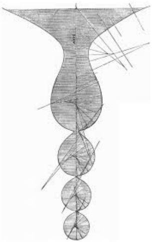
Lecciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Ecuaciones Exactas

Universidad Autónoma Metropolitana



September 13, 2020

Definición

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables reales cuyas derivadas parciales son continuas en un dominio D. La diferencial total de $f(x, y)$, denotada por $df(x, y)$ se define como:

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy, \quad (x,y) \in D \tag{1}$$

en donde, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ son las derivadas parciales de $f(x, y)$, con respecto a x y a y, respectivamente. Recordamos la definición de las derivadas parciales de $f(x, y)$, con respecto a x y a y:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$$

De este modo, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ significa obtener la derivada habitual con respecto a x de $f(x, y)$, considerando a la variable y como si fuera constante y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ significa obtener la derivada habitual con respecto a y de $f(x, y)$, considerando a la variable x como si fuera constante.

Definición

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables reales cuyas derivadas parciales son continuas en un dominio D. La diferencial total de $f(x, y)$, denotada por $df(x, y)$ se define como:

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy, \quad (x,y) \in D \tag{1}$$

en donde, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ son las derivadas parciales de $f(x, y)$, con respecto a x y a y, respectivamente. Recordamos la definición de las derivadas parciales de $f(x, y)$, con respecto a x y a y:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$$

De este modo, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ significa obtener la derivada habitual con respecto a x de $f(x, y)$, considerando a la variable y como si fuera constante y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ significa obtener la derivada habitual con respecto a y de $f(x, y)$, considerando a la variable x como si fuera constante.

Definición

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables reales cuyas derivadas parciales son continuas en un dominio D. La diferencial total de $f(x, y)$, denotada por $df(x, y)$ se define como:

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy, \quad (x,y) \in D \tag{1}$$

en donde, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ son las derivadas parciales de $f(x, y)$, con respecto a x y a y, respectivamente. Recordamos la definición de las derivadas parciales de $f(x, y)$, con respecto a x y a y:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$$

De este modo, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ significa obtener la derivada habitual con respecto a x de $f(x, y)$, considerando a la variable y como si fuera constante y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ significa obtener la derivada habitual con respecto a y de $f(x, y)$, considerando a la variable x como si fuera constante.

Definición

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables reales cuyas derivadas parciales son continuas en un dominio D. La diferencial total de $f(x, y)$, denotada por $df(x, y)$ se define como:

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy, \quad (x,y) \in D \tag{1}$$

en donde, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ son las derivadas parciales de $f(x, y)$, con respecto a x y a y, respectivamente. Recordamos la definición de las derivadas parciales de $f(x, y)$, con respecto a x y a y:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$$

De este modo, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ significa obtener la derivada habitual con respecto a x de $f(x, y)$, considerando a la variable y como si fuera constante y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ significa obtener la derivada habitual con respecto a y de $f(x, y)$, considerando a la variable x como si fuera constante.

Ejemplo 1

Obtener $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ para la función $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$

Solución

Derivamos $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$, considerando y constante:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy + xye^{xy} + e^{xy}$$

Derivamos $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$, considerando x constante:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + x^2e^{xy}$$

Por lo tanto, la diferencial df, de acuerdo a (**??**) es

$$df = d(x^2y + xe^{xy}) = (2xy + xye^{xy} + e^{xy})dx + (x^2 + x^2e^{xy})dy$$

Ejemplo 1

Obtener $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ para la función $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$

Solución

Derivamos $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$, considerando y constante:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy + xye^{xy} + e^{xy}$$

Derivamos $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$, considerando x constante:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + x^2e^{xy}$$

Por lo tanto, la diferencial df, de acuerdo a (**??**) es

$$df = d(x^2y + xe^{xy}) = (2xy + xye^{xy} + e^{xy})dx + (x^2 + x^2e^{xy})dy$$

Ejemplo 1

Obtener $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ para la función $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$

Solución

Derivamos $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$, considerando y constante:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy + xye^{xy} + e^{xy}$$

Derivamos $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$, considerando x constante:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + x^2e^{xy}$$

Por lo tanto, la diferencial df, de acuerdo a (**??**) es

$$df = d(x^2y + xe^{xy}) = (2xy + xye^{xy} + e^{xy})dx + (x^2 + x^2e^{xy})dy$$

Ejemplo 1

Obtener $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ para la función $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$

Solución

Derivamos $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$, considerando y constante:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy + xye^{xy} + e^{xy}$$

Derivamos $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$, considerando x constante:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + x^2e^{xy}$$

Por lo tanto, la diferencial df, de acuerdo a (**??**) es

$$df = d(x^2y + xe^{xy}) = (2xy + xye^{xy} + e^{xy})dx + (x^2 + x^2e^{xy})dy$$

Ejemplo 1

Obtener $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ para la función $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$

Solución

Derivamos $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$, considerando y constante:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy + xye^{xy} + e^{xy}$$

Derivamos $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$, considerando x constante:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + x^2e^{xy}$$

Por lo tanto, la diferencial df, de acuerdo a (**??**) es

$$df = d(x^2y + xe^{xy}) = (2xy + xye^{xy} + e^{xy})dx + (x^2 + x^2e^{xy})dy$$

Ejemplo 1

Obtener $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ para la función $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$

Solución

Derivamos $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$, considerando y constante:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy + xye^{xy} + e^{xy}$$

Derivamos $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$, considerando x constante:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + x^2e^{xy}$$

Por lo tanto, la diferencial df, de acuerdo a (**??**) es

$$df = d(x^2y + xe^{xy}) = (2xy + xye^{xy} + e^{xy})dx + (x^2 + x^2e^{xy})dy$$

Ejemplo 1

Obtener $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ para la función $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$

Solución

Derivamos $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$, considerando y constante:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy + xye^{xy} + e^{xy}$$

Derivamos $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$, considerando x constante:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + x^2e^{xy}$$

Por lo tanto, la diferencial df, de acuerdo a (**??**) es

$$df = d(x^2y + xe^{xy}) = (2xy + xye^{xy} + e^{xy})dx + (x^2 + x^2e^{xy})dy$$

Es posible obtener la derivada, con respecto de x, de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, pues ésta es una función de x y de y, es decir, obtener:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$$

y la derivada, con respecto de y, de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, pues ésta es una función de x y de y, es decir, obtener:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

Y, lo mismo para $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

Es posible obtener la derivada, con respecto de x, de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, pues ésta es una función de x y de y, es decir, obtener:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$$

y la derivada, con respecto de y, de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, pues ésta es una función de x y de y, es decir, obtener:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

Y, lo mismo para $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

Es posible obtener la derivada, con respecto de x, de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, pues ésta es una función de x y de y, es decir, obtener:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$$

y la derivada, con respecto de y, de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, pues ésta es una función de x y de y, es decir, obtener:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

Y, lo mismo para $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

Es posible obtener la derivada, con respecto de x, de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, pues ésta es una función de x y de y, es decir, obtener:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$$

y la derivada, con respecto de y, de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, pues ésta es una función de x y de y, es decir, obtener:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

Y, lo mismo para $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

Es posible obtener la derivada, con respecto de x, de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, pues ésta es una función de x y de y, es decir, obtener:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$$

y la derivada, con respecto de y, de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, pues ésta es una función de x y de y, es decir, obtener:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

Y, lo mismo para $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

Es posible obtener la derivada, con respecto de x, de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, pues ésta es una función de x y de y, es decir, obtener:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$$

y la derivada, con respecto de y, de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, pues ésta es una función de x y de y, es decir, obtener:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

Y, lo mismo para $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

En nuestro ejemplo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(x^2y + xe^{xy} + e^{xy})}{\partial x}\right) = 2y + y(xe^{xy}y + e^{xy}) + e^{xy}y = 2y + xy^2e^{xy} + 2ye^{xy}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial x}\right) = 2x + x(ye^{xy}x + e^{xy}) + e^{xy}x = 2x + x^2ye^{xy} + 2xe^{xy}$$

Y, lo mismo para $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+x^2e^{xy}) = 2x+x^2e^{xy}y+2xe^{xy} = 2x+x^2ye^{xy}+2xe^{xy}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + x^2e^{xy}) = x^2e^{xy}x = x^3e^{xy}$$

