

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

**LE EQUAZIONI DI LONDON-LONDON E
LA QUANTIZZAZIONE
DEL FLUSSO MAGNETICO
NELLA SUPERCONDUTTIVITA'**

Relatore:
Prof. Fabio Ortolani

Presentata da:
Mario Caserta

Sessione II
Anno Accademico 2013/2014

A Debora, Richarde e Jose

Indice

Introduzione	1
1 La prima equazione di London	4
1.1 Il modello di Drude	4
1.2 La prima equazione di London	7
1.3 Il campo magnetico all'interno di un conduttore perfetto	8
1.4 La seconda equazione di London	9
1.5 Conservazione del flusso magnetico e correnti infinite	11
2 Modello Quantistico Macroscopico (MQM)	14
2.1 Introduzione: la funzione d'onda macroscopica	14
2.2 Seconda equazione di London	16
2.3 Prima equazione di London	17
2.4 Passaggio dal modello classico al modello quantistico	19
2.5 Quantizzazione del flusso magnetico	20
3 Conclusioni	24
APPENDICES	25
A Relazioni fondamentali dell'elettrodinamica classica e valori delle costanti	25
B Invarianza di Gauge del potenziale vettore per l'equazione per la supercorrente	27
Bibliografia	29

Introduzione

Nella prima sezione di questo lavoro verranno esposti i ragionamenti fisici alla base della scrittura delle equazioni di London-London (1935), capaci di descrivere due importanti fenomeni riguardanti i materiali superconduttori quali la conduttività perfetta (resistenza nulla) e il diamagnetismo perfetto (Effetto Meissner). Verrà in essa infine brevemente descritto l'effetto della più generale conservazione del flusso magnetico nei superconduttori secondo il modello classico. Nella seconda sezione verrà esposto il ragionamento alla base della scrittura del Modello Quantistico Macroscopico, modello proposto da F.London nel 1948 per cercare di unificare la descrizione elettrodinamica classica della superconduttività con la meccanica quantistica, attraverso la scrittura di una funzione d'onda macroscopica capace di descrivere l'intero ensemble di portatori di carica superelettronici nel loro moto di conduzione. Come si vedrà, questo modello non solo riesce a giustificare entrambe le equazioni di London-London all'interno di un contesto fisico più fondamentale (ma ancora meramente fenomenologico), ma riesce ad ampliare la descrizione dei fenomeni superconduttivi, con il risultato di prevedere uno degli effetti più esemplari della natura quantistica della superconduttività e chiaramente fuori dalla portata della teoria classica, ovvero la quantizzazione del flusso magnetico intrappolato da una regione superconduttrice moltepliciamente connessa. L'approccio generale sarà quindi quello di dare un'inquadratura dei concetti fisici che hanno portato alla realizzazione di questi modelli, importanti sia dal punto di vista storico, che da quello sperimentale, poiché molti fenomeni conosciuti della superconduttività possono essere trattati formalmente con questi due modelli, nonostante entrambi non siano teorie microscopiche, cioè teorie capaci di dare una descrizione degli effettivi meccanismi che portano certi materiali a compiere questa affascinante transizione di stato. Per ragioni di comodità ogni equazione di London-London verrà in seguito definita di London

La scoperta della superconduttività e le proprietà fondamentali

Nel 1908 Heike Kammerling Onnes riuscì per primo a liquefare l'elio, riuscendo ad arrivare a temperature dell'ordine di $1,5K$. Nel 1911, Gilles Holst, un assistente di Onnes, osservò che nel puro mercurio liquido messo in un bagno termico di elio liquido, una volta abbassato alla temperatura critica di $T_C = 4,2K$, la resistenza elettrica si annullava bruscamente. Aumentando il numero di eventi di scattering riempiendo di impurità il mercurio, il fenomeno persisteva. Poco tempo dopo lo stesso effetto venne trovato nell'indio ($T_c = 3,4K$), nello stagno ($T_C = 3,72K$) e nel piombo ($T_C = 7,19K$). Nel 1930 questo fenomeno superconduttivo venne riscontrato nel niobio ($T_C = 9,2K$) e nel 1940

nella miscela metallica NbN ($T_C = 17,3K$). Negli anni '50 venne poi scoperto in una classe di composti chiamata A15, con temperature superiori ai 20K. Nella metà degli anni '60 venne poi predetta e osservata la superconduttività in certi semiconduttori drogati. A cavallo fra gli anni '70 e '80 vennero osservati fenomeni superconduttivi in svariati polimeri conduttori. Dalla metà degli anni '80 i limiti massimi di temperatura critica cominciarono ad alzarsi vertiginosamente, fino ad arrivare nei giorni nostri a temperature di circa 138K per i cosiddetti *cuprates*. *Ma che cos'è la superconduttività?* Sebbene la scoperta di questo nuovo stato della materia condensata sia avvenuta attraverso l'osservazione della scomparsa totale della resistenza al di sotto di una certa temperatura, esso è un fenomeno fisico ben più ricco. Onnes infatti scoprì anche che esiste un valore di threshold della densità di corrente che può sopportare un campione superconduttore prima di invertire il processo, ritornando quindi allo stato di conduzione normale. Egli scoprì che questo valore di *densità di corrente critica* era una funzione della temperatura: essa aumentava man mano che la temperatura a cui era posto il superconduttore diminuiva. Sempre Onnes, nel 1914 osservò che esisteva anche un valore di *campo magnetico critico*, al di sopra del quale lo stato superconduttivo veniva distrutto. Anche esso era funzione della temperatura, con una dipendenza ricavata dai dati sperimentali, del tipo

$$H_C(T) \approx H_{C_0} \left[1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^2 \right] \quad (1)$$

dove H_{C_0} è il campo critico allo zero assoluto. Nel 1933 Walther Meissner e Robert Ochsenfeld scoprirono che un superconduttore, una volta abbassata la sua temperatura al di sotto della temperatura critica, non conservava la quantità di flusso all'interno, anzi, lo espelleva, esattamente al contrario del comportamento ideale di un conduttore perfetto, che, come vedremo, è un materiale di tipo *conservativo* (in riferimento al flusso magnetico interno). Essi trovarono che il flusso all'interno di un blocco spesso di materiale superconduttivo era fondamentalmente nullo. Data la definizione di materiale diamagnetico, cioè un materiale che posto in un campo magnetico \mathbf{H} tende a minimizzare il flusso magnetico al proprio interno, capiamo subito che i superconduttori manifestano *proprietà diamagnetiche perfette*. Ovvero, il vettore di *magnetizzazione interna* \mathbf{M} definito dalla relazione

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (2)$$

dove \mathbf{B} è l'effettivo campo magnetico interno al materiale e μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto, è esattamente uguale all'opposto del campo applicato, $\mathbf{M} = -\mathbf{H}$, in modo tale da avere

$$\mathbf{B} = \mathbf{0}$$

Riscrivendo l'equazione del campo magnetico effettivo, essendo \mathbf{M} stesso funzione di \mathbf{H} , e in prima approssimazione proporzionale ad esso, abbiamo

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} \quad (3)$$

dove il parametro χ è chiamato *suscettività magnetica*, e descrive le proprietà magnetiche del materiale, in particolar modo la sua risposta ai campi esterni applicati. Appare evidente quindi che il valore del parametro χ per un materiale superconduttore è *esattamente* -1. L'abilità dei superconduttori di espellere il flusso magnetico è conosciuta come Effetto Meissner, e come vedremo è uno degli indicatori del fatto che la superconduttività sia decisamente di più di un mero stato di conduzione perfetta.

Modelli di superconduttività

Parallelamente al susseguirsi di nuove scoperte ed evidenze sperimentali riguardanti la superconduttività, si svilupparono decine di modelli teorici differenti che cercavano di spiegare la moltitudine di fenomeni connessi con questo nuovo *stato* della materia. Il primo modello ad affacciarsi fu il cosiddetto modello classico della superconduttività, proposto dai fratelli Fritz e Heinz London nel 1935, che riuscì ad incorporare nelle sue due equazioni costitutive, la conduzione perfetta e il diamagnetismo perfetto. Esso occuperà la prima metà del presente lavoro. Sebbene capace di spiegare due dei fenomeni più importanti della superconduttività, esso è un modello incompleto sia dal punto di vista dello spettro dei fenomeni superconduttivi che riesce a descrivere, sia dal punto di vista del significato fisico profondo. Esso è un modello ad hoc, scritto per rendere conto di dati di fatto sperimentali. Lo stesso vale per il secondo modello teorico, il Macroscopic Quantum Model proposto da F.London nel 1948. Esso fondamentalmente unisce le proprietà elettrodinamiche conosciute dei superconduttori (I e II equazione di London-London) alle proprietà quantomeccaniche. Esso è legato al terzo modello fenomenologico sulla superconduttività, proposto nel 1950 da Lev Landau e Vitaly Ginzburg capace di incorporare alle due precedenti proprietà anche una visione termodinamica estremamente precisa. Nonostante questi tre modelli siano tutt'ora utili nella descrizione di un vastissimo numero di fenomeni fisici conosciuti, essi non sono in grado di dare una spiegazione microscopica della superconduttività. Bisognò aspettare fino al 1957 prima di avere il primo modello microscopico della superconduttività, per opera di John Bardeen, Leon Cooper e Robert Schrieffer, che riuscì a dimostrare la natura reticolare dell'interazione alla base della transizione di stato superconduttivo. In questa teoria si mostra come sotto una certa temperatura critica, un elettrone di conduzione e gli ioni del reticolo a lui circostanti interagiscono in modo tale da far risultare un potenziale netto attrattivo fra l'elettrone ed un altro elettrone di conduzione, che si accoppiano costituendo una nuova particella bosonica (non elementare) vera e propria. Questo meccanismo di formazione delle cosiddette coppie di Cooper fu capace di integrare tutti i risultati conseguiti dalle teorie precedenti, e di superarli attraverso una nuova, più profonda spiegazione quantistica della superconduttività.

