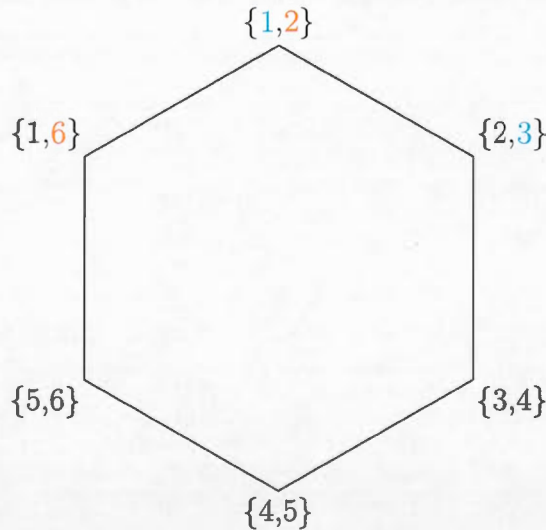
1.4.2 Facettes et flips

Remarquons que le fait que $SC(Q)$ soit homéomorphe à une sphère implique que si F est une facette de $SC(Q)$, alors pour tout sommet $f \in F$ il existe un unique $g \in Q \setminus F$ tel que $(F \setminus \{f\}) \cup \{g\}$ est aussi une facette de $SC(Q)$ (pour plus de détails, voir (Ziegler, 1995, Chapitre 8)).

On appellera cette action de remplacement d'un sommet un *flip*¹ entre deux facettes adjacentes. Par unicité de $f \in F$ et $g \in G$, nous noterons le *flip* de $f \in F$ pour $g \in G$ par $F \rightarrow G$.

Nous pouvons alors représenter ces flips à l'aide d'un graphe connexe : considérons l'ensemble des facettes \mathcal{F} de $SC(Q)$. Soit alors F une facette et $f \in F$. On notera une arête entre F et $G \in \mathcal{F}$ si $F \setminus \{f\} = G \setminus \{g\}$, pour $g \in G$.

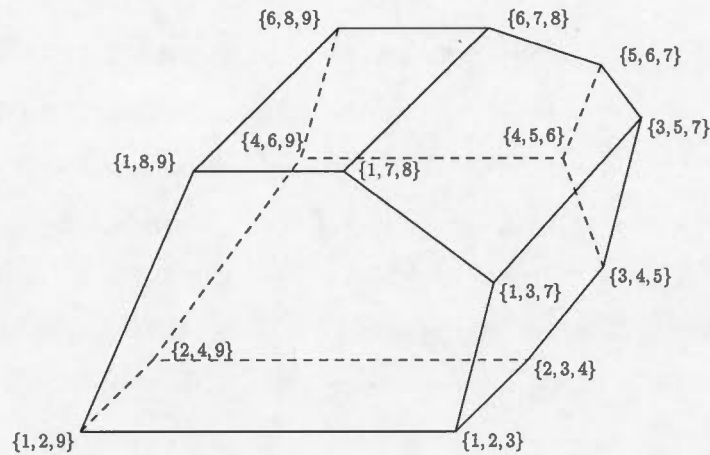
Figure 1.3 Graphe des flips de $SC(ststst)$ pour W de type B_2 .



Exemple 1.4.4. Nous présentons dans la Figure 1.3 le graphe des flips de l'Exemple 1.4.2. Nous choisissons la facette $F = \{1,2\}$ dans la liste et notons

1. À défaut d'avoir trouver un terme français adéquat.

Figure 1.4 Graphe des flips de $SC(rstrsr)$ pour $W = S_4$.



en bleu le sommet $f = 1$. Comme $G = \{2, 3\}$ est la facette obtenue de F par le flip de 1 pour 3, nous avons donc une arête entre $\{1, 2\}$ et $\{2, 3\}$. De même, en orange, nous avons le flip entre $\{1, 2\}$ et $\{1, 6\}$.

Remarque 6. Constatons que pour construire ici le graphe des flips, nous avons besoin de déterminer \mathcal{F} , l'ensemble des facettes de $SC(Q)$, ce qui peut s'avérer être long. Comme nous travaillons avec des systèmes de Coxeter, nous allons définir à partir de la combinatoire des racines un nouvel outil nous permettant de construire ce graphe par un processus itératif en ne considérant qu'une facette initiale. Nous le verrons dans le chapitre suivant.

Les graphes de flips donnés aux Figures 1.4 et 1.3 sont les *1-squelettes* des duaux des complexes $SC(Q)$. En particulier, le graphe de la Figure 1.4 semble être combinatoirement équivalent à l'associaèdre $\text{Asso}_{rstrsr}(W)$ pour $W = S_4$. On peut se demander quelles sont les conditions pour que les duaux des complexes $SC(Q)$ aient une réalisation polytopale dans V et dans quels cas ceux-ci sont des associaèdres associés à leur groupe respectif. Nous apportons les réponses à ces questions dans les prochains chapitres.

1.4.3 Opération sur les mots et complexes amassés

Dans (Ceballos *et al.*, 2014a), les auteurs utilisent les complexes de sous-mots afin de donner une description combinatoire des *complexes amassés* introduits dans (Fomin et Zelevinsky, 2002). À un élément de Coxeter $c \in W$, ils associent le complexe de sous-mots $SC_c := SC(cw_0(c), w_0)$ et montrent que celui-ci est isomorphe au complexe c -amassé associé à W . Pour ce faire, ils introduisent deux opérations sur les mots qui laissent invariants les complexes de sous-mots associés : la transposition de lettres consécutives commutative et la rotation.

Proposition 1.4.2. (Ceballos *et al.*, 2014a, Proposition 3.8) *Si nous pouvons obtenir le mot Q' à partir de Q en inter-changeant des lettres consécutives commutatives, alors $SC(Q)$ est isomorphe à $SC(Q')$.*

Proposition 1.4.3. (Ceballos *et al.*, 2014a, Proposition 3.9) *Soit $\phi : S \rightarrow S$ l'involution qui envoie s sur $w_0^{-1}sw_0$. Nous définissons la rotation du mot $Q = q_1 \dots q_m$ comme étant le mot $Q^\circ := q_2 \dots q_m \phi(q_1)$. Alors, les complexes de sous-mots $SC(Q)$ et $SC(Q^\circ)$ sont isomorphes.*

Remarquons que dans le cas où $Q = cw_0(c)$, nous avons la proposition suivante :

Proposition 1.4.4. (Ceballos *et al.*, 2014a, Proposition 4.3) *Soit $c \in W$ un élément de Coxeter, $s \in S$ la première lettre d'une expression réduite de c , et $w_0(c)$ le c -mot de w_0 . Alors $(w_0(c))^\circ$ est le scs -mot de w_0 .*

Donc, la Proposition 1.4.3 induit le résultat suivant :

Corollaire 1.4.5. *Soit s la première lettre de c et une expression réduite c' du mot $c' := scs$. Alors SC_c est isomorphe à $SC_{c'}$.*

Rappelons que nous avons la définition suivante :

Définition 1.4.3. Deux polytopes sont *combinatoirement équivalents* s'il existe un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre leurs ensembles de faces respectifs.

Remarquons qu'une équivalence combinatoire entre deux polytopes P et Q existe dès qu'on trouve une bijection entre les ensembles de sommets de P et de Q sous laquelle correspondent les ensembles de sommets des faces de P et de Q . (En fait, on peut restreindre notre attention aux sommets et aux facettes; voir (Ziegler, 1995, §2.2).) Nous disons qu'un polytope P *réalise* un polytope Q si P et Q sont des polytopes combinatoirement équivalents.

Dans ce mémoire nous nous questionnons sur les conditions de réalisation du complexe de sous-mots afin de montrer que SC_c est réalisé par le polaire du *polytope de briques* qui se trouve être une réalisation par enveloppe convexe de l'associaèdre généralisé $\text{Asso}_c(W)$. Ainsi, nous récupérons l'isomorphisme déjà connu dans la littérature entre l'associaèdre généralisé $\text{Asso}_c(W)$ et le c -complexe amassé sans passer par l'étude de leurs éventails.

CHAPITRE II

RACINES ET COMPLEXES DE SOUS-MOTS

Rappelons que nous avons $Q = q_1q_2\dots q_m$ un mot sur l'alphabet S contenant une expression réduite de w_0 et que l'on considère le complexe de sous-mots sphérique $SC(Q, w_0)$, que l'on note $SC(Q)$. Nous avons vu dans le premier chapitre que le 1-squelette du dual de ce complexe est le graphe des flips. En particulier, lorsque $Q = cw_0(c)$, nous obtenons le graphe de l'associaèdre généralisé correspondant. Nous étudions dans ce chapitre deux notions qui sont déterminantes pour la réalisation polytopale de $SC(Q)$ que nous verrons dans le chapitre suivant : la fonction racine et la configuration de racines. La notion de fonction de racine nous permet d'étudier les faces de $SC(Q)$ et de déterminer le graphe des flips de $SC(Q)$ à partir d'une unique facette de ce complexe. La configuration de racines, qui est un raffinement de la fonction racine, nous permet d'étudier plus en profondeur le graphe des flips de $SC(Q)$ et de donner une caractérisation du mot Q pour que le complexe de sous-mots $SC(Q)$ soit réalisable par le polaire d'un polytope dont le 1-squelette est le graphe des flips. Cette dernière application de la notion de configuration de racines sera vue dans le Chapitre 3.

2.1 Racines et flips.

Nous présentons ici une notion introduite par C. Ceballos, J.-P. Labbé et C. Stump dans (Ceballos *et al.*, 2014b) : la *fonction racine* d'un complexe de sous-mots.

Nous montrerons que l'on peut, grâce à la fonction racine, construire le graphe des flips à partir d'une seule facette donnée de $SC(Q)$ et des racines qui lui sont associées.

Définition 2.1.1. Soit $Q = q_1q_2\dots q_m$, un mot sur l'alphabet S tel que $SC(Q)$ est un complexe de sous-mot sphérique. À une facette F de $SC(Q)$ et à une position $k \in [1, m]$ correspondant à une lettre de Q on associe une racine comme suit :

$$r_Q(F, k) := Q|_{[1, k-1] \setminus F}(\alpha_{q_k}),$$

où $Q|_{[1, k-1] \setminus F}$ est le sous-mot de Q obtenu en ne prenant que les lettres aux positions $[1, k-1] \setminus F$. Rappelons que le mot vide est noté par e .

Exemple 2.1.1. Comme dans l'Exemple 1.4.2, considérons W de type B_2 et $Q = ststst$. Considérons pour ce groupe le système simple suivant : $\Delta = \{\alpha_s = \sqrt{2}e_1, \alpha_t = e_2 - e_1\}$ Nous avons vu que $\{2, 3\}$ est une facette de $SC(Q)$. Nous avons pour cette facette les racines suivantes :

$$r_Q(\{2, 3\}, 1) = Q|_{\emptyset \setminus \{2, 3\}}(\alpha_{q_1}) = e(\alpha_{q_1}) = \alpha_s,$$

$$r_Q(\{2, 3\}, 2) = Q|_{[1] \setminus \{2, 3\}} = q_1(\alpha_{q_2}) = s(\alpha_t) = \alpha_t + \sqrt{2}\alpha_s = r_Q(\{2, 3\}, 4),$$

$$r_Q(\{2, 3\}, 3) = Q|_{[2] \setminus \{2, 3\}} = q_1(\alpha_{q_3}) = s(\alpha_s) = -\alpha_s,$$

$$r_Q(\{2, 3\}, 5) = q_1q_4(\alpha_{q_5}) = st(\alpha_s) = \alpha_s + \sqrt{2}\alpha_t$$

$$\text{et } r_Q(\{2, 3\}, 6) = q_1q_4q_5(\alpha_{q_6}) = sts(\alpha_t) = \alpha_t.$$

Exemple 2.1.2. Reprenons l'Exemple 1.4.3 où $W = S_4$, $Q = rstrstrsr$ et $w = w_0$. Nous avons vu que $\{1, 2, 3\}$ est une facette de $SC(Q, w_0) = SC(Q)$. Nous avons les racines suivantes, associées à cette facette et aux sommets 1, 2, 3, 4 et 9 :

$$\begin{aligned} r_Q(\{1, 2, 3\}, 1) &= Q|_{\emptyset \setminus \{1,2,3\}}(\alpha_{q_1}) = e(\alpha_{q_1}) = \alpha_r; \\ r_Q(\{1, 2, 3\}, 2) &= Q|_{\{1\} \setminus \{1,2,3\}}(\alpha_{q_2}) = e(\alpha_{q_2}) = \alpha_s; \\ r_Q(\{1, 2, 3\}, 3) &= Q|_{\{1,2\} \setminus \{1,2,3\}}(\alpha_{q_3}) = e(\alpha_{q_3}) = \alpha_t; \\ r_Q(\{1, 2, 3\}, 4) &= Q|_{\{1,2,3\} \setminus \{1,2,3\}}(\alpha_{q_4}) = e(\alpha_{q_4}) = \alpha_r; \\ r_Q(\{1, 2, 3\}, 9) &= Q|_{[1,8] \setminus \{1,2,3\}}(\alpha_{q_9}) = Q|_{\{4,5,6,7,8\}}(\alpha_{q_9}) = rstrs(\alpha_r) = \alpha_t. \end{aligned}$$

On peut remarquer ici que $(r_Q(\{1, 2, 3\}, k))_{k \in \{1,2,3\}} = (\alpha_r, \alpha_s, \alpha_t)$.

Nous donnons les racines $r_Q(\{1, 2, 3\}, k)$ pour $k \in \{5, 6, 7, 8\}$ dans le Tableau 3.1.

Remarque 7. S'il n'y a pas d'ambiguïté par rapport au mot Q , nous noterons $r(F, f)$ au lieu de $r_Q(F, f)$.

Définition 2.1.2. Soit F une facette de $SC(Q)$. On note par $\mathcal{L}_Q(F)$ la liste des racines associées à F :

$$\mathcal{L}_Q(F) = (r(F, k))_{k \in [1, m]}$$

Si nous considérons W et α comme dans l'Exemple 2.1.1, nous obtenons alors :

$$\mathcal{L}_Q(\{2, 3\}) = (\alpha_s, \alpha_t + \sqrt{2}\alpha_s, -\alpha_s, \alpha_t + \sqrt{2}\alpha_s, \alpha_s + \sqrt{2}\alpha_t, \alpha_t).$$

Nous venons de voir que nous pouvons associer à une facette F de $SC(Q)$ une liste de racines $\mathcal{L}_Q(F)$. Nous allons maintenant étudier comment, à partir de cette liste, nous pouvons trouver les facettes de $SC(Q)$ adjacentes à F .

Théorème 2.1.1. Soit F une facette d'un complexe $SC(Q)$ sphérique. Si $f \in F$, alors il existe un unique sommet $g \in [1, m] \setminus F$ tel que $r(F, g) \in \{\pm r(F, f)\}$. De plus, $G = (F \setminus \{f\}) \cup \{g\}$ est une facette de $SC(Q)$ qui est adjacente à F .

Corollaire 2.1.2. *Soit G une facette de $SC(Q)$ adjacente à F , c'est-à-dire qu'il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $F \setminus \{f\} = G \setminus \{g\}$. Alors g est l'unique sommet dans $[1, m] \setminus F$ tel que*

$$r(F, g) = \begin{cases} r(F, f) \in \Phi^+ & \text{si } f < g, \\ -r(F, f) \in \Phi^- & \text{si } g < f. \end{cases}$$

Remarque 8. Remarquons que si nous considérons une facette F et $f \in F$, $g \notin F$ tel que $r(F, f) = r(F, g)$, alors le résultat précédent nous assure, en considérant $G = F \setminus \{f\} \cup \{g\}$, que $f < g$.

Afin de démontrer ces résultats, nous introduisons les deux propositions qui vont suivre.

Dans l'Exemple 2.1.2, nous voyons que $r(\{1, 2, 3\}, 1) = r(\{1, 2, 3\}, 4)$. Le théorème précédent nous permet de conclure qu'il y a un flip du sommet 1 pour le sommet 4. Alors $\{2, 3, 4\}$ est une facette de $SC(Q)$ et elle est adjacente à $\{1, 2, 3\}$. Nous voyons aussi, dans cet exemple, que $r(\{1, 2, 3\}, 3) = r(\{1, 2, 3\}, 9) = \alpha_t$. Nous en concluons que les facettes $\{1, 2, 3\}$ et $\{1, 2, 9\}$ sont adjacentes.

De manière générale, le théorème précédent nous permet de connaître toutes les facettes adjacences à une facette F donnée de $SC(Q)$ à partir de sa liste de racines associées $\mathcal{L}_Q(F)$. Ainsi nous pouvons construire par itération le graphe des flips à partir de cette facette. Pour cela il nous faut par contre calculer les listes de racines associées aux facettes adjacentes à F , un exercice qui peut-être fastidieux. La proposition suivante rend le travail plus agréable.

Proposition 2.1.3. *Soient F et G deux facettes adjacentes de $SC(Q)$ par le flip de $f \in F$ pour $g \in G$. L'application $r(G, \cdot)$ est obtenue de l'application $r(F, \cdot)$*

par :

$$r(G, k) = \begin{cases} s_{r(F, f)}(r(F, k)) & \text{si } \min(f, g) < k \leq \max(f, g), \\ r(F, k) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Supposons sans perte de généralité que $f < g$.

