

Systèmes électroniques

Chapitre 7

LES REGULATEURS STANDARDS

1. Analyse comportementale des régulateurs

P, PI, PID analogiques

2. PI, PID numériques

3. Régulateurs tout ou rien



T A B L E D E S M A T I E R E S

PAGE

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 7. | LES REGULATEURS STANDARDS..... | 1 |
| 7.1 | INTRODUCTION | 1 |
| 7.1.1 | Généralités..... | 1 |
| 7.1.2 | Amplificateur opérationnel | 2 |
| 7.1.3 | Comparaison de la valeur de consigne et de la valeur réelle. | 2 |
| 7.1.4 | Configuration générale d'un amplificateur de réglage..... | 3 |
| 7.1.5 | Fonction de transfert..... | 4 |
| 7.1.6 | Réponse harmonique..... | 4 |
| 7.1.7 | Régulateur P..... | 6 |
| 7.1.8 | Régulateur PI..... | 6 |
| 7.1.9 | Régulateur PD..... | 9 |
| 7.1.10 | Régulateur PID..... | 17 |
| 7.2 | DISPOSITIFS DE LIMITATION | 23 |
| 7.2.1 | Généralités..... | 23 |
| 7.2.2 | Limitation par un pont à diodes..... | 23 |
| 7.3 | LIMITATION SUR UN RÉGULATEUR COMPORTANT UNE COMPOSANTE INTÉGRALE | 25 |
| 7.3.1 | Généralités..... | 25 |
| 7.3.2 | Limitation cascadée au régulateur..... | 25 |
| 7.3.3 | Limitation intégrée au régulateur..... | 27 |
| 7.3.4 | Conclusion..... | 28 |
| 7.4 | CORRECTION DE LA COMPOSANTE INTÉGRALE EN CAS DE LIMITATION | 28 |
| 7.4.1 | Généralités..... | 28 |
| 7.4.2 | Cas du régulateur PI..... | 28 |
| 7.5 | RÉGULATEUR PI NUMÉRIQUE..... | 33 |
| 7.5.1 | Description | 33 |
| 7.5.2 | Intégration : approximation d'ordre zéro..... | 33 |
| 7.5.3 | Intégration : approximation d'ordre un..... | 34 |
| 7.5.4 | Implémentation dans un DSP | 35 |
| 7.5.5 | Exemple d'algorithme pour régulateur PI..... | 36 |
| 7.6 | RÉGULATEUR PID NUMÉRIQUE..... | 43 |
| 7.6.1 | Description | 43 |
| 7.6.2 | Différentiation | 43 |
| 7.6.3 | Implantation dans un DSP | 44 |
| 7.7 | REGULATEUR A ACTION À DEUX POSITIONS..... | 45 |
| 7.7.1 | Généralités..... | 45 |
| 7.7.2 | Principe de fonctionnement | 45 |
| 7.7.3 | Régulateur à action à deux positions avec contre-réaction | 47 |
| A. | COMPLÉMENT MATHÉMATIQUE..... | 51 |
| A.1 | RÉGULATEUR PD..... | 51 |

Bibliographie

7. LES REGULATEURS STANDARDS

7.1 INTRODUCTION

7.1.1 Généralités.

Tout système à régler possède un régulateur, qu'il soit analogique ou numérique. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux régulateurs. Ces régulateurs ont pour tâche de comparer, en premier lieu, une valeur de consigne avec la valeur de mesure correspondante. En second lieu, le régulateur agit sur la grandeur de commande pour rendre la valeur de mesure aussi proche que possible de la valeur de consigne.

Comme exemple de circuit de réglage, on peut citer la régulation de la tension de sortie d'une alimentation à découpage. Dans ce cas, la tension de sortie du convertisseur est comparée à une valeur de consigne et, selon la charge, la température ou les variations de la tension d'entrée, la tension de sortie est maintenue à la valeur de consigne désirée. La Figure 7-1 illustre la structure de la boucle de réglage.

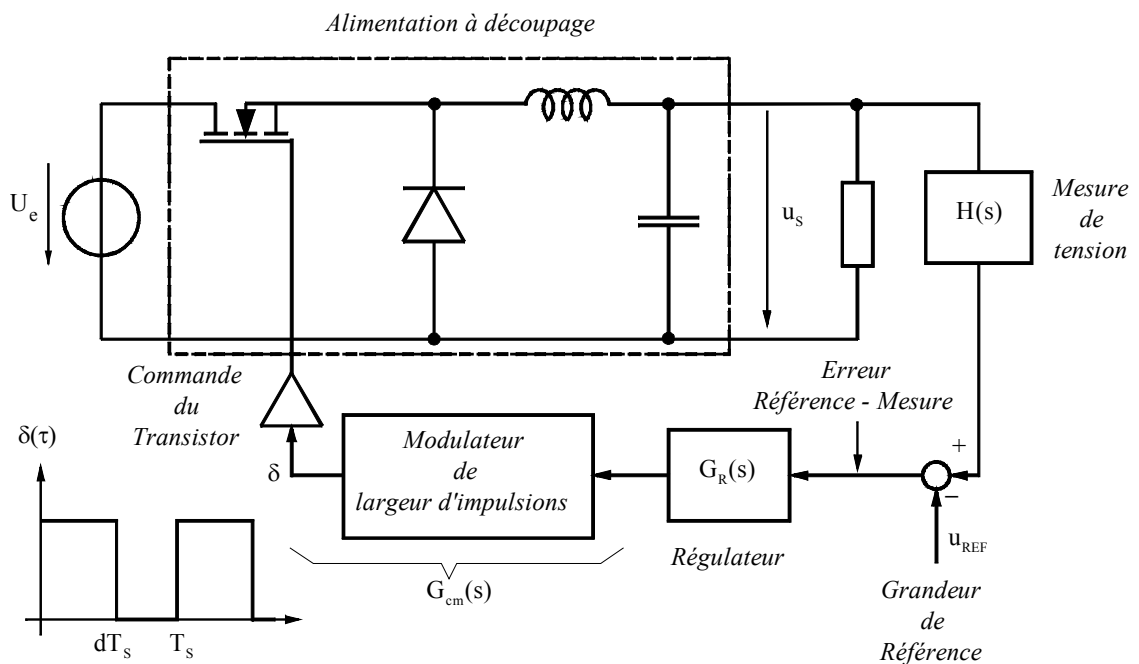


Figure 7-1 : Schéma de principe de la régulation de tension d'un convertisseur DC/DC

Le régulateur reçoit à son entrée la différence entre la valeur de référence (consigne) et celle de mesure (valeur réelle). Cette différence est appelée « Écart de réglage ». La Figure 7-2 représente le schéma bloc fonctionnel pour la régulation de la tension de sortie.

Dans ce schéma bloc, on distingue :

- $G_R(s)$: fonction de transfert du régulateur.
- $G_{cm}(s)$: fonction de transfert du dispositif de commande (modulateur de largeur d'impulsion (PWM) et commande du transistor)
- $G_s(s)$: Fonction de transfert du convertisseur de tension du filtre et de la charge
- $H(s)$: Fonction de transfert de la mesure de tension

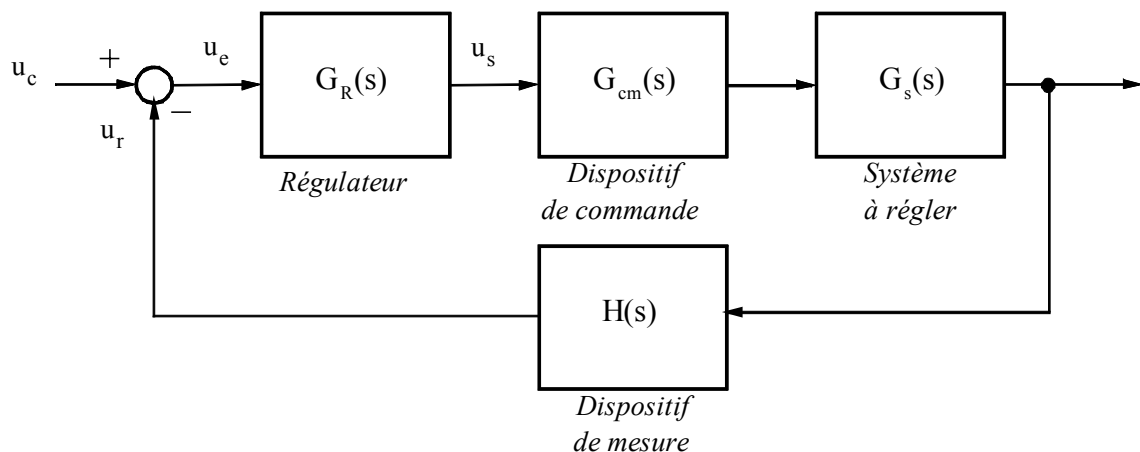


Figure 7-2 : Schéma bloc de la boucle de réglage

Les coefficients des régulateurs standards sont ajustables. Une fois ajustés, les coefficients restent fixes. L'ajustement optimal n'est donc possible que pour un point de fonctionnement du système à régler. Si les caractéristiques statiques et dynamiques de ce dernier varient dans un large domaine, il y a des points de fonctionnement où l'amortissement dans le circuit de réglage n'est plus satisfaisant, et où il peut même apparaître un risque d'instabilité. Dans ces cas critiques, on fait appel à des régulateurs adaptatifs. Leurs coefficients sont variables en fonction d'une tension de contrôle qui doit dépendre du point de fonctionnement, de sorte que le circuit de réglage est toujours stabilisé de manière optimale.

Parfois les régulateurs doivent présenter des caractéristiques non linéaires. Il est assez souvent nécessaire de limiter la tension de sortie d'un régulateur, par exemple pour éviter une intervention trop brutale lors de l'apparition de phénomènes transitoires importants.

7.1.2 Amplificateur opérationnel

Pour la réalisation des diverses structures de régulateurs, nous admettrons que les amplificateurs opérationnels sont idéaux. Si une caractéristique importante de l'amplificateur opérationnel peut influencer la qualité du régulateur, il en sera fait mention. Les hypothèses simplificatrices sont donc les suivantes :

| | | |
|---------------------------------|---|-----------------------------|
| $R_{in} \rightarrow \infty$ | : | Résistance d'entrée infinie |
| $R_{out} \rightarrow 0$ | : | Résistance de sortie nulle |
| $I_b(+) = I_b(-) \rightarrow 0$ | : | Courant d'entrée nulle |

7.1.3 Comparaison de la valeur de consigne et de la valeur réelle.

La différence entre la valeur de consigne et la valeur de réelle, appelée écart de réglage est réalisée à l'aide de résistances de comparaison R_c et R_r et d'un amplificateur opérationnel utilisé en sommateur ou en montage différentiel

La tension de consigne u_c dont la polarité dépend du point de fonctionnement est fournie par un organe de contrôle amont (potentiomètre, Convertisseur D/A, ...). La tension réelle u_r est égale à la grandeur de sortie d'un organe de mesure de la grandeur à régler. Cette tension a une polarité inversée par rapport à u_c . Pour obtenir une comparaison précise et constante entre les valeurs de consigne et réelle, on doit en général utiliser des résistances de précision.

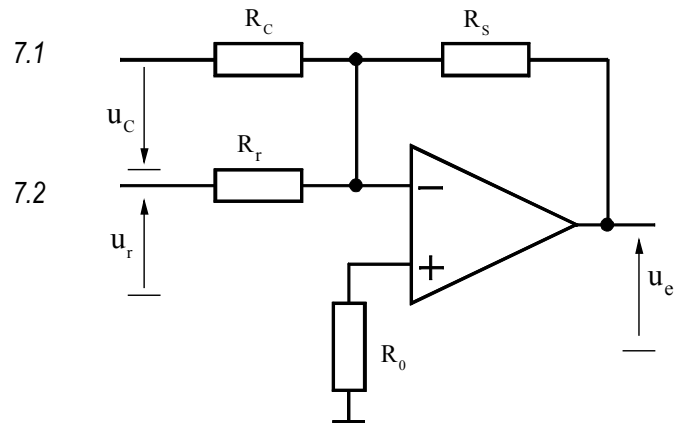
$$\frac{u_c}{R_c} - \frac{u_r}{R_r} - \frac{u_e}{R_s} = 0$$

$$u_e = \frac{R_s}{R_c} \cdot u_c - \frac{R_s}{R_r} \cdot u_r$$

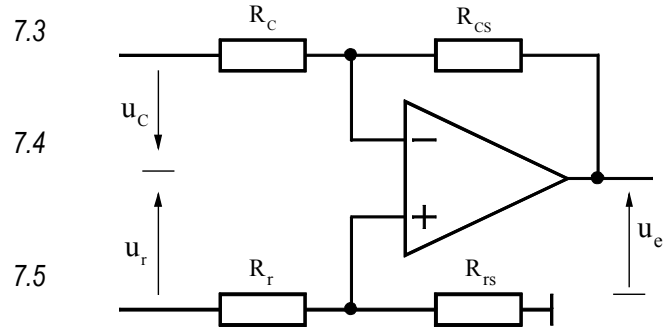
$$u(+)=u(-)=\frac{R_{rc}}{R_r+R_{rc}}u_r$$

$$\frac{u_c - u(-)}{R_c} = \frac{u(-) - u_s}{R_{cs}}$$

$$u_e = \frac{R_{cs}}{R_c} u_c - \frac{R_{rs}}{R_r + R_{rs}} \frac{R_{cs} + R_c}{R_c} u_r$$



Sommateur



Montage différentiel

Figure 7-3 : Comparaison de la valeur de consigne avec la valeur réelle

7.1.4 Configuration générale d'un amplificateur de réglage

Les amplificateurs de réglage sont composés d'un amplificateur opérationnel et d'un réseau de contre-réaction adéquat. Cette contre-réaction a pour but de donner à l'amplificateur de réglage une fonction de transfert déterminée, apte à stabiliser le circuit de réglage. En plus, on réalise, sur les amplificateurs de réglage, la comparaison entre valeur de consigne et valeur réelle. Généralement on utilise des régulateurs standards tels que les régulateurs P, PD, PI et PID. Dans le cas le plus général, le montage extérieur de l'amplificateur de réglage consiste en trois quadripôles, dont deux bornes de chacun d'eux sont reliées au point zéro commun.