Capitolo 1

La prima equazione di London

1.1 Il modello di Drude

Nel 1900, Paul Drude propose il seguente modello per spiegare la conduzione ohmica in un materiale omogeneo, isotropo, lineare, locale e invariante nel tempo. Egli postulò che i portatori di corrente elettrica, gli elettroni non fortemente legati agli atomi del solido, esistono in un equilibrio termodinamico simile a quello del modello classico del gas perfetto, quindi negando qualsiasi tipo di interazione elettromagnetica fra di essi. In aggiunta, egli assunse che la risposta totale di tutti i portatori era la somma delle risposte di ogni singolo elettrone.

Cominciamo esaminando un singolo portatore, ovvero un elettrone di massa m e velocità v , considerando il suo moto secondo la meccanica newtoniana. Dalla legge di Newton abbiamo:

$$m \frac{dv}{dt} = \mathbf{f}_{EM} + \mathbf{f}_{drag}, \quad (1.1)$$

dove le uniche forze supposte agenti sulla particella sono quelle risultanti da un campo elettromagnetico esternamente applicato, f_{EM} , e quelle risultanti dalle collisioni, f_{drag} .

In generale, per un oggetto di carica q in moto con velocità v in un campo elettromagnetico, la legge di Lorentz stabilisce che la forza sull'oggetto è

$$\mathbf{f}_{EM} = q(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) \quad (1.2)$$

da cui si nota che la forza di origine magnetica non sarà mai nella direzione della velocità del moto. In generale, nel nostro modello classico degli elettroni in un solido, il moto netto di un grande numero di portatori dovuto all'interazione con i campi magnetici incontrati sperimentalmente è spesso trascurabile. Al contrario, l'effetto del campo elettrico è sempre non trascurabile, anche per campi deboli, per via del fatto che la forza dovuta al campo elettrico influisce sulla velocità lungo la stessa direzione. Quindi dopo aver sommato gli effetti su ogni particella, possiamo semplificare la nostra espressione della forza di natura elettromagnetica sul singolo elettrone

$$\mathbf{f}_{EM} \approx q\mathbf{E}. \quad (1.3)$$

L'ipotesi relativa alla forza di interazione f_{drag} è che il contributo netto di tutte le collisioni subite da un singolo portatore, sia identificabile come una generale forza impedente, analoga ad una resistenza di tipo viscoso, quindi proporzionale ma con direzione opposta alla velocità. Assumiamo quindi

$$\mathbf{f}_{drag} = -\frac{m}{\tau_{TR}}\mathbf{v}, \quad (1.4)$$

in cui abbiamo messo in evidenza la scelta di scrivere la costante in funzione del tempo di trasporto medio (o tempo di scattering) τ_{TR} . Il tempo di scattering può essere visto come il tempo medio fra un urto e l'altro: più un portatore collide in un certo lasso di tempo, maggiore è la forza d'attrito. È importante notare come τ_{TR} sia un parametro fenomenologico, il cui valore è determinato indirettamente dalle misurazioni sperimentali. A questo punto possiamo scrivere l'equazione del moto del singolo portatore:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{m}{\tau_{TR}}\mathbf{v} = q\mathbf{E} \quad (1.5)$$

Supponendo quindi che il campo elettrico interagente con il sistema vari sinusoidalmente nel tempo, otteniamo l'espressione per \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} = \left(q\frac{\tau_{TR}}{m} \frac{1}{1 + i\omega\tau_{TR}} \right) \mathbf{E}. \quad (1.6)$$

Per trovare la corrente netta \mathbf{J} che scorre nel materiale, sommiamo le risposte di tutti i portatori. Consistentemente con l'ipotesi che tutti i portatori si comportino identicamente, otteniamo

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v} \quad (1.7)$$

dove n , la densità di portatori nel materiale è in unità di particelle su unità di volume. Combinando l'equazione 1.6 con l'equazione 1.7 si ottiene

$$\mathbf{J} = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau_{TR}} \mathbf{E}, \quad (1.8)$$

dove la quantità indipendente dalla frequenza σ_0 è definita **come**

$$\sigma_0 = \frac{n\tau_{TR}q^2}{m} \quad (1.9)$$

Comparando questo risultato con la legge di Ohm [A17], otteniamo l'espressione per la conduttività:

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau_{TR}}. \quad (1.10)$$

A questo punto risulta interessante studiare l'ordine di grandezza di $\omega\tau_{TR}$. Scegliamo un

eccellente conduttore come il rame, il cui valore di σ_0 può essere facilmente trovato in tabelle. Possiamo quindi invertire l'equazione 1.9 per ottenere un' espressione utile del tempo di scattering:

$$\tau_{TR} = \frac{m\sigma_0 q^2}{n}. \quad (1.11)$$

Essendo i nostri portatori elettronici, i valori di m e $q=-e$ sono rispettivamente $9,1 \times 10^{-31}$ kg e $-1,6 \times 10^{-19}$ C. A temperatura ambiente, il valore della conduttività allo stato di equilibrio è misurato essere circa $5,8 \times 10^7$ S/m. Infine, sapendo che la densità del rame è di $8,96 \times 10^3$ kg/m³ e che la sua massa atomica è di $6,35 \times 10^{-2}$ kg/mol, e, assumendo che ogni atomo contribuisca con un unico elettrone di conduzione, otteniamo una densità di portatori all'incirca $n=8,5 \times 10^{28}$ #/m³. L'equazione 1.11 porta ad un valore del tempo di scattering all'incirca $\tau_{TR}=2,4 \times 10^{-14}$ s. Quindi per frequenze fino al 1THz, $\omega\tau_{TR} \ll 1$, e la conduttività del rame è essenzialmente indipendente dalla frequenza, ovvero non dispersiva.

Per frequenze tali che $\omega\tau_{TR} \gg 1$ invece notiamo che σ è un numero approssimativamente immaginario puro, e quindi non c'è alcuna dissipazione reale all'interno del materiale. Fisicamente si può immaginare come se i portatori, per via della loro inerzia, non riescono a viaggiare sufficientemente lontano per scatterare, in un singolo periodo. Essi oscillano avanti e indietro attorno ad un punto fisso, comportandosi effettivamente come dei dipoli e contribuendo quindi alla permittività del materiale. Di conseguenza per queste frequenze elettromagnetiche le onde possono propagarsi attraverso il materiale con una dissipazione di potenza *trascurabile*. Questo fatto però è in contraddizione con l'ipotesi che un conduttore ohmico, per quanto buono, dissiperà sempre una quantità non nulla di potenza. La ragione di ciò è che questa ipotesi è basata su un modello non dispersivo di conduttore, cioè le cui proprietà non dipendono dalla frequenza del campo elettromagnetico con esso interagente. Definiamo il regime *quasistatico* [1] come quel regime di interazione elettromagnetica tale per cui il prodotto fra la frequenza e il tempo di accoppiamento elettromagnetico τ_{EM} , definito come $\tau_{EM} = l\sqrt{\mu\epsilon}$ dipendente quindi dalle dimensioni lineari l del sistema interagente, è estremamente piccolo, ovvero

$$\omega\tau_{EM} \ll 1. \quad (1.12)$$

Quindi per valori di $\tau_{TR} < \tau_{EM}$ abbiamo che un elettrone può scatterare più volte nel corso di un singolo periodo di interazione con un' onda elettromagnetica a bassa frequenza. In altre parole se siamo in regime quasistatico 1.12 abbiamo la certezza che il materiale ohmico risulti non dispersivo, quindi dissipativo, poichè quindi $\omega\tau_{TR} \ll 1$. Essendo τ_{EM} dipendente dalle dimensioni caratteristiche del sistema, è possibile trovare un ordine di grandezza (circa il mm) in cui il materiale rimane ancora non dispersivo. Ma per valori di l ancora inferiori, l'ordine delle costanti temporali si inverte ed il materiale ohmico apparirà dispersivo persino in regime quasistatico. Ovvero è possibile soddisfare simultaneamente la condizione $\omega\tau_{EM} \ll 1$ e $\omega\tau_{TR} \gg 1$, in modo tale che il conduttore ohmico appaia non dissipativo sotto condizioni quasistatiche (cioè di bassa frequenza). Questa situazione si verifica spesso su circuiti integrati a grande scala di integrazione, dove le dimensioni dei cavi di rame diventano così piccole da poter essere approssimati come dei conduttori perfetti.