Comme $Q|_{[1, m] \setminus F} = Q|_{[1, k-1] \setminus F} \cdot Q|_{[k, m] \setminus F} = w_0$, nous avons que :

$$r(F, k) = Q|_{[1, k-1] \setminus F}(\alpha_{q_k}) = w_0 \cdot (Q|_{[k, m] \setminus F})^{-1}(\alpha_{q_k}).$$

Alors les racines $r(F, k)$ et $r(G, k)$ sont égales tant que F et G coïncident sur l'intervalle $[1, k-1]$ si $k \leq f$ ou sur l'intervalle $[k, m]$ si $g < k$.

Dans le cas où $f < k \leq g$, on a que :

$$r(G, k) = Q|_{[1, f-1] \setminus G} \cdot q_f \cdot Q|_{[f+1, k-1] \setminus G}(\alpha_{q_k}).$$

Or, comme $ws_\beta = ws_\beta w^{-1}w = s_{w(\beta)}w$, nous obtenons que :

$$r(G, k) = s_{Q|_{[1, f-1] \setminus G}(\alpha_{q_f})} \cdot Q|_{[1, f-1] \setminus G} \cdot Q|_{[f, k-1] \setminus G}(\alpha_{q_k}) = s_{r(F, f)}(r(F, k)).$$

□

Remarque 9. Soient F et G des facettes de $\text{SC}(Q)$ telles que $G = (F \setminus \{f\}) \cup \{g\}$.

Alors $r(F, f) = -r(G, g)$. En effet :

- Si $f < g$, par le Corollaire 2.1.2, $r(F, g) = r(F, f)$. Or par la Proposition 2.1.3, $r(G, g) = s_{r(F, f)}r(F, g)$. Donc $r(G, g) = -r(F, f)$.
- Si $g < f$, par le Corollaire 2.1.2, $r(F, g) = -r(F, f)$ et par la Proposition 2.1.3, $r(G, g) = r(F, g)$. Donc $r(G, g) = -r(F, f)$.

Un flip de F vers G est donc caractérisé par une racine $r(F, f) = -r(G, g)$.

Nous pouvons de ce fait définir la notion suivante :

Définition 2.1.3. Soient F et G deux facettes de $SC(Q)$ telles que $G = (F \setminus \{f\}) \cup \{g\}$ et $F \rightarrow G$ le flip de f pour g . On notera la *racine associée à ce flip* $\alpha_{(F,G)} := r(F, f)$.

Du fait des résultats que nous avons préalablement montrés, nous avons alors un moyen facile de déterminer les listes de racines associées aux facettes adjacentes à toute facette de $SC(Q)$ et ainsi, de construire le graphe des flips de $SC(Q)$.

Exemple 2.1.3. Pour construire la Figure 3.2, nous sommes partis de la facette $F = \{1, 2\}$ et de sa liste de racines, qui est notée au-dessus. Nous avons choisi de noter en bleu le sommet $f = 1$ de cette facette ainsi que la racine qui lui est associée. En orange, nous avons mis en évidence l'unique racine $r(F, g)$ telle que $r(F, g) = \pm r(F, f)$. Ce g est la position qui détermine le flip $F \rightarrow G$. Dans ce cas, on a donc $G = \{2, 3\}$.

Nous avons étiqueté l'arc de F vers G par $f - g$.

Finalement, les racines encadrées en gris sont les racines $r(F, k) = r(G, k)$ pour $\max(f, g) < k$ ou $k \leq \min(f, g)$, et nous avons annoté par $s_{r(F,f)}$ les arêtes de ce graphe afin de mettre en évidence comment s'obtiennent les racines $r(G, k)$ telles que $\min(f, g) < k \leq \max(f, g)$ (voir Proposition 2.1.3).

Nous répétons ce processus à chaque facette ainsi obtenue afin d'obtenir la Figure 3.2.

Il nous reste à démontrer le Théorème 2.1.1 et son corollaire. À cette fin, il nous faut présenter le résultat suivant :

Proposition 2.1.4. *Soit F une facette de $SC(Q)$. Alors l'application*

$$r(F, \cdot) : k \longmapsto r(F, k)$$

est une bijection entre le complément de F dans $[1, m]$ et Φ^+ . En fait, nous avons que

$$\sum_{k \notin F} r_Q(F, k) = \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta.$$

Démonstration. Choisissons $\beta \in \Phi^+$. Comme $Q_{[1, m] \setminus F}$ est une expression réduite de w_0 et que $(w_0)^{-1} = w_0$, nous avons que $(Q_{[1, m] \setminus F})^{-1}(\beta) = w_0(\beta) \in \Phi^-$. Il existe alors un unique $k \in [1, m]$ tel que $(Q_{[1, k-1] \setminus F})^{-1}(\beta) \in \Phi^+$ et $q_k(Q_{[1, k-1] \setminus F})^{-1}(\beta) \in \Phi^-$. Comme $r(F, k) = (Q_{[1, k-1] \setminus F})\alpha_{q_k}$, nous avons que $\alpha_{q_k} = (Q_{[1, k-1] \setminus F})^{-1}(r(F, k))$. Nous avons alors $\alpha_{q_k} = (Q_{[1, k-1] \setminus F})^{-1}(\beta)$ par la Proposition 1.1.1 et donc $\beta = r(F, k)$. Nous avons donc que $r(F, \cdot) |_{[1, m] \setminus F}$ est surjective.

De plus, comme Φ^+ et le complément de F dans $[1, m]$ ont la même cardinalité, $\ell(w_0)$, on en conclut que $r(F, \cdot)$ est bijective. \square

Démonstration du Théorème 2.1.1 et du Corollaire 2.1.2. Le Théorème 2.1.1 et son corollaire sont une conséquence directe de la Proposition 2.1.3 et de la Proposition 2.1.4 : quand nous enlevons f de F , nous avons à ajouter la position $g \notin F$ de manière à ce que la fonction racine continue d'envoyer le complément de $(F \setminus \{f\}) \cup \{g\}$ sur Φ^+ ce qui entraîne que $r(F, g) = r(F, f)$, si $r(F, f) \in \Phi^+$, ou $r(F, g) = s_{r(F, f)}r(F, f) = -r(F, f)$ si $r(F, f) \in \Phi^-$.

\square

Remarque 10. En ne considérant que les complexes de sous-mots sphériques, nous nous assurons de l'existence de flips entre facettes. Les résultats précédents nous permettent de décrire ces flips.

2.2 Configuration de racines.

Nous avons vu qu'il existe une bijection entre l'ensemble des racines $\{r(F, f) \mid f \notin F\}$ et Φ^+ . Qu'en est-il du sous-ensemble $\{r(F, f) \mid f \in F\}$ de l'ensemble des racines associées à F ?

L'étude de la notion de fonction de racines à été poursuivie dans (Pilaud et Stump, 2015a). À cette fin, ils introduisent la notion de configuration de racines que nous allons présenter dans cette section. Celle-ci s'avère être un outil important pour l'étude de la réalisation polytopale de $\text{SC}(Q)$ comme nous le verrons par la suite.

Définition 2.2.1. Soit F une facette de $\text{SC}(Q)$. La *configuration de racines* de la facette F est le multi-ensemble de toutes les racines associées aux éléments de F .

$$R(F) := \{\{r(F, f) \mid f \in F\}\}$$

Exemple 2.2.1. Reprenons notre exemple où $W = S_4$ et $Q = rstrstrsr$. Alors,

$$\begin{aligned} R(\{1, 2, 3\}) &= \{\{r(\{1, 2, 3\}, f) \mid f \in \{1, 2, 3\}\}\} \\ &= \{r(\{1, 2, 3\}, 1), r(\{1, 2, 3\}, 2), r(\{1, 2, 3\}, 3)\} \\ &= \{\alpha_r, \alpha_s, \alpha_t\}. \end{aligned}$$

La configuration de racines encode des propriétés importantes de la facette F . Dans un premier temps, nous pouvons voir que toute facette F de $\text{SC}(Q)$ peut être reconstruite à partir de la configuration de racines. En effet, nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.2.1. *Le multi-ensemble $R(F)$ caractérise F pour toute facette F de $\text{SC}(Q)$: si nous avons deux facettes F et G de $\text{SC}(Q)$ telles que $R(F) = R(G)$, alors $F = G$. En d'autres termes, R est une fonction injective.*

Démonstration. Considérons F et G deux facettes distinctes de $\text{SC}(Q)$, et f le premier élément de la différence symétrique $F\Delta G = \{F \setminus G\} \cup \{G \setminus F\}$ et supposons qu'il est dans $F \setminus G$. Posons $\alpha := r(F, f)$ et supposons que $\alpha \in \Phi^+$. Alors, $r(F, k) = r(G, k)$ pour tout $1 \leq k \leq f$. En effet, $r(F, k)$ dépend de $[k-1] \cap F$ et comme f est le premier élément de $F\Delta G$, $[k-1] \cap F = [k-1] \cap G$. En particulier, $r(F, f) = r(G, f)$. Or, si on suppose qu'il existe $g \in G$ tel que $r(G, g) = \alpha$, la Remarque 8 nous assure que g est plus petit que f . On a donc que toutes les occurrences de α dans $R(G)$ sont obtenues à partir de positions avant f . Ainsi, α apparaît au moins une fois de plus dans $R(F)$ que dans $R(G)$. Donc $R(F) \neq R(G)$. \square

Remarque 11. À partir de la discussion qui précède et un peu de travail, on peut démontrer que l'on peut reconstruire la facette F à partir de l'ensemble de racines $R(F)$. En effet, pour reconstruire F , il suffit de suivre un processus itératif en *scannant* le mot Q de la manière suivante : Soit $R(F)$ un ensemble de racine. Partons de la position 0 dans Q . Posons $F_0 = \emptyset$, la *face vide*, et $R_0 = R(F)$.

En position k , on peut déterminer la nouvelle face F_k à partir de F_{k-1} et R_k à partir de R_{k-1} comme suit :

- si $Q|_{[1, k-1] \setminus F_{k-1}}(\alpha_{q_k}) \in R_{k-1}$ alors $F_k = F_{k-1} \cup \{k\}$ et $R_k = R_{k-1} \setminus \{r(F_{k-1}, k)\}$,
- sinon $F_k = F_{k-1}$ et $R_k = R_{k-1}$.

Alors F est la facette F_m obtenu à la fin de cette procédure.

Exemple 2.2.2. Considérons $W = S_4$, $Q = rstrstrsr$ et l'ensemble $\{\alpha_r, \alpha_s + \alpha_t, -\alpha_s\} := R_0$. Déterminons la facette F de $\text{SC}(Q)$ telle que $R_0 = R(F)$. Posons $F_0 = \emptyset$.

- Comme $Q|_{\emptyset \setminus F_0}(\alpha_{q_1}) = \alpha_r$ appartient à R_0 , nous avons que $F_1 = F_0 \cup \{1\}$ et $R_1 = R_0 \setminus \{\alpha_r\} = \{\alpha_s + \alpha_t, -\alpha_s\}$.
- Comme $Q|_{[1, 2-1] \setminus F_{2-1}}(\alpha_{q_2}) = \alpha_s \notin R_1$, $F_2 = F_1$ et $R_2 = R_1$.

- Comme $Q|_{[1,3-1]\setminus F_{3-1}}(\alpha_{q_3}) = s(\alpha_t) = \alpha_s + \alpha_t$ appartient à R_2 , nous avons que $F_3 = F_2 \cup \{3\} = \{1, 3\}$ et $R_3 = R_2 \setminus \{\alpha_s + \alpha_t\} = \{-\alpha_s\}$.
- En suivant le même processus, nous obtenons que $F_4 = F_5 = F_6 = F_3$ et que $R_4 = R_5 = R_6 = R_3$.
- Comme $Q|_{[1,7-1]\setminus F_{7-1}}(\alpha_{q_7}) = -\alpha_s$ appartient à R_6 , nous avons que $F_7 = \{1, 3, 7\} = F$.

De plus, par la Proposition 2.1.4, nous savons que si $Q|_{[1,k-1]\setminus F_{k-1}}(\alpha_k) \in \Phi^-$, alors $k \in F$. Donc, ce processus nous permet de reconstruire F en ne connaissant que les racines $R(F) \cap \Phi^+$. En effet, si l'on considère R_0 égal à $R(F) \cap \Phi^+$, alors F sera obtenue en suivant un processus similaire à celui donné plus haut en considérant que $F_k = F_{k-1} \cup \{k\}$ si $Q|_{[1,k-1]\setminus F_{k-1}}(\alpha_{q_k}) \in R_{k-1}$ ou $Q|_{[1,k-1]\setminus F_{k-1}}(\alpha_{q_k}) \in \Phi^-$.

De manière similaire, *en scannant Q de droite à gauche*, nous pouvons reconstruire F en ne connaissant que les racine négatives de $R(F)$.

La configuration de racines est donc un outil très riche dans l'étude de ces complexes de sous-mots sphériques. Nous verrons dans les sections suivantes d'autres de ses propriétés importantes.

2.3 Restriction aux sous-groupes paraboliques.

Nous allons voir que la fonction racine est compatible avec la restriction aux sous-groupes paraboliques standards des complexes de sous-mots sur (W, S) .

Rappelons ici que si $I \subseteq S$, (W_I, I) est un système de Coxeter dont les racines simples sont $\Delta_I = \{\alpha_s \mid s \in I\}$, voir la Proposition 1.1.5.

Proposition 2.3.1. *Soit F une facette du complexe $SC(Q)$ et soit $I \subseteq S$. Consi-*

déterminons l'ensemble $\mathcal{F}^{F,I}$ des facettes G de $\text{SC}(Q)$ telles qu'il existe un chemin

$$F_1 = F \rightarrow F_2 \rightarrow \cdots \rightarrow F_n = G$$

dans le graphe des flips de $\text{SC}(Q)$ pour lequel les racines associées aux flips vérifient $\alpha_{F_j, F_{j+1}} \in \text{vect}(\Delta_I) \cap \Phi = \Phi_I$. Ces facettes qui définissent un complexe simplicial que nous noterons $\mathcal{C}_{F,I}(Q)$, partagent toutes un même sous-ensemble de sommets.

Démonstration. Soient F et $I \subset S$ tels que dans l'énoncé de la proposition. Soit X_F l'ensemble des positions $k \in [1, m]$ telles que $r(F, k) \in \Phi_I$. Considérons une facette $G = (F \setminus \{f\}) \cup \{g\}$ adjacente à F par un flip $F \rightarrow G$ de racine $\alpha_{(F,G)}$ appartenant à Φ_I . Intéressons nous à $\mathcal{L}_Q(G)$ la liste de racines de G . Par la Proposition 2.1.3, nous avons que $r(G, k) \in V_I$ pour toute position k de X_F . En effet, comme $f, k \in X_F$, $r(F, f)$ et $r(F, k)$ sont éléments de Φ_I . De manière complémentaire, si k n'appartient pas à X_F , $r(G, k)$ n'est pas dans Φ_I . Donc $X_G = X_F$ pour tout $G \in \mathcal{F}^{F,I}$. Alors, par définition de $\mathcal{F}^{F,I}$, nous avons que l'ensemble $F \setminus X_F$ des sommets de F dont les flips ne sont pas dans Φ_I appartient à toute facette G de $\mathcal{F}^{F,I}$ et que les autres sommets de G appartiennent à l'ensemble X_F . Ainsi, les facettes $G \in \mathcal{F}^{F,I}$ définissent bien un complexe simplicial et partagent entre elles l'ensemble de sommets $F \setminus X_F$.

□

Exemple 2.3.1. Nous considérons $W = S_4$, $\text{SC}(Q) = \text{SC}(rstrstrsr)$ et $I = \{r, s\}$. Considérons la facette $F = \{2, 4, 9\}$. En se reportant au tableau de racines de $\text{SC}(rstrstrsr)$ (voir le Tableau 3.1), nous observons que l'ensemble des positions $k \in [1, 9]$ telles que $r(\{2, 4, 9\}, k) \in \Phi_I$ est $X_F = \{1, 2, 4, 6, 8\}$. Comme nous avons que $X_F \cap F = \{2, 4\}$, alors $G = \{4, 6, 9\}$ et $H = \{1, 2, 9\}$ sont des facettes de $\mathcal{C}_F(Q)$. De plus, comme $X_G = X_H = X_F$, $X_G \cap G = \{4, 6\}$ et $X_H \cap H = \{1, 2\}$, nous avons que $\{1, 8, 9\}$ et $\{6, 8, 9\}$ sont aussi des facettes de $\mathcal{C}_{F,I}(Q)$. Comme

les facettes précédemment trouvées sont les seules facettes de $SC(Q)$ contenant $F \setminus X_F = \{9\}$, nous avons que $\mathcal{C}_{F,I}(Q) = \{F, G, H, \{1, 8, 9\}, \{6, 8, 9\}\}$, qui est un complexe simplicial dont les facettes contiennent le sommet $\{9\}$.