Notamos que se cumple $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$

En nuestro ejemplo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(x^2y + xe^{xy} + e^{xy})}{\partial x}\right) = 2y + y(xe^{xy}y + e^{xy}) + e^{xy}y = 2y + xy^2e^{xy} + 2ye^{xy}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial x}\right) = 2x + x(ye^{xy}x + e^{xy}) + e^{xy}x = 2x + x^2ye^{xy} + 2xe^{xy}$$

Y, lo mismo para $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+x^2e^{xy}) = 2x+x^2e^{xy}y+2xe^{xy} = 2x+x^2ye^{xy}+2xe^{xy}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + x^2e^{xy}) = x^2e^{xy}x = x^3e^{xy}$$

Notamos que se cumple $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$

En nuestro ejemplo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(x^2y + xe^{xy} + e^{xy})}{\partial x}\right) = 2y + y(xe^{xy}y + e^{xy}) + e^{xy}y = 2y + xy^2e^{xy} + 2ye^{xy}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial x}\right) = 2x + x(ye^{xy}x + e^{xy}) + e^{xy}x = 2x + x^2ye^{xy} + 2xe^{xy}$$

Y, lo mismo para $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+x^2e^{xy}) = 2x+x^2e^{xy}y+2xe^{xy} = 2x+x^2ye^{xy}+2xe^{xy}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + x^2e^{xy}) = x^2e^{xy}x = x^3e^{xy}$$

Notamos que se cumple $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$

En nuestro ejemplo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(x^2y+xe^{xy}+e^{xy})}{\partial x}\right)=2y+y(xe^{xy}y+e^{xy})+e^{xy}y=2y+xy^2e^{xy}+2ye^{xy}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(x^2y+xe^{xy})}{\partial x}\right)=2x+x(ye^{xy}x+e^{xy})+e^{xy}x=2x+x^2ye^{xy}+2xe^{xy}$$

Y, lo mismo para $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(x^2y+xe^{xy})}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+x^2e^{xy})=2x+x^2e^{xy}y+2xe^{xy}=2x+x^2ye^{xy}+2xe^{xy}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(x^2y+xe^{xy})}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+x^2e^{xy})=x^2e^{xy}x=x^3e^{xy}$$

Notamos que se cumple $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$

En nuestro ejemplo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(x^2y+xe^{xy}+e^{xy})}{\partial x}\right)=2y+y(xe^{xy}y+e^{xy})+e^{xy}y=2y+xy^2e^{xy}+2ye^{xy}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(x^2y+xe^{xy})}{\partial x}\right)=2x+x(ye^{xy}x+e^{xy})+e^{xy}x=2x+x^2ye^{xy}+2xe^{xy}$$

Y, lo mismo para $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(x^2y+xe^{xy})}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+x^2e^{xy})=2x+x^2e^{xy}y+2xe^{xy}=2x+x^2ye^{xy}+2xe^{xy}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(x^2y+xe^{xy})}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+x^2e^{xy})=x^2e^{xy}x=x^3e^{xy}$$

Notamos que se cumple $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$

En nuestro ejemplo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(x^2y + xe^{xy} + e^{xy})}{\partial x}\right) = 2y + y(xe^{xy}y + e^{xy}) + e^{xy}y = 2y + xy^2e^{xy} + 2ye^{xy}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial x}\right) = 2x + x(ye^{xy}x + e^{xy}) + e^{xy}x = 2x + x^2ye^{xy} + 2xe^{xy}$$

Y, lo mismo para $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+x^2e^{xy}) = 2x+x^2e^{xy}y+2xe^{xy} = 2x+x^2ye^{xy}+2xe^{xy}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + x^2e^{xy}) = x^2e^{xy}x = x^3e^{xy}$$

Notamos que se cumple $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$

En nuestro ejemplo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(x^2y + xe^{xy} + e^{xy})}{\partial x}\right) = 2y + y(xe^{xy}y + e^{xy}) + e^{xy}y = 2y + xy^2e^{xy} + 2ye^{xy}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial x}\right) = 2x + x(ye^{xy}x + e^{xy}) + e^{xy}x = 2x + x^2ye^{xy} + 2xe^{xy}$$

Y, lo mismo para $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+x^2e^{xy}) = 2x+x^2e^{xy}y+2xe^{xy} = 2x+x^2ye^{xy}+2xe^{xy}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + x^2e^{xy}) = x^2e^{xy}x = x^3e^{xy}$$

Notamos que se cumple $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$

Definición. Ecuación diferencial exacta

La expresión

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{2}$$

se llama Una Diferencial Exacta en un dominio D si existe una función $f(x,y)$ tal que (**??**) sea la diferencial total de $f(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$, es decir,

$$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{3}$$

Lo cual significa que se cumple:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= M(x,y) \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= N(x,y) \end{aligned} \tag{4}$$

Una ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{5}$$

se llama Ecuación Diferencial Exacta si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una diferencial exacta, es decir si existe $f(x,y)$, tal que se cumple (**??**)

Definición. Ecuación diferencial exacta

La expresión

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{2}$$

se llama Una Diferencial Exacta en un dominio D si existe una función $f(x,y)$ tal que (**??**) sea la diferencial total de $f(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$, es decir,

$$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{3}$$

Lo cual significa que se cumple:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= M(x,y) \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= N(x,y) \end{aligned} \tag{4}$$

Una ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{5}$$

se llama Ecuación Diferencial Exacta si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una diferencial exacta, es decir si existe $f(x,y)$, tal que se cumple (**??**)

Definición. Ecuación diferencial exacta

La expresión

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{2}$$

se llama Una Diferencial Exacta en un dominio D si existe una función $f(x,y)$ tal que (**??**) sea la diferencial total de $f(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$, es decir,

$$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{3}$$

Lo cual significa que se cumple:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= M(x,y) \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= N(x,y) \end{aligned} \tag{4}$$

Una ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{5}$$

se llama Ecuación Diferencial Exacta si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una diferencial exacta, es decir si existe $f(x,y)$, tal que se cumple (**??**)

Definición. Ecuación diferencial exacta

La expresión

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{2}$$

se llama Una Diferencial Exacta en un dominio D si existe una función $f(x,y)$ tal que (**??**) sea la diferencial total de $f(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$, es decir,

$$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{3}$$

Lo cual significa que se cumple:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= M(x,y) \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= N(x,y) \end{aligned} \tag{4}$$

Una ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{5}$$

se llama Ecuación Diferencial Exacta si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una diferencial exacta, es decir si existe $f(x,y)$, tal que se cumple (**??**)

Definición. Ecuación diferencial exacta

La expresión

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{2}$$

se llama Una Diferencial Exacta en un dominio D si existe una función $f(x,y)$ tal que (**??**) sea la diferencial total de $f(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$, es decir,

$$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{3}$$

Lo cual significa que se cumple:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= M(x,y) \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= N(x,y) \end{aligned} \tag{4}$$

Una ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{5}$$

se llama Ecuación Diferencial Exacta si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una diferencial exacta, es decir si existe $f(x,y)$, tal que se cumple (**??**)

Definición. Ecuación diferencial exacta

La expresión

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{2}$$

se llama Una Diferencial Exacta en un dominio D si existe una función $f(x,y)$ tal que (**??**) sea la diferencial total de $f(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$, es decir,

$$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{3}$$

Lo cual significa que se cumple:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= M(x,y) \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= N(x,y) \end{aligned} \tag{4}$$

Una ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{5}$$

se llama Ecuación Diferencial Exacta si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una diferencial exacta, es decir si existe $f(x,y)$, tal que se cumple (**??**)

Definición. Ecuación diferencial exacta

La expresión

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{2}$$

se llama Una Diferencial Exacta en un dominio D si existe una función $f(x,y)$ tal que (**??**) sea la diferencial total de $f(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$, es decir,

$$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{3}$$

Lo cual significa que se cumple:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= M(x,y) \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= N(x,y) \end{aligned} \tag{4}$$

Una ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{5}$$

se llama Ecuación Diferencial Exacta si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una diferencial exacta, es decir si existe $f(x,y)$, tal que se cumple (**??**)