On peut établir les relations suivantes

$$i_e(s) = -\frac{1}{Z_e(s)} u_e(s) \quad 7.6$$

$$i_s(s) = \frac{1}{Z_s(s)} \cdot u_s(s) \quad 7.7$$

$$i_e(s) + i_s(s) = 0 \quad 7.8$$

Pour la tension de sortie, on obtient

$$u_s(s) = \frac{Z_s(s)}{Z_e(s)} \cdot u_e(s) \quad 7.9$$

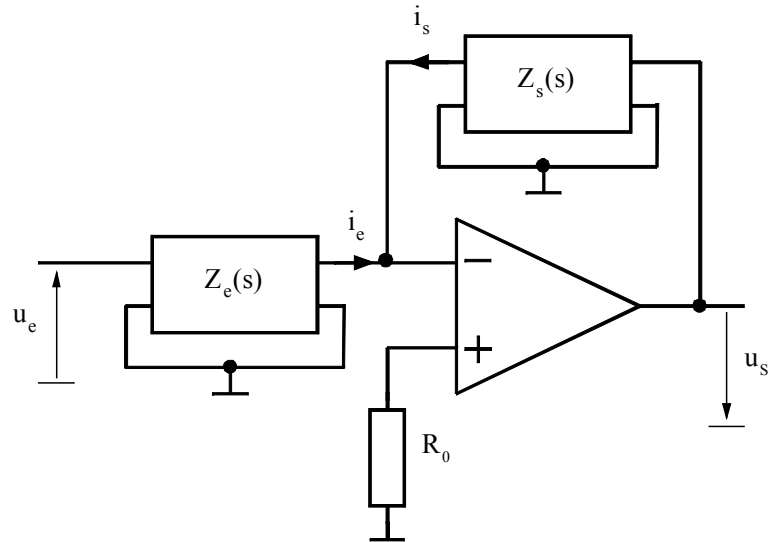


Figure 7-4 : Configuration générale d'un amplificateur de réglage

7.1.5 Fonction de transfert

A l'aide de la fonction de transfert $G_R(s)$ d'un régulateur, on peut écrire la relation générale

$$u_s(s) = G_R(s) \cdot u_e(s) \quad 7.10$$

qui correspond au schéma bloc de la Figure 7-5

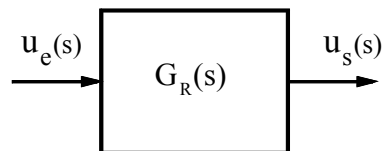


Figure 7-5 : Schéma bloc d'un régulateur

7.1.6 Réponse harmonique

Les réponses harmoniques des régulateurs et des filtres sont souvent représentées par des portions de droites représentant les asymptotes des courbes réelles. Les allures du module et de la phase de la réponse harmonique pour un régulateur PI sont représentées sur les figures ci-dessous.

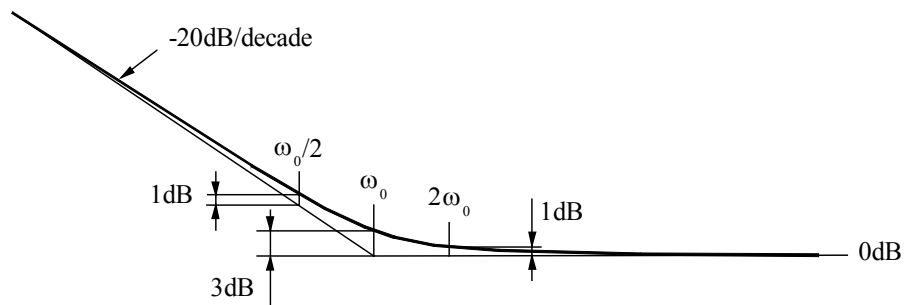


Figure 7-6 : Réponse harmonique (module) pour un régulateur PI

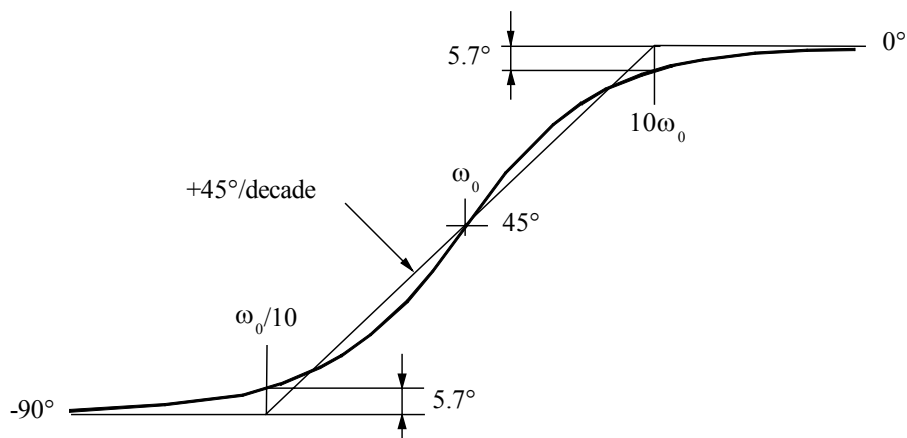


Figure 7-7 : Réponse harmonique (phase) pour un régulateur PI

Pour la phase, il peut être intéressant de tracer la tangente au point d'inflexion situé au milieu de la déviation totale de la plage angulaire.

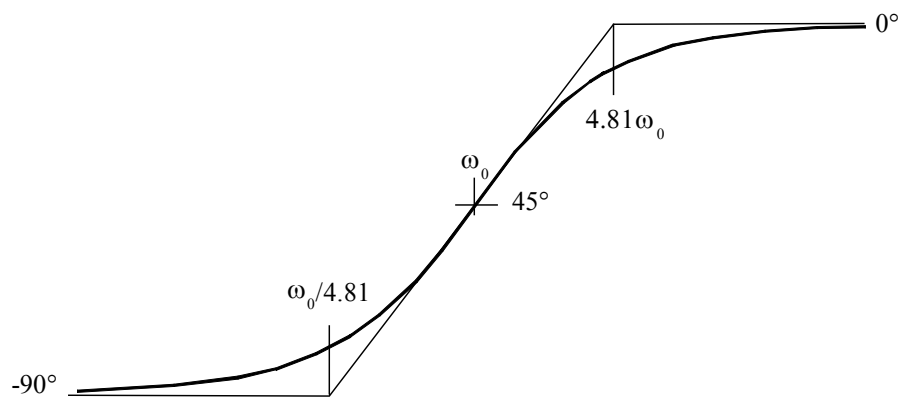


Figure 7-8 : Réponse harmonique (phase) pour un régulateur PI

Lorsque la réponse harmonique d'un système est d'ordre supérieur à 1 et si le système possède plusieurs pôles et zéros réelles, l'approximation par des droites peut devenir insuffisante. Dans ce cas, l'utilisation de programmes informatiques (MathCad, Mathematica, Maple, Matlab,...) dédiés aux applications mathématiques permet de tracer aisément la réponse harmonique d'un système complexe sans utiliser d'approximation par des droites. Le soin est laissé à l'étudiant d'investiguer dans ce sens.

7.1.7 Régulateur P

7.1.7.1 Fonction de transfert

La fonction de transfert du régulateur P prend la forme générale suivante

$$G_R(s) = K_p \quad 7.11$$

7.1.7.2 Réalisation pratique

La Figure 7-9 présente le schéma de principe d'un régulateur P

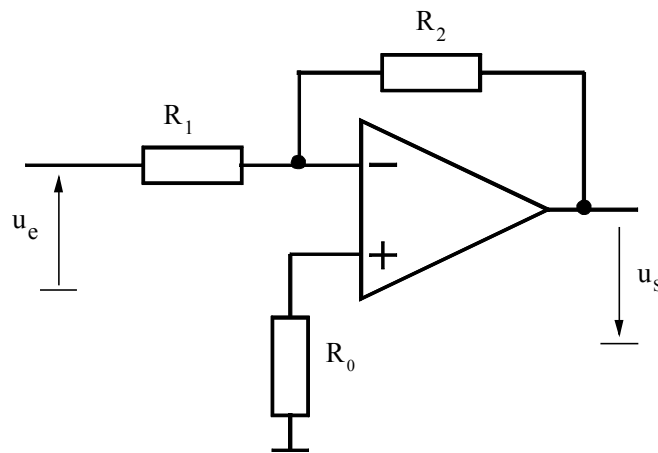


Figure 7-9 : Schéma d'un régulateur P

On peut écrire la relation générale au nœud (-) de l'amplificateur

$$u_e \frac{1}{R_1} = u_s \frac{1}{R_2} \quad 7.12$$

et finalement la fonction de transfert

$$G_R(s) = \frac{U_s(s)}{U_e(s)} = \frac{R_2}{R_1} \quad 7.13$$

7.1.8 Régulateur PI

7.1.8.1 Fonction de transfert

La fonction de transfert du régulateur PI prend la forme générale suivante

$$G_R(s) = K_p \frac{1 + s \cdot T_i}{s \cdot T_i} \quad 7.14$$

7.1.8.2 Réalisation pratique

La Figure 7-10 présente le schéma de principe d'un régulateur PI (proportionnel-intégrateur).

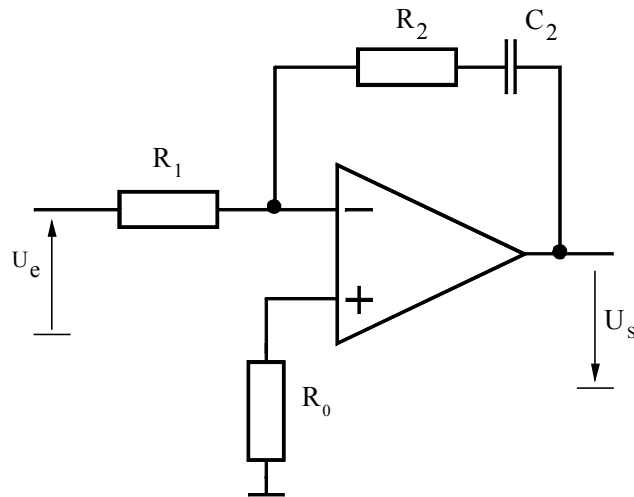


Figure 7-10 : Schéma de principe du régulateur PI

Il possède un circuit de contre-réaction formé d'un condensateur C_2 mis en série avec la résistance R_2

On peut écrire la relation générale au nœud (-) de l'amplificateur

$$U_e \frac{1}{R_1} = U_s \frac{1 + sR_2C_2}{sC_2} \quad 7.15$$

et finalement la fonction de transfert

$$G_R(s) = \frac{U_s(s)}{U_e(s)} = \frac{R_2}{R_1} \frac{1 + sR_2C_2}{sR_2C_2} \quad 7.16$$

avec

$$K_p = \frac{R_2}{R_1} \quad 7.17$$

et

$$T_i = R_2C_2 \quad 7.18$$

7.1.8.3 Réponse harmonique

La réponse harmonique du régulateur PI est représentée à la Figure 7-11.

Les diverses courbes permettent de définir l'influence de chaque composant sur les résultats.

- Une variation de R_1 provoque une translation verticale du module (une augmentation de R_1 entraîne une translation vers le bas de la courbe).

- Une variation de R_2 provoque une translation oblique (20dB/décade) du module (une augmentation de R_2 entraîne une translation dans le sens décroissant des pulsations et croissant du module).
- Une variation de C_2 provoque une translation horizontale du module (une augmentation de C_2 entraîne une translation vers la gauche).