Soit $w_{0,I}$ le mot le plus long du sous-groupe parabolique W_I de W . Nous allons voir qu'il existe un complexe de sous-mot $SC(Q') := SC(Q', w_{0,I})$ d'un mot Q' sur l'alphabet I qui est isomorphe au complexe $\mathcal{C}_{F,I}(Q)$. En fait, nous allons construire le mot Q' à partir d'une facette F de $SC(Q)$ et de sa liste de racines comme suit :

Soit F une facette de $SC(Q)$, $\mathcal{L}_Q(F) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ la liste de racines associées à F , et $I \subseteq S$. Considérons la sous-liste $\mathcal{L}_{(Q,I)}(F) := (\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_p})$ des racines associées à F qui appartiennent à Φ_I , et F' l'ensemble des positions $j \in [1, p]$ telles que $i_j \in F$. Construisons un mot $Q' = q'_1 q'_2 \dots q'_p$ sur l'alphabet I de la manière suivante :

Notons Q'_0 le mot vide. Pour $1 \leq j \leq p$, $Q'_j = q'_1 q'_2 \dots q'_j$ où $q'_j = s_{\alpha_j}$ tel que $\alpha_j = (Q'_{j-1} |_{[1, j-1] \setminus F'})^{-1}(\beta_{i_j})$, $\beta_{i_j} \in \mathcal{L}_{(Q,I)}(F)$. Alors Q' sera le mot donné à la fin de cette procédure. C'est-à-dire $Q' = Q'_p$.

Remarque 12. Nous cherchons ici à construire Q' de telle sorte que $L_{Q'}(F')$ soit égale à $L_{(Q,I)}(F)$, c'est-à-dire que $R_{Q'}(F') = R_Q(F) \cap \Phi^I$.

Nous prouvons l'existence de ce mot par la suite mais commençons par en voir un exemple.

Exemple 2.3.2. Nous avons vu à l'Exemple 2.3.1 que pour la facette $F = \{2, 4, 9\}$ de $SC(rstrstrsr)$, nous avons pour $I = \{r, s\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Q(F) &= (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8, \beta_9) \\ &= (\alpha_r, \alpha_r + \alpha_s, \alpha_t, -\alpha_r, \alpha_r + \alpha_s + \alpha_t, \alpha_r + \alpha_s, \alpha_s + \alpha_t, \alpha_s, -\alpha_t); \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{(Q,I)}(F) = (\beta_1, \beta_2, \beta_4, \beta_6, \beta_8) = (\alpha_r, \alpha_r + \alpha_s, -\alpha_r, \alpha_r + \alpha_s, \alpha_s).$$

Comme $F \cap \{1, 2, 4, 6, 8\} = \{2, 4\}$, alors $F' = \{2, 3\}$.

Construisons le mot Q' : Soit $Q'_0 = e$. $Q'_1 = q'_1$ est tel que $q'_1 = s_{\alpha_1}$ où α_1 est la racine $\alpha_1 = (Q'_0|_{\emptyset \setminus F'})^{-1}(\beta_1) = e(\alpha_r) = \alpha_r$. Donc $Q'_1 = r$.

Ensuite, $Q'_2 = q'_1 q'_2 = r q'_2$ est tel que $q'_2 = s_{\alpha_2}$, où α_2 est la racine $\alpha_2 = (Q'_1|_{[1,2-1] \setminus F'})^{-1}(\beta_2) = r(\alpha_r + \alpha_s) = \alpha_s$. Donc $Q'_2 = rs$.

Puis, $Q'_3 = q'_1 q'_2 q'_3 = rs q'_3$ est tel que $q'_3 = s_{\alpha_3}$, où α_3 est la racine $\alpha_3 = (Q'_1|_{[1,3-1] \setminus F'})^{-1}(\beta_4) = r(-\alpha_r) = \alpha_r$. Donc $Q'_3 = rsr$.

Puis, $Q'_4 = q'_1 q'_2 q'_3 q'_4 = rsr q'_4$ est tel que $q'_4 = s_{\alpha_4}$, où α_4 est la racine $\alpha_4 = (Q'_1|_{[1,4-1] \setminus F'})^{-1}(\beta_6) = r(\alpha_r + \alpha_s) = \alpha_s$. Donc $Q'_4 = rsrs$.

Enfin, $Q' = Q'_5 = q'_1 q'_2 q'_3 q'_4 q'_5 = rsrs q'_5$ est tel que $q'_5 = s_{\alpha_5}$, où α_5 est la racine $\alpha_5 = (Q'_1|_{[1,5-1] \setminus F'})^{-1}(\beta_8) = sr(\alpha_s) = \alpha_r$. Donc $Q' = rsrsr$.

Il nous faut maintenant nous assurer de l'existence de ce mot Q' pour tout complexe de sous-mot $SC(Q)$.

Proposition 2.3.2. *Soient F une facette de $SC(Q)$ et $I \subseteq S$. Considérons F' et Q'_{j-1} tels que définit précédemment. Alors :*

- $\alpha_j = (Q'_{j-1}|_{[1,j-1] \setminus F'})^{-1}(\beta_{i_j}) \in \Delta_I$.
- $Q' = Q'_p$ est un mot sur I .

Démonstration. 1. Supposons que $\beta_{i_j} = r(F, i) = Q|_{[1,i-1] \setminus F}(\alpha_{q_i})$ est une racine positive. Posons $Q|_{[1,i-1] \setminus F} := w_i$ et $Q'_{j-1}|_{[1,j-1] \setminus F'} := w'_j$. Considérons alors $N(w_i)$ l'ensemble d'inversion de w_i . Remarquons que $N(w_i) = \{Q|_{[1,k-1]}(\alpha_{q_k}) \mid k \in [1, i-1] \setminus F\}$, c'est-à-dire que $N(w_i) = \{\beta_k \mid k \in [1, i-1] \setminus F\}$. Alors, par construction $N(w_i) \cap \Phi_I = N(w'_j)$. Remarquons que $N(w_{i+1}) = N(w_i q_i)$ si $i \notin F$ et $N(w_{i+1}) = N(w_i)$ si $i \in F$.

Or, si $i \notin F$, $N(w_i q_i) = N(w_i) \cup w_i(\alpha_{q_i}) = N(w_i) \cup \{r(F, i)\}$. Mais $r(F, i) = \beta_{i_j} \in \Phi_I$. Donc $N(w_{i+1}) \cap \Phi_I = (N(w_i) \cap \Phi_I) \cup \{r(F, i)\} = N(w'_j) \cup \{r(F, i)\}$. Il existe donc $\alpha \in \Delta_I$ tel que $\alpha = (w'_j)^{-1} \beta_{i_j}$. De plus, dans le cas où $i_j \in F$ nous avons que $j \in F'$ donc que $N(w_{i+1}) \cap \Phi_I = N(w_i) \cap \Phi_I = N(w'_j)$.

2. Supposons maintenant que β_{i_j} est une racine négative. Nous avons déjà vu que cela signifie que i appartient à F par la Proposition 2.1.4. Dans ce cas, nous considérons la facette G obtenue à partir du flip de i pour le sommet i' tel que $i' < i$. Ainsi $r(G, i') = -r(F, i) = -\beta_{i_j}$ est positive et par la Proposition 2.1.3 nous savons que $r(G, k)$ appartient à Φ_I pour toutes les positions $i \in [1, m]$ telles que $\beta_i \in \Phi_I$, et uniquement celles-la. Alors, $\alpha_j = Q'_{j-1} \mid_{[1, j-1] \setminus G'} (\gamma_{i_j})$, avec G' construit à partir de G de la même manière que F' l'est à partir de F . Ainsi en nous rapportant au cas où $\gamma_{i_j} = r(G, i) = -r(F, i)$ est positive, nous pouvons appliquer de nouveau le cas 1. qui est indépendant du cas 2. et donc α_j appartient à Δ_I .

Ainsi, nous venons de voir que pour tout $j \in [1, p]$, α_j appartient à Δ_I . Nous lui associons donc un élément de I et ainsi le mot Q' est un mot sur I . \square

Proposition 2.3.3. *Soit F une facette du complexe $SC(Q)$ et soit $I \subseteq S$. Le mot Q' sur l'alphabet I tel que nous l'avons construit précédemment définit un complexe de sous-mot $SC(Q')$ qui est isomorphe au complexe $\mathcal{C}_{F, I}(Q)$.*

Démonstration. Nous avons vu que les facettes de $\mathcal{C}_{F, I}(Q)$ sont caractérisées par l'ensemble $X_F := \{k \in [1, m] \mid r(F, k) \in \Phi_I\}$. Or, il est clair que cet ensemble est équipotent à $\mathcal{L}_{(Q, I)}(F)$. La Remarque 12 nous assure donc que cette bijection induit un isomorphisme entre $\mathcal{C}_{F, I}(Q)$ et $SC(Q')$. \square

Exemple 2.3.3. Soient $W = S_4$, $SC(Q) = SC(rstrstrsr)$, $I = \{r, s\}$ et considé-

rons la facette $F = \{2, 4, 9\}$. Nous avons vu à l'Exemple 2.3.2 que $F' = \{2, 3\}$ et $Q' = rsrsr$. Le complexe $SC(Q')$ possède 5 facettes tandis que le complexe $\mathcal{C}_{F,I}(Q)$ a pour facettes $\{2, 4, 9\}$, $\{1, 2, 9\}$, $\{1, 8, 9\}$, $\{6, 8, 9\}$ et $\{4, 6, 9\}$.

Remarque 13. Remarquons que dans l'Exemple 2.3.2, $Q' \neq Q|_I$. Il nous faut vraiment connaître les racines de F aux positions $i_j \in [1, p]$ afin de déterminer le mot Q' .

2.4 Complexe de sous-mot à configuration de racines indépendante.

Rappelons que nous cherchons à savoir dans quel cas le complexe de sous-mots a une réalisation polytopale dont le 1-squelette est isomorphe au graphe des flips de ce complexe. Pour cela, il faudrait que la configuration de racines engendre tout V . Nous voyons ici que lorsque la configuration de racine est linéairement indépendante, nous pouvons toujours nous ramener à cette situation.

Proposition 2.4.1. *Soit $SC(Q)$ un complexe de sous-mots sphérique. Alors toutes les configurations de racines sont soit simultanément des bases de l'espace vectoriel V , soit aucune ne l'est.*

Démonstration. Soit F une facette de $SC(Q)$. Supposons que la configuration de racines de F est une base de V . Par la Proposition 2.1.3, nous avons que pour une facette G adjacente à F par le flip de f pour g , $r(G, k) = r(F, k)$ ou bien $r(G, k) = s_{r(F,f)}r(F, k)$. Comme $r(F, f)$ et $r(F, k)$ sont linéairement indépendante pour toute position k de F , les racines de $R(G)$ de la forme $s_{r(F,f)}r(F, k)$ sont une combinaison linéaire de racines $r(F, k)$ et $r(F, f)$. Ainsi, elles sont linéairement indépendantes entre elles. De plus, les racines de $R(G)$ de la forme $r(G, k) = r(F, k)$ ne sont pas des combinaisons linéaires des racines $r(F, k)$ et $r(F, f)$ car

une relation de dépendance linéaire entre les racines fixées et les racines réfléchies par $s_{r(F,f)}$ entraînerait une relation de dépendance dans $R(F)$. \square

Définition 2.4.1. Soit $SC(Q)$ un complexe de sous-mots sphérique. Nous disons que $SC(Q)$ est à racines indépendantes si pour toute facette F de $SC(Q)$, $R(F)$ est linéairement indépendante. De plus, si Q est tel que $R(F)$ forme une base de V pour toute facette F de $SC(Q)$, nous dirons que Q est réalisable.

Nous verrons que cette proposition va nous permettre de décrire les faces de $SC(Q)$ par rapport à leur configuration de racines.

Nous pouvons remarquer que dans certains cas, la configuration de racine $R(F)$ est linéairement indépendante sans pour autant engendrer V . On peut cependant trouver un mot réalisable Q' tel que $SC(Q)$ soit isomorphe à $SC(Q')$.

En effet, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.4.2. Soit Q un mot tel que $R(F)$ est linéairement indépendant mais n'engendre pas V . Alors il existe un mot Q' d'un sous-groupe parabolique de W tel que $SC(Q)$ et $SC(Q')$ sont isomorphes et $R(F')$ forme une base, pour toute facette F' de $SC(Q')$.

Démonstration. Ce résultat découle de la Proposition 2.3.3. \square

Ainsi, sans perte de généralité, nous supposons que si $R(F)$ est linéairement indépendante, alors Q est réalisable. Nous voyons dans le Chapitre 3 que cette condition est primordiale dans la réalisation du polytope de briques.

Remarque 14. Observons que par l'Exemple 2.2.1 nous savons que $rstrstrsr$ est réalisable.

2.5 Forme linéaire et faces.

Nous allons maintenant étudier plus en détails le graphe des flips de $SC(Q)$ à l'aide de la notion de configuration de racines. Nous donnons alors, lorsque Q est réalisable, une caractérisation des faces de $SC(Q)$ à l'aide des racines qui lui sont associées et d'un sous-graphe connexe du graphe des flips. Cette étude est facilitée par l'introduction d'une forme linéaire auxiliaire (non triviale) $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$. Notons que le noyau d'une telle forme est un hyperplan, et sépare donc V en deux demi-espaces.

Définition 2.5.1. Soit une forme linéaire $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ et soient F et G deux facettes adjacentes de $SC(Q)$. Nous dirons que le flip de $f \in F$ pour $g \in G$ est ρ -préservé si $\rho(r(F, f)) = 0$. L'ensemble des facettes de $SC(Q)$ dont la configuration de racine est contenue dans le demi-espace clos défini par ρ est noté

$$\mathcal{F}_\rho(Q) := \{F \text{ facette de } SC(Q) \mid \forall f \in F, \rho(r(F, f)) \geq 0\}.$$

Nous allons voir que cet ensemble nous donne une caractérisation d'un sous-graphe connexe du graphe des flips de $SC(Q)$ et cela à partir de la configuration de racines d'une seule facette de $SC(Q)$ contenue dans cet ensemble.

Commençons par discuter quelques exemples.

Exemple 2.5.1. Soit $W = S_4$ et $Q = rstrstrsr$. Soit la forme linéaire $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\rho(\alpha_r) = \rho(\alpha_s) = 0$ et $\rho(\alpha_t) = 1$. Alors $\ker(\rho) = V_I$ pour $I = \{r, s\}$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\rho(Q) &= \{F \text{ facette de } SC(Q) \mid \beta \in R(F), \beta \in \Phi^+ \cup \pm\Phi_{\{\alpha_r, \alpha_s\}}\} \\ &= \{F \text{ facette de } SC(Q) \mid \beta \in R(F), \\ &\quad \beta \in \pm\{\alpha_r, \alpha_s, \alpha_r + \alpha_s\} \cup \{\alpha_t, \alpha_t + \alpha_s, \alpha_t + \alpha_s + \alpha_r\}\}.\end{aligned}$$

À partir du tableau des racines de $SC(rstrstrsr)$ (voir l'Annexe), nous pouvons alors voir que $\mathcal{F}_\rho(Q) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 7\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 5, 7\}\}$.

Remarquons que cet ensemble contient toutes les facettes de $SC(Q)$ contenant le sommet $k = 3$. C'est-à-dire que le graphe des flips ρ -préservés est un sous-graphe du graphe des flips de $SC(Q)$ qui est connexe. Il représente ici la facette du graphe des flips de $SC(Q)$ qui est duale au sommet 3 de $SC(Q)$. De plus, on observe que pour les facettes de $SC_\rho(Q)$, les racines de leurs configurations qui ne sont pas dans $V_I = \ker(\rho)$ sont dans le même demi-espace déterminé par α_t et que ces racines sont uniquement associées au sommet 3.

Exemple 2.5.2. Continuons ici avec $SC(rstrstrsr)$. Soit $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ la forme linéaire telle que $\psi(-\alpha_r) = 1$ et $\psi(\alpha_s) = \psi(\alpha_r + \alpha_s + \alpha_t) = 0$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\psi(Q) &= \{F \text{ facette de } SC(Q) \mid \beta \in R(F), \\ &\quad \beta \in \pm\{\alpha_s, \alpha_r + \alpha_s + \alpha_t\} \cup \{-\alpha_r, -\alpha_r - \alpha_s, \alpha_t, \alpha_s + \alpha_t\}\} \\ &= \{\{3, 4, 5\}, \{3, 5, 7\}, \{4, 5, 6\}, \{5, 6, 7\}\}.\end{aligned}$$

Une fois encore, nous constatons que le graphe des flips ψ -préservé est connexe et qu'il représente la facette du graphe des flips de $SC(Q)$ qui est duale au sommet 5 de $SC(Q)$. De plus, les racines des facettes de $\mathcal{F}_\psi(Q)$ associées à ce sommet appartiennent au même demi-espace.

Théorème 2.5.1. *Si $SC(Q)$ est à racines indépendantes et $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ est une*

forme linéaire alors :

1. $\bigcap_{F \in \mathcal{F}_\rho(Q)} F$ est une face de $\text{SC}(Q)$.
2. Si G est une facette de $\text{SC}(Q)$ telle que $\bigcap_{F \in \mathcal{F}_\rho(Q)} F \subseteq G$, alors $G \in \mathcal{F}_\rho(Q)$.

Afin de démontrer ce théorème, nous avons besoin de présenter quelques résultats sur l'ensemble $\mathcal{F}_\rho(Q)$. Pour cela, il nous faut d'abord introduire la définition suivante :

Définition 2.5.2. Soit $F \in \mathcal{F}_\rho(Q)$. On notera l'ensemble des sommets de F dont le flip est ρ -préservé par : $P_\rho^0 := \{k \in F \mid \rho(r(F, k)) = 0\}$. L'ensemble $F \setminus P_\rho^0$ sera lui noté P_ρ^+ , c'est-à-dire $P_\rho^+ := \{k \in F \mid \rho(r(F, k)) > 0\}$.