Definición. Ecuación diferencial exacta

La expresión

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{2}$$

se llama Una Diferencial Exacta en un dominio D si existe una función $f(x,y)$ tal que (**??**) sea la diferencial total de $f(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$, es decir,

$$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{3}$$

Lo cual significa que se cumple:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= M(x,y) \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= N(x,y) \end{aligned} \tag{4}$$

Una ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{5}$$

se llama Ecuación Diferencial Exacta si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una diferencial exacta, es decir si existe $f(x,y)$, tal que se cumple (**??**)

Ejemplo 2

La ecuación diferencial

$$(2xy + xye^{xy} + e^{xy})\,dx + (x^2 + x^2e^{xy})\,dy = 0,$$

en donde $M(x, y) = 2xy + xye^{xy} + e^{xy}$ y $N(x.y) = x^2 + x^2e^{xy}$, es una ecuación diferencial exacta, pues la función $f(x, y) = x^2y + xe^{xy}$ satisface

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= M(x,y) \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= N(x,y) \end{aligned} \tag{6}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial x} &= 2xy + xye^{xy} + e^{xy} \\ \frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial y} &= x^2 + x^2e^{xy} \end{aligned} \tag{7}$$

Ejemplo 2

La ecuación diferencial

$$(2xy + xye^{xy} + e^{xy})\,dx + (x^2 + x^2e^{xy})\,dy = 0,$$

en donde $M(x,y) = 2xy + xye^{xy} + e^{xy}$ y $N(x.y) = x^2 + x^2e^{xy}$, es una ecuación diferencial exacta, pues la función $f(x,y) = x^2y + xe^{xy}$ satisface

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= M(x,y)\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= N(x,y)\end{aligned} \tag{6}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial x} &= 2xy + xye^{xy} + e^{xy}\\ \frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial y} &= x^2 + x^2e^{xy}\end{aligned} \tag{7}$$

Ejemplo 2

La ecuación diferencial

$$(2xy + xye^{xy} + e^{xy})\,dx + (x^2 + x^2e^{xy})\,dy = 0,$$

en donde $M(x, y) = 2xy + xye^{xy} + e^{xy}$ y $N(x.y) = x^2 + x^2e^{xy}$, es una ecuación diferencial exacta, pues la función $f(x, y) = x^2y + xe^{xy}$ satisface

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= M(x,y) \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= N(x,y) \end{aligned} \tag{6}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial x} &= 2xy + xye^{xy} + e^{xy} \\ \frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial y} &= x^2 + x^2e^{xy} \end{aligned} \tag{7}$$

Ejemplo 2

La ecuación diferencial

$$(2xy + xye^{xy} + e^{xy})\,dx + (x^2 + x^2e^{xy})\,dy = 0,$$

en donde $M(x, y) = 2xy + xye^{xy} + e^{xy}$ y $N(x.y) = x^2 + x^2e^{xy}$, es una ecuación diferencial exacta, pues la función $f(x, y) = x^2y + xe^{xy}$ satisface

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= M(x,y) \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= N(x,y) \end{aligned} \tag{6}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial x} &= 2xy + xye^{xy} + e^{xy} \\ \frac{\partial(x^2y + xe^{xy})}{\partial y} &= x^2 + x^2e^{xy} \end{aligned} \tag{7}$$

Porqué son importantes las ecuaciones exactas?

Si una ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{8}$$

es exacta, entonces existe $f(x,y)$, tal que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = df(x,y) \tag{9}$$

De (**??**) y (**??**) se obtiene

$$df(x,y) = 0 \tag{10}$$

de donde, al integrar,

$$\int df(x,y) = \int 0$$

obtenemos una relación que involucra a y, que es la solución de (**??**)

$$f(x,y) = K$$

Porqué son importantes las ecuaciones exactas?

Si una ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{8}$$

es exacta, entonces existe $f(x,y)$, tal que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = df(x,y) \tag{9}$$

De (**??**) y (**??**) se obtiene

$$df(x,y) = 0 \tag{10}$$

de donde, al integrar,

$$\int df(x,y) = \int 0$$

obtenemos una relación que involucra a y, que es la solución de (**??**)

$$f(x,y) = K$$

Porqué son importantes las ecuaciones exactas?

Si una ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{8}$$

es exacta, entonces existe $f(x,y)$, tal que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = df(x,y) \tag{9}$$

De (**??**) y (**??**) se obtiene

$$df(x,y) = 0 \tag{10}$$

de donde, al integrar,

$$\int df(x,y) = \int 0$$

obtenemos una relación que involucra a y, que es la solución de (**??**)

$$f(x,y) = K$$

Porqué son importantes las ecuaciones exactas?

Si una ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{8}$$

es exacta, entonces existe $f(x,y)$, tal que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = df(x,y) \tag{9}$$

De (**??**) y (**??**) se obtiene

$$df(x,y) = 0 \tag{10}$$

de donde, al integrar,

$$\int df(x,y) = \int 0$$

obtenemos una relación que involucra a y, que es la solución de (**??**)

$$f(x,y) = K$$

Porqué son importantes las ecuaciones exactas?

Si una ecuación diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{8}$$

es exacta, entonces existe $f(x, y)$, tal que

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = df(x, y) \tag{9}$$

De (**??**) y (**??**) se obtiene

$$df(x, y) = 0 \tag{10}$$

de donde, al integrar,

$$\int df(x, y) = \int 0$$

obtenemos una relación que involucra a y, que es la solución de (**??**)

$$f(x, y) = K$$

Porqué son importantes las ecuaciones exactas?

Si una ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{8}$$

es exacta, entonces existe $f(x,y)$, tal que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = df(x,y) \tag{9}$$

De (**??**) y (**??**) se obtiene

$$df(x,y) = 0 \tag{10}$$

de donde, al integrar,

$$\int df(x,y) = \int 0$$

obtenemos una relación que involucra a y, que es la solución de (**??**)

$$f(x,y) = K$$

Porqué son importantes las ecuaciones exactas?

Si una ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{8}$$

es exacta, entonces existe $f(x,y)$, tal que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = df(x,y) \tag{9}$$

De (**??**) y (**??**) se obtiene

$$df(x,y) = 0 \tag{10}$$

de donde, al integrar,

$$\int df(x,y) = \int 0$$

obtenemos una relación que involucra a y, que es la solución de (**??**)

$$f(x,y) = K$$

Por lo tanto, dada una ecuación exacta:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

encontrar $f(x,y)$ significa resolver la ecuación exacta. Es decir, encontrar la función $f(x,y)$ que satisfaga

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \tag{11}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{12}$$

permite expresar la solución de la ecuación dada como:

$$f(x,y) = K$$

Cómo determinar si la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta ?

Cómo encontrar la función $f(x,y)$?

Por lo tanto, dada una ecuación exacta:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

encontrar $f(x,y)$ significa resolver la ecuación exacta. Es decir, encontrar la función $f(x,y)$ que satisfaga

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad (11)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \qquad (12)$$

permite expresar la solución de la ecuación dada como:

$$f(x,y) = K$$

Cómo determinar si la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta ?

Cómo encontrar la función $f(x,y)$?

Por lo tanto, dada una ecuación exacta:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

encontrar $f(x,y)$ significa resolver la ecuación exacta. Es decir, encontrar la función $f(x,y)$ que satisfaga

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad (11)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \qquad (12)$$

permite expresar la solución de la ecuación dada como:

$$f(x,y) = K$$

Cómo determinar si la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta ?

Cómo encontrar la función $f(x,y)$?

Por lo tanto, dada una ecuación exacta:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

encontrar $f(x,y)$ significa resolver la ecuación exacta. Es decir, encontrar la función $f(x,y)$ que satisfaga

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad (11)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \qquad (12)$$

permite expresar la solución de la ecuación dada como:

$$f(x,y) = K$$

Cómo determinar si la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta ?

Cómo encontrar la función $f(x,y)$?

Por lo tanto, dada una ecuación exacta:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

encontrar $f(x,y)$ significa resolver la ecuación exacta. Es decir, encontrar la función $f(x,y)$ que satisfaga

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \tag{11}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{12}$$

permite expresar la solución de la ecuación dada como:

$$f(x,y) = K$$

Cómo determinar si la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta ?

Cómo encontrar la función $f(x,y)$?