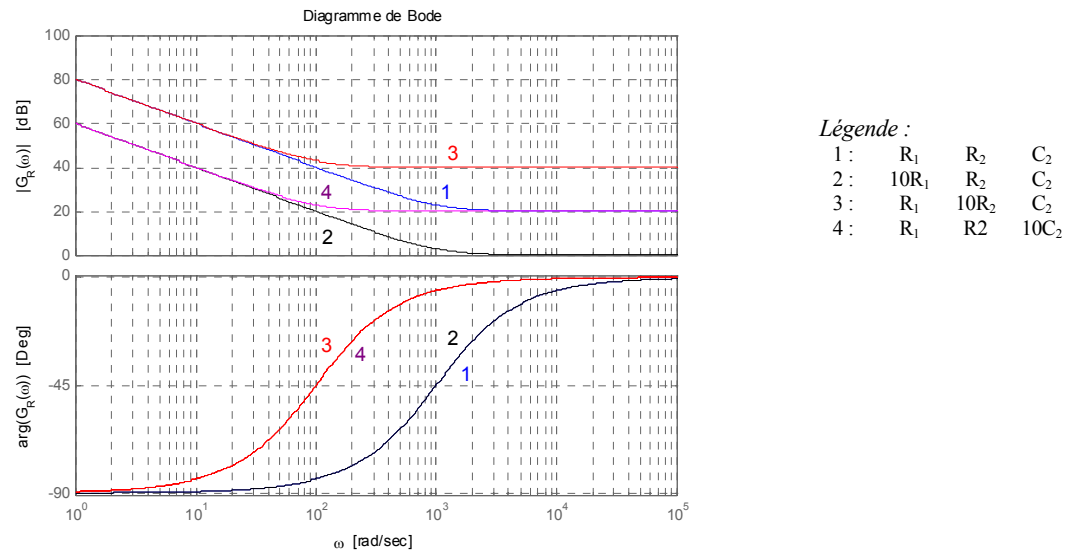


Figure 7-11 : Réponse harmonique du régulateur PI : $R_1=10k$, $R_2=100k$, $C_2=10nF$

7.1.8.4 Réponse indicielle

L'expression de la fonction de transfert selon 7.16 se prête particulièrement bien à la détermination de la réponse indicielle $\gamma_R(t)$ (grandeur rapportée à la tension d'entrée). A partir de la relation générale, on obtient

$$L[\gamma_R(t)] = \frac{1}{s} \cdot G_R(s) = \frac{K_p}{s^2 \cdot T_i} + \frac{K_p}{s} \quad 7.19$$

D'où l'on tire par la transformée de Laplace inverse

$$\gamma_R(t) = \frac{t}{T_i / K_p} + K_p \quad 7.20$$

Cette réponse indicielle est représentée à la Figure 7-12. A l'instant initial ($t=0^+$), on observe un saut égal à $K_p \varepsilon(0^+)$, correspondant à la composante proportionnelle. Ensuite $\gamma_R(t)$ augmente linéairement en fonction du temps t en correspondance avec la composante intégrale.

On peut donc déterminer T_i et K_p expérimentalement à partir de la réponse indicielle. La valeur de la réponse indicielle augmente pour $t \rightarrow \infty$ théoriquement jusqu'à $\gamma_R(t) \rightarrow \infty$. En réalité, la tension de sortie d'un amplificateur opérationnel est limitée par sa tension de saturation. Pour enregistrer expérimentalement la réponse indicielle, il est nécessaire d'appliquer à l'entrée de l'amplificateur de réglage une petite variation de la tension u_e de sorte que la tension de sortie reste, pour une grande partie du phénomène transitoire, dans les limites données par la saturation, afin de relever correctement la composante intégrale.

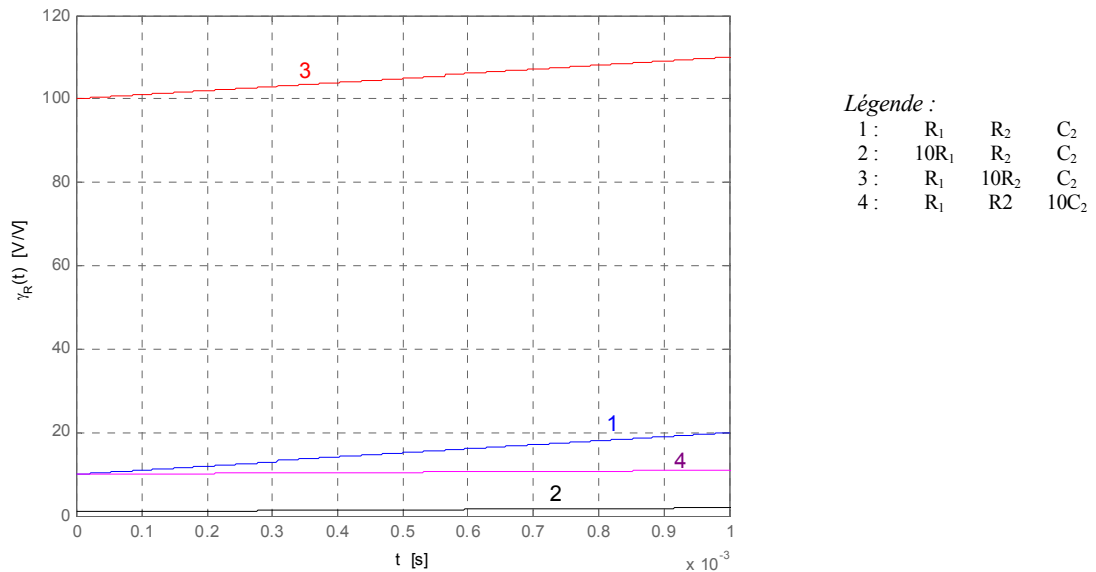


Figure 7-12 : Réponse indicielle du régulateur PI : $R_1=10k$, $R_2=100k$, $C_2=10nF$

7.1.9 Régulateur PD

7.1.9.1 Fonction de transfert

Ce type de régulateur est utilisé pour augmenter la marge de phase. Pour des fréquences élevées, la partie dérivée pose un problème majeur de stabilité. Il est donc judicieux d'ajouter un pôle afin de limiter l'effet dérivateur à des fréquences inférieures à la fréquence de pulsation F_p .

La fonction de transfert de ce type de régulateur est donnée par la relation

$$G_R(s) = K_p \cdot \frac{1 + sT_z}{1 + sT_p} = K_p \cdot \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_z}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_p}\right)} \quad 7.21$$

Le déphasage maximum se situe à une pulsation $\omega_{\phi\max}$ correspondant à la moyenne géométrique des pulsations ω_z et ω_p (voir annexe mathématique §A.1)

$$\omega_{\phi\max} = \sqrt{\omega_p \cdot \omega_z} \quad 7.22$$

Pour obtenir une marge de phase maximum, le régulateur PD doit être dimensionné pour que la pulsation $\omega_{\phi\max}$ corresponde à la pulsation de coupure ω_c de la fonction de transfert en boucle ouverte.

La valeur de la phase à cette pulsation se détermine en remplaçant s par $j\omega_{\phi\max}$. Après quelques calculs on obtient

$$\varphi(G_R(j\omega_{\varphi_{\max}})) = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_z}} - \sqrt{\frac{\omega_z}{\omega_p}}}{2} \right) \quad 7.23$$

Cette relation peut être résolue en fonction de φ_{\max} (voir annexe)

$$\frac{\omega_p}{\omega_z} = \frac{1 + \sin(\varphi_{\max})}{1 - \sin(\varphi_{\max})} \quad 7.24$$

Finalement, connaissant la pulsation de coupure ω_C de la fonction de transfert en boucle ouverte, et en faisant coïncider à cette pulsation ω_C la pulsation correspondant au déphasage maximum du régulateur PD, soit la pulsation $\omega_{\varphi_{\max}}$, on peut écrire la relation.

$$\begin{aligned} \omega_z &= \omega_C \sqrt{\frac{1 - \sin(\varphi_{\max})}{1 + \sin(\varphi_{\max})}} \\ \omega_p &= \omega_C \sqrt{\frac{1 + \sin(\varphi_{\max})}{1 - \sin(\varphi_{\max})}} \end{aligned} \quad 7.25$$

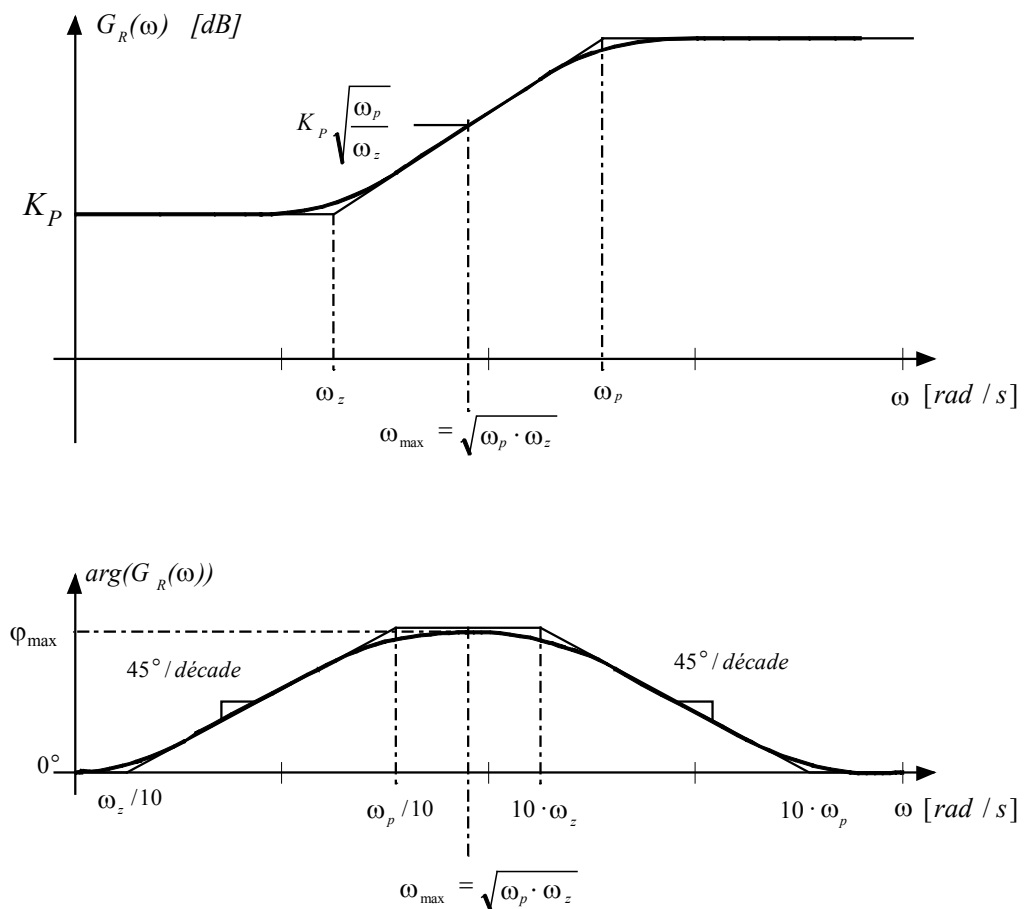


Figure 7-13 : Diagramme de Bode (Amplitude et Phase) du régulateur PD

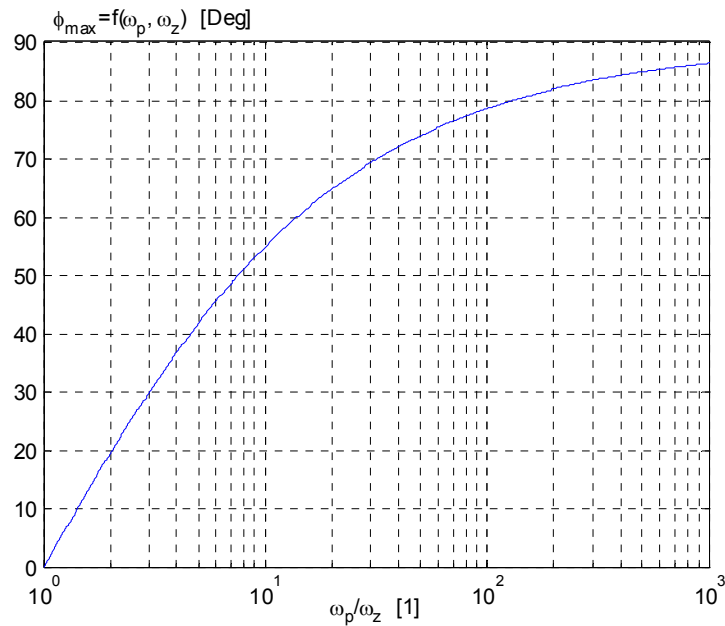


Figure 7-14 : Déphasage maximum en fonction du rapport ω_z/ω_p pour un régulateur PD

7.1.9.2 Réalisation pratique.

En pratique, il existe un grand nombre de façon de réaliser un régulateur PD, toutefois le choix de l'amplificateur opérationnel reste un point déterminant. La Figure 7-15 illustre un tel régulateur.