1.2 La prima equazione di London

In superconduttività però, la caratteristica di resistenza nulla non è un'approssimazione, in stati stazionari. Abbiamo visto anche che la legge di Ohm può darci effettivamente delle condizioni di non dissipazione. Quindi l'idea di base per scrivere una legge costitutiva dei materiali perfettamente conduttori, è quella di manipolare le costanti temporali caratteristiche in modo da avere la condizione quasistatica e la condizione di resistenza nulla valide entrambe anche nel limite per $\omega \rightarrow 0$. Ripercorriamo quindi il modello di Drude, però supponendo che i portatori di carica della corrente \mathbf{J} non siano più elettroni normali, bensì dei nuovi *superelettroni*: ciò che cerchiamo di ottenere è che la somma dei contributi dei singoli elettroni sia proprio la corrente non dissipativa, cioè che la somma netta dell'interazione reciproca fra i nuovi portatori di carica sia nulla: $\mathbf{f}_{drag} = 0$. Poiché questa condizione è proprio $\omega\tau_{TR} \gg 1$, e dato che vogliamo sia valida anche per frequenze tendenti a zero, dobbiamo permettere al tempo di scattering di tendere all'infinito. Quindi il nuovo modello è equivalente a risolvere il modello di Drude nel limite per $\tau_{TR} \rightarrow \infty$ in modo che sia valido anche per $\omega = 0$. Essendo la componente dissipativa reale inversamente proporzionale a τ_{TR} , e specificamente uguale a $m/nq^2\tau_{TR}$, risulta evidente che la quantità

$$\frac{m^*}{n^*q^{*2}} \quad (1.13)$$

è costante, dove l'asterisco in apice sta ad indicare che le quantità sono ora riferite ai superelettroni. Quindi, volendo trovare un'espressione per i superconduttori in cui compaia una funzione di trasferimento analoga alla legge di Ohm, valida però in condizioni $\tau_{TR} \rightarrow \infty$, arriviamo dunque a scrivere una legge della forma

$$\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\Lambda\mathbf{J}) \quad (1.14)$$

dove definiamo Λ come:

$$\Lambda = \frac{m^*}{n^*q^{*2}} \quad (1.15)$$

Questa forma speciale della legge di Ohm è proprio la prima equazione di London. Essa non viene ricavata teoricamente, ma è validata dalle evidenze sperimentali. Quello proposto è solo un ragionamento che cerca di giustificare per quale motivo la relazione 1.14 sia coerente con il contesto fisico in cui ci siamo posti. Una delle conseguenze immediate dell'equazione 1.14 è che *in un superconduttore si sviluppa una differenza di potenziale in conseguenza della applicazione di una corrente alternata*. Può sembrare paradossale che in un conduttore perfetto possa esserci una differenza di potenziale. La ragione giace nel realizzare che una caduta di potenziale lungo un oggetto avviene per un'impedenza, che può avere natura anche non necessariamente resistiva.

In base al modello di Drude, l'origine di questa ddp è legata all'inerzia dei superelettroni. Una volta messi in moto in una direzione, occorrerà del tempo affinché possano invertire il loro moto: i portatori di carica saranno fuori fase con il campo elettromagnetico e si svilupperà quindi una differenza di potenziale all'interno del superconduttore. In definitiva, per risolvere qualsiasi tipo di reale resistenza nulla dobbiamo quindi rivolgerci all'equazione 1.14 invece dell'usuale legge di Ohm non dispersiva.

1.3 Il campo magnetico all'interno di un conduttore perfetto

Per studiare il campo magnetico all'interno di un conduttore perfetto, partiamo dall'ipotesi fondante del regime cosiddetto *magnetoquasistatico* (MQS), ovvero che siano le correnti elettriche e non l'accumulo di carica, il fenomeno fisico principale all'interno di un conduttore. Quindi è il campo magnetico e non il campo elettrico, ad essere fortemente accoppiato con il sistema, risultando dominante dal punto di vista fenomenologico, cioè dell'immagazzinamento dell'energia. Essendo il campo elettrico debolmente accoppiato, abbiamo che \mathbf{H} è dato principalmente dalle correnti \mathbf{J} , quindi

$$\nabla \times \mathbf{H} \approx \mathbf{J}, \quad (1.16)$$

da cui

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} \quad (1.17)$$

e,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (1.18)$$

Quindi vogliamo esprimere \mathbf{J} in funzione di \mathbf{H} usando la prima equazione di London per mettere in relazione \mathbf{E} e \mathbf{J} , combinata con la legge di Faraday [A1] e la derivata nel tempo dell'espressione 1.16. Assumendo che il materiale è uniforme e non dispersivo, abbiamo:

$$\left(\frac{\mu_0}{\Lambda} - \nabla^2\right) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (1.19)$$

Notiamo che in questa equazione si può leggere una lunghezza caratteristica associata alle proprietà del sistema, cioè $\sqrt{\Lambda/\mu_0}$.

$$\lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{\mu_0}} \quad (1.20)$$

è definita profondità di penetrazione. Confrontando questa espressione con l'equazione di diffusione magnetica [2] per materiali conduttori ohmici (quindi dissipativi)

$$\left(\mu_0 \sigma_0 \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) \mathbf{H} = 0 \quad (1.21)$$

notiamo che nella 1.21 il numero d'onda è complesso, mentre nella prima è un numero reale. Ciò significa che nei materiali conduttori ohmici il campo penetrante è sì dissolvibile, ma la fase varia in base alla profondità, cioè penetra come un'onda smorzata. Essendo il numero d'onda reale, nei materiali conduttori perfetti il campo magnetico penetrante è evanescente con fase costante in tutto il blocco superconduttivo. Non essendoci quindi propagazione d'onda all'interno del materiale, nonostante esso permetta l'ingresso del

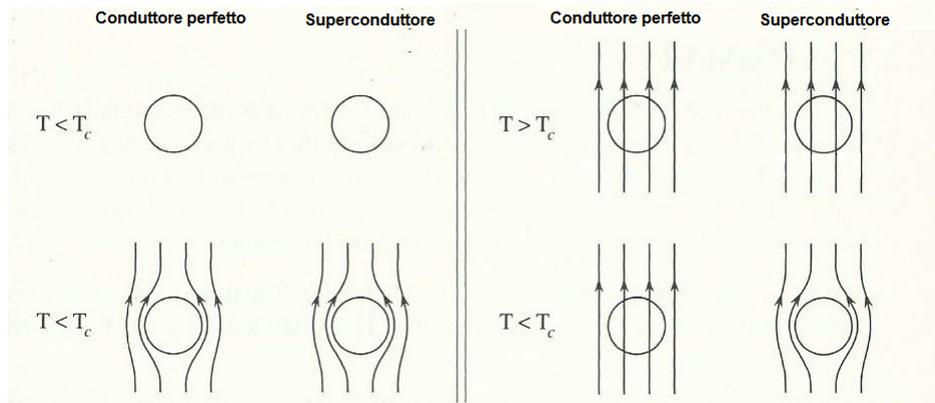


Figura 1.1: Differenza fra conduttori perfetti e superconduttori perfetti

campo magnetico, le energie coinvolte con i campi sono *reattive*, esse vengono cioè restituite completamente nel momento in cui il campo viene rimosso, ovvero non ci può essere alcun trasferimento di potenza nel materiale e il conduttore perfetto appare non dissipativo, come era ragionevole aspettarsi. Quindi la prima equazione di London è fondamentalmente un limite della legge di Ohm, dove però esso è già costruito all'interno della relazione costitutiva. Non essendoci dissipazione all'interno di un conduttore perfetto, riferendoci sempre al caso statico, qualsiasi distribuzione di campo presente all'interno prima dell'applicazione di un'onda elettromagnetica permane indefinitamente: *i superconduttori non sono conduttori perfetti*. Dallo studio [3] del campo magnetico all'interno di un conduttore perfetto si osserva che esso viene sì espulso, ma è tranquillamente possibile che in esso vi sia ancora un flusso statico. Ovvero *i materiali conduttori perfetti sono dei materiali che conservano il flusso*. Se esso è nullo prima dell'applicazione del campo esterno, rimarrà nullo anche successivamente, attraverso la generazione di un controcampo prodotto dalle correnti superficiali. Mentre se esso è costante diverso da zero, allora rimarrà tale anche dopo l'applicazione del campo esterno. Come si intuisce facilmente dalla figura 1.1, un materiale che diventa conduttore perfetto sotto una certa temperatura T_c , nel caso in cui sia immerso in un campo costante prima che la temperatura sia inferiore a quella critica, esso non espellerà il campo, in contraddizione con la fenomenologia dei superconduttori, dove l'effetto Meissner descrive proprio la capacità di questi di espellere il campo magnetico nel quale sono immersi, nel passaggio da $T > T_c$ a $T < T_c$. Quindi il modello del conduttore perfetto e la sua equazione di riferimento, 1.14, non riescono a tener conto dell'effetto Meissner. Proprio qui entra in gioco la seconda equazione di London.