Por lo tanto, dada una ecuación exacta:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

encontrar $f(x,y)$ significa resolver la ecuación exacta. Es decir, encontrar la función $f(x,y)$ que satisfaga

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \tag{11}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{12}$$

permite expresar la solución de la ecuación dada como:

$$f(x,y) = K$$

Cómo determinar si la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta ?

Cómo encontrar la función $f(x,y)$?

Teorema 1

Una ecuación diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es exacta si y sólo si

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \tag{13}$$

Ejemplo 3

Verificar que la siguiente ecuación diferencial es exacta:

$$(3xy^4 + x)\,dx + (6x^2y^3 - 2y^2 + 7)\,dy = 0$$

Tenemos

$$M(x,y) = 3xy^4 + x$$
$$N(x,y) = 6x^2y^3 - 2y^2 + 7$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} &= 12xy^3 \\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} &= 12xy^3 \end{aligned} \tag{14}$$

Ejemplo 3

Verificar que la siguiente ecuación diferencial es exacta:

$$(3xy^4 + x)\,dx + (6x^2y^3 - 2y^2 + 7)\,dy = 0$$

Tenemos

$$M(x, y) = 3xy^4 + x$$

$$N(x, y) = 6x^2y^3 - 2y^2 + 7$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} &= 12xy^3 \\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} &= 12xy^3 \end{aligned} \tag{14}$$

Ejemplo 3

Verificar que la siguiente ecuación diferencial es exacta:

$$(3xy^4 + x)\,dx + (6x^2y^3 - 2y^2 + 7)\,dy = 0$$

Tenemos

$$M(x, y) = 3xy^4 + x$$

$$N(x, y) = 6x^2y^3 - 2y^2 + 7$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} &= 12xy^3 \\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} &= 12xy^3 \qquad (14) \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Verificar que la siguiente ecuación diferencial es exacta:

$$(2x\cos y + 3x^2y)\,dx + (x^3 - x^2\sin y - y)\,dy = 0$$

Identificamos

$$M(x,y) = 2x\cos y + 3x^2y$$
$$N(x,y) = x^3 - x^2\sin y - y$$

Entonces:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2x\sin y + 3x^2$$
$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -2x\sin y + 3x^2 \tag{15}$$

Ejemplo 4

Verificar que la siguiente ecuación diferencial es exacta:

$$(2x\cos y + 3x^2 y)\,dx + (x^3 - x^2\sin y - y)\,dy = 0$$

Identificamos

$$M(x,y) = 2x\cos y + 3x^2 y$$
$$N(x,y) = x^3 - x^2\sin y - y$$

Entonces:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2x\sin y + 3x^2$$
$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -2x\sin y + 3x^2 \qquad (15)$$

Ejemplo 4

Verificar que la siguiente ecuación diferencial es exacta:

$$(2x\cos y + 3x^2 y)\,dx + (x^3 - x^2\sin y - y)\,dy = 0$$

Identificamos

$$M(x,y) = 2x\cos y + 3x^2 y$$

$$N(x,y) = x^3 - x^2\sin y - y$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} &= -2x\sin y + 3x^2 \\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} &= -2x\sin y + 3x^2 \qquad (15) \end{aligned}$$

Teorema 1

Una ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{16}$$

es exacta si y sólo si

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{17}$$

Demostración

$\Rightarrow$). Supongamos que (**??**) es una ecuación exacta, entonces existe $f(x,y)$ que cumple:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \tag{18}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{19}$$

Si $f(x,y)$ tiene primeras derivadas parciales continuas $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, entonces las segundas derivadas mixtas $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ son iguales

Teorema 1

Una ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{16}$$

es exacta si y sólo si

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{17}$$

Demostración

$\Rightarrow$). Supongamos que (**??**) es una ecuación exacta, entonces existe $f(x,y)$ que cumple:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \tag{18}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{19}$$

Si $f(x,y)$ tiene primeras derivadas parciales continuas $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, entonces las segundas derivadas mixtas $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ son iguales

Teorema 1

Una ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{16}$$

es exacta si y sólo si

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{17}$$

Demostración

$\Rightarrow$). Supongamos que (**??**) es una ecuación exacta, entonces existe $f(x,y)$ que cumple:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= M(x,y) && (18)\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= N(x,y) && (19) \end{aligned}$$

Si $f(x,y)$ tiene primeras derivadas parciales continuas $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, entonces las segundas derivadas mixtas $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ son iguales

Demostración

$\Rightarrow$). Supongamos que (**??**) es una ecuación exacta, entonces existe $f(x,y)$ que cumple:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \tag{20}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{21}$$

Si $f(x,y)$ tiene primeras derivadas parciales continuas $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, entonces las segundas derivadas mixtas $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ son iguales, por lo tanto, derivando (**??**) con respecto a y y (**??**), con respecto a x:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{23}$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{24}$$

Demostración

$\Rightarrow$). Supongamos que (**??**) es una ecuación exacta, entonces existe $f(x,y)$ que cumple:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \tag{20}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{21}$$

Si $f(x,y)$ tiene primeras derivadas parciales continuas $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, entonces las segundas derivadas mixtas $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ son iguales, por lo tanto, derivando (**??**) con respecto a y y (**??**), con respecto a x:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{23}$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{24}$$

Demostración

$\Rightarrow$). Supongamos que (**??**) es una ecuación exacta, entonces existe $f(x,y)$ que cumple:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \tag{20}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{21}$$

Si $f(x,y)$ tiene primeras derivadas parciales continuas $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, entonces las segundas derivadas mixtas $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ son iguales, por lo tanto, derivando (**??**) con respecto a y y (**??**), con respecto a x:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{23}$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{24}$$

Demostración

$\Rightarrow$). Supongamos que (**??**) es una ecuación exacta, entonces existe $f(x,y)$ que cumple:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \tag{20}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{21}$$

Si $f(x,y)$ tiene primeras derivadas parciales continuas $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, entonces las segundas derivadas mixtas $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ son iguales, por lo tanto, derivando (**??**) con respecto a y y (**??**), con respecto a x:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{23}$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{24}$$

Demostración

$\Leftarrow$). Supongamos que la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ satisface la condición: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Demostremos que la ecuación dada es exacta, es decir, encontremos una función $f(x,y)$, que satisfaga:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \tag{25}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{26}$$

Para que se cumpla (**??**) se debe tener:

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \phi(y),$$ y, por (**??**),

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx + \phi(y)\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big) + \phi'(y) = N(x,y)$$

$$\phi(y) = \int\Big(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big)\Big)dy \tag{27}$$

por lo tanto $f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int\Big(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big)\Big)dy$

Demostración

$\Leftarrow$). Supongamos que la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ satisface la condición: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Demostremos que la ecuación dada es exacta, es decir, encontremos una función $f(x,y)$, que satisfaga:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \tag{25}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{26}$$

Para que se cumpla (**??**) se debe tener:

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \phi(y), \text{ y, por (??)},$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx + \phi(y)\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big) + \phi'(y) = N(x,y)$$

$$\phi(y) = \int \Big(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big)\Big)\,dy \tag{27}$$

por lo tanto $f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int \Big(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big)\Big)\,dy$

Demostración

$\Leftarrow$). Supongamos que la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ satisface la condición: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Demostremos que la ecuación dada es exacta, es decir, encontremos una función $f(x,y)$, que satisfaga:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \tag{25}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{26}$$

Para que se cumpla (**??**) se debe tener:

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \phi(y), \text{ y, por (??),}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx + \phi(y)\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big) + \phi'(y) = N(x,y)$$

$$\phi(y) = \int \Big(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big)\Big)\,dy \tag{27}$$

por lo tanto $f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int \Big(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big)\Big)\,dy$

Demostración

$\Leftarrow$). Supongamos que la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ satisface la condición: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Demostremos que la ecuación dada es exacta, es decir, encontremos una función $f(x,y)$, que satisfaga:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \tag{25}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{26}$$

Para que se cumpla (**??**) se debe tener:

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \phi(y), \text{ y, por (??),}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx + \phi(y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right) + \phi'(y) = N(x,y)$$

$$\phi(y) = \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right)\right) dy \tag{27}$$

por lo tanto $f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right)\right) dy$

Demostración

$\Leftarrow$). Supongamos que la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ satisface la condición: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Demostremos que la ecuación dada es exacta, es decir, encontremos una función $f(x,y)$, que satisfaga:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \tag{25}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{26}$$