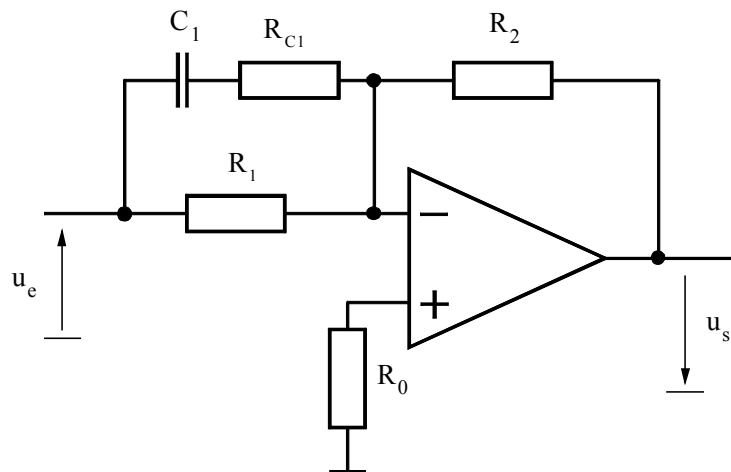


Figure 7-15 Régulateur PD

On peut écrire la relation générale au nœud (-) de l'amplificateur

$$U_e \frac{1+s(R_{C1}+R_1)C_1}{1+sR_{C1}C_1} \frac{1}{R_1} = U_s \frac{1}{R_2} \quad 7.26$$

et finalement la fonction de transfert

$$G_R(s) = \frac{U_s(s)}{U_e(s)} = \frac{R_2}{R_1} \frac{1 + s(R_{C1} + R_1)C_1}{1 + sR_{C1}C_1} \quad 7.27$$

avec

$$K_p = \frac{R_2}{R_1} \quad 7.28$$

$$\omega_z = \frac{1}{(R_{C1} + R_1)C_1} \quad 7.29$$

$$\omega_p = \frac{1}{R_{C1}C_1} \quad 7.30$$

7.1.9.3 Exemple de régulateur PD

On prend pour exemple un régulateur PD ayant un gain statique $K_p = \sqrt{2}$ et une avance de phase maximum fixée à $\varphi_{\max} = 55^\circ$ pour une pulsation de $\omega_C = 1000 \text{ rad/s}$.
Le zéro de la fonction de transfert correspond à une pulsation de

$$\omega_z = \omega_C \sqrt{\frac{1 - \sin(\varphi_{\max})}{1 + \sin(\varphi_{\max})}} = 10^3 \cdot \sqrt{\frac{1 - \sin(55)}{1 + \sin(55)}} = 3.15 \cdot 10^2 \text{ [rad/s]} \quad 7.31$$

alors que le pôle de la fonction de transfert correspond à une pulsation de

$$\omega_p = \omega_C \sqrt{\frac{1 + \sin(\varphi_{\max})}{1 - \sin(\varphi_{\max})}} = 10^3 \cdot \sqrt{\frac{1 + \sin(55)}{1 - \sin(55)}} = 3.17 \cdot 10^3 \text{ [rad/s]} \quad 7.32$$

Le dimensionnement du régulateur se déroule de la manière suivante

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow \text{Choix : } C_1 = 33 \text{ nF} \\ 2 &\rightarrow R_{C1} = \frac{1}{\omega_p C_1} \quad \text{A.N. : } R_{C1} = 9.55 \text{ k}\Omega \\ 3 &\rightarrow R_1 = \left(\frac{1}{\omega_z} - \frac{1}{\omega_p} \right) \frac{1}{C_1} \quad \text{A.N. : } R_1 = 86.6 \text{ k}\Omega \\ 4 &\rightarrow R_2 = K_p \left(\frac{1}{\omega_z} - \frac{1}{\omega_p} \right) \frac{1}{C_1} \quad \text{A.N. : } R_2 = 123 \text{ k}\Omega \end{aligned} \quad 7.33$$

La Figure 7-15 illustre le diagramme de Bode du régulateur PD

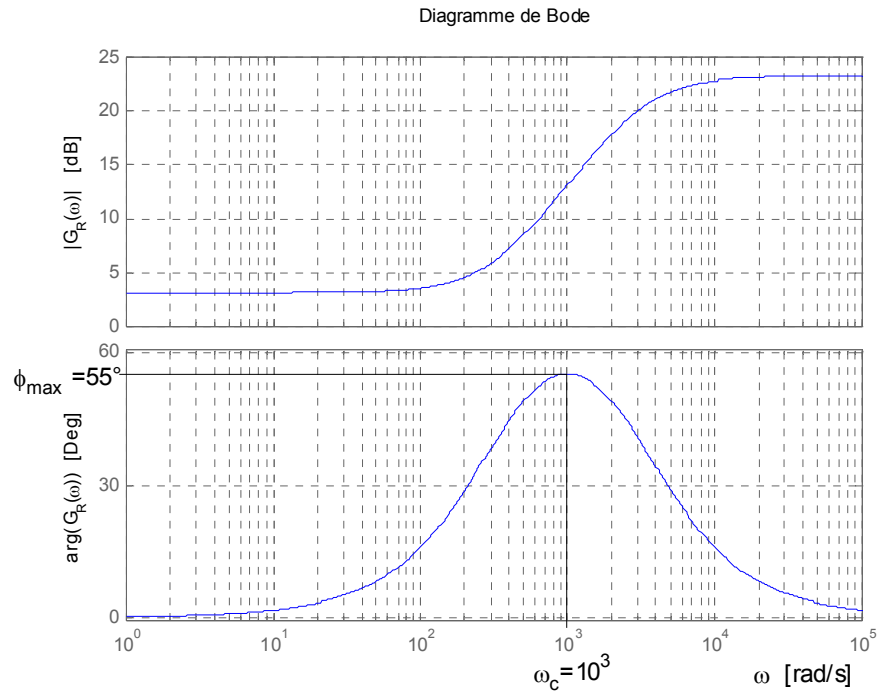


Figure 7-16 : Diagramme de Bode du régulateur PD

$\omega_c = 1 \text{ krad/s}$, $\phi_{\max} = 55^\circ$, $K_p = \sqrt{2}$, $C = 33 \text{ nF}$, $R_{C1} = 9.55 \text{ k}$, $R_1 = 86.6 \text{ k}$, $R_2 = 123 \text{ k}$

7.1.9.4 Réponse indicielle

A partir de la relation générale 7.21, on peut déterminer de la réponse indicielle $\gamma_R(t)$.
(*grandeur rapportée à la tension d'entrée*)

$$L[\gamma_R(t)] = \frac{1}{s} \cdot G_R(s) = K_p \left(\frac{1}{s(1+sT_p)} + \frac{T_z}{(1+sT_p)} \right) \quad 7.34$$

D'où l'on tire par la transformée de Laplace inverse

$$\gamma_R(t) = K_p \left(1 + \frac{T_z - T_p}{T_p} e^{-t/T_p} \right) \quad 7.35$$

Cette réponse indicielle est représentée à la Figure 7-12 . A l'instant initial ($t=0$), on a

$$\gamma_R(0) = K_p \frac{T_z}{T_p} \quad 7.36$$

correspondant à l'effet dérivateur. Ensuite $\gamma_R(t)$ diminue exponentiellement en fonction du temps t . La valeur finale ($t \rightarrow \infty$) valant

$$\gamma_R(\infty) = K_p \quad 7.37$$

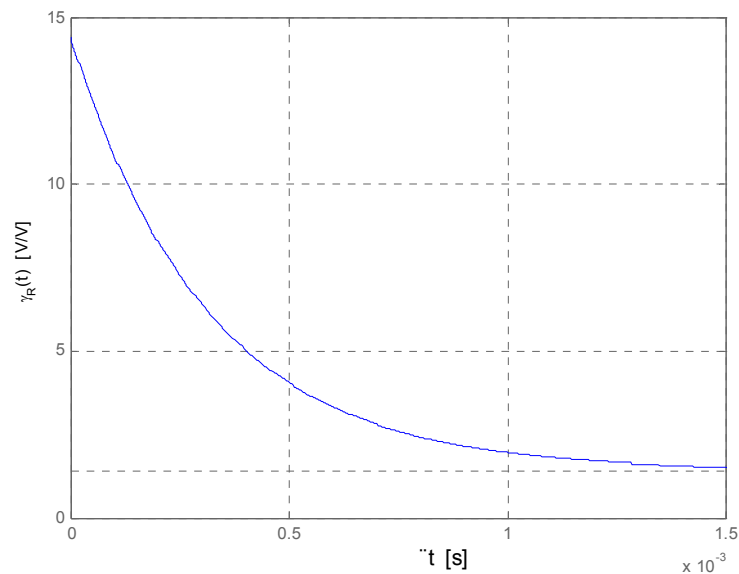


Figure 7-17 : Réponse indicielle du régulateur PD

$$\omega_c = 1 \text{ rad/s}, \varphi_{\max} = 55^\circ, K_p = \sqrt{2}, C = 33 \text{ nF}, R_{C1} = 9.55 \text{ k}, R_1 = 86.6 \text{ k}, R_2 = 123 \text{ k}$$

7.1.9.5 Caractéristique réelle de l'amplificateur.

En réalité la fonction de transfert donnée par la relation 7.27 est idéalisée par le fait que l'on suppose infinie l'amplification (en tension) de l'amplificateur opérationnel. Le calcul de la fonction de transfert avec une amplification finie est relativement complexe. On se limitera par la suite à une déduction qualitative, donnant des résultats satisfaisants, à l'aide de la réponse harmonique.

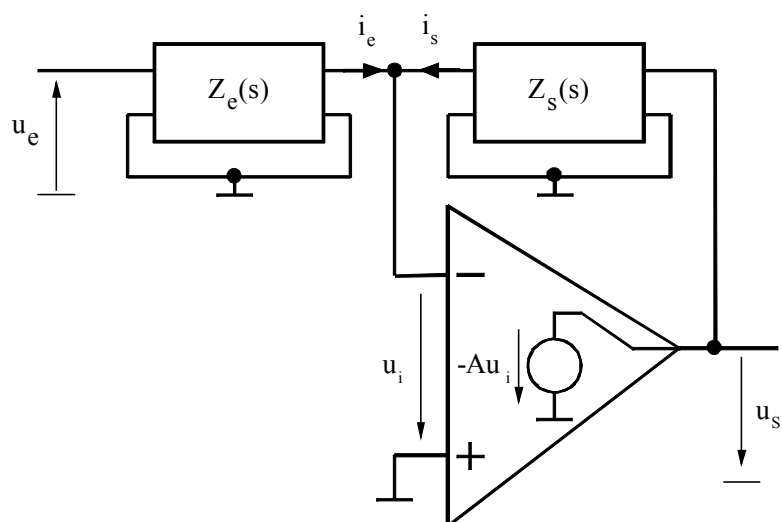


Figure 7-18 : Configuration d'un régulateur avec caractéristique réelle de l'amplificateur opérationnel

De la Figure 7-18, on peut écrire :

$$-\frac{u_e(s) + u_i(s)}{Z_e(s)} + \frac{u_s(s) - u_i(s)}{Z_s(s)} = 0 \quad 7.38$$

et

$$u_s(s) = -A(s) \cdot u_i(s) \quad 7.39$$

et par conséquent, après quelques calculs, on peut écrire pour la réponse harmonique

$$u_s(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{A(j\omega) \cdot \underbrace{\frac{Z_e(j\omega)}{Z_e(j\omega) + Z_s(j\omega)}}_{\beta(j\omega)} + 1} \frac{Z_s(j\omega)}{Z_e(j\omega) + Z_s(j\omega)} u_c(j\omega) \quad 7.40$$

La fonction de transfert de l'amplificateur est considérée comme un retard du 1^{er} ordre dont la forme est la suivante

$$A = \frac{A_0}{1 + s2\pi F_T} \quad 7.41$$

où A_0 représente le gain DC de l'amplificateur opérationnel en boucle ouverte et F_T la fréquence de coupure. La Figure 7-19 illustre un exemple.

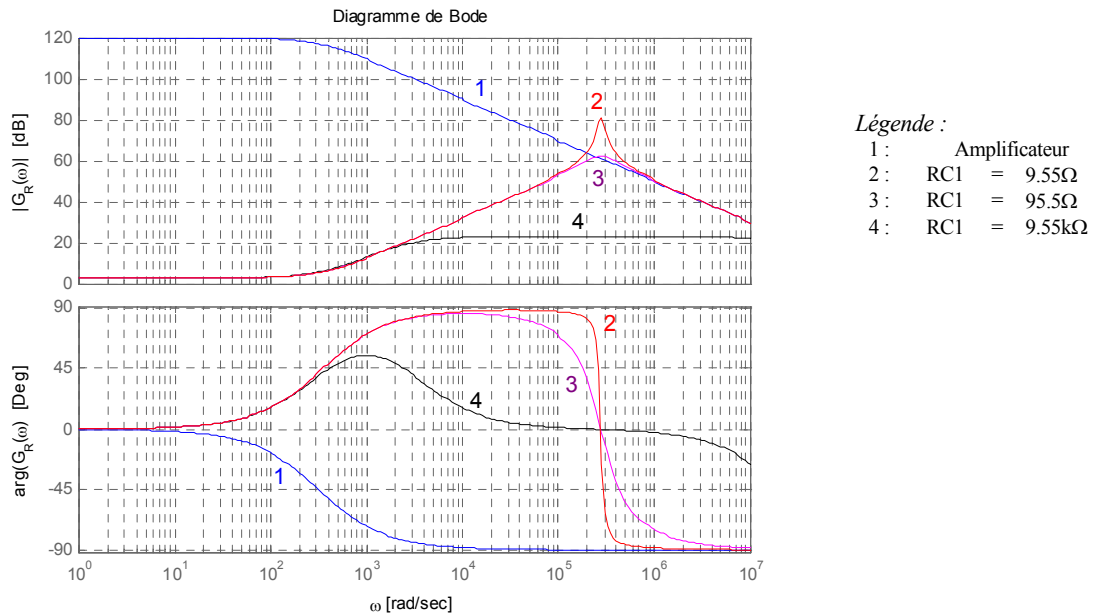


Figure 7-19 Diagramme de Bode du régulateur PD avec amplificateur opérationnel réel
 $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$, $\varphi_{\max} = 55^\circ$, $K_p = \sqrt{2}$, $C = 33 \text{ nF}$, $R_{C1} = 9.55 \text{ k}$, $R_1 = 86.6 \text{ k}$, $R_2 = 123 \text{ k}$, $A_0 = 120 \text{ dB}$, $F_T = 50 \text{ Hz}$

La réponse indicielle montre de manière évidente les effets de la caractéristique de l'amplificateur.