1.4 La seconda equazione di London

Abbiamo quindi bisogno di una nuova legge costitutiva specifica per i superconduttori. Essa non solo deve giustificare l'effetto Meissner, ma deve anche conservare il risultato relativo alla caratteristica profondità di penetrazione λ . Sappiamo dall'equazione 1.19 che per un conduttore perfetto omogeneo, isotropo e lineare, la relazione

$$\left(\frac{1}{\lambda^2} - \nabla^2\right) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (1.22)$$

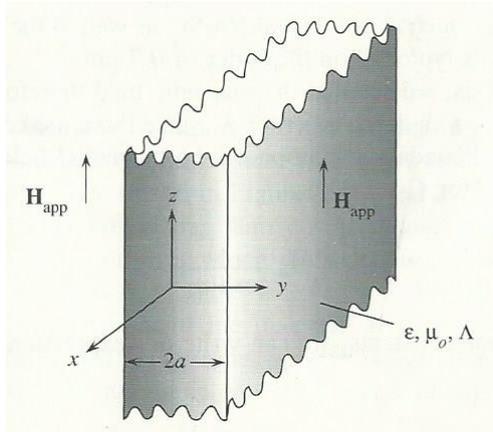


Figura 1.2: Barra conduttrice perfetta di lunghezza infinita e spessore finito

è identicamente soddisfatta. Abbiamo visto che ciò significa che la distribuzione del flusso all'interno di un conduttore perfetto dipende dalle condizioni iniziali, che è esattamente la differenza fra un materiale conservativo e uno espulsivo (cioè, superconduttore).

Osserviamo il caso di una barra conduttrice perfetta di spessore finito e lunghezza infinita 1.2, immersa all'interno di un campo magnetico tangenziale alla sua lunghezza

$$\mathbf{H}_{app} = \text{Re}\{\mathbf{H}_0 e^{i\omega t}\} \quad (1.23)$$

Il campo magnetico all'interno del conduttore è quindi diretto lungo z e varia solo lungo l'asse y , perciò l'equazione 1.22 diventa

$$\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\mathbf{H}(y) = 0. \quad (1.24)$$

Essendo un superconduttore identificabile come un conduttore perfetto con un campo interno nullo, la situazione sopraproposta è assolutamente identica anche per un materiale superconduttore. Essendo λ indipendente dalla frequenza, la distribuzione spaziale del flusso lo sarà ugualmente: possiamo abbassare la frequenza quanto vogliamo, B oscillerà nel tempo ma non nello spazio. E' chiaro che per campi stazionari la relazione 1.22 è automaticamente verificata come pure per il caso del conduttore perfetto.

Il campo stazionario verifica quindi l'espressione

$$\left(\frac{1}{\lambda^2} - \nabla^2\right)\mathbf{B} = 0 \quad (1.25)$$

e chiaramente una distribuzione che soddisfa la 1.25 soddisfa anche la 1.22. Come abbiamo detto, essendo il superconduttore identificabile con un conduttore perfetto con flusso interno nullo, e dato che la relazione 1.25 descrive la distribuzione del flusso di un superconduttore in situazioni statiche, allora essa **deve** includere la descrizione della condizione iniziale di assenza di campo. *Quindi se postuliamo l'idea che questa espressione*

valga per tutte le frequenze di campo applicato, riusciamo a giustificare il perfetto diamagnetismo di un blocco superconduttivo. A questo punto l'idea è che, avendo postulato che l'espressione 1.25 descriva il flusso all'interno di un superconduttore, dovremmo aver introdotto la *fisica* relativa all'effetto Meissner. Quindi ripercorrendo a ritroso, cerchiamo un'espressione che leghi le correnti e il flusso, che, come nel caso della prima equazione di London, sarà validata solo dalla verifica sperimentale.

Partendo dalla identità vettoriale

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (1.26)$$

applicata al flusso magnetico, aggiungendo la legge di Gauss [A3], otteniamo

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B} \quad (1.27)$$

Al che possiamo riscrivere l'equazione 1.25 come

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{\Lambda} \mathbf{B} \quad (1.28)$$

Essendo l'intero lavoro svolto nell'approssimazione magnetoquasistatica (MQS), avremo

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.29)$$

e utilizzando la relazione costitutiva $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ troviamo:

$$\nabla \times (\Lambda \mathbf{J}) = -\mathbf{B} \quad (1.30)$$

che è conosciuta come la seconda equazione di London. E' importante notare come la 1.30 a differenza della prima equazione di London 1.14 sia un postulato atto a garantire coerenza con l'effetto Meissner sperimentalmente osservato, e non è un limite particolare di una qualche legge costitutiva come la legge di Ohm. Combinando l'equazione 1.30 con la legge di Faraday [A1] otteniamo

$$\nabla \times \frac{\partial(\Lambda \mathbf{J})}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.31)$$

che significa che la seconda equazione di London è equivalente a postulare che la costante dell'integrazione rispetto al tempo dell'equazione 1.31 è identicamente zero.

1.5 Conservazione del flusso magnetico e correnti infinite

Consideriamo due *esperimenti mentali*: Prendiamo un cilindro cavo superconduttore, figura 1.3, i cui raggi sono tali per cui la loro differenza è molto maggiore della profondità

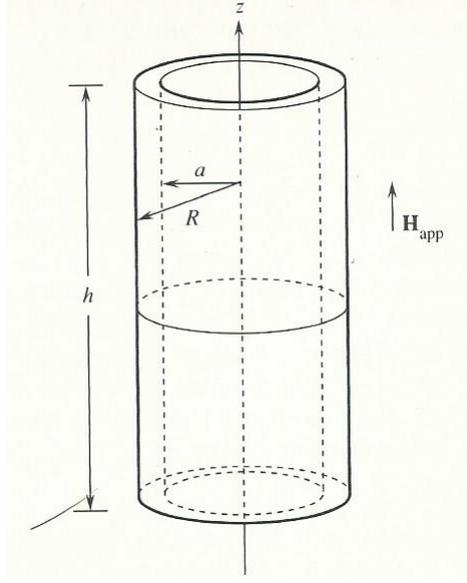


Figura 1.3: Cilindro superconduttore cavo con $R - a \gg \lambda$

di penetrazione del materiale. Nel primo caso portiamo il cilindro ad una temperatura $T < T_c$ e successivamente lo immergiamo in un campo magnetico statico.

La regione cava (spazio libero), è una regione *non* superconduttrice. Sappiamo consistentemente con la nostra approssimazione ($\delta R = R - a \gg \lambda$) che non ci sono campi all'interno della zona superconduttrice. In particolare $\mathbf{E}=0$. Di conseguenza eseguendo la circuitazione di \mathbf{E} sufficientemente all'interno del materiale, attorno ad una curva chiusa che delimita una superficie S moltepliciamente connessa, cioè contenente sia spazio libero che superconduttivo, utilizzando la forma integrale della legge di Faraday [A8], troviamo

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (1.32)$$

cioè il flusso magnetico che attraversa la superficie S è conservato nel tempo. Sappiamo però che $\mathbf{B}=0$ all'interno del superconduttore, per cui il flusso totale che attraversa la regione di spazio libero è costante nel tempo. Essendo il flusso nullo all'inizio, in assenza di campo applicato, dovrà essere nullo anche dopo l'applicazione, quindi sulla superficie esterna della cavità si generano delle supercorrenti che mantengono il flusso nullo. Quindi la distribuzione spaziale del flusso non cambia né dentro il materiale, né all'interno della cavità. Nel secondo caso invece applichiamo il campo magnetico statico *prima* che T sia minore di T_c , e solo *successivamente* raffreddiamo il materiale al di sotto della temperatura critica. Come sappiamo una corrente superficiale esterna si genererà per contrastare la presenza di flusso all'interno del superconduttore, ma questa corrente cancellerà anche il flusso all'interno della regione di spazio libero, cosa in contraddizione con la relazione 1.32. Come risultato, una corrente uguale ed opposta si genererà nella superficie interna del cilindro, in modo da mantenere costante il flusso attraverso la cavità. Quindi il flusso risultante sarà la sovrapposizione di tre flussi: quello applicato esterno, quello indotto dalla corrente superficiale esterna e quello indotto dalla corrente superficiale interna. Soppo-
ponendo ora di rimuovere la sorgente di campo magnetico applicato, non potendo variare

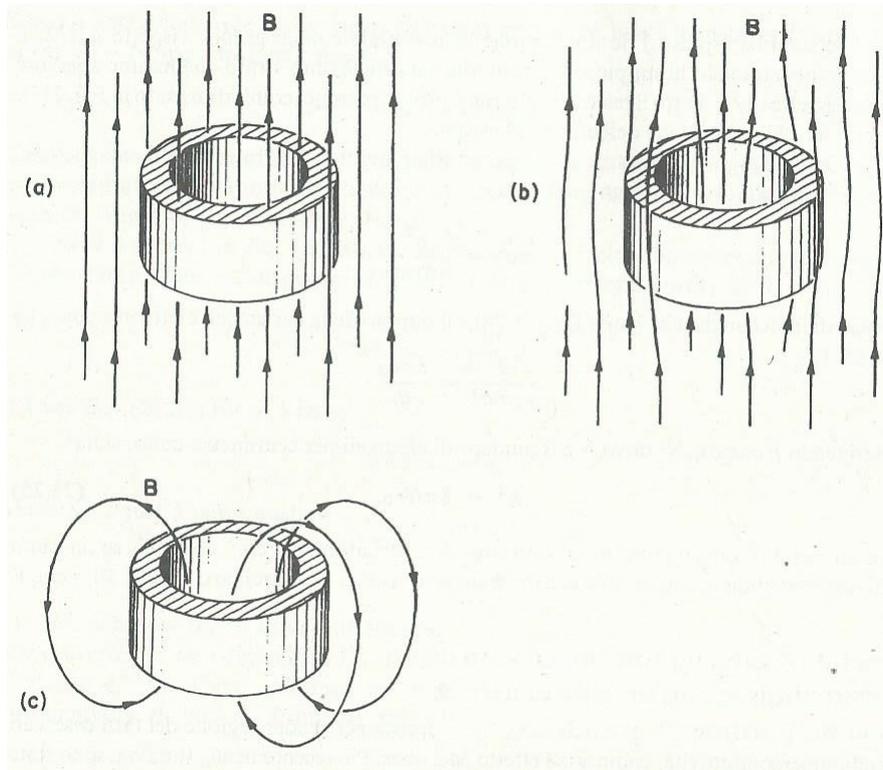


Figura 1.4: Didascalia: a) Temperatura $T > T_c$; immerso in campo Happ b) La temperatura passa $T < T_c$; ancora immerso in campo Happ c) La temperatura rimane $T < T_c$; viene rimosso il campo Happ