Para que se cumpla (**??**) se debe tener:

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \phi(y), \text{ y, por (??),}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx + \phi(y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right) + \phi'(y) = N(x,y)$$

$$\phi(y) = \int\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right)\right)dy \tag{27}$$

por lo tanto $f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right)\right)dy$

Demostración

$\Leftarrow$). Supongamos que la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ satisface la condición: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Demostremos que la ecuación dada es exacta, es decir, encontremos una función $f(x,y)$, que satisfaga:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \tag{25}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{26}$$

Para que se cumpla (**??**) se debe tener:

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \phi(y), \text{ y, por (??),}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx + \phi(y)\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big) + \phi'(y) = N(x,y)$$

$$\phi(y) = \int \Big(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big)\Big)dy \tag{27}$$

por lo tanto $f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int \Big(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big)\Big)dy$

Demostración

$\Leftarrow$). Supongamos que la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ satisface la condición: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Demostremos que la ecuación dada es exacta, es decir, encontremos una función $f(x,y)$, que satisfaga:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \tag{25}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{26}$$

Para que se cumpla (**??**) se debe tener:

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \phi(y), \text{ y, por (**??**),}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx + \phi(y)\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big) + \phi'(y) = N(x,y)$$

$$\phi(y) = \int \Big(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big)\Big)\,dy \tag{27}$$

por lo tanto $f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int \Big(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big)\Big)\,dy$

Demostración

Lo único que falta es comprobar que el integrando de (**??**) no dependede x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right)\right) = 0$$

Lo cual es cierto, pues,

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right) = 0$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\int M(x,y)\,dx\right) = 0$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int M(x,y)\,dx\right) = 0$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = 0$$

Demostración

Lo único que falta es comprobar que el integrando de (**??**) no dependede x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big)\Big) = 0$$

Lo cual es cierto, pues,

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big) = 0$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big) = 0$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big) = 0$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = 0$$

Demostración

Lo único que falta es comprobar que el integrando de (**??**) no dependede x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big)\Big) = 0$$

Lo cual es cierto, pues,

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big) = 0$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big) = 0$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big) = 0$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = 0$$

Demostración

Lo único que falta es comprobar que el integrando de (**??**) no dependede x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big)\Big) = 0$$

Lo cual es cierto, pues,

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big) = 0$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big) = 0$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big) = 0$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = 0$$

Demostración

Lo único que falta es comprobar que el integrando de (**??**) no dependede x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right)\right) = 0$$

Lo cual es cierto, pues,

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right) = 0$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\int M(x,y)\,dx\right) = 0$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int M(x,y)\,dx\right) = 0$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = 0$$

Demostración

Lo único que falta es comprobar que el integrando de (**??**) no dependede x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right)\right) = 0$$

Lo cual es cierto, pues,

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right) = 0$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\int M(x,y)\,dx\right) = 0$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int M(x,y)\,dx\right) = 0$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = 0$$

Ejemplo 1

Dada la ecuación deferencial $(2x\cos y + 3x^2y)dx + (x^3 - x^2\sin y - y)dy = 0$, verificar que es exacta y resolverla.

Solución

Identificamos

$$M(x,y) = 2x\cos y + 3x^2y$$
$$N(x,y) = x^3 - x^2\sin y - y$$

Entonces:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2x\sin y + 3x^2$$
$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -2x\sin y + 3x^2$$

Por lo tanto, la ecuación es exacta.

Ejemplo 1

Dada la ecuación deferencial $(2x\cos y + 3x^2y)dx + (x^3 - x^2\sin y - y)dy = 0$, verificar que es exacta y resolverla.

Solución

Identificamos

$$M(x,y) = 2x\cos y + 3x^2y$$
$$N(x,y) = x^3 - x^2\sin y - y$$

Entonces:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2x\sin y + 3x^2$$
$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -2x\sin y + 3x^2$$

Por lo tanto, la ecuación es exacta.

A partir de la primera de las ecuaciones

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x\cos y + 3x^2 y \qquad (29)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 - x^2\sin y - y \qquad (30)$$

obtenemos $f(x,y)$, integrándola:

$$f(x,y) = \int (2x\cos y + 3x^2 y)\,dx + \phi(y) = x^2\cos y + x^3 y + \phi(y)$$

es decir,

$$f(x,y) = x^2\cos y + x^3 y + \phi(y)$$

Y para obtener $\phi(y)$ utilizamos (**??**), derivando $f(x,y)$ con respecro a y:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x^2\sin y + x^3 + \frac{d\phi(y)}{dy} = x^3 - x^2\sin y - y$$

de donde $\frac{d\phi(y)}{dy} = -y$, entonces $\phi(y) = -\frac{y^2}{2}$ y $f(x,y) = x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2}$ La solución es $x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = C$

A partir de la primera de las ecuaciones

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x\cos y + 3x^2 y \tag{29}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 - x^2 \sin y - y \tag{30}$$

obtenemos $f(x,y)$, integrándola:

$$f(x,y) = \int (2x\cos y + 3x^2 y)\, dx + \phi(y) = x^2\cos y + x^3 y + \phi(y)$$

es decir,

$$f(x,y) = x^2\cos y + x^3 y + \phi(y)$$

Y para obtener $\phi(y)$ utilizamos (**??**), derivando $f(x,y)$ con respecro a y:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x^2\sin y + x^3 + \frac{d\phi(y)}{dy} = x^3 - x^2\sin y - y$$

de donde $\frac{d\phi(y)}{dy} = -y$, entonces $\phi(y) = -\frac{y^2}{2}$ y $f(x,y) = x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2}$ La solución es $x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = C$

A partir de la primera de las ecuaciones

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x\cos y + 3x^2 y \quad (29)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 - x^2 \sin y - y \quad (30)$$

obtenemos $f(x,y)$, integrándola:

$$f(x,y) = \int (2x\cos y + 3x^2 y)\,dx + \phi(y) = x^2\cos y + x^3 y + \phi(y)$$

es decir,

$$f(x,y) = x^2\cos y + x^3 y + \phi(y)$$

Y para obtener $\phi(y)$ utilizamos (**??**), derivando $f(x,y)$ con respecro a y:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x^2\sin y + x^3 + \frac{d\phi(y)}{dy} = x^3 - x^2\sin y - y$$

de donde $\frac{d\phi(y)}{dy} = -y$, entonces $\phi(y) = -\frac{y^2}{2}$ y $f(x,y) = x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2}$ La solución es $x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = C$

A partir de la primera de las ecuaciones

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x\cos y + 3x^2 y \tag{29}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 - x^2 \sin y - y \tag{30}$$

obtenemos $f(x,y)$, integrándola:

$$f(x,y) = \int (2x\cos y + 3x^2 y)\,dx + \phi(y) = x^2\cos y + x^3 y + \phi(y)$$

es decir,

$$f(x,y) = x^2\cos y + x^3 y + \phi(y)$$

Y para obtener $\phi(y)$ utilizamos (**??**), derivando $f(x,y)$ con respecro a y:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x^2\sin y + x^3 + \frac{d\phi(y)}{dy} = x^3 - x^2\sin y - y$$

de donde $\frac{d\phi(y)}{dy} = -y$, entonces $\phi(y) = -\frac{y^2}{2}$ y $f(x,y) = x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2}$ La solución es $x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = C$

A partir de la primera de las ecuaciones

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x\cos y + 3x^2 y \qquad (29)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 - x^2 \sin y - y \qquad (30)$$

obtenemos $f(x,y)$, integrándola:

$$f(x,y) = \int (2x\cos y + 3x^2 y)\,dx + \phi(y) = x^2\cos y + x^3 y + \phi(y)$$

es decir,

$$f(x,y) = x^2\cos y + x^3 y + \phi(y)$$

Y para obtener $\phi(y)$ utilizamos (**??**), derivando $f(x,y)$ con respecro a y:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x^2\sin y + x^3 + \frac{d\phi(y)}{dy} = x^3 - x^2\sin y - y$$

de donde $\frac{d\phi(y)}{dy} = -y$, entonces $\phi(y) = -\frac{y^2}{2}$ y $f(x,y) = x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2}$ La solución es $x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = C$