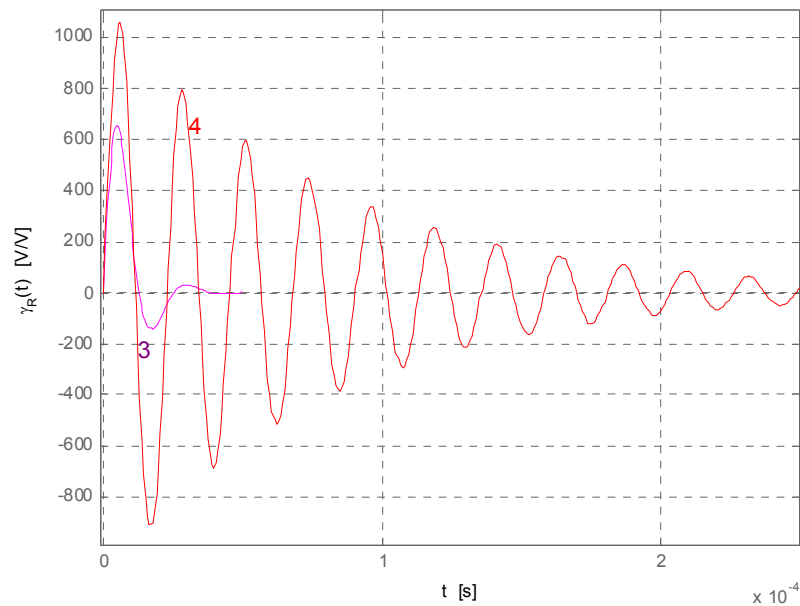


Figure 7-20 : Réponse indicielle du régulateur PD avec amplificateur opérationnel réel
 $\omega_C=1\text{krad/s}$, $\varphi_{\max}=55^\circ$, $K_p=\sqrt{2}$, $C=33\text{nF}$, $R_{C1}=9.55\text{k}$, $R_1=86.6\text{k}$, $R_2=123\text{k}$, $A_0=120\text{dB}$, $F_T=50\text{Hz}$

On constate l'apparition d'oscillations mal amorties à une pulsation ω très élevée. Ceci provient du fait que la boucle formée par le réseau de contre-réaction et l'amplificateur opérationnel se trouve très proche de la limite de stabilité.

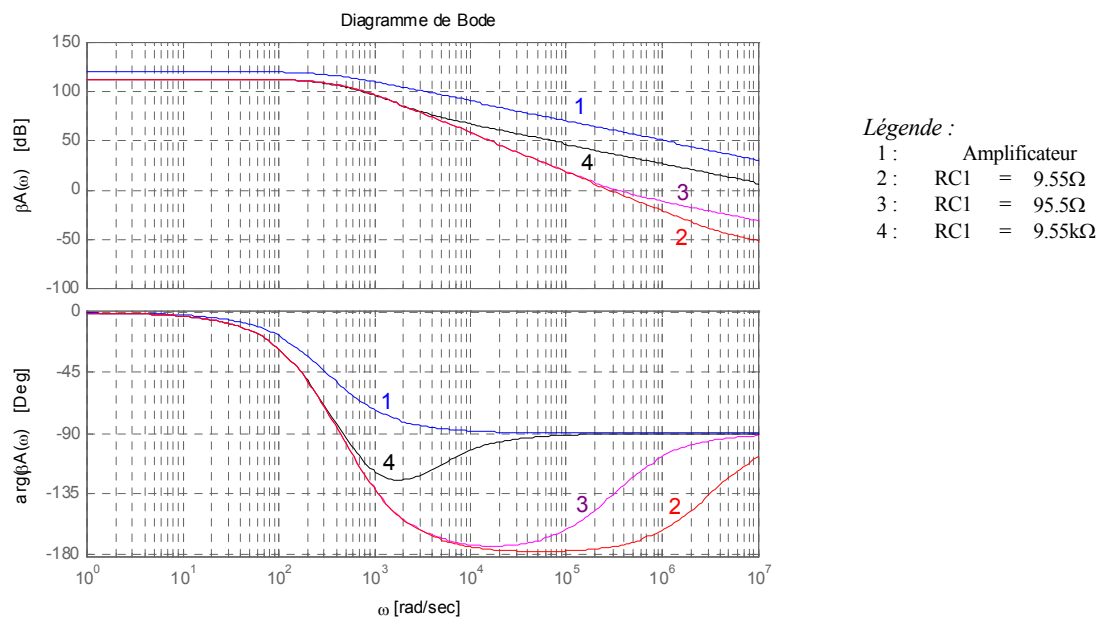


Figure 7-21 : Bode en boucle ouverte $A(j\omega)\beta(j\omega)$
 $\omega_C=1\text{krad/s}$, $\varphi_{\max}=55^\circ$, $K_p=\sqrt{2}$, $C=33\text{nF}$, $R_{C1}=9.55\text{k}$, $R_1=86.6\text{k}$, $R_2=123\text{k}$, $A_0=120\text{dB}$, $F_T=50\text{Hz}$

Effectivement pour ω très élevée, le réseau de contre-réaction provoque un déphasage proche de -90° .

$$\beta(j\omega) = \frac{Z_e(j\omega)}{Z_e(j\omega) + Z_s(j\omega)} \quad 7.42$$

De même, l'amplificateur opérationnel présente un déphasage proche de -90° , de sorte que le déphasage total $\beta(\omega)A(\omega)$ (boucle ouverte vaut presque 180° . Pour pallier cet inconvénient, on doit utiliser la résistance R_{C1} en série avec le condensateur C_1 . Celle-ci amène le déphasage du réseau de contre-réaction vers 0° pour $\omega \rightarrow \infty$. Ceci permet de rendre la boucle de contre-réaction bien amortie.

$$\beta(j\omega) \cdot A(j\omega) = \frac{Z_e(j\omega)}{Z_e(j\omega) + Z_s(j\omega)} \frac{A_0}{1 + j\omega 2\pi F_T} \quad 7.43$$

7.1.10 Régulateur PID

7.1.10.1 Fonction de transfert

Le régulateur PD vu au paragraphe précédent présente un inconvénient aux basses fréquences par le fait qu'il a un gain limité. Il existe donc une erreur statique qui peut être éliminée par l'adjonction d'une composante intégrale. La relation 7.44 donne la fonction de transfert du régulateur PID usuellement utilisé pour ce type d'application

$$G_R(s) = K_P \underbrace{\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)}_{\text{Partie PI}} \cdot \frac{\overbrace{(1 + sT_z)}^{\text{Partie PD}}}{(1 + sT_{p1})(1 + sT_{p2})} = K_P \frac{(1 + \frac{\omega_L}{s})(1 + \frac{s}{\omega_z})}{(1 + \frac{s}{\omega_{p1}})(1 + \frac{s}{\omega_{p2}})} \quad 7.44$$

La Figure 7-22 illustre, sous forme du diagramme de Bode, l'amplitude et la phase en fonction de la pulsation d'un tel régulateur.

Le zéro à la pulsation ω_z permet d'ajouter une avance de phase dans le voisinage de la pulsation de coupure ω_C comme pour le régulateur PD.

S'il a été possible de définir des relations mathématiques exactes pour les pulsations caractéristiques ω_z , ω_p , $\omega_{\varphi_{\max}}$ du régulateur PD, il n'en est plus de même pour le régulateur PID tel qu'il est défini par la relation 7.44. Une manière pratique de choisir les différents zéros et pôles du régulateur peut être décrite de la manière suivante.

1. Choix de l'avance de phase maximum φ_{\max} .
2. Définir, par rapport au système à régler la pulsation ω_C correspondant au gain unité pour la fonction de transfert en boucle ouverte.
3. Calculer les pulsations ω_z , et ω_{p1}
4. Calculer ω_L comme $\omega_L = \omega_z / 10$
5. Calculer ω_{p2} comme $\omega_{p2} = 10 \cdot \omega_{p1}$

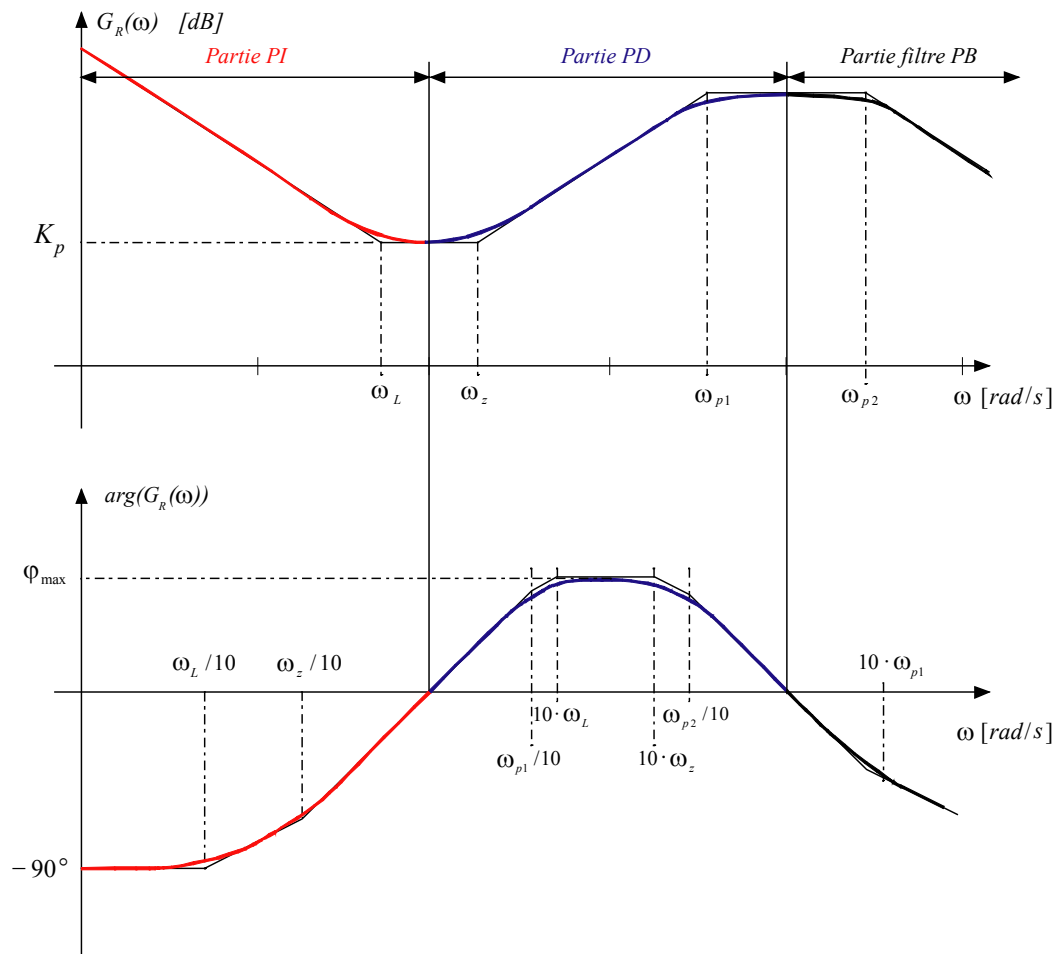


Figure 7-22 : Diagramme de Bode (Amplitude et Phase) du régulateur PID

7.1.10.2 Réalisation pratique.

En pratique, il existe un grand nombre de façon de réaliser un régulateur PID. La Figure 7-15 illustre un tel régulateur.