il flusso attraverso la superficie S , esso rimarrà intrappolato nella cavità. Continuerà ad essere generato dalla corrente superficiale interna, che essendo di fatto una *supercorrente continua*, quindi non dissipativa, *persisterà indefinitamente nel tempo*. Essendo il flusso nel tempo una grandezza misurabile, abbiamo descritto uno dei metodi utilizzati per verificare sperimentalmente l'idea che non ci sia alcuna reale dissipazione per correnti continue nei superconduttori. Gli esperimenti effettuati lungo periodi di *anni*, hanno dimostrato l'assenza di decadimento misurabile del flusso nel tempo, mostrando quindi ad un livello di accuratezza ben maggiore di qualsiasi misura ordinaria di resistenza, che il fenomeno dell'assenza di dissipazione per correnti continue è una effettiva proprietà dei superconduttori.

Abbiamo quindi ricavato delle espressioni fondate sull'elettrodinamica classica, validate con successo dagli esperimenti, capaci di giustificare due fenomeni tipici della superconduttività, quali la conduzione perfetta in condizioni statiche e l'effetto Meissner, cioè l'espulsione dei campi magnetici interni nel passaggio fra stato conduttivo normale e superconduttivo. Lo scopo della prossima sezione è quello di incorporare queste equazioni in un contesto quantistico macroscopico.

Capitolo 2

Modello Quantistico Macroscopico (MQM)

2.1 Introduzione: la funzione d'onda macroscopica

Le equazioni di London sono state postulate in relazione a delle evidenze sperimentali, e per quanto capaci di descrivere questi fenomeni e predirne altri di natura termodinamica, il modello classico non riesce a mostrare in che modo questi fenomeni siano legati fra loro. Vedremo quindi che attraverso un approccio quantistico *macroscopico*, cioè legato alla postulazione di una funzione d'onda generale capace di descrivere il moto dei portatori di carica nella loro totalità, saremo in grado non solo di derivare le equazioni di London, ma anche di predire un fenomeno puramente quantistico come la quantizzazione del flusso magnetico, che non risulta dalle equazioni dell'elettrodinamica classica. Fu London stesso nel 1948 [4] a pubblicare questa generalizzazione delle equazioni che scrisse con suo fratello. Egli infatti capì che la *superconduttività è un fenomeno quantistico che si manifesta su scale macroscopiche*. Quindi possiamo formulare il postulato di partenza del modello quantistico macroscopico: Esiste una funzione d'onda $\psi(\mathbf{r},t)$ che descrive il comportamento dell'intero sistema di superelettroni nel superconduttore. Questa assunzione è legata alla nozione che la superconduttività è un fenomeno coerente fra i vari *superelettroni*. Postulando l'esistenza di una $\psi(\mathbf{r},t)$ per descrivere tutti i portatori di carica, stiamo concentrando la nostra attenzione sul moto dei superelettroni preso come un unico sistema, analogamente all'idea fondamentale dell'elettrodinamica che permette di studiare un ensemble di fotoni coerenti come un'onda elettromagnetica. La quantità ψ allora sarà come una specie di campo capace di descrivere un grande numero di portatori di carica coerenti. Richiamiamo l'equazione di Schrödinger per una particella carica in un campo elettromagnetico

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)^2\psi + q\Phi\psi \quad (2.1)$$

dove \mathbf{A} è il potenziale vettore e Φ il potenziale scalare. Sottraendo all'equazione 2.1 il complesso coniugato della stessa equazione moltiplicata per ψ^* , otteniamo l'*equazione per la continuità della probabilità* $P(\mathbf{r},t) = |\psi|^2$ di trovare una particella carica in un campo

elettromagnetico nel punto \mathbf{r} al tempo t :

$$\frac{\partial P}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{J}_p, \quad (2.2)$$

dove

$$\mathbf{J}_p = \text{Re}\left\{\psi^* \left(\frac{\hbar}{im} \nabla - \frac{q}{m} \mathbf{A}\right) \psi\right\} \quad (2.3)$$

è detta *corrente di probabilità* per una particella carica in un campo elettromagnetico. L'idea è quella di confrontare la $\psi(\mathbf{r}, t)$ per l'ensemble di elettroni con la ψ di singola particella. Avendo interpretato il modulo quadro della ψ come la probabilità di trovare la particella nella posizione \mathbf{r} al tempo t , abbiamo immediatamente la condizione di normalizzazione

$$\int \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{v} = 1, \quad (2.4)$$

dovendo esistere certamente in qualche punto dello spazio. E' ragionevole quindi supporre che la $\psi(\mathbf{r}, t)$ che descrive l'intero ensemble di superelettroni debba soddisfare

$$\int \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{v} = N^*, \quad (2.5)$$

dove N^* è il numero totale di superelettroni che la funzione d'onda macroscopica descrive. Da questa espressione viene quindi spontaneo interpretare il modulo quadro della ψ come la *densità locale* di superelettroni

$$\psi(\mathbf{r}, t) \psi^*(\mathbf{r}, t) = n^*(\mathbf{r}, t). \quad (2.6)$$

Per far sì che l'utilizzo della densità locale continua abbia un senso, è necessario che la funzione d'onda descriva un grande numero di portatori di supercorrente. A questo punto è chiaro che, anzicchè trovarci a che fare con una funzione d'onda che descrive gli eventi in termini di probabilità, stiamo considerando una funzione d'onda che descrive la reale posizione di un certo sottoinsieme dell'ensemble di superelettroni. L'analogo della conservazione locale 2.2 descrive quindi lo scorrere delle particelle, cioè una vera e propria *corrente fisica*, che porta automaticamente a scrivere l'espressione esplicita della densità di questa supercorrente in un campo elettromagnetico:

$$\mathbf{J}_s = q^* \text{Re}\left\{\psi^* \left(\frac{\hbar}{im^*} \nabla - \frac{q^*}{m^*} \mathbf{A}\right) \psi\right\}, \quad (2.7)$$

in linea con l'equazione 2.3. Per le assunzioni fatte sulla $\psi(\mathbf{r}, t)$, è ragionevole supporre che essa obbrdisca all'equazione di Schrodinger per l'ensemble in un campo elettromagnetico:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m^*} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q^* \mathbf{A}\right)^2 \psi(\mathbf{r}, t) + q^* \Phi \psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.8)$$

che possiamo interpretare come la somma delle energie dei singoli portatori superelettronici. Per via del fattore di fase i nell'equazione 2.8, anche la funzione d'onda macroscopica è una quantità complessa. Quindi la $\psi(\mathbf{r},t)$ è della forma

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n^*(\mathbf{r}, t)} e^{i\theta(\mathbf{r}, t)} \quad (2.9)$$

dove $\theta(\mathbf{r}, t)$ è una funzione reale che rappresenta la fase del numero complesso. Avendo scritto la funzione d'onda in questo modo, abbiamo garantito che il suo modulo quadrato corrisponda alla densità locale di superelettroni. Sostituendo 2.9 in 2.8 otteniamo l'equazione della supercorrente:

$$\mathbf{J}_s = q^* n^*(\mathbf{r}, t) \left(\frac{\hbar}{m^*} \nabla \theta(\mathbf{r}, t) - \frac{q^*}{m^*} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right), \quad (2.10)$$

dove la quantità fra parentesi è associabile alla velocità della supercorrente

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m^*} \nabla \theta(\mathbf{r}, t) - \frac{q^*}{m^*} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (2.11)$$

L'equazione 2.10 mette subito in mostra un fatto interessante: la supercorrente, quantità misurabile sperimentalmente, è in relazione con la fase dell'onda macroscopica e con il potenziale vettore, entrambe grandezze non direttamente misurabili. Del resto θ è la fase assoluta della funzione d'onda, quindi non può avere alcun significato fisico diretto. Inoltre il fatto che il rotore del gradiente di una qualsiasi funzione scalare sia sempre nullo, implica che, dato un funzionale arbitrario γ :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \gamma), \quad (2.12)$$

cioè esiste un numero infinito di potenziali vettori che descrivono il flusso magnetico corretto. L'equazione 2.10 sembra mostrare che le quantità θ e \mathbf{A} non siano solo delle variabili la cui esistenza è funzione della sola coerenza matematica formale, ma che esse rappresentino a tutti gli effetti quantità fisiche consistenti, misurabili, cosa però in contraddizione con l'esperienza. La questione è risolta dall'osservare che in realtà la relazione fra θ e \mathbf{A} non è affatto arbitraria. Cioè chiediamo che l'equazione 2.10 sia indipendente dalla specifica scelta di \mathbf{A} . In termini tecnici si chiede cioè che l'equazione della supercorrente sia *gauge invariante*, questione approfondita in **Appendice 2**.