Proposition 2.5.2. Soit $F \in \mathcal{F}_\rho(Q)$ et $f \in P_\rho^0(F)$. Soit $G = F \setminus \{f\} \cup \{g\}$, $g \in [1, m]$ la facette adjacente à F par le flip de f pour g . Alors :

1. $P_\rho^+(F) = P_\rho^+(G)$,
2. $G \in \mathcal{F}_\rho(Q)$.

En d'autres termes, $\mathcal{F}_\rho(Q)$ est préservé par flips ρ -préservés.

Démonstration. Soient F et G de $\text{SC}(Q)$ deux facettes adjacentes telles que $F \setminus \{f\} = G \setminus \{g\}$. Supposons qu'elles sont reliées par un flip préservé par ρ : $\rho(r(F, f)) = 0$. Nous avons vu à la Proposition 2.1.3 que $r(G, k) = r(F, k)$ ou $r(G, k) = s_{r(F, f)} r(F, k)$ pour tout $k \in [1, m]$ donc $r(G, k) - r(F, k) \in \mathbb{R} \cdot r(F, f)$.

Comme $\rho(r(F, f)) = 0$, nous avons que $\rho(r(G, k) - r(F, k)) = 0$ pour tout $k \in [1, m]$. Donc $\rho(r(G, k)) = \rho(r(F, k))$ pour tout $k \in [1, m]$. C'est le cas en particulier pour $k \in P_\rho^+(F)$.

On en conclut que $P_\rho^+(F) \subseteq P_\rho^+(G)$. Comme $G = (F \setminus \{f\}) \cup \{g\}$, il nous reste à voir que $g \notin P_\rho^+(G)$. Par le Corollaire 2.1.1 nous savons que $r(F, f) = \pm r(F, g)$. Donc $\rho(r(F, f)) = \rho(r(G, g)) = 0$. Alors $g \notin P_\rho^+(G)$ et donc $P_\rho^+(F) = P_\rho^+(G)$.

De plus, nous pouvons conclure par ce que nous venons de voir que $G \in \mathcal{F}_\rho(Q)$. \square

Remarque 15. Soit F une facette de $\text{SC}(Q)$ et ρ telle que F appartient à $\mathcal{F}_\rho(Q)$. Alors, $F \setminus P_\rho^+(F)$ est une facette de $\text{SC}(Q_{[1,m] \setminus P_\rho^+(F)})$. En effet, par définition, $Q|_{[1,m] \setminus F} = w_0$ et si on considère $P \subseteq F$ tel que $|P| = n$ et $Q' := Q|_{[1,m] \setminus P}$, alors $Q'|_{[1,m-n] \setminus (F \setminus P)} = w_0$.

Proposition 2.5.3. *Soit Q un mot à racines indépendantes et F une facette de $\text{SC}(Q)$ telle que $F \in \mathcal{F}_\rho(Q)$. Alors $P_\rho^+(F) = P_\rho^+(G)$ pour toute facette $G \in \mathcal{F}_\rho(Q)$.*

Démonstration. Pour cela, nous allons faire une récurrence sur la cardinalité de $P_\rho^+(F)$. Soit $F \in \mathcal{F}_\rho(Q)$.

Si $P_\rho^+(F) = \emptyset$, alors pour tout sommet k de F , $\rho(r(F, k)) = 0$. Or nous avons vu que si G est une facette de $\text{SC}(Q)$ adjacente à F , $\rho(r(G, k)) = \rho(r(F, k)) \forall k \in [1, m]$. Il est alors clair que $\mathcal{F}_\rho(Q) = \text{SC}(Q)$ qui est connexe. Donc pour toute facette F' de $\text{SC}(Q)$, $P_\rho^+(F) = P_\rho^+(F') = \emptyset$.

Supposons maintenant que $P_\rho^+(F) = \{p\}$. Supposons de plus que $r(F, p) \in \Phi^-$. Nous pouvons trouver une facette H de $\text{SC}(Q)$ telle que $P_\rho^+(F) = P_\rho^+(H) = \{p\}$ et $\rho(r(H, h)) \in \Phi^-$ pour tout $h \in P_\rho^0(H)$.

En effet, considérons la première position f dans F , $f \neq p$, telle que $r(F, f) \in \Phi^+$. Alors, par la proposition précédente, nous savons que $G = F \setminus \{f\} \cup \{g\} \in \mathcal{F}_\rho(Q)$ et $P_\rho^0(G) = P_\rho^0(F)$. De plus, nous avons que $r(G, g) = -r(F, f)$ et que pour toutes positions $k \in F \cap G$, $r(G, k) = r(F, k)$ ou $r(G, k) = s_{r(F, f)}r(F, k)$. En particulier $r(G, p)$ est dans Φ^- . Si G est différente de H , c'est-à-dire qu'il existe $g' \in G$ telle que $r(G, g') \in \Phi^+$, on considère la facette J adjacente à G par le flip $g' - j$. Il n'est pas trop difficile de déduire que nous pouvons trouver H en réitérant ce processus un nombre de fois suffisant.

Nous pouvons ainsi trouver une facette H telle que pour tout $h \in P_\rho^0(H)$, $r(H, h) \in \Phi^-$ et $r(H, p) \in \Phi^-$.

On remarque alors que : $k \in H \iff Q|_{[1, k-1] \setminus H}(\alpha_{q_k}) \in \rho^{-1}(\mathbb{R}^+) \cap \Phi^-$.

C'est-à-dire que nous pouvons reconstruire H en *scannant* Q de gauche à droite et ainsi reconstruire $P_\rho^+(H) = P_\rho^+(F)$. De manière similaire, si $r(F, p) \in \Phi^+$, nous pouvons reconstruire ces deux ensembles en *scannant* Q de droite à gauche.

Supposons maintenant que $P_\rho^+(F) = P' \cup \{p\}$, où $P' \neq \emptyset$. Rappelons que Q est à racines indépendantes, c'est à dire que $R(F)$ est linéairement indépendante. Nous considérons alors une forme linéaire auxiliaire ρ' qui s'annule pour $R(F) \cap \rho^{-1}(0)$ et $r(F, p)$, mais qui est positive sur les autres racines de $P_\rho^+(F)$.

La facette F appartient à $\mathcal{F}_{\rho'}(Q)$, alors nous obtenons l'ensemble des positions $P' = P_{\rho'}^+(F)$ par hypothèse de récurrence.

Finalement, comme $F \setminus P'$ est aussi une facette de $\text{SC}(Q|_{[1, m] \setminus P'})$, nous retrouvons la dernière position p de $P_\rho^+(F)$ avec un argument similaire à celui déjà vu précédemment.

Le graphe des flips ρ -préservés associé à $\mathcal{F}_\rho(Q)$ peut alors être vu comme le graphe des flips sur le complexe de sous-mot $\text{SC}(Q|_{[1, m] \setminus P_\rho^+(F)})$ du mot obtenu de Q en effaçant les lettres aux positions données par $P_\rho^+(F)$. Ce dernier est connexe car $\text{SC}(Q|_{[m] \setminus P_\rho^+(F)})$ est homéomorphe soit à une boule soit à une sphère. \square

Démonstration du Théorème 2.5.1. Soit $\text{SC}(Q)$ un complexe à racines indépendantes et ρ une forme linéaire.

1. Par la Proposition 2.5.3, nous savons que $P_\rho^+(G) \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}_\rho(Q)} F$, quelque soit

$G \in \mathcal{F}_\rho(Q)$. Or, comme toute position $g \in G \setminus P_\rho^+(G)$ est un flip ρ -préservé,

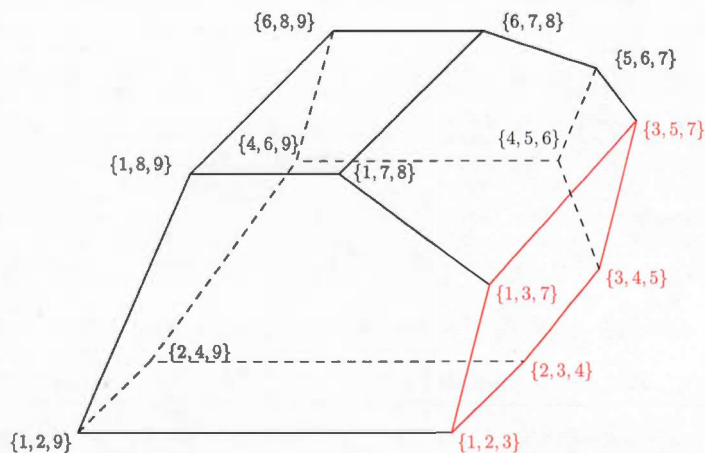
$$P_\rho^+(G) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_\rho(Q)} F.$$

2. Soit F une facette de $\text{SC}(Q)$ telle que $P_\rho^+(G) \subseteq F$. Alors F est une facette de $\text{SC}(Q|_{[1,m] \setminus P_\rho^+(G)})$ et donc $F \in \mathcal{F}_\rho(Q)$.

Donc $\mathcal{F}_\rho(Q)$ est précisément l'ensemble des facettes de $\text{SC}(Q)$ contenant P_ρ^+ . \square

Nous venons de voir que $\mathcal{F}_\rho(Q)$ définit une face de $\text{SC}(Q)$ si $\text{SC}(Q)$ est à racines indépendantes. Nous utilisons cette caractérisation des faces de $\text{SC}(Q)$ dans le chapitre suivant afin de donner une description de la réalisation du *polytope de briques*.

Figure 2.1 Graphe des flips de $\text{SC}(rstrstrsr)$ pour $W = S_4$ et ρ -flips



Exemple 2.5.3. Dans la Figure 2.1 nous notons en rouge les facettes de $\text{SC}(Q)$ appartenant à $\mathcal{F}_\rho(Q)$ et leurs ρ -flips pour la forme linéaire ρ de l'Exemple 2.5.1.

CHAPITRE III

POLYTOPE DE BRIQUES ET ASSOCIAÈDRE.

3.1 Polytope de briques.

Nous allons nous intéresser ici à la réalisation polytopale de certains complexes de sous-mots sphériques : *le polytope de briques*. Nous regardons maintenant uniquement les complexes de sous-mots $\text{SC}(Q)$ tels que $Q = q_1 \dots q_m$ contient une expression réduite de w_0 et que $\text{SC}(Q)$ est à racines indépendantes (voir la Définition 2.4.1 pour un rappel de ces notions) et étudions leurs propriétés géométriques et combinatoires.

3.1.1 Polytopes de briques généralisés.

Nous avons précédemment associé à notre complexe de sous-mots des racines en lien avec les racines du groupe de Coxeter. Nous définissons maintenant pour ce complexe une notion de poids en lien avec les poids fondamentaux des systèmes de Coxeter.

Rappelons que nous avons $Q = q_1 q_2 \dots q_m \in S^*$ et $\text{SC}(Q)$ un complexe de sous-mots sphérique. Rappelons aussi que $\nabla := \{\omega_s \mid s \in S\}$ est l'ensemble des poids fondamentaux de (W, S) . (Voir la Définition 1.1.6.)

Définition 3.1.1. Soit F une facette de $\text{SC}(Q)$ et $k \in [m]$. On définit un poids

pour la facette F et la position k par :

$$w_Q(F, k) := Q|_{[1, k-1] \setminus F}(\omega_{q_k})$$

Nous noterons $w(F, k)$ au lieu de $w_Q(F, k)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur Q .

La fonction $w : k \mapsto w(F, k)$, appelée fonction poids a les propriétés suivantes :

Proposition 3.1.1. *Soit F et G deux facettes adjacentes de $SC(Q)$ telles que $F \setminus \{f\} = G \setminus \{g\}$. Alors :*

$$w_Q(G, k) = \begin{cases} s_{r(F, f)}(w_Q(F, k)) & \text{si } \min(f, g) < k \leq \max(f, g), \\ w_Q(F, k) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette proposition se prouve avec le même raisonnement que celui utilisé pour prouver la Proposition 2.1.3 en remplaçant r_Q par w_Q , aussi nous ne la présentons pas.

Lemme 3.1.2. *Soit F une facette de $SC(Q)$. Pour $g \notin F$, nous avons $\langle r(F, g), w_Q(F, k) \rangle$ est positif ou nul si $g \geq k$, et négatif ou nul si $g < k$.*

Démonstration. Comme $g \notin F$, nous avons que $r(F, g) \in \Phi^+$. De plus, si $g \geq k$, alors $Q|_{[k, g-1] \setminus F}(\alpha_{q_g}) \in \Phi^+$. Donc, $\langle r(F, g), w(F, k) \rangle = \langle Q|_{[k, g-1] \setminus F}(\alpha_{q_g}), \omega_{q_k} \rangle \geq 0$. Similairement, si $g < k$, alors $(Q|_{[g-1, k] \setminus F})^{-1}(\alpha_{q_g}) \in \Phi^-$ comme $g \notin F$. Donc, $\langle r(F, g), w(F, k) \rangle = \langle (Q|_{[g-1, k] \setminus F})^{-1}(\alpha_{q_g}), \omega_{q_k} \rangle \leq 0$. \square

Cette fonction poids nous permet de définir les vecteurs suivants :

Définition 3.1.2. Soient $SC(Q)$ un complexe de sous-mots sphérique et F une

facette de $SC(Q)$. Le vecteur de briques de F est la donnée suivante :

$$B_Q(F) := \sum_{k \in [1, m]} w_Q(F, k).$$

Notons que s'il n'y a pas d'ambiguïté pour le mot Q , nous noterons $B(F)$ au lieu de $B_Q(F)$.

Exemple 3.1.1. Reprenons l'exemple où $W = S_4$ et $Q = rstrstrsr$. La liste des poids de la facette $\{1, 2, 3\}$ est $[\omega_r, \omega_s, \omega_t, \omega_r, \omega_s, \omega_t, \omega_r - \alpha_r, \omega_s - \alpha_r - \alpha_s, \omega_r - \alpha_r - \alpha_s]$. Le vecteur de briques associé à la facette $\{1, 2, 3\}$ est alors :

$$\begin{aligned} B(\{1, 2, 3\}) &= \sum_{k \in [1, 9]} w_Q(\{1, 2, 3\}, k) \\ &= 4\omega_r + 3\omega_s + 2\omega_t - 3\alpha_r - 2\alpha_s \\ &= 4(e_4 + e_3 + e_2) + 3(e_4 + e_3) + 2e_4 - 3(e_2 - e_1) - 2(e_3 - e_2) \\ &= 3e_1 + 3e_2 + 5e_3 + 9e_4 = (3, 3, 5, 9). \end{aligned}$$

Le vecteur de briques de $\{1, 2, 9\}$ est $B(\{1, 2, 9\}) = \sum_{k \in [9]} w_Q(\{1, 2, 9\}, k) = 4\omega_r + 3\omega_s + 2\omega_t - 3\alpha_r - 2\alpha_s - 3\alpha_t = (3, 3, 8, 6)$.

Les vecteurs de briques vont nous permettre de construire le *polytope de briques*. Mais avant d'en voir sa construction, étudions une propriété de ces vecteurs.

Proposition 3.1.3. Soient F et G deux facettes adjacentes de $SC(Q)$ telles que $F \setminus \{f\} = G \setminus \{g\}$. Alors, la différence de leurs vecteurs de briques $B(F) - B(G)$ est un multiple positif de $r(F, f)$.

Démonstration. Supposons sans perte de généralité que $f < g$. Alors, par la pro-

position précédente et à l'aide de la Proposition 3.1.1, nous avons que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(F) - \mathbf{B}(G) &= \sum_{k \in [m]} \mathbf{w}(F, k) - \mathbf{w}(G, k) \\
&= \sum_{f < k \leq g} \mathbf{w}(F, k) - \mathbf{w}(G, k) \\
&= \sum_{f < k \leq g} \mathbf{w}(F, k) - s_{r(F, f)} \mathbf{w}(F, k) \\
&= \sum_{f < k \leq g} 2 \frac{\langle r(F, g), \mathbf{w}(F, k) \rangle}{\langle r(F, g), r(F, g) \rangle} \cdot r(F, f).
\end{aligned}$$

Donc, par le Lemme 3.1.2, nous avons le résultat voulu. \square

Nous définissons alors le polytope de briques associé à $\text{SC}(Q)$ à partir des vecteurs de briques associés aux facettes de $\text{SC}(Q)$.

Définition 3.1.3. Soit $\text{SC}(Q)$ le complexe de sous-mots associé au mot Q . On appelle le *polytope de briques*, noté $\mathcal{P}(Q)$, l'enveloppe convexe de tous les vecteurs de briques. C'est-à-dire :

$$\mathcal{P}(Q) := \text{conv}\{\mathbf{B}_Q(F) \mid F \text{ facette de } \text{SC}(Q)\}.$$

Nous pouvons définir les vecteurs de briques et le polytope de briques pour tout mot Q ; cependant, dans ce mémoire, nous nous intéressons seulement aux cas où le mot Q est réalisable (voir la Définition 2.4.1).