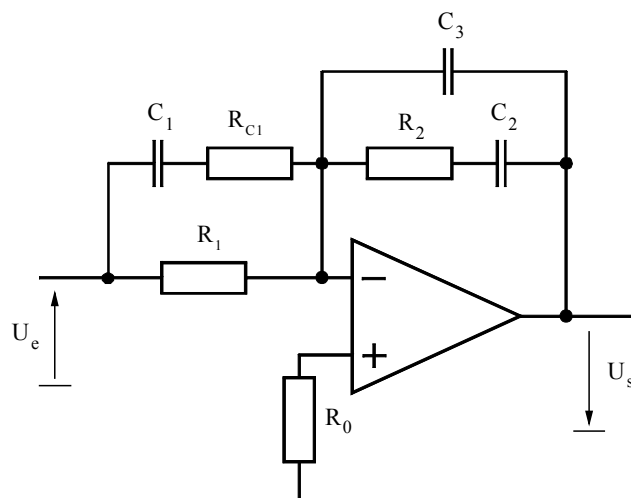


Figure 7-23 Régulateur PID

On peut écrire la relation générale au nœud (-) de l'amplificateur

$$U_e \frac{1+s(R_{C1}+R_1)C_1}{1+sR_{C1}C_1} \frac{1}{R_1} = U_s \frac{1+sR_2 \frac{C_2C_3}{C_1+C_3}}{1+sR_2C_2} s(C_2+C_3) \quad 7.45$$

et finalement la fonction de transfert

$$G_R(s) = \frac{U_s(s)}{U_e(s)} = \frac{R_2}{R_1} \frac{C_2}{C_2+C_3} \frac{(1+sR_2C_2)(1+s(R_1+R_{C1})C_1)}{sR_2C_2(1+sR_2 \frac{C_2C_3}{C_1+C_3})(1+sR_{C1}C_1)} \quad 7.46$$

avec

$$K_p = \frac{R_2}{R_1} \frac{C_2}{C_2+C_3} \quad 7.47$$

$$\omega_L = \frac{1}{R_2C_2}$$

$$\omega_z = \frac{1}{(R_{C1}+R_1)C_1} \quad 7.48$$

$$\omega_{p1} = \frac{1}{R_{C1}C_1} \quad 7.49$$

$$\omega_{p2} = \frac{1}{R_{C2} \frac{C_2C_3}{C_2+C_3}}$$

7.1.10.3 Exemple de régulateur PID

Soit le régulateur PID suivant

1. Avance de phase maximum : $\varphi_{\max} = 75^\circ$.
2. Pulsation correspondant à φ_{\max} : $\omega_c = 5 \cdot 10^3 \text{ [rad/s]}$.
3. Calcul des pulsations ω_z , et ω_{p1} : $\omega_z = 3.15 \cdot 10^4 \text{ [rad/s]}$,
 $\omega_{p1} = 3.17 \cdot 10^5 \text{ [rad/s]}$
4. Calcul de ω_L : $\omega_L = \omega_z / 10 = 3.15 \cdot 10^3 \text{ [rad/s]}$
5. Calcul de ω_{p2} : $\omega_{p2} = 10 \cdot \omega_{p1} = 3.17 \cdot 10^6 \text{ [rad/s]}$

Le dimensionnement du régulateur se déroule de la manière suivante

$$1 \rightarrow \text{Choix : } C_2 = 33 \text{ nF}$$

$$2 \rightarrow R_1 = \left(\frac{1}{\omega_L K_p} - \left(\frac{1}{\omega_z} - \frac{1}{\omega_{p1}} \right) \right) \frac{1}{C_2} \quad \text{A.N. : } R_1 = 280 \text{ k}\Omega$$

$$3 \rightarrow C_1 = \left(\frac{\frac{1}{\omega_z} - \frac{1}{\omega_p}}{\frac{1}{\omega_L K_p} - \left(\frac{1}{\omega_z} - \frac{1}{\omega_{p1}} \right)} \right) \frac{1}{C_2} \quad A.N.: C_1 = 5.3nF$$

$$4 \rightarrow R_2 = \frac{1}{\omega_L} C_2 \quad A.N.: R_2 = 460k\Omega$$

$$5 \rightarrow R_{C1} = \frac{\frac{1}{\omega_L K_p} - \left(\frac{1}{\omega_z} - \frac{1}{\omega_{p1}} \right)}{\omega_{p1} \left(\frac{1}{\omega_z} - \frac{1}{\omega_{p1}} \right)} \frac{1}{C_2} \quad A.N.: R_{C1} = 4.9k\Omega$$

$$6 \rightarrow C_3 = \frac{1}{\frac{\omega_{p2}}{\omega_L} - 1} C_2 \quad A.N.: C_3 = 5.7pF$$

La Figure 7-24 illustre le diagramme de Bode du régulateur PID

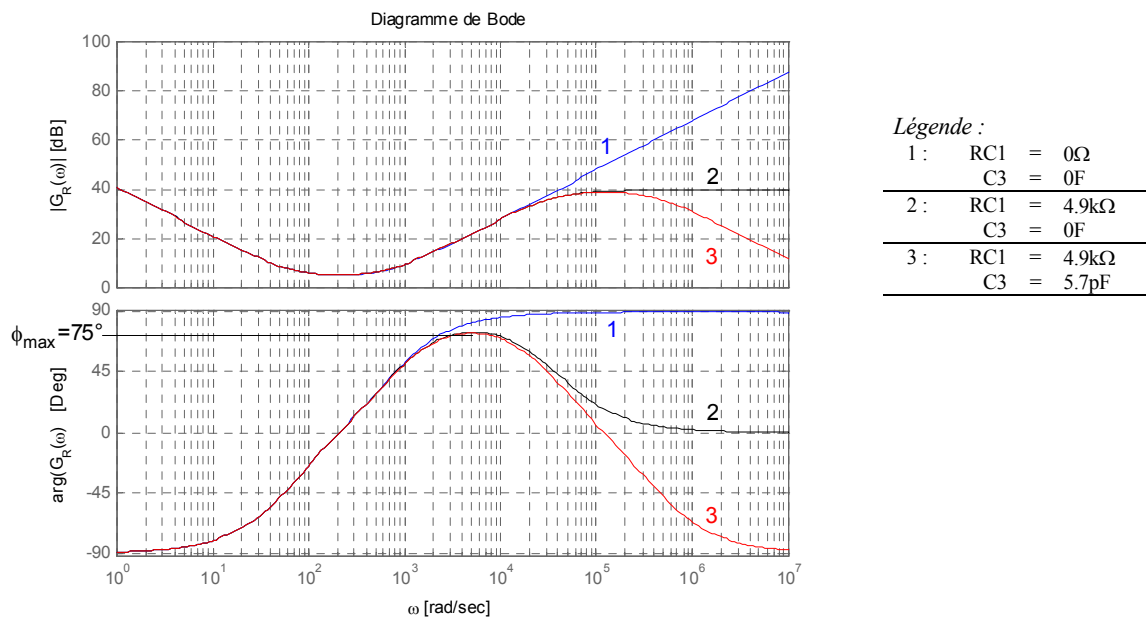


Figure 7-24 : Diagramme de Bode du régulateur PID
 $R_1=280k$, $R_{C1}=4.9k$, $R_2=460k$, $C_1=5.3nF$, $C_2=33nF$, $C_3=5.7pF$

7.1.10.4 Réponse indicielle

A partir de la relation générale 7.44, on peut déterminer de la réponse indicielle $\gamma_R(t)$.
 (grandeur rapportée à la tension d'entrée)

$$L[\gamma_R(t)] = \frac{1}{s} \cdot G_R(s) = \frac{K_p}{s} \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) \frac{(1 + sT_z)}{(1 + sT_{p1})(1 + sT_{p2})} \quad 7.50$$

D'où l'on tire par la transformée de Laplace inverse

$$\gamma_R(t) = K_p \left(\underbrace{\frac{t}{T_i}}_{\text{Partie I}} + \underbrace{\frac{T_i + T_z - T_{p1} - T_{p2}}{T_i}}_{\text{Partie P}} + \underbrace{\frac{(T_i - T_{p1})(T_z - T_{p1})}{T_i(T_{p1} - T_{p2})} e^{-\frac{t}{T_{p1}}} - \frac{(T_i - T_{p2})(T_z - T_{p2})}{T_i(T_{p1} - T_{p2})} e^{-\frac{t}{T_{p2}}}}_{\text{Partie D + Passe-bas}} \right) \quad 7.51$$

Cette réponse indicielle est représentée à la Figure 7-25.

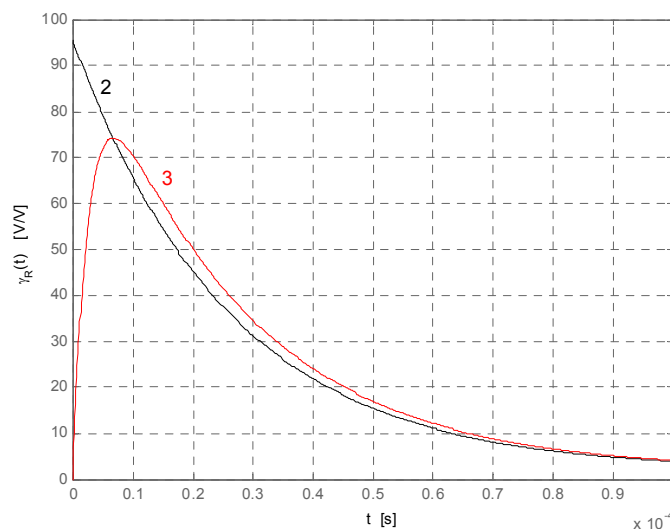
A l'instant initial ($t=0$), on observe un saut égal à

$$\begin{aligned} \gamma_R(0) \Big|_{T_{p2} \neq 0} &= 0 \\ \gamma_R(0) \Big|_{T_{p2} = 0} &= K_p \frac{T_z}{T_{p1}} \end{aligned} \quad 7.52$$

En comparant avec la relation 7.36, on voit que pour $T_{p2}=0$, il y a similitude entre les régulateur PD et PID.

Par contre en ajoutant un filtre Passe-Bas ($T_{p2} \neq 0$), la valeur initiale de la réponse indicielle part de zéro.

La Figure 7-25 montre la partie PD du régulateur PID. Pour des temps plus longs, on retrouve la partie intégrale du régulateur.



Légende :

| | |
|-----|-------------|
| 2 : | RC1 = 4.9kΩ |
| | C3 = 0F |
| 3 : | RC1 = 4.9kΩ |
| | C3 = 5.7pF |

Figure 7-25 : Réponse indicielle du régulateur PID $R_1=280k$, $R_{C1}=4.9k$, $R_2=460k$, $C_1=5.3nF$, $C_2=33nF$

7.1.10.5 Amplificateur opérationnel réel

En se référant au §7.1.9.5, on peut tenir compte du comportement en fréquence de l'amplificateur opérationnel. On rappelle ici la réponse harmonique de ce dernier

$$A = \frac{A_0}{1 + s2\pi F_T} \quad 7.53$$

Pour notre exemple, nous avons admis

$$A_0 = 100dB$$

$$F_T = 50Hz$$

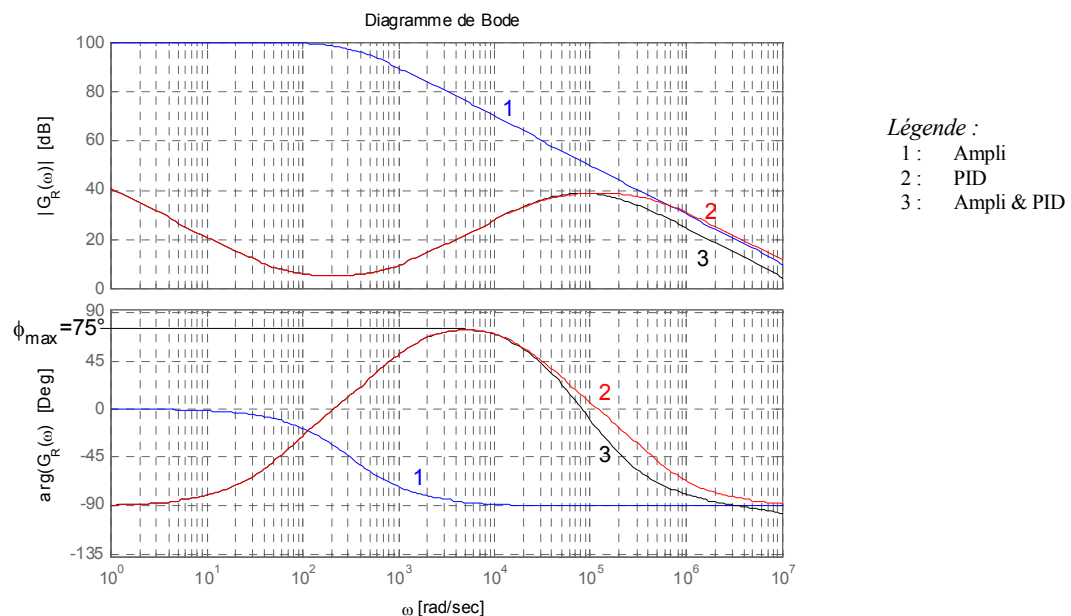


Figure 7-26 : Réponse harmonique du régulateur PID réelle

$$R_1=280k, R_{C1}=4.9k, R_2=460k, C_1=5.3nF, C_2=33nF, C_3=5.7pF, A_0=100dB, F_T=50Hz$$

Avec ou sans C_3 , la réponse indicielle du régulateur PID prend initialement la valeur 0. En effet la largeur de bande limitée de l'amplificateur en boucle ouverte empêche toute discontinuité.

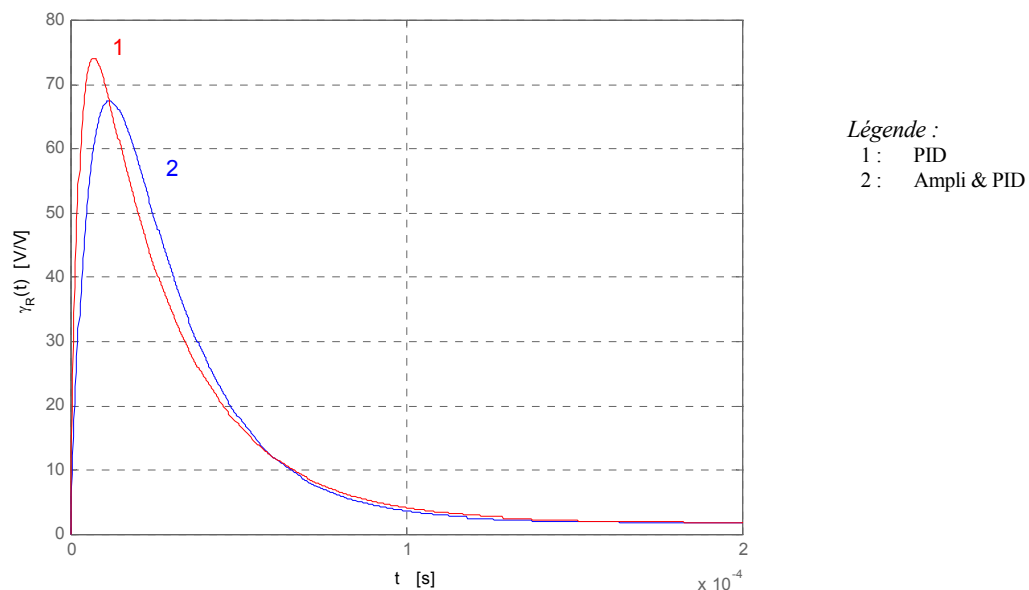


Figure 7-27 : Réponse indicielle du régulateur PID réelle
 $R_1=280k$, $R_{C1}=4.9k$, $R_2=460k$, $C_1=5.3nF$, $C_2=33nF$, $C_3=5.7pF$, $A_0=100dB$, $F_T=50Hz$

7.2 DISPOSITIFS DE LIMITATION

7.2.1 Généralités

Pour la réalisation de dispositifs non linéaires, on fait appel à de petites diodes signal présentant de faibles tensions directes. Ces diodes, combinées avec des résistances et des amplificateurs opérationnels permettent de créer des caractéristiques non linéaires. Il est donc possible de construire des limiteurs, des générateurs de fonctions non linéaires, ainsi que des dispositifs de formation de valeurs maximale ou minimale.