2.2 Seconda equazione di London

L'equazione 2.10 rappresenta la forma più generale per la supercorrente in un superconduttore isotropo, poiché include la possibilità che la densità locale di superelettroni non sia costante, né nello spazio, né nel tempo. Sostituendo in 2.8 la ψ che abbiamo considerato e prendendo la porzione immaginaria dell'equazione, otteniamo

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s = -\frac{\partial}{\partial t} (q^* n^*) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}, \quad (2.13)$$

cioè l'equazione di conservazione della carica. In generale è assolutamente consistente supporre che n^* sia costante, poiché in molte situazioni pratiche gli ordini di grandezza spaziali e temporale delle fluttuazioni di densità del fluido superelettronico sono troppo piccoli per essere ingegneristicamente apprezzabili.

A questo punto, ciò che vogliamo dimostrare è che le ipotesi alla base del MQM siano consistenti con le equazioni di London; nello specifico richiediamo che esse siano conseguenza della supercorrente nel limite in cui n^* è costante. Reintroduciamo allora il coefficiente di London isotropo Λ nell'equazione 2.10:

$$\Lambda \mathbf{J}_s = -(\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{\hbar}{q^*} \nabla \theta(\mathbf{r}, t)). \quad (2.14)$$

Eseguendo il rotore di questa espressione e ricordando che il rotore del gradiente di un funzionale è sempre nullo, otteniamo

$$\nabla \times (\nabla \mathbf{J}_s) = -\nabla \times \mathbf{A} = -\mathbf{B} \quad (2.15)$$

e la seconda equazione di London è immediatamente ricavata.

2.3 Prima equazione di London

Per ottenere la prima equazione di London, prendiamo la derivata parziale nel tempo dell'equazione 2.14,

$$\frac{\partial \Lambda \mathbf{J}_s}{\partial t} = -\left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\hbar}{q^*} \nabla \frac{\partial \theta}{\partial t} \right]. \quad (2.16)$$

Il problema chiaramente è che non abbiamo ancora trovato l'espressione della dipendenza temporale della fase θ della funzione. Ricordando però che n^* =costante sia nello spazio che nel tempo, prendendo la parte reale dell'equazione di Schrödinger 2.8, otteniamo proprio

$$-\hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{2n^*} \Lambda \mathbf{J}_s^2 + q^* \Phi, \quad (2.17)$$

che è conosciuta come relazione fase-energia. Sostituendo in 2.16 otteniamo

$$\frac{\partial \Lambda \mathbf{J}_s}{\partial t} = \mathbf{E} - \frac{1}{n^* q^*} \nabla \left(\frac{1}{2} \Lambda \mathbf{J}_s^2 \right), \quad (2.18)$$

ricordando che la relazione fra campo elettrico \mathbf{E} e potenziale scalare Φ è descritta da [A.20]. Salta subito all'occhio che l'equazione 2.18 che abbiamo ottenuto è quasi identica alla prima equazione di London, con la differenza di un termine extra che possiamo identificare come proporzionale al gradiente dell'energia cinetica dei superelettroni. Può venire automatico pensare che questo termine derivi dal formalismo quantistico e che quindi la derivazione classica delle equazioni di London non sia capace di produrre la stessa relazione. Ma se fosse un effetto della meccanica quantistica esso sarebbe proporzionalmente

dipendente dalla costante \hbar , cosa che non è. Quindi bisogna dimostrare per quale motivo nella prima sezione si è arrivati ad un'equazione differente.

Dall'analisi vettoriale sappiamo che per qualsiasi vettore \mathbf{C} vale:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{C} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{C} \nabla \cdot) \mathbf{C}. \quad (2.19)$$

Applicando la reazione 2.19 alla prima equazione di London 2.18, possiamo quindi scrivere quest'ultima come

$$\frac{\partial \Lambda \mathbf{J}_s}{\partial t} + \frac{1}{n^* q^*} (\mathbf{J}_s \nabla) (\Lambda \mathbf{J}_s) = \mathbf{E} + \frac{1}{n^* q^*} (\mathbf{J}_s \times \mathbf{B}) \quad (2.20)$$

Sfruttando quindi la formula per la derivata totale

$$\frac{dv(\mathbf{r})}{dt} = \frac{\partial v(\mathbf{r})}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla v(\mathbf{r}) \quad (2.21)$$

otteniamo:

$$\frac{d\Lambda \mathbf{J}_s}{dt} = \frac{\partial(\Lambda \mathbf{J}_s)}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \nabla) (\Lambda \mathbf{J}_s) \quad (2.22)$$

Infine ricordando che la supercorrente altro non è che $\mathbf{J}_s = n^* q^* \mathbf{v}_s$, troviamo

$$m \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = q^* \mathbf{E} + q^* (\mathbf{v}_s \times \mathbf{B}). \quad (2.23)$$

E' successo quindi che dall'equazione di Lorenz e dalla seconda equazione di London abbiamo ottenuto la forma non lineare della prima equazione di London. Il fatto che ad un più alto livello di coerenza, come è quello quantistico, si ottenga prima la seconda e poi la prima equazione di London è un indizio riguardo l'estrema importanza che ricopre l'effetto Meissner nella superconduttività. Esso è un fenomeno più profondo, più fondamentale della conduzione perfetta in stati stazionari.

La ragione per cui nella prima sezione siamo arrivati alla forma lineare della prima equazione di London è semplicemente la presenza dell'ipotesi di lavoro di trascurabilità dei termini magnetici nella equazione di Lorenz. Nel caso in cui fossero stati mantenuti saremmo arrivati allo stesso risultato dell'ulteriore termine non lineare. Anche se incompleta, la prima formulazione della prima equazione di London che abbiamo dato è comunque valida in molte situazioni di ambito ignegneristico. Concludiamo il discorso riguardo la differenza fra le due formulazioni della prima equazione di London notando che abbiamo trattato la supercorrente come un campo alla stregua di \mathbf{E} o \mathbf{B} . Perciò utilizzando la formulazione lineare 1.14 (con \mathbf{J}_s al posto di \mathbf{J}) per calcolare la densità locale di energia associata alla supercorrente, otteniamo

$$\mathbf{E} \mathbf{J}_s = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \Lambda \mathbf{J}_s^2 \quad (2.24)$$

che non è vera. Essendo \mathbf{J}_s un flusso di particelle cariche, vi è un'energia associata sia

con il momento cinetico che con quello di campo, che è semplicemente un altro modo di esprimere il fatto che il momento conservato è quello canonico, definito dall'espressione

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}. \quad (2.25)$$

Utilizzando l'espressione non lineare 2.18 otteniamo invece

$$\mathbf{E}\mathbf{J}_s = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \Lambda \mathbf{J}_s^2 \quad (2.26)$$

che è la corretta espressione per la densità locale di energia.

2.4 Passaggio dal modello classico al modello quantistico

Abbiamo visto come la postulazione di una funzione d'onda macroscopica la cui corrente di probabilità corrisponde ad una vera e propria corrente fisica di portatori di carica, i superelettroni, ci permetta di derivare le equazioni di London e quindi giustificare l'approccio basato sul modello di Drude di portatori non potenzialmente interagenti e con un tempo di scattering τ_{TR} infinito. Ma il modello quantistico ci dà un'informazione in più riguardo gli elettroni di conduzione, cioè che ogni portatore nel normale gas di elettroni ha una velocità di base associata con sé. In altre parole, se non viene applicata o indotta alcuna corrente, in un materiale a $T=0$, ogni elettrone di conduzione si muove in direzioni casuali con *velocità di Fermi* v_F . Chiaramente anche se tutti gli elettroni hanno la stessa velocità in modulo, non c'è alcuno spostamento netto, per via della casualità della direzione del moto di ciascun portatore. La velocità associata alla corrente è quindi quella netta. La velocità di Fermi permette di utilizzare i limiti temporali che abbiamo discusso nel Capitolo 1, per riscriverli dal punto di vista spaziale. Essendo il tempo medio fra ogni evento di scattering proprio τ_{TR} , la distanza media percorsa fra un urto e l'altro, detta libero cammino medio l_{TR} è:

$$l_{TR} = v_F \tau_{TR}. \quad (2.27)$$

Citando l'esempio del rame, che abbiamo visto avere un tempo medio di scattering di $\tau_{TR} = 10^{-14} s$ e sapendo che la velocità di Fermi è dell'ordine dei 10^7 m/s, troviamo che il libero cammino medio per l'elettrone nel rame è circa 0,24 micrometri. Richiamando la condizione di non dispersività per la conduttività

$$\omega \tau_{TR} \ll 1, \quad (2.28)$$

e sapendo che $v_F = c/10$, abbiamo la conversione ad una condizione spaziale:

$$10l_{TR} \ll \lambda_{EM}, \quad (2.29)$$

dove λ_{EM} è la lunghezza d'onda dell'onda elettromagnetica nel materiale. Ciò significa

che se la lunghezza d'onda è così grande da saltare molti siti di scattering, il moto degli elettroni sarà quindi maggiormente influenzato dagli urti reciproci, piuttosto che dalle variazioni di campo elettromagnetico. Questo fa sì che la corrente totale nel materiale sia poco sensibile ai cambiamenti di frequenza, ed è quindi valida l'approssimazione non dispersiva per la legge di Ohm e tutto ciò che ne consegue.