A partir de la primera de las ecuaciones

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x\cos y + 3x^2 y \quad (29)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 - x^2 \sin y - y \quad (30)$$

obtenemos $f(x,y)$, integrándola:

$$f(x,y) = \int (2x\cos y + 3x^2 y)\, dx + \phi(y) = x^2 \cos y + x^3 y + \phi(y)$$

es decir,

$$f(x,y) = x^2 \cos y + x^3 y + \phi(y)$$

Y para obtener $\phi(y)$ utilizamos (**??**), derivando $f(x,y)$ con respecro a y:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x^2 \sin y + x^3 + \frac{d\phi(y)}{dy} = x^3 - x^2 \sin y - y$$

de donde $\frac{d\phi(y)}{dy} = -y$, entonces $\phi(y) = -\frac{y^2}{2}$ y $f(x,y) = x^2 \cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2}$ La solución es $x^2 \cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = C$

A partir de la primera de las ecuaciones

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x\cos y + 3x^2 y \quad (29)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 - x^2 \sin y - y \quad (30)$$

obtenemos $f(x,y)$, integrándola:

$$f(x,y) = \int (2x\cos y + 3x^2 y)\, dx + \phi(y) = x^2 \cos y + x^3 y + \phi(y)$$

es decir,

$$f(x,y) = x^2 \cos y + x^3 y + \phi(y)$$

Y para obtener $\phi(y)$ utilizamos (**??**), derivando $f(x,y)$ con respecro a y:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x^2 \sin y + x^3 + \frac{d\phi(y)}{dy} = x^3 - x^2 \sin y - y$$

de donde $\frac{d\phi(y)}{dy} = -y$, entonces $\phi(y) = -\frac{y^2}{2}$ y $f(x,y) = x^2 \cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2}$ La solución es $x^2 \cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = C$

A partir de la primera de las ecuaciones

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x\cos y + 3x^2 y \qquad (29)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 - x^2 \sin y - y \qquad (30)$$

obtenemos $f(x,y)$, integrándola:

$$f(x,y) = \int (2x\cos y + 3x^2 y)\, dx + \phi(y) = x^2\cos y + x^3 y + \phi(y)$$

es decir,

$$f(x,y) = x^2\cos y + x^3 y + \phi(y)$$

Y para obtener $\phi(y)$ utilizamos (**??**), derivando $f(x,y)$ con respecro a y:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x^2\sin y + x^3 + \frac{d\phi(y)}{dy} = x^3 - x^2\sin y - y$$

de donde $\frac{d\phi(y)}{dy} = -y$, entonces $\phi(y) = -\frac{y^2}{2}$ y $f(x,y) = x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2}$ La solución es $x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = C$

A partir de la primera de las ecuaciones

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x\cos y + 3x^2 y \tag{29}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 - x^2 \sin y - y \tag{30}$$

obtenemos $f(x,y)$, integrándola:

$$f(x,y) = \int (2x\cos y + 3x^2 y)\, dx + \phi(y) = x^2 \cos y + x^3 y + \phi(y)$$

es decir,

$$f(x,y) = x^2 \cos y + x^3 y + \phi(y)$$

Y para obtener $\phi(y)$ utilizamos (**??**), derivando $f(x,y)$ con respecro a y:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x^2 \sin y + x^3 + \frac{d\phi(y)}{dy} = x^3 - x^2 \sin y - y$$

de donde $\frac{d\phi(y)}{dy} = -y$, entonces $\phi(y) = -\frac{y^2}{2}$ y $f(x,y) = x^2 \cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2}$ La solución es $x^2 \cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = C$

Ejemplo 3

Dada la ecuación deferencial $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$, verificar que es exacta y resolverla.

Solución

Identificamos: $M(x,y) = e^y$ y $N(x,y) = xe^y + 2y$. Entonces:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^y, \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^y$$

Por lo tanto, la ecuación es exacta. A partir de la segunda de las ecuaciones

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y \tag{31}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xe^y + 2y \tag{32}$$

obtenemos $f(x,y)$, integrándola:

$$f(x,y) = \int (xe^y + 2y)\,dy + \psi(x) = xe^y + y^2 + \psi(x)$$

Ejemplo 3

Dada la ecuación deferencial $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$, verificar que es exacta y resolverla.

Solución

Identificamos: $M(x,y) = e^y$ y $N(x,y) = xe^y + 2y$. Entonces:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^y, \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^y$$

Por lo tanto, la ecuación es exacta. A partir de la segunda de las ecuaciones

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y \quad (31)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xe^y + 2y \quad (32)$$

obtenemos $f(x,y)$, integrándola:

$$f(x,y) = \int (xe^y + 2y)\,dy + \psi(x) = xe^y + y^2 + \psi(x)$$

Ejemplo 3

Dada la ecuación deferencial $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$, verificar que es exacta y resolverla.

Solución

Identificamos: $M(x, y) = e^y$ y $N(x, y) = xe^y + 2y$. Entonces:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^y, \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^y$$

Por lo tanto, la ecuación es exacta. A partir de la segunda de las ecuaciones

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y \tag{31}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xe^y + 2y \tag{32}$$

obtenemos $f(x, y)$, integrándola:

$$f(x,y) = \int (xe^y + 2y)\, dy + \psi(x) = xe^y + y^2 + \psi(x)$$

Ejemplo 3

Dada la ecuación deferencial $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$, verificar que es exacta y resolverla.

Solución

Identificamos: $M(x,y) = e^y$ y $N(x,y) = xe^y + 2y$. Entonces:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^y, \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^y$$

Por lo tanto, la ecuación es exacta. A partir de la segunda de las ecuaciones

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y \tag{31}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xe^y + 2y \tag{32}$$

obtenemos $f(x,y)$, integrándola:

$$f(x,y) = \int (xe^y + 2y)\, dy + \psi(x) = xe^y + y^2 + \psi(x)$$

Ejemplo 3

Dada la ecuación deferencial $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$, verificar que es exacta y resolverla.

Solución

Identificamos: $M(x, y) = e^y$ y $N(x, y) = xe^y + 2y$. Entonces:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^y, \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^y$$

Por lo tanto, la ecuación es exacta. A partir de la segunda de las ecuaciones

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y \tag{31}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xe^y + 2y \tag{32}$$

obtenemos $f(x, y)$, integrándola:

$$f(x,y) = \int (xe^y + 2y)\, dy + \psi(x) = xe^y + y^2 + \psi(x)$$

Ejemplo 3

$$f(x,y) = \int (xe^y + 2y)\,dy + \psi(y) = xe^y + y^2 + \psi(x)$$

Y derivando $f(x,y)$ con respecto a x para utilizar (**??**), tenemos:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y + \frac{d\psi(x)}{dx}$$

Por (**??**)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y$$

de donde,

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = 0$$

lo cual implica,

$$\psi(x) = C$$

La solucín es:

$$xe^y + y^2 + C = C_1$$

o sea

$$xe^y + y^2 = K$$

Ejemplo 3

$$f(x,y) = \int (xe^y + 2y)\, dy + \psi(y) = xe^y + y^2 + \psi(x)$$

Y derivando $f(x,y)$ con respecto a x para utilizar (**??**), tenemos:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y + \frac{d\psi(x)}{dx}$$

Por (**??**)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y$$

de donde,

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = 0$$

lo cual implica,

$$\psi(x) = C$$

La soluciń es:

$$xe^y + y^2 + C = C_1$$

o sea

$$xe^y + y^2 = K$$

Ejemplo 3

$$f(x,y) = \int (xe^y + 2y)\,dy + \psi(y) = xe^y + y^2 + \psi(x)$$

Y derivando $f(x,y)$ con respecto a x para utilizar (**??**), tenemos:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y + \frac{d\psi(x)}{dx}$$

Por (**??**)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y$$

de donde,

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = 0$$

lo cual implica,

$$\psi(x) = C$$

La soluciń es:

$$xe^y + y^2 + C = C_1$$

o sea

$$xe^y + y^2 = K$$

Ejemplo 3

$$f(x,y) = \int (xe^y + 2y)\,dy + \psi(y) = xe^y + y^2 + \psi(x)$$

Y derivando $f(x,y)$ con respecto a x para utilizar (**??**), tenemos:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y + \frac{d\psi(x)}{dx}$$