3.1.2 Polytope de briques d'un complexe de sous-mots à racines indépendantes.

Dans cette sous-section, nous montrons le théorème suivant :

Théorème 3.1.4. *Si $SC(Q)$ est à racines indépendantes, il est réalisé par le polaire du polytope de briques $\mathcal{P}(Q)$.*

(Pour un rappel de la notion de polaire d'un polytope, voir la définition 1.2.2.) Afin de démontrer ce théorème, nous étudions le lien entre les faces de $SC(Q)$ et les faces du polytope de briques $\mathcal{P}(Q)$. Nous verrons que ces deux ensembles de faces sont en bijection et que les sommets de l'un correspondent aux facettes de l'autre.

Soit $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. Notons alors par $\mathcal{P}_\rho(Q)$ la face de $\mathcal{P}(Q)$ qui maximise ρ , c'est-à-dire que pour tous $x \in \mathcal{P}_\rho(Q)$ et $y \in \mathcal{P}(Q)$ nous avons $\rho(x) \geq \rho(y)$. Rappelons-nous que $\mathcal{F}_\rho(Q)$ dénote l'ensemble des facettes de $SC(Q)$ dont la configuration de racines est incluse dans l'adhérence positive du demi-espace défini par ρ .

Nous avons les propositions suivantes :

Proposition 3.1.5. *Soit F une facette de $SC(Q)$, et ρ une forme linéaire. Alors $B(F) \in \mathcal{P}_\rho(Q)$ si et seulement si $F \in \mathcal{F}_\rho(Q)$.*

Démonstration. Soit F une facette de $SC(Q)$ telle que $B(F) \in \mathcal{P}_\rho(Q)$. Soit $f \in F$ et $G = (F \setminus \{f\}) \cup \{g\}$ une facette adjacente à F . Par la Proposition 3.1.3, nous avons que $B(F) - B(G) = \lambda r(F, f)$ avec $\lambda > 0$. Alors nous avons que $\rho(r(F, f)) = \frac{1}{\lambda}(\rho(B(F)) - \rho(B(G)))$ est positif ou nul car $B(F)$ maximise ρ . Donc $F \in \mathcal{F}_\rho(Q)$. On en conclut que l'ensemble des facettes F de $SC(Q)$ telles que $B(F) \in \mathcal{P}_\rho(Q)$ sont contenues dans $\mathcal{F}_\rho(Q)$. Or, $\mathcal{F}_\rho(Q)$ est connexe par flips ρ -préservés par la Proposition 2.5.2. Donc si l'on considère F telle que $B(F) \in \mathcal{P}_\rho(Q)$, c'est-à-dire que $F \in \mathcal{F}_\rho(Q)$, alors $B(G) \in \mathcal{P}_\rho(Q)$, pour $G = F \setminus \{f\} \cup \{g\}$ telle que $\rho(r(F, f)) = 0$ car $\rho(B(F)) = \rho(B(G))$. Ainsi, pour toute facette $H \in \mathcal{F}_\rho(Q)$, $B(H) \in \mathcal{P}_\rho(Q)$. $\mathcal{P}_\rho(Q)$ est donc clos. Donc $B(F) \in \mathcal{P}_\rho(Q)$ si et seulement si $F \in \mathcal{F}_\rho(Q)$. \square

Corollaire 3.1.6. *Les faces de $\mathcal{P}(Q)$ sont en bijection avec les faces du complexe de sous-mot $SC(Q)$.*

Afin de démontrer ce corollaire, nous avons besoin de revoir un résultat d'algèbre linéaire :

Lemme 3.1.7. *Soit $k \in [1, n]$, avec n la dimension de l'espace vectoriel V . Soit $(u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ une base de V . Soit $H \subset V$ un hyperplan contenant tous les v_i , et soit h un vecteur non nul normal de H . Finalement, supposons que $\langle u_i, h \rangle > 0$ pour tous les i , c'est-à-dire que tous les u_i sont dans le même demi-espace déterminé par H que h . Alors pour toute réflexion s_{v_i} , $\langle s_{v_i}(u_j), h \rangle > 0$.*

Démonstration. C'est un calcul direct :

$$\begin{aligned} \langle s_{v_i}(u_j), h \rangle &= \left\langle u_j - 2 \frac{\langle u_j, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i, h \right\rangle \\ &= \langle u_j, h \rangle - 2 \frac{\langle u_j, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} \langle v_i, h \rangle \\ &= \langle u_j, h \rangle > 0 \end{aligned}$$

puisque h est orthogonal à chaque v_i . □

Démonstration du Corollaire 3.1.6. Étant donné une face B de $\mathcal{P}(Q)$, nous considérons une forme linéaire $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ de sorte que ρ atteigne son maximum pour tous les éléments de B , c'est-à-dire que $B = \mathcal{P}_\rho(Q)$. Alors $\bigcap \mathcal{F}_\rho(Q)$ est la face de $SC(Q)$ que nous associons à B .

Réciproquement, considérons une face F de $SC(Q)$ et l'ensemble des facettes \mathfrak{F} de $SC(Q)$ qui la contiennent. Soit ρ une forme linéaire qui s'annule sur les racines associées aux flips entre chaque paire de facettes adjacentes de \mathfrak{F} et qui est positive sur les racines aux positions dans F . Une telle forme linéaire est déterminée par

le choix d'une facette de \mathfrak{F} ainsi que d'un hyperplan qui s'annule sur les racines associées aux positions qui n'appartiennent pas à F et tel que toutes les autres racines sont dans un même demi-espace déterminé par l'hyperplan ; un tel hyperplan existe puisque la configuration de racines en chaque facette forme une base. De plus, par le Lemme 3.1.7, le choix d'une facette particulière pour construire l'hyperplan est inconséquent. Pour ce ρ , nous avons donc $\mathfrak{F} = \mathcal{F}_\rho(Q)$. Par la proposition précédente, nous associons à chaque facette $G \in \mathfrak{F}$ le vecteur de briques $B(G) \in \mathcal{P}(Q)$. Comme une face de $\mathcal{P}(Q)$ est l'enveloppe convexe de tous les vecteurs de briques qu'elle contient, nous avons que $\text{conv}\{B(G) \mid G \in \mathfrak{F}\} = \mathcal{P}_\rho(Q)$.

□

Nous allons maintenant voir que les sommets du polytope de briques $\mathcal{P}(Q)$ sont exactement les vecteurs de briques $B(F)$ pour toutes les facettes $F \in \mathcal{F}(Q)$.

Définition 3.1.4. Soit F une facette de $\text{SC}(Q)$. Nous appelons *le cône de $\mathcal{P}(Q)$ associé au vecteur de briques $B(F)$* le cône suivant :

$$C(F) := \text{cone}\{B(G) - B(F) \mid G \text{ facette de } \text{SC}(Q)\}.$$

Proposition 3.1.8. *Soit une facette F de $\text{SC}(Q)$. Le cône $C(F)$ coïncide avec le cône engendré par $-R(F)$. C'est-à-dire :*

$$C(F) := \text{cone}\{B(G) - B(F) \mid G \text{ facette de } \text{SC}(Q)\} = \text{cone}\{-r(F, f) \mid f \in F\}.$$

Démonstration. Soit $C(F)$ le cône de $\mathcal{P}(Q)$ au vecteur $B(F)$ et soit $C_R(F)$ le cône engendré par $-R(F)$. Par la Proposition 3.1.3, nous savons que le cône $\text{cone}\{B(G) - B(F) \mid G \text{ facette adjacente à } F\}$ coïncide avec le cône $C_R(F)$. Donc $C_R(F) \subseteq C(F)$.

Il nous reste à montrer que toute face de $C_R(F)$ est une face de $C(F)$. La Proposition 3.1.5 montre que $B(F)$ maximise toute fonction linéaire ρ sur le vecteur de brique de toute facette de $SC(Q)$ du moment que $B(F)$ maximise ρ sur tous les vecteurs de brique des facettes adjacentes à F . Alors, toute face de $C_R(F)$ est une face de $C(F)$. Donc $C(F) \subseteq C_R(F)$. \square

Remarque 16. Cette proposition montre qu'un vecteur de briques $B(F)$ est forcément un sommet de $\mathcal{P}(Q)$: si ce n'était pas le cas, le cône $C(F)$ contiendrait v et $-v$ pour un vecteur v non nul quelconque de V , ce qui contredirait l'hypothèse d'indépendance linéaire de la configuration de racines $R(F)$. Nous pouvons alors démontrer le Théorème 3.1.4.

Démonstration du Théorème 3.1.4. La proposition précédente nous assure non seulement que le vecteur de briques de chaque facette de $SC(Q)$ est un sommet de $\mathcal{P}(Q)$ mais aussi que ce dernier est un polytope simple de dimension maximale par indépendance linéaire de toute configuration de racine. De plus, par la Proposition 3.1.5 et son corollaire, chaque face de $\mathcal{P}(Q)$ correspond à une face de $SC(Q)$ de dimension complémentaire. Ainsi, le polaire de $\mathcal{P}(Q)$ est combinatoirement équivalent à $SC(Q)$. Sous cette correspondance, l'intérieur de $\mathcal{P}(Q)$ correspond à la face vide du complexe $SC(Q)$. \square

3.2 Associaèdres généralisés et polytope de briques.

Pour la suite de ce mémoire, nous nous intéressons à un cas particulier de complexes de sous-mots dont la configuration de racines forme une base : les complexes de sous-mots tels que $Q = cw_0(c)$, pour c un élément de Coxeter de W . Nous montrons que dans ce cas le polytope de briques est un translaté de l'associaèdre généralisé $\text{Asso}_c(W)$ défini dans (Hohlweg *et al.*, 2011).

Soit c une expression réduite d'un élément de Coxeter c de longueur n et soit $w_0(c)$ le c -mot de w_0 . Soit aussi $N = \ell(w_0) = |\Phi^+|$ et $m = n + N = \ell(cw_0(c))$.

Théorème 3.2.1. *Le polaire du polytope de briques $\mathcal{P}_c := \mathcal{P}(cw_0(c))$ réalise le complexe de sous-mots $SC_c := SC(cw_0)$.*

Démonstration. Comme $w_0(c)$ est une expression réduite de w_0 , nous avons que le sous-ensemble $[1, n]$ des positions de $\{1, \dots, m\}$ forme une facette de SC_c car $cw_0(c)|_{[1, m] \setminus [1, n]} = w_0(c)$. Nous appelons par la suite la facette $[1, n]$ *facette initiale*. Sa configuration de racines $R([1, n])$ coïncide avec Δ car c est un élément de Coxeter. Alors le mot $cw_0(c)$ est réalisable et le complexe de sous-mots SC_c est réalisé par le polaire du polytope de briques \mathcal{P}_c par le Théorème 3.1.4. \square

3.2.1 Cône normal associé au vecteur de briques.

Afin de montrer que \mathcal{P}_c est, à translation près, l'associaèdre $\text{Asso}_c(W)$, il nous faut décrire les propriétés combinatoires et géométriques de \mathcal{P}_c , notamment, décrire son éventail normal. Dans ce qui suit, nous exposons des résultats qui sont vrais pour tout Q réalisable et qui vont dans ce sens.

Soit Q un mot sur l'alphabet S qui est réalisable. Nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.2.2. *L'éventail de Coxeter \mathcal{E} (tel qu'introduit dans la Définition 1.1.4) raffine l'éventail normal du polytope de briques $\mathcal{P}(Q)$.*

Afin de montrer cette proposition, nous introduisons une application surjective entre les éléments de W et les facettes de $SC(Q)$.

Sachant qu'un ensemble $U \subseteq \Phi$ est dit *séparable* s'il existe un hyperplan qui sépare U de son complément $\Phi \setminus U$, il est clair que dans le cas des systèmes de Coxeter

finis, les ensembles séparables sont précisément les $w(\Phi^+)$ pour tout $w \in W$. En prenant une forme linéaire ρ correspondant au produit vectoriel avec n'importe quel vecteur dans la chambre $w(C)$, $w \in W$, nous pouvons voir qu'il existe, pour tout ensemble séparable donné, une facette F dont la configuration de racine est contenue dans cet ensemble séparable et telle que $\rho(r(F, f)) > 0$ pour tout sommet $f \in F$. De plus, comme $P_\rho^+(F) = \bigcap_{G \in \mathcal{F}_\rho(Q)} F = F$, nous savons par la Proposition 2.5.3 que cette facette est unique. Ceci permet de définir une application κ de W dans l'ensemble des facettes $\mathcal{F}(Q)$ de $\text{SC}(Q)$ comme suit :

Définition 3.2.1. Soit κ l'application surjective $\kappa : W \rightarrow \mathcal{F}(Q)$ qui associe à un élément w de W l'unique facette $\kappa(w)$ de $\text{SC}(Q)$ telle que $R(\kappa(w)) \subseteq w(\Phi^+)$.

Nous montrons que cette application satisfait les propriétés qui vont suivre.

Proposition 3.2.3. Soit $w \in W$ et $\alpha \in \Delta$. On a que $\kappa(ws_\alpha)$ est obtenu de $\kappa(w)$ de la manière suivante :

1. Si $w(\alpha) \notin R(\kappa(w))$, alors $\kappa(ws_\alpha) = \kappa(w)$.
2. Sinon $\kappa(ws_\alpha)$ est obtenue de $\kappa(w)$ par le flip de l'unique $i \in \kappa(w)$ tel que $w(\alpha) = r(\kappa(w), i)$.

Démonstration. Si $w(\alpha_s) \notin R(\kappa(w))$, alors

$$R(\kappa(w)) \subseteq w(\Phi^+) \Delta \{\pm w(\alpha_s)\} = ws(\Phi^+)$$

par le Corollaire 1.1.2. Donc, par unicité dans la définition de κ , $\kappa(ws) = \kappa(w)$.

Pour la suite, à des fins de clarté nous notons F pour $\kappa(w)$. Supposons que $w(\alpha_s) \in R(F)$. Alors il existe $f \in F$ tel que $w(\alpha_s) = r(F, f)$. Nous montrons alors que $\kappa(ws_\alpha)$ est la facette $G := (F \setminus \{f\}) \cup \{g\}$. Considérons les positions $k \in F$ telles que $k \neq f$. Par la Proposition 2.1.3, si $\min(f, g) < k \leq \max(f, g)$, nous avons que

$r(G, k) = s_{w(\alpha)}(r(F, k)) = ws_\alpha w^{-1}(r(F, k))$. Or, pour tout $k \neq f$ appartenant à F , $w^{-1}(r(F, k)) \in \Phi^+$ car $R(F) \subseteq w(\Phi^+)$. Donc $r(G, k) \in ws_\alpha(\Phi^+)$ pour $k \in F$, $k \neq f$. Remarquons aussi que si g est plus grand que f , $r(G, g)$ appartient à $ws_\alpha(\Phi^+)$.

En revanche, si $k \leq \min(f, g)$ ou bien $k > \max(f, g)$, nous avons que $r(G, k) = r(F, k)$. Or, $w^{-1}(r(F, k)) \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$. Donc $s_\alpha w^{-1}(r(F, k)) \in \Phi^+$. Ainsi $r(G, k) = r(F, k) = ws_\alpha(s_\alpha w^{-1}(r(F, k)))$ appartient à $ws_\alpha(\Phi^+)$. Remarquons que si g est plus petit que f nous avons bien que $r(G, g)$ appartient à $ws_\alpha(\Phi^+)$.

Ainsi nous concluons que $R(G) \subseteq ws_\alpha(\Phi^+)$, et conséquemment que $G = \kappa(ws_\alpha)$ par unicité dans la définition de κ . \square

Cette application κ nous permet d'étudier l'éventail normal du polytope de briques \mathcal{P}_c . En effet, rappelons-nous que le cône $C(F)$ associé à chaque sommet $\mathbf{B}(F)$ du polytope de briques est en lien très étroit avec la configuration de racines $R(F)$ (voir la Proposition 3.1.8 et la Remarque 16). Ainsi, l'application κ , qui établit un lien entre les éléments de W et les configurations de racines, nous donne a fortiori un lien entre W et les cônes $C(F)$. Nous étudions maintenant le lien entre $C(F)$ et le cône normal au vecteur de briques $\mathbf{B}(F)$.

Rappelons en premier temps que le *cône polaire* d'un cône $X \subseteq V$ est donné par $X^\circ := \{v \in V \mid \forall x \in X, \langle x, v \rangle \geq 0\}$. De plus, le cône normal d'une face d'un polytope est le cône de tous les vecteurs $v \in V$ tels que la forme linéaire $x \mapsto \langle x, v \rangle$ est maximisée par tous les points de cette face (voir la Définition 1.2.1). La prochaine proposition fait le lien entre un cône normal associé à un vecteur des briques et l'éventail de Coxeter \mathcal{E} .

Proposition 3.2.4. *Soit F une facette de $\text{SC}(Q)$. Le cône normal $C^\circ(F)$ associé au vecteur de briques $\mathbf{B}(F)$ dans le polytope de briques $\mathcal{P}(Q)$ est l'union des*

chambres $w(C)$ de l'éventail de Coxeter \mathcal{E} de W donné par les éléments $w \in W$ avec $\kappa(w) = F$.

Démonstration. Nous montrons que

$$C^\circ(F) = -C(F)^\circ = \text{cone}(R(F))^\circ = \bigcup_{w \in \kappa^{-1}(F)} w(C).$$

Il est bien connu que l'opposé du polaire du cône normal à un sommet d'un polytope est précisément le cône délimité par les arêtes adjacentes à ce sommet. Ceci entraîne que $C(F)^\circ = -C^\circ(F)$.