2.5 Quantizzazione del flusso magnetico

Abbiamo finora visto come il modello quantistico macroscopico sia consistente con le leggi costitutive dedotte attraverso un metodo di ragionamento e un formalismo classici. Ma una delle conseguenze di maggiore interesse insita nell'aumentare il livello di generalità di un modello fisico, è priorio la capacità di prevedere e ampliare l'orizzonte dei nuovi fenomeni fisici sia conosciuti ma non ancora spiegati, sia non ancora conosciuti. Vediamo ora, su un materiale superconduttore omogeneo e isotropo, uno degli effetti del formalismo quantistico. Cominciamo riscrivendo la supercorrente in termini di Λ 2.14

$$\Lambda \mathbf{J}_s = -(\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{\hbar}{q^*} \nabla \theta(\mathbf{r}, t)). \quad (2.30)$$

Integriamo questa espressione lungo una curva chiusa C . Dal teorema di Stokes [A.6] sappiamo che

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.31)$$

con S la superficie delimitata dalla curva C e \mathbf{B} la densità di flusso magnetico associata con il potenziale vettore. Allora l'equazione 2.30 può essere riscritta come

$$\oint_C \Lambda \mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{l} + \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\hbar}{q^*} \oint_C \nabla \theta \cdot d\mathbf{l} \quad (2.32)$$

Ora dobbiamo valutare l'integrale al secondo membro. Sappiamo dal calcolo vettoriale che l'integrale del gradiente di un funzionale lungo il percorso definito dai punti \mathbf{r}_a ed \mathbf{r}_b è:

$$\int_{r_a}^{r_b} \nabla \theta \cdot d\mathbf{l} = \theta(\mathbf{r}_b, t) - \theta(\mathbf{r}_a, t) \quad (2.33)$$

che lascerebbe supporre che per $\mathbf{r}_b \rightarrow \mathbf{r}_a$, cioè chiudendo la curva di integrazione, l'integrale 2.32 si annulli. Questo *non è vero in generale*, poichè non è definito il valore specifico della fase di ψ . Infatti esistono infiniti valori della fase tali che, per valori *interi* di n , l'espressione

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n^*} e^{i(\theta_p + 2\pi n)} \quad (2.34)$$

dia sempre lo stesso valore di ψ . Da cui capiamo che nonostante il valore della funzione d'onda macroscopica sia sempre definito, la sua fase

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \theta_p(\mathbf{r}, t) + 2\pi n, \quad (2.35)$$

non lo è. La fase può essere quindi specificata solo a meno di addendi, multipli di 2π , del suo valore principale θ_p compreso fra $[-\pi, \pi]$. Essendo θ_p una funzione ad un valore, troviamo che

$$\oint_C \nabla\theta \cdot d\mathbf{l} = \lim_{\mathbf{r}_b \rightarrow \mathbf{r}_a} (\theta(\mathbf{r}_b, t) - \theta(\mathbf{r}_a, t)) = 2\pi n. \quad (2.36)$$

Da questa relazione troviamo che la 2.32 diventa

$$\oint_C \Lambda \mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{l} + \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = n\Phi_0, \quad (2.37)$$

dove n è stato sostituito con $-n$ senza alcuna perdita di generalità, e ϕ_0 rappresenta il quanto del flusso, definito come

$$\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{|q^*|} = \frac{h}{|q^*|}, \quad (2.38)$$

che per definizione è una quantità positiva.

Regioni semplicemente e molteplicemente connesse

Consideriamo una curva chiusa che definisce una superficie in una regione superconduttiva semplicemente connessa, come mostrato in figura 2.1. Dato che l'equazione 2.37 vale per tutte le curve chiuse, immaginiamo di ridurre le dimensioni della curva a zero. In questo caso entrambi gli integrali al primo membro si annullano, supponendo che non vi siano singolarità nella supercorrente e nella densità di flusso, e troviamo che $n=0$ nella regione semplicemente connessa. Questo era ragionevole supporlo, poichè in generale la condizione $n=0$ porta a

$$\oint_C \Lambda \mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.39)$$

che corrisponde alla seconda equazione di London per regioni semplicemente connesse. La situazione in una regione molteplicemente connessa è invece radicalmente differente. Nel caso in figura 2.2 la superficie S definita dalla curva chiusa C copre sia una regione superconduttiva, sia una di spazio libero. Applicando il limite $\mathbf{r}_b \rightarrow \mathbf{r}_a$ nell'integrazione da \mathbf{r}_b ad \mathbf{r}_a , abbiamo costruito una sorta di memoria nel percorso, ovvero le fasi in \mathbf{r}_b e in \mathbf{r}_a sono ora distinte. Di conseguenza, nonostante il valore principale θ_p sia necessariamente lo stesso, la differenza fra le due fasi è ora di $2\pi n$. E' importante notare che un qualsiasi flusso esternamente applicato, generato da campi magnetici o correnti, non è necessariamente quantizzato. Il fatto che il flusso attraverso una regione molteplicemente connessa non possa avere valori arbitrari, è un risultato ben al di là delle possibilità della teoria classica. Come abbiamo visto nella sezione 5 del capitolo 1, nel caso in cui un campo magnetico è applicato parallelamente su un cilindro cavo superconduttore *prima* di portare il materiale nello stato superconduttivo, nel momento in cui la temperatura viene portata sotto T_c e il campo viene successivamente rimosso, due correnti superficiali vengono generate nel superconduttore affinché il flusso nella regione cava rimanga invariato nel tempo. Nel caso classico però, l'unico vincolo era dato dalla legge di Ampere [A.9], e quindi l'intensità del modulo intrappolato poteva essere scelta arbitrariamente

grande variando l'intensità del flusso inizialmente applicato. Nel caso quantistico invece, in aggiunta alla legge di Ampere, le supercorrenti indotte devono rispettare la condizione di quantizzazione del flusso, rappresentata dall'equazione 2.37. Se scegliamo una curva chiusa molto lontana dalle superfici del superconduttore in modo tale che $\mathbf{J}_s=0$, il modello macroscopico quantistico rivela che

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = n\Phi_0. \quad (2.40)$$

Ciò significa che, indipendentemente dal valore del campo magnetico inizialmente applicato, la densità totale intrappolata nel cilindro, comprendente sia la densità di flusso penetrato superficialmente nel superconduttore, sia quello compreso nella regione di spazio libero, risulta quantizzata. F.London, che propose questa teoria quantistica macroscopica nel 1948, calcolò il valore di ϕ_0 supponendo q^* uguale alla carica dell'elettrone, ricavando un valore di ϕ_0 pari a:

$$\Phi_0 \approx \frac{h}{|-e|} \approx 4 \times 10^{-7} \text{ Gauss cm}^2. \quad (2.41)$$

Nel 1961, B.S.Deaver e W.M.Fairbank [5] e, indipendentemente, R.Doll e M.Nabauer, [6] eseguirono esperimenti sulla quantizzazione del flusso che mostravano entrambi un valore di ϕ_0 pari a

$$\Phi_0 \approx 2 \times 10^{-7} \text{ Gauss cm}^2, \quad (2.42)$$

che, comparato con l'equazione 2.38 portò a individuare $q^* = -2e$. Essa fu la *prima evidenza sperimentale* del risultato mostrato da Bardeen, Cooper e Shrieffer nella loro teoria microscopica del 1957, cioè che i portatori di carica nei superconduttori hanno carica doppia di quella dell'elettrone, essendo di fatto due elettroni accoppiati, definiti infatti coppia di Cooper.