7.2.2 Limitation par un pont à diodes

Un montage limiteur est représenté à la Figure 7-28. Il s'agit d'un pont à diodes, qui est alimenté au travers des résistances R_1 et R_2 , par les tensions auxiliaires V_{DD} et V_{EE} . Les tensions de limitation sont ajustables à l'aide des potentiomètres P_1 et P_2 . Un amplificateur opérationnel en montage suiveur empêche le pont à diodes d'être chargé, d'une manière indéfinie, par les éléments alimentés par la tension de sortie u_s .

Lorsque la tension d'entrée u_e se trouve entre les limites $-U_{SLIM}$ et $+U_{SLIM}$, les diodes D_1 à D_4 conduisent et la tension u_s est égale à la tension d'entrée u_e , et ceci à condition que les quatre diodes présentent la même tension directe. Les diodes D_5 et D_6 sont alors bloquées. Si $u_e > U_{SLIM}$, la diode D_3 se bloque et la diode D_5 devient conductrice. La diode D_4 reste conductrice. Elle impose à la borne supérieure de la résistance R_2 la tension u_e , plus élevée que la tension U_{SLIM} . Par conséquent, la diode D_2 se bloque. La diode D_1 conduit, grâce au courant, circulant au travers de la résistance R_0 . Aux bornes de cette résistance apparaît la tension $u'_s = U_{SLIM}$. La tension de sortie $u_s = u'_s$ est maintenant égale à la tension U_{SLIM} et indépendante de la tension d'entrée u_e . Si, par contre, $u_e < -U_{SLIM}$, la diode D_4 se bloque et

la diode D_6 devient conductrice. Les diodes D_2 et D_3 conduisent également, tandis que la diode D_1 se bloque. La tension de sortie est alors $u_s = u'_s = -U_{SLIM}$.

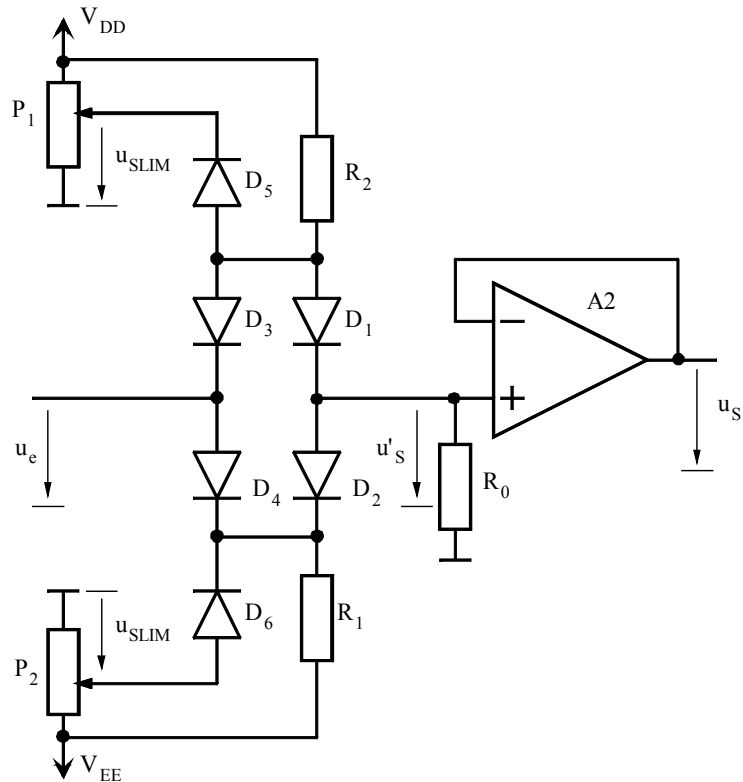


Figure 7-28 : Limitation par pont à diodes

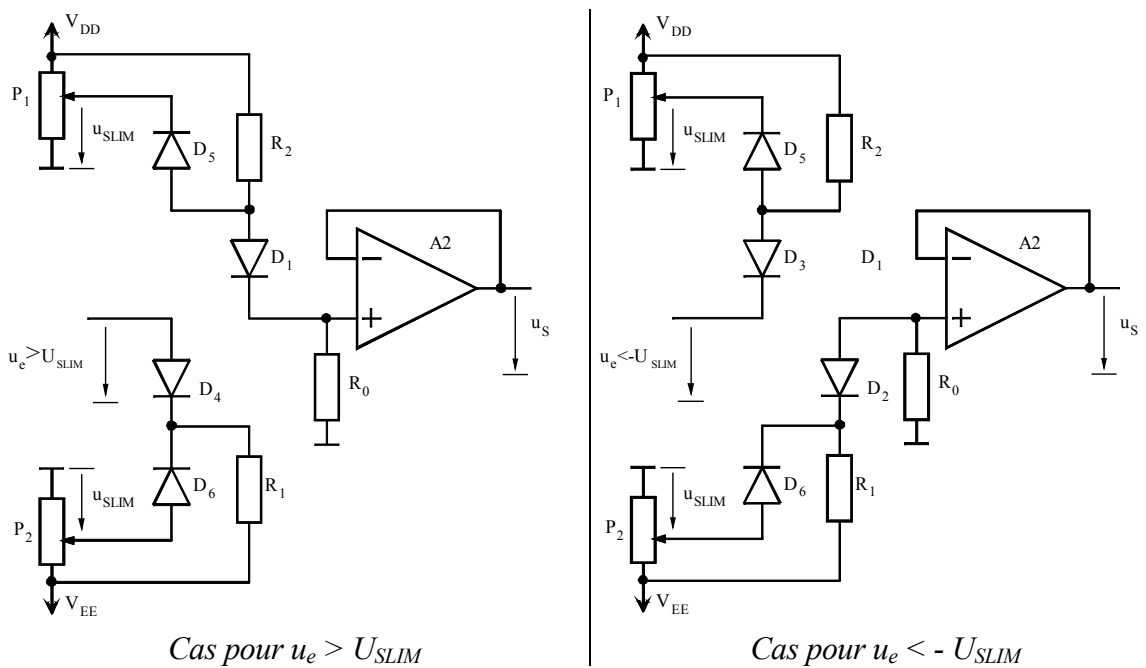


Figure 7-29 : Limitation par pont à diodes

La tension de sortie u_s reste donc limitée entre les limites données par les tensions U_{SLIM} et $-U_{SLIM}$. La caractéristique de limitation est représentée à la Figure 7-30. Dans le domaine de limitation, la tension de sortie u_s reste absolument constante. Dans les cas nécessitant une limitation parfaite, on doit faire appel au montage limiteur avec pont à diodes.

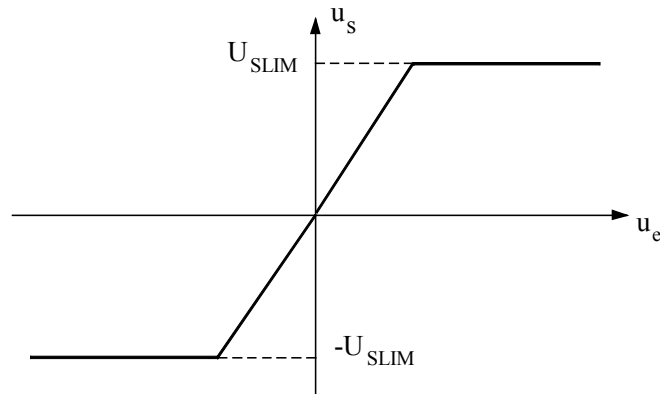


Figure 7-30 : Caractéristique de limitation

7.3 LIMITATION SUR UN RÉGULATEUR COMPORTANT UNE COMPOSANTE INTÉGRALE

7.3.1 Généralités

En combinant des limiteurs avec des régulateurs PI, PID, ou, dans le cas général, avec des amplificateurs opérationnels présentant des condensateurs en contre-réaction, il faut veiller à ce que le réseau de limitation à diodes et le réseau RC de contre-réaction soient reliés à la sortie du même amplificateur opérationnel.

Les limiteurs n'entrent en fonction que lors d'une surcharge ou, ce qui est le plus fréquent, pendant des phénomènes de réglage transitoires, lors de brusques variations, par exemple, pendant le démarrage et le freinage d'un entraînement réglé. En fonctionnement normal, les limiteurs sont inopérants et n'ont aucune influence sur le fonctionnement du régulateur PI ou PID.

Il est indispensable de monter les éléments de limitation sur l'amplificateur de réglage lui-même. Un montage en cascade d'un amplificateur de réglage et d'un limiteur séparé n'est pas admissible. Les raisons en sont démontrées par les Figure 7-32 et Figure 7-34 pour le cas d'un régulateur PI. Les mêmes phénomènes se présentent pour un régulateur PID

7.3.2 Limitation cascade au régulateur

On examine d'abord le cas d'un montage en cascade (Figure 7-31).

Lors d'une variation brusque de l'écart de réglage u_e , le signal de sortie u_s évolue conformément au comportement d'un régulateur PI. Pendant le temps où u_s reste limité à U_{SLIM} , le signal de sortie u_s de l'amplificateur de réglage augmente jusqu'à la saturation U_{sat} normale de l'amplificateur opérationnel. La tension u_C aux bornes du condensateur C_s augmente d'abord linéairement en fonction du temps et ensuite, l'amplificateur de réglage étant en saturation, exponentiellement jusqu'à $u_C = U_{sat} + u_D$. Si l'on modifie maintenant brusquement l'écart de réglage dans l'autre sens, le signal u_s diminue (comportement PI). Cependant, la tension de sortie u_s reste d'abord constante et égale à la valeur de limitation U_{SLIM} et c'est seulement plus tard, lorsque $u_s < U_{SLIM}$ que la tension de sortie u_s commence à varier avec un retard t_r non négligeable par rapport à la variation de l'écart de réglage. Sans

l'introduction des diodes en anti-parallèle D_a et D_b sur l'entrée, l'étage d'entrée du premier amplificateur se trouverait en saturation ce qui aurait pour effet d'augmenter le temps global t_r .

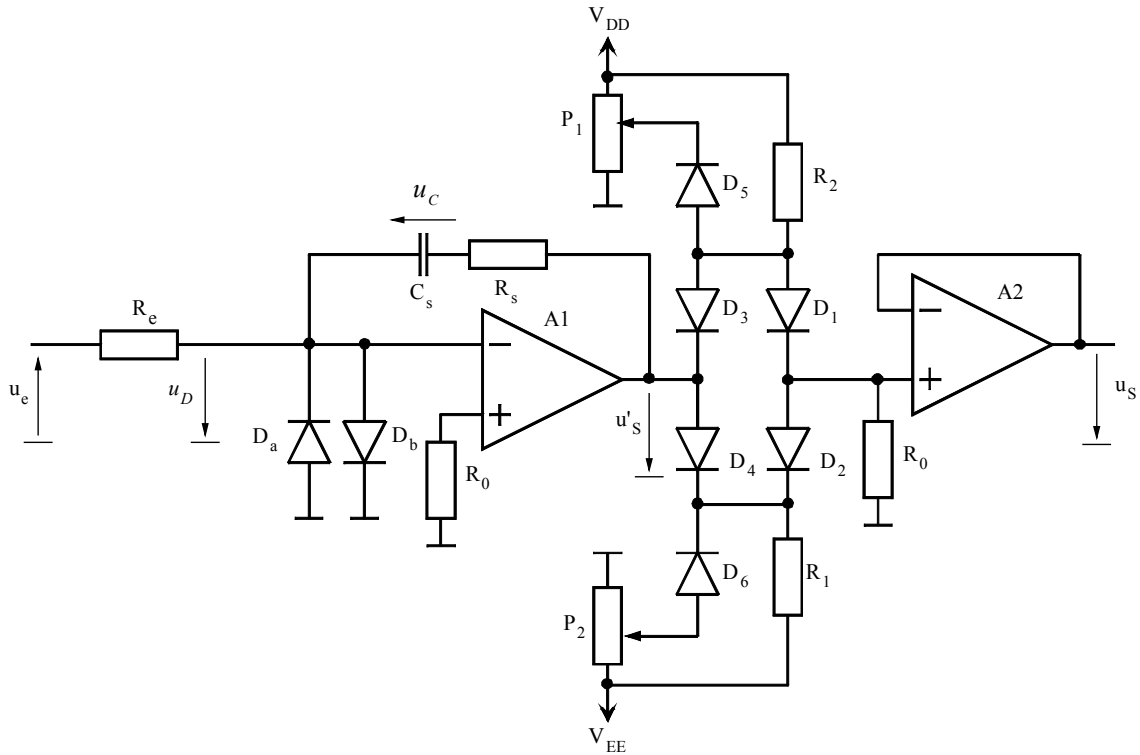


Figure 7-31 : Montage en cascade d'un amplificateur de réglage PI et d'un limiteur