Montrons de plus que $\text{cone}(R(F)) = \bigcap_{w \in \kappa^{-1}(F)} w(C^\circ)$. Notons que C° n'est autre que le cône engendré par Δ , et que la condition $w \in \kappa^{-1}(F)$ équivaut à dire que $R(F) \subseteq w(\Phi^+)$.

- l'inclusion \subseteq : Comme tout $r \in \text{cone}(R(F))$ est une combinaison linéaire positive des éléments de $R(F)$ et que chaque réflexion est linéaire, il suffit sans perte de généralité de considérer seulement les $r \in R(F)$. Il faut montrer que pour tout w tel que $R(F) \subseteq w(\Phi^+)$, on a $r \in w(\text{cone}(\Delta))$. Mais $w^{-1}r \in \Phi^+ \subseteq \text{cone}(\Delta)$ tel que voulu.
- L'inclusion \supseteq : Remarquons tout d'abord que

$$\bigcap_{w \in \kappa^{-1}(F)} w(C^\circ) = \bigcap_{w \in \kappa^{-1}(F)} \text{cone}(w(\Phi^+)).$$

De plus, il n'est pas trop difficile de voir que

$$\bigcap_{w \in \kappa^{-1}(F)} \text{cone}(w(\Phi^+)) = \text{cone}\left(\bigcap_{w \in \kappa^{-1}(F)} (w(\Phi^+))\right).$$

Nous montrons donc que $\bigcap_{w \in \kappa^{-1}(F)} w(\Phi^+) \subseteq R(F)$.

Supposons qu'il existe $\beta \in \bigcap_{w \in \kappa^{-1}(F)} w(\Phi^+)$ tel que $\beta \notin R(F)$. Alors il

existe $\alpha \in \Phi^+$ et $w \in \kappa^{-1}(F)$ tel que $\beta = w(\alpha) \notin R(\kappa(w))$. Donc par la Proposition 3.2.3, $\kappa(ws_\alpha) = \kappa(w) = F$. Ainsi, β appartient à $w(\Phi^+) \cap ws_\alpha(\Phi^+)$. C'est-à-dire que β appartient à $w(\Phi^+ \setminus \{\alpha\})$, ce qui contredit le fait que $\beta = w(\alpha)$. Donc $\bigcap_{w \in \kappa^{-1}(F)} w(\Phi^+) \subseteq R(F)$.

De plus, comme $(\bigcap_{w \in \kappa^{-1}(F)} w(\mathcal{C}^\diamond))^\diamond = \bigcup_{w \in \kappa^{-1}(F)} w(\mathcal{C}^\diamond)^\diamond$ et que $(\mathcal{C}^\diamond)^\diamond = \mathcal{C}$, nous avons que $C(F)^\diamond = \bigcup_{w \in \kappa^{-1}(F)} w(\mathcal{C})$.

On a donc que le cône normal d'un vecteur de briques $B(F)$ est l'union des chambres $w(\mathcal{C})$ de l'éventail de Coxeter telles que $\kappa(w) = F$. \square

La Proposition 3.2.2 est alors un corollaire de la proposition précédente.

3.2.2 Vecteur normaux et facettes

Nous savons maintenant caractériser l'éventail normal du polytope des briques associé à tout mot réalisable Q . En se concentrant dorénavant sur les mots de la forme $Q = cw_0(c)$, nous regardons les vecteurs normaux aux facettes du polytope des briques pour ces mots. Ceci va nous permettre de trouver une description de ce polytope par inégalités.

Comme dans le cas de la fonction racine, nous pouvons définir une configuration de poids associée à une facette de SC_c .

Définition 3.2.2. Soit F une facette de SC_c . L'ensemble

$$W(F) := \{w(F, f) \mid f \in F\}$$

de tous les poids associés aux éléments de F est appelé la *configuration de poids* de F .

Dans le cas où $Q = cw_0(c)$, des propriétés intéressantes se dégagent de l'étude

de la configuration de poids. Avant de nous y intéresser, étudions de plus près les facettes de SC_c .

Lemme 3.2.5. *Soit s la première lettre de c et c un mot réduit pour c commençant par s . De plus, soit F une facette de SC_c . Nous avons alors deux cas :*

1. *Si $1 \notin F$ alors l'ensemble de positions $F - 1 := \{k - 1 \mid k \in F\}$ est une facette de $SC_{c'}$ où $c' = scs$.*
2. *Si $1 \in F$ alors $r(F, f) \in \Phi \cap \text{vect}(\Delta \setminus \{\alpha_s\})$ pour tout $f \in F \setminus \{1\}$.*

Démonstration. 1. Ceci découle de la Proposition 1.4.4 et du Lemme 1.4.5.

2. Une démonstration de ce point est donnée dans (Ceballos *et al.*, 2014a, Lemme 5.2). L'idée est de considérer une facette $F = [1, n]$ pour laquelle ce résultat est vrai et de considérer ses facettes F' adjacentes par des flips qui laissent invariant le sommet 1. À l'aide de la Proposition 2.1.3, on remarque non seulement que ce résultat est vrai pour toutes facettes F' . Donc, par connexité du graphe des flips nous avons bien le résultat voulu.

□

Ce lemme nous permet de démontrer la proposition suivante, qui donne une autre description des cônes normaux associés aux vecteurs de briques. Rappelons que dans le cas où $Q = \text{cw}_0(c)$, les vecteurs des briques correspondent aux sommets de \mathcal{P}_c .

Proposition 3.2.6. *Pour chaque facette F de SC_c , et toute position $f \in F$, le poids $w(F, f)$ est un vecteur normal de la facette*

$$\text{cone}\{r(F, g) \mid g \in F \setminus \{f\}\}$$

du cône $C(F)$. Alors le cône normal associé à un vecteur de briques $B(F)$ est engendré par la configuration de poids $W(F)$ de F .

Démonstration. Soit F une facette de SC_c .

Soit F une facette de SC_c . Si $1 \notin F$, par le Lemme 3.2.5, nous pouvons décaler successivement p -fois les positions de F pour obtenir un complexe de sous-mots isomorphe à SC_c dont la facette $F - p$ contient la position 1. Ce décalage ne fait que réfléchir par les mêmes réflexions $C(F)$ et $W(F)$, ce qui donne un énoncé équivalent. Nous pouvons supposer ainsi, sans perte de généralité, que 1 appartient à F . Si $1 \in F$, nous avons que $w(F, 1) = \omega_{q_1}$ et $r(F, 1) = \alpha_{q_1}$. Or, par le Lemme 3.2.5, nous avons que les racines $r(F, k)$ associées à F et aux positions $k \in F$, $k \neq 1$ appartiennent à $\Phi \cap \text{vect}(\Delta \setminus \{\alpha_{q_1}\})$. Donc $w(F, 1)$ est orthogonal à $R(F) \setminus \{r(F, 1)\}$. C'est-à-dire que $w(F, 1)$ est orthogonal à la facette de \mathcal{P}_c correspondant au sommet 1 de SC_c . Or, par définition de SC_c , $w(F, k) = w(G, k)$ pour toute facette G contenant k . Ainsi on s'intéresse à la facette G ou $G = F \setminus \{1\} \cup \{g\}$. Nous avons alors bien le résultat escompté. \square

Ainsi, par la Proposition 3.2.4 nous avons que pour l'application surjective κ telle que définie dans la Définition 3.2.1

$$C^\circ(F) = \text{cone}\{W(F)\} = \bigcup_{w \in \kappa^{-1}(F)} w(C).$$

Or, l'application κ n'étant pas injective, nous nous demandons quels sont les éléments de W qui apparaissent dans cette union. En d'autres mots, nous devons étudier attentivement les facettes de SC_c . Pour cela, il nous faut tout d'abord introduire de nouvelles notations.

Notons par Π_k le produit des k premières lettres de $w_0(c)$. Par convention $\Pi_0 := e$.

De plus, soit $\alpha_{n+k} := \Pi_{k-1}(\alpha_{q_{n+k}})$, $\omega_{n+k} := \Pi_{k-1}(\omega_{q_{n+k}})$, et $\Omega := \sum_{k \in [N]} \omega_k$.

Proposition 3.2.7. *Soit $\kappa(\Pi_k)$ une facette de SC_c , $k \in \{0, \dots, N\}$. Alors $R(\kappa(\Pi_k)) = \Pi_k(\Delta)$ et $W(\kappa(\Pi_k)) = \Pi_k(\nabla)$.*

Corollaire 3.2.8. *Le cône normal $C^\circ(\kappa(\Pi_k))$ associé au sommet $B(\kappa(\Pi_k))$ est engendré par l'ensemble $\Pi_k(\nabla)$.*

Démonstration. Ceci découle de la Proposition 3.2.6. □

La démonstration de la Proposition 3.2.7 étant très technique et longue, nous avons décidé de ne pas la présenter ici. Nous vous référons à la Proposition 6.7 de l'article (Pilaud et Stump, 2015a). Cependant, certaines nouvelles définitions et remarques annoncées dans cette preuve nous sont importantes pour la suite de ce mémoire. Nous les présentons ici :

Définition 3.2.3. Soit $Q = q_1 \dots q_m = \text{cw}_0(c)$. Nous appelons $i \in [1, m]$ une *position terminale* s'il n'existe pas de position $j \in [1, m]$ telle que $j > i$ pour laquelle $q_i = q_j$. Nous notons par T l'ensemble des positions terminales de $[1, m]$.

De plus, pour $k \in [0, N]$, nous notons par j_k la position $k + n + 1$ et par i_k la position dans $\text{cw}_0(c)$ de la dernière occurrence de j_k avant j_k .

Proposition 3.2.9. *Soit $\kappa(\Pi_k)$ une facette de SC_c . Alors $\kappa(\Pi_k) = (T \cap [1, i_k - 1]) \cup \{i_k, \dots, j_k - 1\}$. De plus, pour tout $i \in \kappa(\Pi_k)$,*

$$w(\kappa(\Pi_k), i) = \begin{cases} w_0(\omega_{q_i}) & \text{si } i \in T \cap [1, i_k - 1] \\ \Pi_k(\omega_{q_i}) & \text{si } i \in \{i_k, \dots, j_k - 1\}. \end{cases}$$

Lemme 3.2.10. *Les facettes $\kappa(\Pi_k)$ couvrent toutes les positions de $[1, m]$.*

Démonstration. Ceci découle directement de formule explicite de $\kappa(\Pi_k)$ donnée à la Proposition 3.2.9. \square

De ce lemme nous obtenons le corollaire qui suit.

Corollaire 3.2.11. *Les vecteurs normaux aux facettes du polytope de briques \mathcal{P}_c sont donnés par $-\nabla \cup \{\omega_{n+k} \mid k \in [0, N]\}$.*

Démonstration. Nous avons vu précédemment que le polytope de briques \mathcal{P}_c réalise le polaire de SC_c . Il est donc clair dans ce cas que toute facette K de \mathcal{P}_c est caractérisée par une position $k \in [1, m]$. Cette position est celle que partagent les facettes de SC_c qui correspondent aux sommets de K . Nous sommes intéressés à connaître les vecteurs normaux aux facettes du polytope de briques. Par la Proposition 3.2.6, nous connaissons ces vecteurs, du moins pour les facettes contenant des sommets correspondant à des $\kappa(\Pi_k)$ dans SC_c : ce sont les poids de la configuration $W(\kappa(\Pi_k))$. Cependant, le Lemme 3.2.10 nous garantit que toutes les facettes du polytope de briques satisfont cette condition. Finalement, par la Proposition 3.2.9, nous avons que l'union des configurations de racines des facettes $\kappa(\Pi_k)$ est précisément $-\nabla \cup \{\omega_{n+k} \mid k \in [0, N]\}$.

\square

Regardons maintenant le lien entre les vecteurs normaux aux facettes de \mathcal{P}_c et l'éventail de Coxeter. Soit alors $a := \sum_{s \in S} \omega_s$ un vecteur de \mathcal{V} et soit le le W -permutaèdre équilibré $\text{Perm}(W) := \text{conv}\{w(a) \mid w \in W\}$ (voir Définition 1.2.3).

Rappelons que nous avons vu dans le Chapitre 1 §1.2.2 que les vecteurs normaux aux facettes de $\text{Perm}(W)$ sont les $w(\omega_s)$ pour tous $s \in S$ et $w \in W$; le corollaire ci-dessus entraîne donc le théorème suivant.

Théorème 3.2.12. *Le polytope de briques \mathcal{P}_c est obtenu du permutaèdre équilibré $\text{Perm}(W)$ en retirant les facettes qui n'intersectent pas $\{\Pi_k(a) \mid 0 \leq k \leq N\}$ et par une translation de vecteur $\Omega := \sum_{k \in [N]} \omega_{n+k}$.*

Démonstration. Soit \mathcal{P}' le translaté de \mathcal{P}_c par le vecteur $-\Omega$. À partir de la Proposition 3.2.7, nous remarquons que \mathcal{P}' et $\text{Perm}(W)$ partagent les sommets de coordonnées $\Pi_k(a)$, pour $k \in [1, m]$. De fait, les cônes normaux à ces sommets sont les même pour les deux polytopes. Les faces de ces cônes étant orthogonales aux facettes adjacentes à ces sommets, il est alors clair que ces facettes de \mathcal{P}' et $\text{Perm}(W)$ contenant ces sommets sont définies par les même inégalités. De plus, le Corollaire 3.2.11 nous donne une caractérisation de toutes les facettes de \mathcal{P}_c par vecteurs normaux et on remarque que tous ces vecteurs sont présents dans les faces des cônes normaux des sommets $\Pi_k(a)$. On en conclut que les inégalités, obtenues à partir des sommets que \mathcal{P}' et \mathcal{P}_c partagent, exhausent toutes les facettes de \mathcal{P}' . \square

Il nous faut remarquer ici que les Π_k que nous avons défini auparavant ne sont rien d'autre que des c -singletons. Cependant, les Π_k ne présentent pas tous les c -singletons. Ces observations ainsi que le théorème précédent entraîne le corollaire suivant :

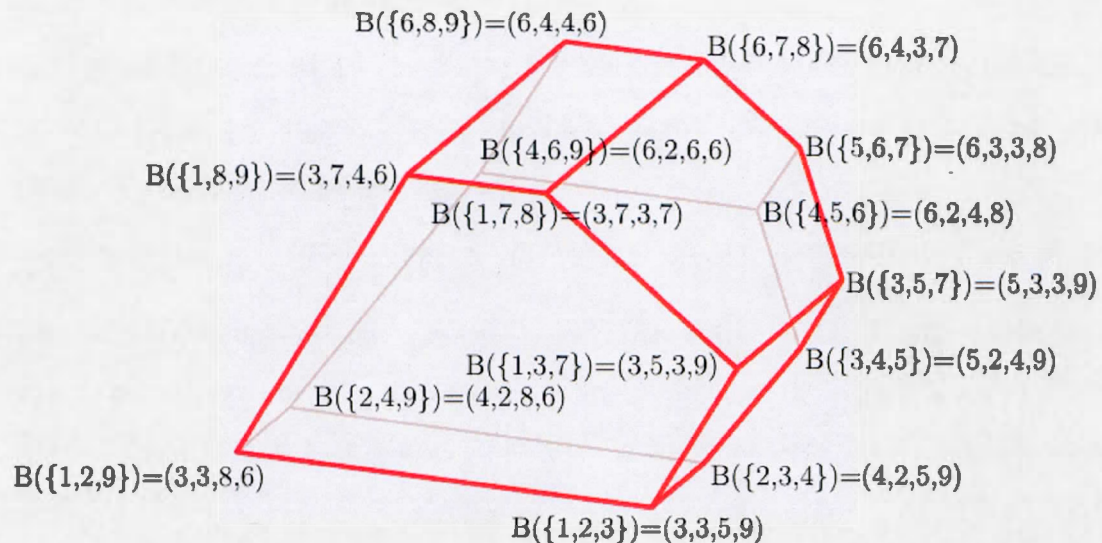
Corollaire 3.2.13. *Le polytope de briques $\mathcal{P}_c := \mathcal{P}(\text{cw}_0(c))$ est une réalisation polytopale de SC_c qui coïncide à une translation affine près par un vecteur Ω_c à l'associaèdre équilibré $\text{Asso}_c(W)$ tel que défini dans (Hohlweg et al., 2011). C'est à dire :*

$$\text{Asso}_c(W) = \text{conv}\{ B_c(F) - \Omega_c \mid F \text{ facette de } \text{SC}_c \}$$

où $\Omega_c := \sum_{k \in [N]} \Pi_{k-1}(\omega_{q_{n+k}})$.

Exemple 3.2.1. Pour $W = S_4$, nous voyons dans la Figure 3.1 que le polytope

Figure 3.1 Polytope de briques \mathcal{P}_{rstrsr} associé à $W = S_4$
Source: (Pilaud et Stump, 2015a, Figure 12)



de briques P_{rst} associé au complexe de sous-mot sphérique $SC(rstrsr)$ est le rst -associaèdre généralisé. Nous en avons ainsi, par les vecteurs de briques, une description comme \mathcal{V} -polytope.