Por (**??**)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y$$

de donde,

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = 0$$

lo cual implica,

$$\psi(x) = C$$

La soluciń es:

$$xe^y + y^2 + C = C_1$$

o sea

$$xe^y + y^2 = K$$

Ejemplo 3

$$f(x,y) = \int (xe^y + 2y)\,dy + \psi(y) = xe^y + y^2 + \psi(x)$$

Y derivando $f(x,y)$ con respecto a x para utilizar (**??**), tenemos:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y + \frac{d\psi(x)}{dx}$$

Por (**??**)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y$$

de donde,

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = 0$$

lo cual implica,

$$\psi(x) = C$$

La solucín es:

$$xe^y + y^2 + C = C_1$$

o sea

$$xe^y + y^2 = K$$

Ejemplo 3

$$f(x,y) = \int (xe^y + 2y)\,dy + \psi(y) = xe^y + y^2 + \psi(x)$$

Y derivando $f(x,y)$ con respecto a x para utilizar (**??**), tenemos:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y + \frac{d\psi(x)}{dx}$$

Por (**??**)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y$$

de donde,

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = 0$$

lo cual implica,

$$\psi(x) = C$$

La solucín es:

$$xe^y + y^2 + C = C_1$$

o sea

$$xe^y + y^2 = K$$

Porqué?

$$\int (2x\cos y + 3x^2 y)\,dx = x^2\cos y + x^3 y + \phi(y)$$

Porqué?

$$\int (xe^y + 2y)\,dy = xe^y + y^2 + \psi(x)$$

Sabemos que $\int xy\,dx = \frac{x^2 y}{2} + C$ pues $\frac{d}{dx}(\frac{x^2 y}{2} + C) = xy$ Pero también $\frac{d}{dx}(\frac{x^2 y}{2} + 5y) = xy$ y también $\frac{d}{dx}(\frac{x^2 y}{2} + e^y) = xy$ En general:

$$\frac{d}{dx}(\frac{x^2 y}{2} + \psi(y)) = xy$$

por lo tanto,

$$\int xy\,dx = \frac{x^2 y}{2} + \psi(y)$$

Porqué?

$$\int (2x\cos y + 3x^2 y)\,dx = x^2\cos y + x^3 y + \phi(y)$$

Porqué?

$$\int (xe^y + 2y)\,dy = xe^y + y^2 + \psi(x)$$

Sabemos que $\int xy\,dx = \frac{x^2y}{2} + C$ pues $\frac{d}{dx}(\frac{x^2y}{2} + C) = xy$ Pero también $\frac{d}{dx}(\frac{x^2y}{2} + 5y) = xy$ y también $\frac{d}{dx}(\frac{x^2y}{2} + e^y) = xy$ En general:

$$\frac{d}{dx}(\frac{x^2y}{2} + \psi(y)) = xy$$

por lo tanto,

$$\int xy\,dx = \frac{x^2y}{2} + \psi(y)$$

Porqué?

$$\int (2x\cos y + 3x^2 y)\,dx = x^2\cos y + x^3 y + \phi(y)$$

Porqué?

$$\int (xe^y + 2y)\,dy = xe^y + y^2 + \psi(x)$$

Sabemos que $\int xy\,dx = \frac{x^2y}{2} + C$ pues $\frac{d}{dx}(\frac{x^2y}{2} + C) = xy$ Pero también $\frac{d}{dx}(\frac{x^2y}{2} + 5y) = xy$ y también $\frac{d}{dx}(\frac{x^2y}{2} + e^y) = xy$ En general:

$$\frac{d}{dx}(\frac{x^2y}{2} + \psi(y)) = xy$$

por lo tanto,

$$\int xy\,dx = \frac{x^2y}{2} + \psi(y)$$

Porqué?

$$\int (2x\cos y + 3x^2 y)\, dx = x^2\cos y + x^3 y + \phi(y)$$

Porqué?

$$\int (xe^y + 2y)\, dy = xe^y + y^2 + \psi(x)$$

Sabemos que $\int xy\, dx = \frac{x^2 y}{2} + C$ pues $\frac{d}{dx}(\frac{x^2 y}{2} + C) = xy$ Pero también $\frac{d}{dx}(\frac{x^2 y}{2} + 5y) = xy$ y también $\frac{d}{dx}(\frac{x^2 y}{2} + e^y) = xy$ En general:

$$\frac{d}{dx}(\frac{x^2 y}{2} + \psi(y)) = xy$$

por lo tanto,

$$\int xy\, dx = \frac{x^2 y}{2} + \psi(y)$$

Porqué?

$$\int (2x\cos y + 3x^2 y)\,dx = x^2\cos y + x^3 y + \phi(y)$$

Porqué?

$$\int (xe^y + 2y)\,dy = xe^y + y^2 + \psi(x)$$

Sabemos que $\int xy\,dx = \frac{x^2y}{2} + C$ pues $\frac{d}{dx}(\frac{x^2y}{2} + C) = xy$ Pero también $\frac{d}{dx}(\frac{x^2y}{2} + 5y) = xy$ y también $\frac{d}{dx}(\frac{x^2y}{2} + e^y) = xy$ En general:

$$\frac{d}{dx}(\frac{x^2y}{2} + \psi(y)) = xy$$

por lo tanto,

$$\int xy\,dx = \frac{x^2y}{2} + \psi(y)$$

Porqué?

$$\int (2x\cos y + 3x^2 y)\,dx = x^2\cos y + x^3 y + \phi(y)$$

Porqué?

$$\int (xe^y + 2y)\,dy = xe^y + y^2 + \psi(x)$$

Sabemos que $\int xy\,dx = \frac{x^2 y}{2} + C$ pues $\frac{d}{dx}(\frac{x^2 y}{2} + C) = xy$ Pero también $\frac{d}{dx}(\frac{x^2 y}{2} + 5y) = xy$ y también $\frac{d}{dx}(\frac{x^2 y}{2} + e^y) = xy$ En general:

$$\frac{d}{dx}(\frac{x^2 y}{2} + \psi(y)) = xy$$

por lo tanto,

$$\int xy\,dx = \frac{x^2 y}{2} + \psi(y)$$

Porqué?

$$\int (2x\cos y + 3x^2 y)\,dx = x^2\cos y + x^3 y + \phi(y)$$

Porqué?

$$\int (xe^y + 2y)\,dy = xe^y + y^2 + \psi(x)$$

Sabemos que $\int xy\,dx = \frac{x^2y}{2} + C$ pues $\frac{d}{dx}(\frac{x^2y}{2} + C) = xy$ Pero también $\frac{d}{dx}(\frac{x^2y}{2} + 5y) = xy$ y también $\frac{d}{dx}(\frac{x^2y}{2} + e^y) = xy$ En general:

$$\frac{d}{dx}(\frac{x^2y}{2} + \psi(y)) = xy$$

por lo tanto,

$$\int xy\,dx = \frac{x^2y}{2} + \psi(y)$$

Porqué?

$$\int (2x\cos y + 3x^2y)\,dx = x^2\cos y + x^3y + \phi(y)$$

Porqué?

$$\int (xe^y + 2y)\,dy = xe^y + y^2 + \psi(x)$$

Sabemos que $\int xy\,dx = \frac{x^2y}{2} + C$ pues $\frac{d}{dx}(\frac{x^2y}{2} + C) = xy$ Pero también $\frac{d}{dx}(\frac{x^2y}{2} + 5y) = xy$ y también $\frac{d}{dx}(\frac{x^2y}{2} + e^y) = xy$ En general:

$$\frac{d}{dx}(\frac{x^2y}{2} + \psi(y)) = xy$$

por lo tanto,

$$\int xy\,dx = \frac{x^2y}{2} + \psi(y)$$

Ejemplo 4

Dada la ecuación deferencial $\left(\dfrac{y}{1+x^2} - 2xy^2\right)dx + (\arctan x - 2x^2y + 1)dy = 0$, verificar que es exacta y resolverla.