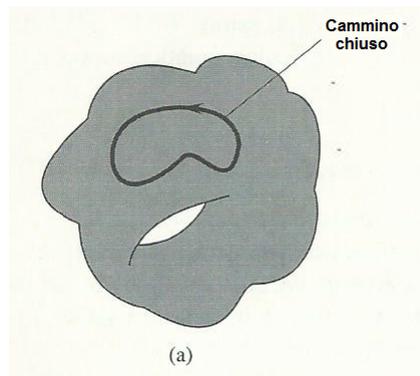


Figura 2.1: Cammino in una regione di superconduttore semplicemente connessa

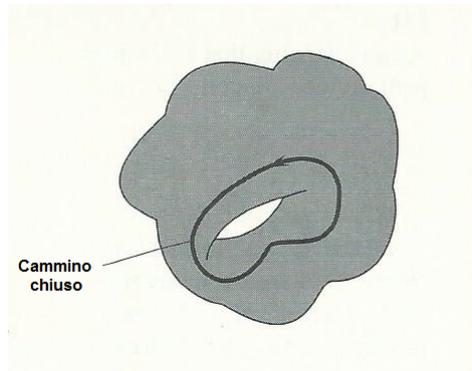


Figura 2.2: Cammino in una regione di superconduttore molteplicemente connessa

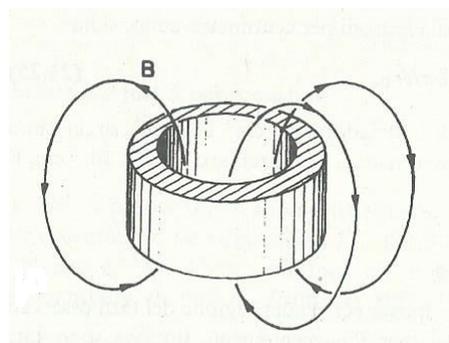


Figura 2.3: Anello superconduttore con flusso magnetico intrappolato

Capitolo 3

Conclusioni

Abbiamo esplorato a grandi linee le idee fisiche dietro la scrittura delle due equazioni di London-London, fondate sull'elettrodinamica classica e sul modello di Drude per un conduttore ohmico, ampliato poi per comprendere gli effetti di resistenza nulla ed espulsione del flusso magnetico dall'interno del materiale superconduttivo. Sviluppando poi il modello quantistico macroscopico, fondato sull'idea che l'ensemble coerente di *superelettroni* possa esser descritto da un'unica funzione d'onda macroscopica nella forma $\psi(r,t)=\sqrt{n^*(r,t)}e^{i\theta(r,t)}$, siamo riusciti non solo a ricavare entrambe le equazioni di London-London, ma a descrivere e predire un risultato che esula dalle possibilità insite nel modello classico, ovvero la quantizzazione del flusso magnetico intrappolato da una regione moltepliciamente connessa. Nonostante entrambi i modelli siano insufficienti a descrivere tutti i fenomeni conosciuti dei materiali superconduttori, essi mostrano come la postulazione di leggi basate su idee fisiche semplici e la naturale evoluzione degli strumenti formali e concettuali utilizzati per descriverle, siano uno strumento potente che da sempre fornisce risultati importanti nella comprensione della natura, ovvero lo scopo ultimo della fisica. Non bisogna lasciarsi ingannare però dall'idea che sia sempre possibile arrivare alla formulazione di un modello omnicomprensivo, qualsiasi sia l'ambito fenomenologico che stiamo considerando. La natura si presenta estremamente frammentata dal punto di vista dei modelli fisici, nonostante ai nostri occhi essa sia un'unica sorgente di informazioni convolute l'una nell'altra in un miscela continua di fenomeni. La nostra necessità, in quanto fisici, di capire il più possibile di ciò che stiamo osservando, ci porta ad indagare con grande attenzione tutti quei casi limite dove le nostre descrizioni dei fenomeni appaiano formalmente differenti ma fenomenologicamente molto vicine. Anche se forse non riusciremo mai ad avere una Teoria del Tutto, l'idea che i vari modelli debbano essere comunque collegati con continuità formale nelle zone di contiguità fenomenologica, di cui è un chiaro esempio il *principio di corrispondenza* fra meccanica classica e quantistica, è uno dei pilastri della fisica ed è sempre sintomo di un buon livello di ragionevolezza del modello che abbiamo costruito. E, come è stato possibile capire attraverso questo lavoro, le equazioni di London-London e il modello quantistico macroscopico sono un ottimo esempio di modelli *corrispondenti*, sia fra di loro che con altri modelli ad un livello maggiore di generalità.

Appendice A

Relazioni fondamentali dell'elettrodinamica classica e valori delle costanti

Equazioni di Maxwell in forma differenziale (unità di misura mks):

$$\text{Legge di Faraday: } \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{A.1}$$

$$\text{Legge di Ampere-Maxwell: } \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad \text{A.2}$$

$$\text{Legge di Gauss: } \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_L \quad \text{A.3}$$

$$\text{Legge di Gauss Magnetica: } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{A.4}$$

$$\text{Equazione non indipendente della continuità di carica: } \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_L}{\partial t} = 0 \quad \text{A.5}$$

$$\text{Legge di Stokes: } \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{A.6}$$

$$\text{Legge di Gauss: } \oint_\Sigma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{v} \quad \text{A.7}$$

Equazioni di Maxwell in forma integrale (unità di misura mks):

$$\text{Legge di Faraday: } \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} \quad \text{A.8}$$

$$\text{Legge di Ampere-Maxwell: } \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \nabla \times \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \int_S \nabla \times \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{A.9}$$

$$\text{Legge di Gauss: } \oint_\Sigma \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho_L \cdot d\mathbf{v} \quad \text{A.10}$$

$$\text{Legge di Gauss Magnetica: } \oint_\Sigma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \text{A.11}$$

$$\text{Continuità di carica: } \oint_\Sigma \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_L \cdot d\mathbf{v} = 0 \quad \text{A.12}$$

Leggi costitutive:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{A.13}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad \text{A.14}$$

Per materiali omogenei, isotropi, locali, lineari le leggi costitutive in forma dispersiva sono:

$$\mathbf{B}(r, \omega) = \mu(\omega) \mathbf{H}(r, \omega) \quad \text{A.15}$$

$$\mathbf{D}(r, \omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(r, \omega) \quad \text{A.16}$$

Da cui deriva la legge di Ohm in forma dispersiva:

$$\mathbf{J}(r, \omega) = \sigma(\omega) \mathbf{E}(r, \omega) \quad \text{A.17}$$

In forma non dispersiva:

$$\mathbf{J} = \sigma_0 \mathbf{E} \quad \text{A.18}$$

Relazione fra il potenziale vettore, il potenziale scalare e i campi elettrici e magnetici:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \text{A.19}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla(\Phi) \quad \text{A.20}$$

Con:

E: campo elettrico in volt/metro

H: campo magnetico in ampere/metro

D: induzione elettrica in coulomb/metro²

B: densità di flusso magnetico in tesla

J: densità di corrente libera in coulomb/metro²

P: vettore polarizzazione in coulomb/metro²

M: vettore magnetizzazione in ampere/metro

ε_0 : costante dielettrica del vuoto in F/m

μ : permeabilità magnetica del vuoto in H/m

Appendice B

Invarianza di Gauge del potenziale vettore per l'equazione per la supercorrente

Supponendo di definire un nuovo potenziale vettore A' come

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\gamma. \quad (\text{B.1})$$

Abbiamo visto dall'equazione 2.12 che esso descrive ugualmente la densità di flusso magnetico originale. Esso deve quindi descrivere il campo elettrico originale, il che ci porta a scrivere anche un nuovo potenziale scalare Φ' , in modo che

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla\Phi'. \quad (\text{B.2})$$

Comparando questa equazione con quella originaria [A.20]

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\Phi, \quad (\text{B.3})$$

vediamo che i due potenziali scalari sono in relazione secondo

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial\gamma}{\partial t}, \quad (\text{B.4})$$

che ci permette di specificare anche la dipendenza temporale per la funzione arbitraria γ , per generare il nuovo set di potenziali scalare e vettore, capaci di descrivere gli originali campi elettromagnetici. Dobbiamo quindi essere in grado di scrivere l'equazione di Schrödinger 2.8 nei nuovi potenziali:

$$i\hbar\frac{\partial\psi'(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{2m^*}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q^*\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t)\right)^2\psi'(\mathbf{r}, t) + q^*\Phi'(\mathbf{r}, t)\psi'(\mathbf{r}, t), \quad (\text{B.5})$$

con

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n^*(\mathbf{r}, t)} e^{i\theta'(\mathbf{r}, t)} \quad (\text{B.6})$$

la nuova funzione d'onda macroscopica associata ai potenziali. Va notato che l'ampiezza della nuova è uguale alla vecchia, poichè entrambe devono descrivere lo stesso scenario fisico individuato dalla densità locale di superelettroni. Quindi la nuova supercorrente $\mathbf{J}_s'(\theta', \mathbf{A}')$ dev'essere uguale alla vecchia, da cui

$$\frac{\hbar}{m^*} \nabla \theta' - \frac{q^*}{m^*} \mathbf{A}' = \frac{\hbar}{m^*} \nabla \theta - \frac{q^*}{m^*} \mathbf{A} \quad (\text{B.7})$$

che è verificata solo se

$$\theta' = \theta + \frac{q^*}{m^*} \gamma, \quad (\text{B.8})$$

e la relazione fra le due funzioni d'onda diventa:

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t) e^{i \frac{q^*}{\hbar} \gamma}. \quad (\text{B.9})$$

La funzione gamma cambia la forma sia di \mathbf{A} che di θ , ma la supercorrente ha un preciso valore sperimentalmente misurato indipendente dal gauge scelto.

Bibliografia

- [1] Pag. 32 di Foundation of Applied Superconductivity – T.Orlando, K.Delin (MIT), Addison-Wesley Publishing Company(1991)
- [2] Pag 38 di Foundation of Applied Superconductivity – T.Orlando, K.Delin (MIT), Addison-Wesley Publishing Company(1991)
- [3] Pag 66 di Foundation of Applied Superconductivity – T.Orlando, K.Delin (MIT), Addison-Wesley Publishing Company(1991)
- [4] Superfluids – F.London (Duke University) , John Wiley& Sons, inc (1961)
- [5] B.S.Deaver, W.M.Fairbank – Physical Review Letters, 1961
- [6] R.Doll, M.Nabauer – Physical Review Letters, 1961

Documenti, libri consultati per la realizzazione della tesi ma senza riferimenti:

La fisica di Feynman - di R.P.Feynman, R.B.Leighton, M.Sands Zanichelli (2012)

Superconductivity, Superfluids and Condensates – di J. F.Annett (University of Bristol) – Oxford University Press (2003)

Theory of Superconductivity, A primer – di H.Eschrig (2008)