3.3 Barycentre de l'associaèdre

Grâce à cette nouvelle description par sommets de l'associaèdre généralisé, nous avons les outils pour étudier son barycentre des sommets. Dans cette section nous prouvons le théorème suivant :

Théorème 3.3.1. *Le barycentre de l'associaèdre $\text{Asso}_c^a(W)$ est l'origine.*

Nous commençons par montrer que le barycentre $\mathfrak{B}(c)$ de l'associaèdre équilibré $\text{Asso}_c(W)$ est l'origine. La preuve se fait en deux étapes. D'abord, nous montrons que le barycentre est indépendant du choix de l'élément de Coxeter c . Ensuite,

nous montrons que

$$\mathfrak{B}(c) + \mathfrak{B}(c^{-1}) = 0,$$

ce qui entraîne que $\mathfrak{B}(c) = 0$ tel que voulu.

Afin d'arriver à ces résultats, nous avons besoin d'étudier le comportement de $\text{SC}(Q)$, pour $Q = cw_0(c)$, lorsque nous opérons quatre transformations naturelles sur Q : la permutation de lettres, la rotation, la conjugaison, et le renversement.

Définition 3.3.1 (Commutativité). Soit $Q = q_1 \dots q_m$, et considérons le mot $\pi(Q) := q_{\pi(1)} \dots q_{\pi(m)}$ obtenu de Q par transpositions de lettres commutatives consécutives. (Ainsi π est un élément du groupe symétrique S_m .)

Lemme 3.3.2. π induit un isomorphisme entre les complexes de sous-mot $\text{SC}(Q)$ et $\text{SC}(\pi(Q))$.

Alors, $B_{\pi(Q)}(\pi(F)) = B_Q(F)$ pour toute facette F de $\text{SC}(Q)$

Démonstration. L'isomorphisme est obtenu de la construction de $\pi(Q)$ par la Proposition 1.4.2. La définition de la fonction de poids implique que $w_{\pi(Q)}(\pi(F), \pi(k)) = w_Q(F, k)$ pour toute facette F et une position k . En sommant l'ensemble des poids associés à la facette F , il est clair que nous obtenons le résultat voulu. \square

Définition 3.3.2 (Rotation). Soit $Q = q_1 q_2 \dots q_m$ et la rotation qui envoie Q sur $Q^\circ := q_2 \dots q_m \phi(q_1)$, où $\phi(s) = (w_0)^{-1} s w_0$. Notons alors par σ la rotation cyclique qui envoie la position k sur la position $k - 1$, pour laquelle on identifie 0 et m .

Lemme 3.3.3. La rotation cyclique σ induit un isomorphisme entre les complexes de sous-mots $\text{SC}(Q)$ et $\text{SC}(Q^\circ)$. De plus,

$$B_{Q^\circ}(\sigma(F)) - B_Q(F) \in -2\omega_{q_1} + \mathbb{R}\alpha_{q_1}$$

pour toute facette F de $\text{SC}(Q)$.

Démonstration. Les complexes $\text{SC}(Q)$ et $\text{SC}(Q^\circ)$ sont isomorphes par la Proposition 1.4.3. Du reste, pour chaque facette F de $\text{SC}(Q)$ et toute position $k > 1$, nous obtenons que

$$w_{Q^\circ}(\sigma(F), \sigma(k)) = \begin{cases} w_Q(F, k) & \text{si } 1 \in F \\ q_1 w_Q(F, k) & \text{si } 1 \notin F. \end{cases}$$

vu que $1 \leq \sigma(k) \leq m - 1$. Il nous reste à voir ce qui se passe en position $\sigma(1)$:

$$w_{Q^\circ}(\sigma(F), \sigma(1)) = \begin{cases} w_0(\omega_{\phi(q_1)}) & \text{si } 1 \in F, \\ w_0\sigma(q_1)(\omega_{\phi(q_1)}) = w_0(\omega_{\phi(q_1)}) + \alpha_{\phi(q_1)} & \text{si } 1 \notin F. \end{cases}$$

Or, comme $\omega_{\phi(s)} = -w_0(\omega_s)$ et $\alpha_{\phi(s)} = \alpha_s$ nous avons que

$$w_0(\omega_{\phi(q_1)}) = w_0(\omega_{q_1}) = w_Q(F, 1) - 2\omega_{q_1}.$$

Par sommation, nous obtenons bien que

$$B_{Q^\circ}(\sigma(F)) - B_Q \in -2\omega_{q_1} + \mathbb{R}\alpha_{q_1}$$

pour toute facette F de $\text{SC}(Q)$. □

Définition 3.3.3 (Conjugaison). Soit $Q^\dagger := \phi(q_1) \dots \phi(q_m)$ la w_0 -conjugaison de Q .

Lemme 3.3.4. Soit $Q^\dagger := \phi(q_1) \dots \phi(q_m)$ la w_0 -conjugaison de Q . Alors les complexes de sous-mots $\text{SC}(Q)$ et $\text{SC}(Q^\dagger)$ coïncident. De plus

$$B_{Q^\dagger}(F) = -w_0^{-1}(B_Q(F)).$$

Démonstration. Pour tout sous-ensemble F de $[1, m]$, nous avons que $Q^\dagger|_{[1, m] \setminus F} = w_0^{-1}Q|_{[1, m] \setminus F}w_0$. Donc $SC(Q) = SC(Q^\dagger)$. De plus, par la définition de la fonction poids nous avons que pour toute facette F de $SC(Q)$ et toute position $k \in [1, m]$

$$\begin{aligned} w_{Q^\dagger}(F, k) &= w_0^{-1}Q|_{[1, k-1] \setminus F}w_0(\omega_{\phi(q_k)}) \\ &= w_0^{-1}Q|_{[1, k-1] \setminus F}w_0(-w_0(\omega_{(q_k)})) \\ &= -w_0^{-1}Q|_{[1, k-1] \setminus F}(\omega_{(q_k)}) \\ &= -w_0(w_Q(F, k)). \end{aligned}$$

Le résultat sur les vecteurs de briques suit par sommation. \square

Définition 3.3.4 (Renversement). Nous définissons l'opération de renversement qui envoie $Q = q_1 \dots q_m$ sur le mot $Q^{\leftrightarrow} := q_m \dots q_1$. Au niveau des positions, notons par μ l'opération « miroir » qui envoie une position $k \in [1, m]$ sur $m+1-k$.

Lemme 3.3.5. *Le miroir μ induit un isomorphisme entre les complexes de sous-mots $SC(Q)$ et $SC(Q^{\leftrightarrow})$. De plus, $B_{Q^{\leftrightarrow}}(\mu(F)) = w_0(B_Q(F)) + \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$*

pour toute facette F de $SC(Q)$.

Démonstration. Pour tout sous-ensemble $F \in [1, m]$, nous avons que

$$Q^{\leftrightarrow}|_{[1, m] \setminus \mu(F)} = (Q|_{[1, m] \setminus F})^{-1}.$$

Donc μ induit un isomorphisme entre $SC(Q)$ et $SC(Q^{\leftrightarrow})$.

Considérons F une facette de $SC(Q)$. Alors,

$$w_0 = Q|_{[1, m] \setminus F} = \begin{cases} Q|_{[1, k-1] \setminus F} \cdot Q|_{[k+1, m] \setminus F} & \text{si } k \in F \\ Q|_{[1, k-1] \setminus F} \cdot q_k \cdot Q|_{[k+1, m] \setminus F} & \text{si } k \notin F. \end{cases},$$

Observons que $Q|_{[k+1,m]\setminus F} = (Q_{[1,\mu(k)-1]\setminus\mu(F)}^{\leftrightarrow})^{-1}$.

Alors, pour toute position $k \in F$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{Q^{\leftrightarrow}}(\mu(F), \mu(k)) &= Q^{\leftrightarrow}|_{[1,\mu(k)-1]\setminus\mu(F)}(\omega_{q_k}) \\ &= w_0^{-1}Q|_{[1,k-1]\setminus F}(\omega_{q_k}) \\ &= w_0(\mathbf{w}_Q(F, k)). \end{aligned}$$

De manière similaire, pour $k \notin F$,

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{Q^{\leftrightarrow}}(\mu(F), \mu(k)) &= Q^{\leftrightarrow}|_{[1,\mu(k)-1]\setminus\mu(F)}(\omega_{q_k}) \\ &= w_0^{-1}Q|_{[1,k-1]\setminus F}q_k(\omega_{q_k}) \\ &= w_0^{-1}Q|_{[1,k-1]\setminus F}(\omega_{q_k} - \alpha_{q_k}) \\ &= w_0^{-1}Q|_{[1,k-1]\setminus F}(\omega_{q_k}) - w_0^{-1}Q|_{[1,k-1]\setminus F}(\alpha_{q_k}) \\ &= w_0(\mathbf{w}_Q(F, k)) - w_0(r_Q(F, k)). \end{aligned}$$

Comme $\sum_{k \notin F} r_Q(F, k) = \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$, nous obtenons bien le résultat escompté. \square

Nous allons maintenant étudier le comportement du complexe de sous-mots et des vecteurs de briques si l'on applique simultanément les deux dernières opérations que nous venons de définir.

Corollaire 3.3.6. *Notons par $Q^{\boxtimes} := \phi(q_m) \dots \phi(q_1)$ le renversement conjugué par w_0 de $Q = q_1 \dots q_m$. Le miroir $\mu := k \mapsto m + 1 - k$ définit un isomorphisme entre les complexes $SC(Q)$ et $SC(Q^{\boxtimes})$. De plus,*

$$B_Q(F) + B_{Q^{\boxtimes}}(\mu(F)) = \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$$

pour toute facette F de $SC(Q)$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que conjuguer le mot Q par w_0 et le renverser par la suite est équivalent à le renverser puis le conjuguer. Nous pouvons alors écrire $Q^{\sharp} = (Q^{\leftrightarrow})^{\dagger}$. Ainsi, par le Lemme 3.3.4, nous avons que $\text{SC}(Q^{\sharp})$ coïncide avec $\text{SC}(Q^{\leftrightarrow})$, et par le Lemme 3.3.5 nous avons que le miroir μ induit un isomorphisme entre $\text{SC}(Q)$ et $\text{SC}(Q^{\leftrightarrow})$. L'isomorphisme entre $\text{SC}(Q^{\sharp})$ et $\text{SC}(Q)$ est ainsi démontré.

De plus, par le Lemme 3.3.4 nous avons que

$$\mathbf{B}_{Q^{\sharp}}(\mu(F)) = \mathbf{B}_{(Q^{\leftrightarrow})^{\dagger}}(\mu(F)) = -w_0^{-1}(\mathbf{B}_{Q^{\leftrightarrow}}(\mu(F)))$$

pour toute facette F de $\text{SC}(Q)$. Donc le Lemme 3.3.5 implique que

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{Q^{\sharp}}(\mu(F)) &= -w_0^{-1}(w_0(\mathbf{B}_Q(F)) + \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta) \\ &= -\mathbf{B}_Q(F) + \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta, \end{aligned}$$

ce qui conclut cette preuve. □

Nous montrons grâce à ces quatre lemmes que le barycentre $\mathfrak{B}(c)$ du c -associaèdre $\text{Asso}_c(W)$ est indépendant de l'élément de Coxeter c .

Proposition 3.3.7. *Soient c, c' des éléments de Coxeter différents de W . Soient $\mathfrak{B}(c)$ et $\mathfrak{B}(c')$ les barycentres des associaèdres $\text{Asso}_c(W)$ et $\text{Asso}_{c'}(W)$, respectivement. Alors $\mathfrak{B}(c) = \mathfrak{B}(c')$.*

Pour montrer la Proposition 3.3.7, commençons par voir la proposition suivante :

Proposition 3.3.8. *Soit $c := s_1 \dots s_n$ une expression réduite d'un élément de Coxeter c . Considérons l'expression $c' := s_2 \dots s_n s_1$. Alors $\text{Asso}_{c'}(W)$ est une translation de $\text{Asso}_c(W)$ par un vecteur $v \in \mathbb{R}\alpha_{s_1}$.*

Démonstration. Fixons un élément de Coxeter c et $c := s_1 \dots s_n$ une expression réduite de c . Considérons dans un premier temps c' l'élément de Coxeter d'expression réduite $c' := s_2 \dots s_n s_1$ obtenu à partir de c par rotation de la première lettre s_1 . La Proposition 4.3 dans (Ceballos *et al.*, 2014b) nous assure que le mot $c'w_0(c')$ coïncide avec le mot $cw_0(c)^\circ$ par permutation de lettres consécutives commutatives. Les Lemmes 3.3.2 et 3.3.3 nous assurent donc qu'il y a un isomorphisme entre $SC(cw_0(c))$ et $SC(c'w_0(c'))$ que nous noterons ψ . De plus, d'après les Lemmes 3.3.2 et 3.3.3 nous concluons que $B_{c'}(\psi(F)) - B_c(F) \in -2\omega_{s_1} + \mathbb{R}\alpha_{s_1}$ pour toute facette F de $SC_c = SC(cw_0(c))$. Nous avons vu dans la section précédente que pour tout élément de Coxeter c et toute facette F de SC_c , $B_c(F) - \Omega_c$ est un sommet de $\text{Asso}_c(W)$. Considérons alors la facette initiale $F = [1, n]$. Alors

$$\begin{aligned} B_c([1, n]) &= \sum_{k \in [1, n]} (cw_0(c))|_{[1, k-1] \setminus [1, n]}(\omega_{q_k}) \\ &= \sum_{k \in [1, n]} e(\omega_{q_k}) + \sum_{k \in [n+1, N]} \Pi_{k-1}(\omega_{q_k}) \\ &= \sum_{s \in S} \omega_s + \sum_{k \in [n+1, N]} \Pi_{k-1}(\omega_{q_k}) \quad \text{car } c \text{ est un élément de Coxeter.} \end{aligned}$$

Donc $\Omega_c = B_c - \sum_{s \in S} \omega_s$, ce qui implique que $\Omega_{c'} - \Omega_c \in -2\omega_{s_1} + \mathbb{R}\alpha_{s_1}$. Ainsi, $(B_{c'}(F) - \Omega_{c'}) - (B_c(F) - \Omega_c) \in \mathbb{R}\alpha_{s_1}$, ce qui conclut la preuve. \square

Corollaire 3.3.9. *Nous avons $\mathfrak{B}(c) - \mathfrak{B}(c') \in \mathbb{R}\alpha_{c_1}$.*

Nous voilà en mesure de démontrer la Proposition 3.3.7.

Démonstration de la Proposition 3.3.7. Considérons la suite $c^{(0)}, c^{(1)}, \dots, c^{(n)}$ d'éléments de Coxeter obtenus à partir de c en répétant la rotation de la première lettre à chaque nouveau mot obtenu, c'est-à-dire que $c^{(0)} := c$, $c^{(1)} := c'$, et

$c^{(k)} := s_{k+1} \dots s_n \dots s_1 \dots s_k$. Comme $c^{(0)} = c^{(n)}$, nous avons que

$$\mathfrak{B}(c^{(1)}) - \mathfrak{B}(c^{(0)}) = \mathfrak{B}(c^{(1)}) - \mathfrak{B}(c^{(n)}) = \sum_{i \in [1, n-1]} \mathfrak{B}(c^{(i)}) - \mathfrak{B}(c^{(i+1)}).$$

Cependant, nous avons vu $\mathfrak{B}(c^{(1)}) - \mathfrak{B}(c^{(0)}) \in \mathbb{R}\alpha_{s_1}$ et par le même argument, il est clair que $\sum_{i \in [1, n-1]} \mathfrak{B}(c^{(i)}) - \mathfrak{B}(c^{(i+1)})$ appartient au sous-espace vectoriel de V engendré par $\Delta \setminus \{\alpha_{s_1}\}$. Comme Δ est une base de V , nous avons que $\mathfrak{B}(c') - \mathfrak{B}(c) = 0$, c'est à dire que le barycentre est préservé par la rotation de la première lettre de c . Or comme chaque élément de Coxeter \tilde{c} peut s'obtenir à partir de c par succession de rotations de la première lettre et de permutations de lettres commutatives consécutives, nous obtenons à l'aide du Lemme 3.3.2 que $\mathfrak{B}(\tilde{c}) = \mathfrak{B}(c)$, pour tout élément de Coxeter \tilde{c} . \square

Nous voyons enfin une dernière proposition qui nous permet de démontrer le Théorème 3.3.11 :

Proposition 3.3.10. *Le barycentre de la superposition des sommets de $\text{Asso}_c(W)$ et $\text{Asso}_{c^{-1}}(W)$ est l'origine, c'est-à-dire que pour tout élément de Coxeter c ,*

$$\mathfrak{B}(c) + \mathfrak{B}(c^{-1}) = 0.$$

Démonstration. Par abus de notation nous écrivons ici c^{-1} pour l'expression réduite c^{\leftrightarrow} de c^{-1} . Le c^{-1} -mot de w_0 est, par transposition de lettres commutatives consécutives, obtenu de $w_0(c)$ par renversement et conjugaison par w_0 . Donc $c^{-1}w_0(c)^{-1} = \pi((cw_0(c))^{\leftrightarrow})$. Ainsi le Lemme 3.3.2 et le Corollaire 3.3.6 nous assurent qu'il existe un isomorphisme entre SC_c et $\text{SC}_{c^{-1}}$, et

$$\mathbf{B}_{c^{-1}}(\pi(\mu(F))) = -\mathbf{B}_c(F) + \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$$

pour toute facette F de SC_c .

Ainsi $B_c(F) + B_{c^{-1}}(\pi(\mu(F))) = \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$, et par le même argument que celui vu dans la preuve de la Proposition 3.3.8, $\Omega_c + \Omega_{c^{-1}} = \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$.