Solución

Tenemos: $M(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2} - 2xy^2$ y $N(x,y) = \arctan x - 2x^2y + 1$. Entonces:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{1+x^2} - 4xy, \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2} - 4xy$$

Por lo tanto, la ecuación es exacta. A partir de la primera de las ecuaciones

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2} - 2xy^2 \tag{33}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \arctan x - 2x^2y + 1 \tag{34}$$

obtenemos $f(x,y)$, integrándola:

$$f(x,y) = \int_x \left(\frac{y}{1+x^2} - 2xy^2\right) dx + \phi(y) = y \arctan x - x^2y^2 + \phi(y) \tag{35}$$

Ejemplo 4

Dada la ecuación deferencial $\left(\dfrac{y}{1+x^2} - 2xy^2\right)dx + (\arctan x - 2x^2y + 1)dy = 0$, verificar que es exacta y resolverla.

Solución

Tenemos: $M(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2} - 2xy^2$ y $N(x,y) = \arctan x - 2x^2y + 1$. Entonces:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{1+x^2} - 4xy, \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2} - 4xy$$

Por lo tanto, la ecuación es exacta. A partir de la primera de las ecuaciones

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2} - 2xy^2 \qquad (33)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \arctan x - 2x^2y + 1 \qquad (34)$$

obtenemos $f(x,y)$, integrándola:

$$f(x,y) = \int_x \left(\frac{y}{1+x^2} - 2xy^2\right) dx + \phi(y) = y \arctan x - x^2y^2 + \phi(y) \qquad (35)$$

Ejemplo 4

Dada la ecuación deferencial $\left(\frac{y}{1+x^2} - 2xy^2\right)dx + (\arctan x - 2x^2y + 1)dy = 0$, verificar que es exacta y resolverla.

Solución

Tenemos: $M(x,y) = \frac{y}{1+x^2} - 2xy^2$ y $N(x,y) = \arctan x - 2x^2y + 1$. Entonces:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{1+x^2} - 4xy, \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2} - 4xy$$

Por lo tanto, la ecuación es exacta. A partir de la primera de las ecuaciones

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2} - 2xy^2 \tag{33}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \arctan x - 2x^2y + 1 \tag{34}$$

obtenemos $f(x,y)$, integrándola:

$$f(x,y) = \int_x \left(\frac{y}{1+x^2} - 2xy^2\right) dx + \phi(y) = y \arctan x - x^2y^2 + \phi(y) \tag{35}$$

Ejemplo 4

Dada la ecuación deferencial $\left(\dfrac{y}{1+x^2} - 2xy^2\right)dx + (\arctan x - 2x^2y + 1)dy = 0$, verificar que es exacta y resolverla.

Solución

Tenemos: $M(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2} - 2xy^2$ y $N(x,y) = \arctan x - 2x^2y + 1$. Entonces:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{1+x^2} - 4xy, \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2} - 4xy$$

Por lo tanto, la ecuación es exacta. A partir de la primera de las ecuaciones

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2} - 2xy^2 \tag{33}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \arctan x - 2x^2y + 1 \tag{34}$$

obtenemos $f(x,y)$, integrándola:

$$f(x,y) = \int_x \left(\frac{y}{1+x^2} - 2xy^2\right) dx + \phi(y) = y \arctan x - x^2y^2 + \phi(y) \tag{35}$$

Ejemplo 4

Dada la ecuación deferencial $\left(\dfrac{y}{1+x^2} - 2xy^2\right)dx + (\arctan x - 2x^2y + 1)dy = 0$, verificar que es exacta y resolverla.

Solución

Tenemos: $M(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2} - 2xy^2$ y $N(x,y) = \arctan x - 2x^2y + 1$. Entonces:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{1+x^2} - 4xy, \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2} - 4xy$$

Por lo tanto, la ecuación es exacta. A partir de la primera de las ecuaciones

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2} - 2xy^2 \tag{33}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \arctan x - 2x^2y + 1 \tag{34}$$

obtenemos $f(x,y)$, integrándola:

$$f(x,y) = \int_x \left(\frac{y}{1+x^2} - 2xy^2\right) dx + \phi(y) = y\arctan x - x^2y^2 + \phi(y) \tag{35}$$

Ejemplo 4

$$f(x,y) = \int_x \left(\frac{y}{1+x^2} - 2xy^2 \right) dx + \phi(y) = y \arctan x - x^2y^2 + \phi(y)$$

Y derivando $f(x,y)$ con respecto a y, para utilizar (**??**), tenemos:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \arctan x - 2x^2y + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

Por (**??**)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \arctan x - 2x^2y + 1$$

de donde,

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(y) = y$$

Por lo tanto:

$$f(x,y) = y \arctan x - x^2y^2 + y$$

Y la soluciń es $f(x,y) = K$, es decir:

$$y \arctan x - x^2y^2 + y = K$$

Ejemplo 4

$$f(x,y) = \int_x \left(\frac{y}{1+x^2} - 2xy^2 \right) dx + \phi(y) = y \arctan x - x^2y^2 + \phi(y)$$

Y derivando $f(x,y)$ con respecto a y, para utilizar (**??**), tenemos:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \arctan x - 2x^2y + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

Por (**??**)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \arctan x - 2x^2y + 1$$

de donde,

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(y) = y$$

Por lo tanto:

$$f(x,y) = y \arctan x - x^2y^2 + y$$

Y la soluciń es $f(x,y) = K$, es decir:

$$y \arctan x - x^2y^2 + y = K$$

Ejemplo 4

$$f(x,y) = \int_x \left(\frac{y}{1+x^2} - 2xy^2 \right) dx + \phi(y) = y \arctan x - x^2y^2 + \phi(y)$$

Y derivando $f(x,y)$ con respecto a y, para utilizar (**??**), tenemos:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \arctan x - 2x^2y + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

Por (**??**)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \arctan x - 2x^2y + 1$$

de donde,

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(y) = y$$

Por lo tanto:

$$f(x,y) = y \arctan x - x^2y^2 + y$$

Y la solucíñ es $f(x,y) = K$, es decir:

$$y \arctan x - x^2y^2 + y = K$$

Ejemplo 4

$$f(x,y) = \int_x \left(\frac{y}{1+x^2} - 2xy^2 \right) dx + \phi(y) = y \arctan x - x^2y^2 + \phi(y)$$

Y derivando $f(x,y)$ con respecto a y, para utilizar (**??**), tenemos:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \arctan x - 2x^2y + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

Por (**??**)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \arctan x - 2x^2y + 1$$

de donde,

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(y) = y$$

Por lo tanto:

$$f(x,y) = y \arctan x - x^2y^2 + y$$

Y la soluciń es $f(x,y) = K$, es decir:

$$y \arctan x - x^2y^2 + y = K$$

Ejemplo 4

$$f(x,y) = \int_x \left(\frac{y}{1+x^2} - 2xy^2 \right) dx + \phi(y) = y \arctan x - x^2y^2 + \phi(y)$$

Y derivando $f(x,y)$ con respecto a y, para utilizar (**??**), tenemos:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \arctan x - 2x^2y + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

Por (**??**)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \arctan x - 2x^2y + 1$$

de donde,

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(y) = y$$

Por lo tanto:

$$f(x,y) = y \arctan x - x^2y^2 + y$$

Y la soluciń es $f(x,y) = K$, es decir:

$$y \arctan x - x^2y^2 + y = K$$

Ejemplo 4

$$f(x,y) = \int_x \left(\frac{y}{1+x^2} - 2xy^2 \right) dx + \phi(y) = y \arctan x - x^2y^2 + \phi(y)$$

Y derivando $f(x,y)$ con respecto a y, para utilizar (**??**), tenemos:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \arctan x - 2x^2y + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

Por (**??**)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \arctan x - 2x^2y + 1$$

de donde,

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(y) = y$$

Por lo tanto:

$$f(x,y) = y \arctan x - x^2y^2 + y$$

Y la soluciń es $f(x,y) = K$, es decir:

$$y \arctan x - x^2y^2 + y = K$$

Ejemplo 4

$$f(x,y) = \int_x \left(\frac{y}{1+x^2} - 2xy^2 \right) dx + \phi(y) = y \arctan x - x^2y^2 + \phi(y)$$

Y derivando $f(x,y)$ con respecto a y, para utilizar (**??**), tenemos:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \arctan x - 2x^2 y + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

Por (**??**)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \arctan x - 2x^2 y + 1$$

de donde,

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(y) = y$$

Por lo tanto:

$$f(x,y) = y \arctan x - x^2y^2 + y$$

Y la soluciín es $f(x,y) = K$, es decir:

$$y \arctan x - x^2y^2 + y = K$$