On en conclut que $(B_c(F) - \Omega_c) + (B_{c^{-1}}(\pi(\mu(F))) - \Omega_{c^{-1}}) = 0$ et donc que

$$\mathfrak{B}(c) + \mathfrak{B}(c^{-1}) = 0.$$

□

Ainsi nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.3.11. *Le barycentre des sommets de $\text{Asso}_c(W) = \mathcal{P}_c - \Omega_c$ coïncide avec celui de $\text{Perm}(W)$ équilibré. Autrement dit, nous avons $\sum(B_c(F) - \Omega_c) = 0$, où la somme est sur toutes les facettes de SC_c .*

Démonstration. Pour tout élément de Coxeter c de W , nous avons, par les Propositions 3.3.10 et 3.3.7, que

$$2\mathfrak{B}(c) = \mathfrak{B}(c) + \mathfrak{B}(c^{-1}) = 0.$$

Ainsi, nous concluons que $\mathfrak{B}(c) = 0$ pour tout élément de Coxeter c . Ainsi le barycentre de tout c -associaèdre équilibré $\text{Asso}_c(W)$ est l'origine. □

Nous allons maintenant voir rapidement comment étendre ce résultat aux cas des associaèdres bien équilibrés.

Nous décrivons la situation pour un point général $a := \sum_{s \in S} a_s \omega_s$ dans la chambre fondamentale. Nous avons vu que la construction du polytope de briques et ses propriétés restent valides si nous remplaçons les fonctions de racines et de poids

par $r_Q^a(F, k) := a_{q_k} r_Q(F, k)$ et $w_Q^a(F, k) := a_{q_k} w_Q(F, k)$; le vecteur de briques par $B_Q^a(F) := \sum_{k \in [m]} a_{q_k} w_Q(F, k)$ et le polytope de briques par

$$\mathcal{P}^a(Q) := \text{conv}\{B_Q^a(F) \mid F \text{ facette de } \text{SC}(Q)\}.$$

Le polytope $\mathcal{P}^a(Q)$ est ainsi une déformation de $\mathcal{P}(Q)$. Alors $\text{Asso}_c^a(W) = \text{conv}\{B_c^a(F) - \Omega_c^a \mid F \text{ facette de } \text{SC}_c\}$, où la translation affine

$$\Omega_c^a := \sum_{k \in [N]} a_{q_k} \Pi_{k-1}(\omega_{q_{n+k}}).$$

Théorème 3.3.12. *Soit (W, S) un système de Coxeter fini et $c \in W$ un élément de Coxeter. Soit enfin a un point dans la chambre fondamentale C pour lequel $w_0(a) = -a$, c'est-à-dire que $a_s = a_{\phi(s)}$ pour tout $s \in S$. Le barycentre du c -associaèdre bien équilibré $\text{Asso}_c^a(W)$ coïncide avec celui du permutaèdre $\text{Perm}^a(W)$.*

Démonstration. Nous remarquons qu'en considérant a , le Lemme 3.3.2 reste valide comme tel. Les Lemmes 3.3.4 et 3.3.5 restent valides aussi comme $a_{q_k} = a_{\sigma(q_k)}$. Seul le Lemme 3.3.3 diffère car $-2\omega_{q_1}$ doit-être remplacé par $-2a_{q_1}\omega_{q_1}$, ce qui, cependant, ne change pas la validité des Propositions 3.3.7 et 3.3.10. Ainsi nous avons montré que le barycentre des sommets de $\text{Asso}_c^a(W)$ est l'origine.

□

CONCLUSION

L'étude de l'associaèdre débute dans les années soixante lors que J. Stasheff l'introduit dans (Stasheff, 1963) comme complexe simplicial en topologie algébrique. J. Stasheff se pose alors la question de la possible réalisation de ce complexe comme polytope. Une réalisation à partir d'un permutaèdre du groupe symétrique sera donnée par la suite par S. Shnider et S. Sternberg dans (Shnider et Sternberg, 1993), suivis de J. L. Loday dans (Loday, 2004). Puis, en 2003, S. Fomin et A. Zelevinsky introduisent une famille plus large de polytopes contenant l'associaèdre dans leur études des complexes amassés. Ils appelleront ces polytopes des associaèdres généralisés et, avec l'aide de F. Chapoton, en donneront une réalisation dans (Chapoton *et al.*, 2002). En 2007, C. Hohlweg, C. Lange et H. Thomas, donneront une réalisation de ces associaèdres généralisés à partir du permutaèdre de leur type correspondant ((Hohlweg *et al.*, 2011) pour plus de détails).

Dans ce mémoire nous présentons la réalisation de V. Pilaud et C. Stump des associaèdres généralisés en tant que polytopes de briques, ce qui fournit une description par enveloppe convexe de sommets des associaèdres généralisés. Il nous a fallu pour cela explorer les aspects combinatoires et géométriques des complexes de sous-mots associés aux systèmes de Coxeter finis afin de leur associer un polytope de briques, défini comme enveloppe convexe de vecteurs, dont le polaire les réalise. Nous avons vu, à travers l'étude des cônes normaux associés aux sommets de ce polytope, que celui-ci correspond à l'associaèdre généralisé du système de Coxeter correspondant à translation près. Cette nouvelle description permet ainsi de revisiter les résultats connus sur les associaèdres généralisés de tout type. Nous montrons dans ce mémoire, à l'aide de cette nouvelle description, une conjecture

émise dans (Hohlweg *et al.*, 2011). En effet, nous nous sommes servis du lien entre ce polytope et les complexes de sous-mots, dont découle la nouvelle description de ses sommets, pour voir que son barycentre est l'origine.

Notre mémoire se restreint à l'étude des polytopes de briques associés à des complexes de sous-mots réalisables et, en particulier, aux cas où les mots qui leurs sont associés sont en lien avec les éléments de Coxeter. Ainsi, nous pouvons nous demander quels seraient les résultats intéressants découlant de l'étude des cas non-réalisables. Par exemple, la combinatoire des polytopes de briques associés à tous complexes de sous-mots de type A , réalisables ou non, a déjà été étudiée par V. Pilaud et F. Santos dans l'article (Pilaud et Santos, 2012). Qu'en est-il pour les systèmes de Coxeter finis d'autres types ?

Figure 3.2 Racines et Graphe des flips de $SC(stst)$ pour W de type B_2

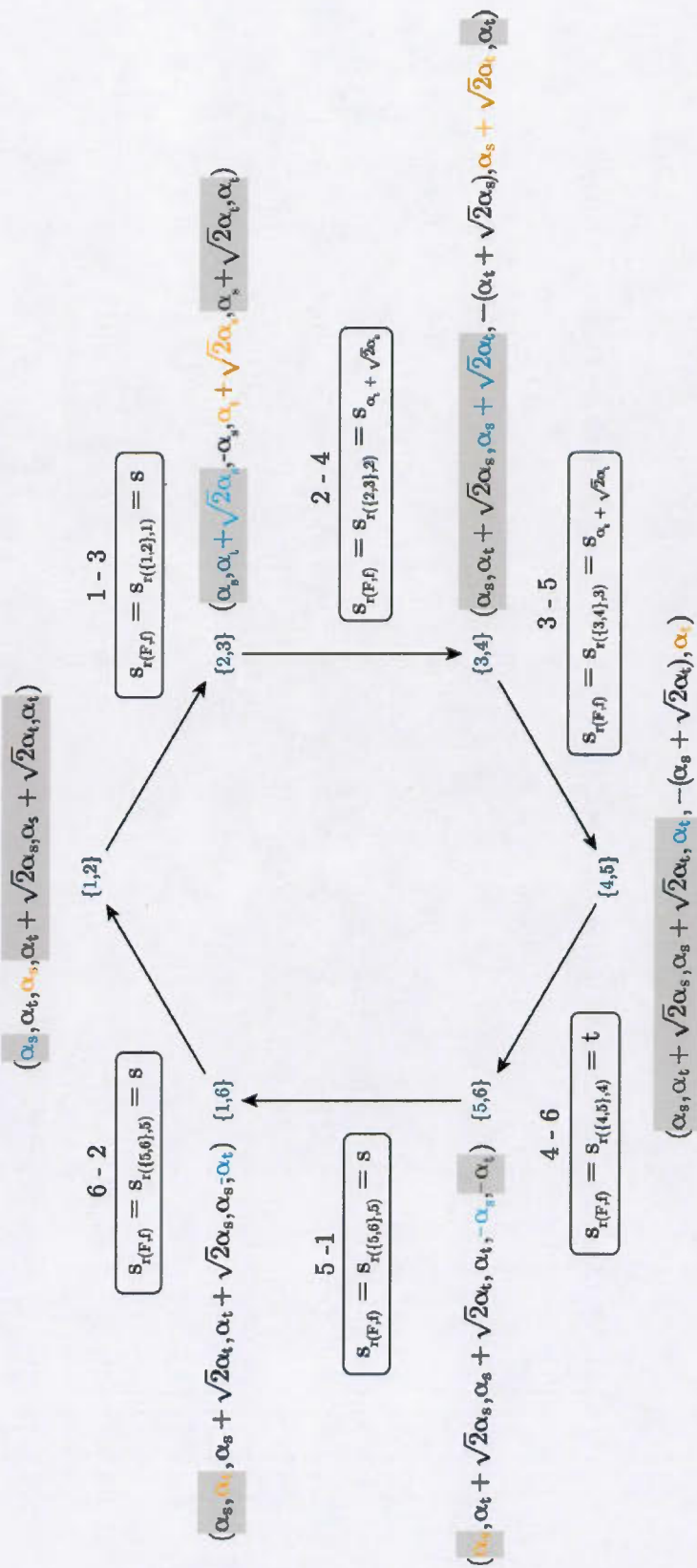


Tableau 3.1 Liste des racines de $SC(rstrsrstr)$ pour $W = S_4$ (avec configurations de racines en rouge)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\{1, 2, 3\}$	α_r	α_s	α_t	α_r	$\alpha_r + \alpha_s$	$\alpha_r + \alpha_s + \alpha_t$	α_s	$\alpha_s + \alpha_t$	α_t
$\{1, 2, 9\}$	α_r	α_s	α_t	α_r	$\alpha_r + \alpha_s + \alpha_t$	$\alpha_r + \alpha_s$	$\alpha_s + \alpha_t$	α_s	$-\alpha_t$
$\{1, 3, 7\}$	α_r	α_s	$\alpha_s + \alpha_t$	$\alpha_r + \alpha_s$	α_r	$\alpha_r + \alpha_s + \alpha_t$	$-\alpha_s$	$\alpha_s + \alpha_t$	α_t
$\{1, 7, 8\}$	α_r	α_s	$\alpha_s + \alpha_t$	$\alpha_r + \alpha_s$	$\alpha_r + \alpha_s + \alpha_t$	α_r	α_t	$-\alpha_s - \alpha_t$	$\alpha_s + \alpha_t$
$\{1, 8, 9\}$	α_r	α_s	$\alpha_s + \alpha_t$	$\alpha_r + \alpha_s$	$\alpha_r + \alpha_s + \alpha_t$	α_r	α_t	$-\alpha_s$	$-\alpha_t$
$\{2, 3, 4\}$	α_r	$\alpha_r + \alpha_s$	α_t	$-\alpha_r$	$\alpha_r + \alpha_s$	$\alpha_r + \alpha_s + \alpha_t$	α_s	$\alpha_s + \alpha_t$	α_t
$\{2, 4, 9\}$	α_r	$\alpha_r + \alpha_s$	α_t	$-\alpha_r$	$\alpha_r + \alpha_s + \alpha_t$	$\alpha_r + \alpha_s$	$\alpha_s + \alpha_t$	α_s	$-\alpha_t$
$\{3, 4, 5\}$	α_r	$\alpha_r + \alpha_s$	$\alpha_r + \alpha_s + \alpha_t$	α_s	$-\alpha_r - \alpha_s$	$\alpha_r + \alpha_s + \alpha_t$	α_s	$\alpha_s + \alpha_t$	α_t
$\{3, 5, 7\}$	α_r	$\alpha_r + \alpha_s$	$\alpha_r + \alpha_s + \alpha_t$	α_s	$-\alpha_r$	$\alpha_r + \alpha_s + \alpha_t$	$-\alpha_s$	$\alpha_s + \alpha_t$	$\alpha_s + \alpha_t$
$\{4, 5, 6\}$	α_r	$\alpha_r + \alpha_s$	$\alpha_r + \alpha_s + \alpha_t$	α_s	α_t	$-\alpha_r - \alpha_s - \alpha_t$	α_s	$\alpha_s + \alpha_t$	α_t
$\{4, 6, 9\}$	α_r	$\alpha_r + \alpha_s$	$\alpha_r + \alpha_s + \alpha_t$	α_s	α_t	$-\alpha_r - \alpha_s$	$\alpha_s + \alpha_t$	α_s	$-\alpha_t$
$\{5, 6, 7\}$	α_r	$\alpha_r + \alpha_s$	$\alpha_r + \alpha_s + \alpha_t$	α_s	$\alpha_s + \alpha_t$	$-\alpha_r - \alpha_s - \alpha_t$	$-\alpha_s$	$\alpha_s + \alpha_t$	$\alpha_s + \alpha_t$
$\{6, 7, 8\}$	α_r	$\alpha_r + \alpha_s$	$\alpha_r + \alpha_s + \alpha_t$	α_s	$\alpha_s + \alpha_t$	$-\alpha_r$	α_t	$-\alpha_s - \alpha_t$	α_t
$\{6, 8, 9\}$	α_r	$\alpha_r + \alpha_s$	$\alpha_r + \alpha_s + \alpha_t$	α_s	$\alpha_s + \alpha_t$	$-\alpha_r$	α_t	$-\alpha_s$	$-\alpha_t$

RÉFÉRENCES

- Björner, A. et Brenti, F. (2005). *Combinatorics of Coxeter groups*, volume 231 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York.
- Borovik, A. V. et Borovik, A. (2010). *Mirrors and reflections*. Universitext. Springer, New York. The geometry of finite reflection groups.
- Ceballos, C., Labbé, J.-P. et Stump, C. (2014a). Subword complexes, cluster complexes, and generalized multi-associahedra. *J. Algebraic Combin.*, 39(1), 17–51.
- Ceballos, C., Labbé, J.-P. et Stump, C. (2014b). Subword complexes, cluster complexes, and generalized multi-associahedra. *J. Algebraic Combin.*, 39(1), 17–51.
- Chapoton, F., Fomin, S. et Zelevinsky, A. (2002). Polytopal realizations of generalized associahedra. *Canad. Math. Bull.*, 45(4), 537–566. Dedicated to Robert V. Moody.
- Fomin, S. et Zelevinsky, A. (2002). Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2), 497–529 (electronic).
- Hohlweg, C. (2012). Permutahedra and associahedra : generalized associahedra from the geometry of finite reflection groups. In *Associahedra, Tamari lattices and related structures*, volume 299 de *Prog. Math. Phys.* 129–159. Birkhäuser/Springer, Basel.
- Hohlweg, C. et Lange, C. E. M. C. (2007). Realizations of the associahedron and cyclohedron. *Discrete Comput. Geom.*, 37(4), 517–543.
- Hohlweg, C., Lange, C. E. M. C. et Thomas, H. (2011). Permutahedra and generalized associahedra. *Adv. Math.*, 226(1), 608–640.
- Hohlweg, C., Lortie, J. et Raymond, A. (2010). The centers of gravity of the associahedron and of the permutahedron are the same. *Electron. J. Combin.*, 17(1), Research Paper 72, 14.

- Humphreys, J. E. (1990). *Reflection groups and Coxeter groups*, volume 29 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Knutson, A. et Miller, E. (2004). Subword complexes in Coxeter groups. *Adv. Math.*, 184(1), 161–176.
- Knutson, A. et Miller, E. (2005). Gröbner geometry of Schubert polynomials. *Ann. of Math. (2)*, 161(3), 1245–1318.
- Loday, J.-L. (2004). Realization of the Stasheff polytope. *Arch. Math. (Basel)*, 83(3), 267–278.
- Pilaud, V. et Pocchiola, M. (2012). Multitriangulations, pseudotriangulations and primitive sorting networks. *Discrete Comput. Geom.*, 48(1), 142–191.
- Pilaud, V. et Santos, F. (2012). The brick polytope of a sorting network. *European J. Combin.*, 33(4), 632–662.
- Pilaud, V. et Stump, C. (2015a). Brick polytopes of spherical subword complexes and generalized associahedra. *Adv. Math.*, 276, 1–61.
- Pilaud, V. et Stump, C. (2015b). Vertex barycenter of generalized associahedra. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143(6), 2623–2636.
- Reading, N. et Speyer, D. E. (2009). Cambrian fans. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 11(2), 407–447.
- Shnider, S. et Sternberg, S. (1993). *Quantum groups*. Graduate Texts in Mathematical Physics, II. International Press, Cambridge, MA. From coalgebras to Drinfel'd algebras, A guided tour.
- Stasheff, J. (1997). From operads to “physically” inspired theories. In *Operads : Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995)*, volume 202 de *Contemp. Math.* 53–81. Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- Stasheff, J. D. (1963). Homotopy associativity of H -spaces. I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.* 108 (1963), 275–292; *ibid.*, 108, 293–312.
- Ziegler, G. M. (1995). *Lectures on polytopes*, volume 152 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York.