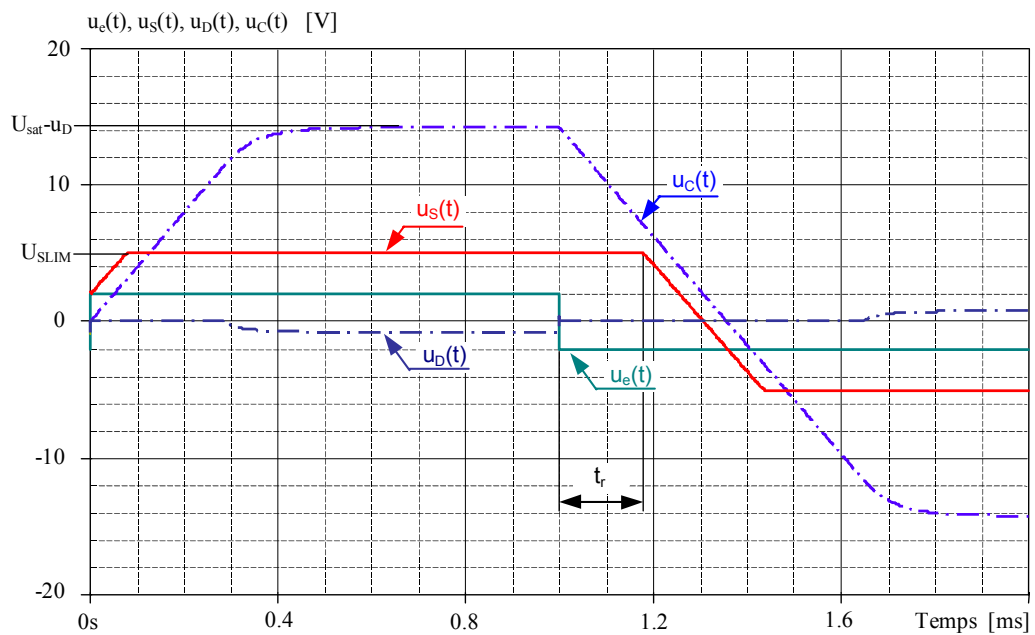


Figure 7-32 : Réponse d'un montage en cascade d'un amplificateur de réglage PI et d'un limiteur

7.3.3 Limitation intégrée au régulateur

Si, le circuits de limitation est combinés directement avec l'amplificateur de réglage (voir Figure 7-33), la tension u_C aux bornes du condensateur C_s reste limitée à $u_s = U_{SLIM} + u_D$.

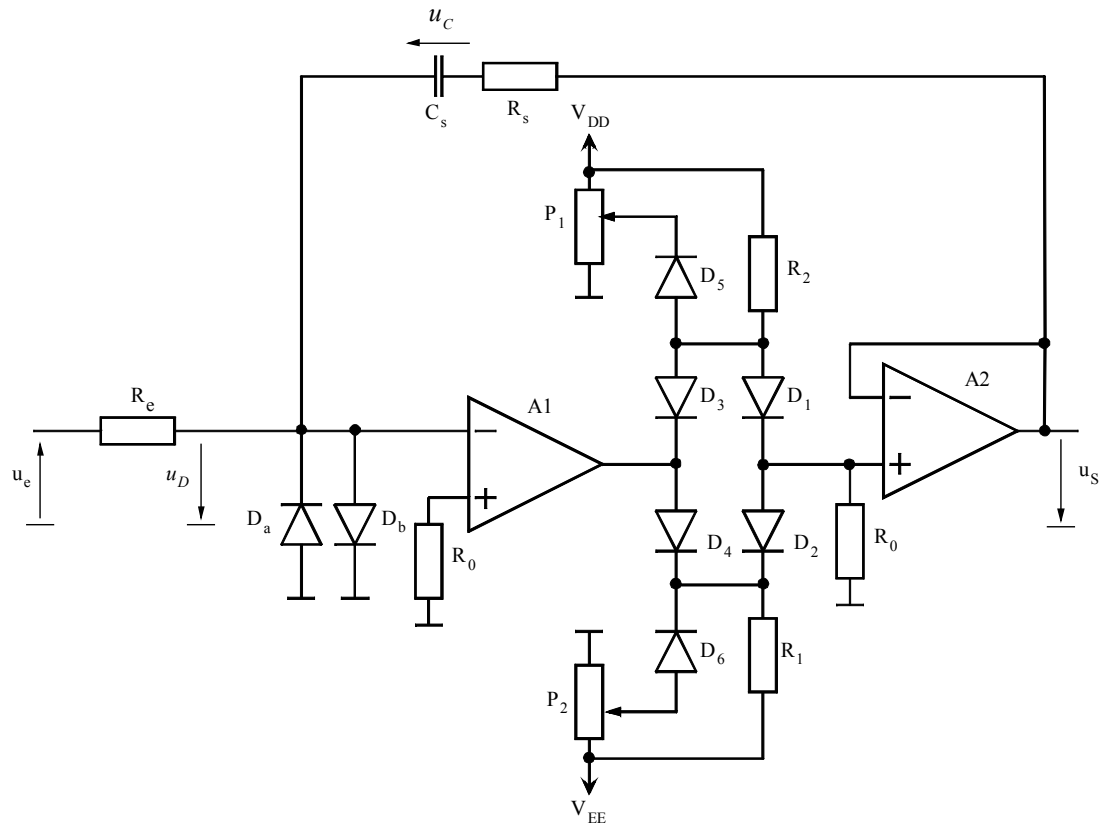


Figure 7-33 : Régulateur PI avec limitation incorporée

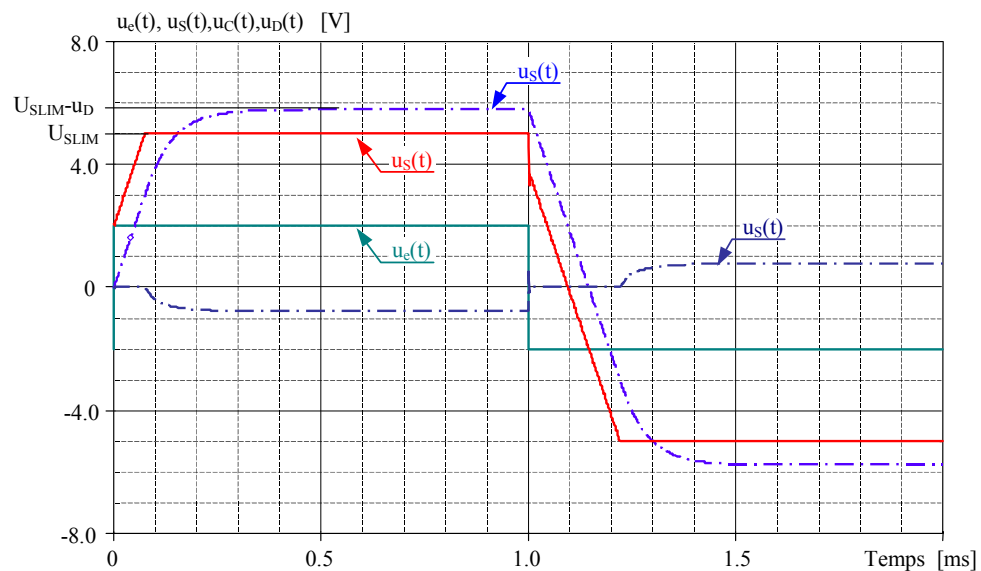


Figure 7-34 : Réponse d'un amplificateur de réglage PI avec limitation

Au moment de la variation de l'écart de réglage u_e dans le sens opposé, la tension de sortie u_s diminue immédiatement à la valeur déterminée par la composante proportionnelle et ensuite linéairement en fonction du temps en relation avec la composante intégrale.

7.3.4 Conclusion

Dans le cas d'un montage en cascade, on observe un temps de retard t_r lors d'un saut indicielle suivant une limitation de la tension de sortie du régulateur jusqu'à ce que u_s (Figure 7-32). Ce temps de retard peut être néfaste pour la stabilité du circuit de réglage lors de grandes variations.

7.4 CORRECTION DE LA COMPOSANTE INTÉGRALE EN CAS DE LIMITATION

7.4.1 Généralités

En fonctionnement normal (milieu industriel) des variations importantes de la grandeur de consigne peuvent engendrer des phénomènes de saturation des grandeurs internes, ou la limitation de la grandeur de sortie du régulateur. Ces limitations, assimilables à des non-linéarités, dégradent le comportement dynamique du système si elles ne sont pas correctement contrôlées. Ce paragraphe se propose de décrire une méthode de correction de la composante intégrale du régulateur en cas de limitation de la grandeur de commande. Cette méthode est également applicable aux régulateurs numériques.

On montrera également la différence entre la limitation incorporée au régulateur PI vue à la section 7.3 et celle que l'on va définir dans cette section.

7.4.2 Cas du régulateur PI

7.4.2.1 Schéma bloc fonctionnel

La Figure 7-35 montre la configuration générale d'un régulateur PI analogique dont on a volontairement séparé les parties (P et I). Le bloc G_{RI} réalise la fonction intégrateur alors que le bloc G_{RP} caractérise la partie P.

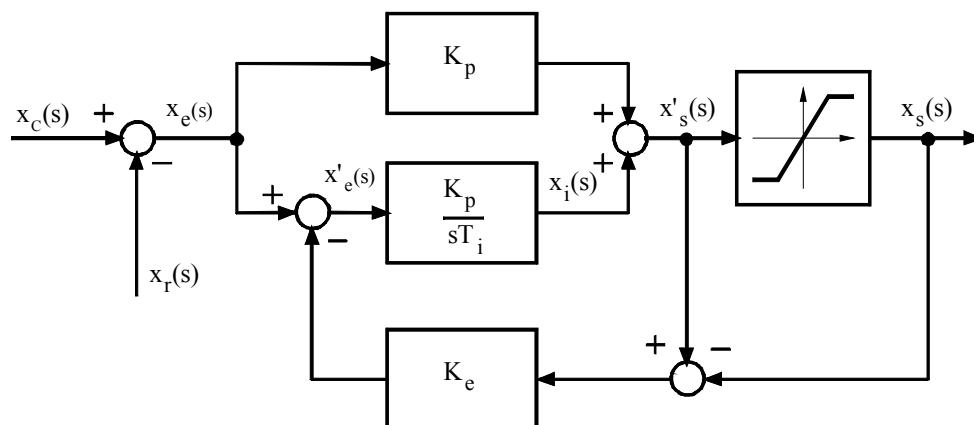


Figure 7-35 : Régulateur PI dissocié avec correction de la composante intégrale

La méthode proposée pour la correction de la composante intégrale, en cas de limitation de la grandeur de commande, consiste à créer la composante intégrale, non pas avec l'écart de réglage réel x_e , mais avec un écart de réglage fictif x'_e . Cet écart de réglage fictif est déterminé

de manière à obtenir une grandeur de sortie du régulateur égale soit à la limitation supérieure, soit à la limitation inférieure. Ainsi la composante intégrale est donnée par la relation

$$x_i(s) = \frac{K_p}{sT_i} \cdot x'_e(s) \quad 7.54$$

La détermination de l'écart de réglage fictif n'intervient qu'en cas de limitation de la grandeur de commande. En fonctionnement normal, on a

$$\begin{aligned} x'_e(s) &= x_e(s) \\ x'_s(s) &= x_s(s) \end{aligned} \quad 7.55$$

et par conséquent, la relation liant la grandeur de sortie à l'écart de réglage devient

$$x_s(s) = K_p \cdot \frac{1 + sT_i}{sT_i} \cdot x_e(s) \quad 7.56$$

En cas de limitation, la grandeur de commande peut prendre deux valeurs différentes, correspondant soit à la valeur limite supérieure, soit à la valeur limite inférieure.

$$\begin{aligned} x_s(s) &= x_{s \lim(\sup)} & \text{si } x'_s(s) > x_{s \lim(\sup)} \\ x_s(s) &= x_{s \lim(\inf)} & \text{si } x'_s(s) < x_{s \lim(\inf)} \end{aligned} \quad 7.57$$

Dans ce cas on peut écrire

$$x'_s(s) = K_p \cdot x_e(s) + \frac{K_p}{sT_i} \cdot x'_e(s) + \frac{x_i(0)}{s} \quad 7.58$$

et pour l'erreur de réglage fictif

$$x'_e(s) = x_e(s) - K_e \cdot (x_s(s) - \frac{x_{s \lim}}{s}) \quad 7.59$$

Des deux dernières relations, on peut écrire

$$\begin{aligned} x'_s(s) &= K_p \cdot x_e(s) + \frac{K_p}{sT_i} \cdot (x_e(s) - K_e \cdot (x_s(s) - \frac{x_{s \lim}}{s})) + \frac{x_i(0)}{s} \\ &= K_p (1 + \frac{1}{sT_i}) \cdot x_e(s) - \frac{K_e \cdot K_p}{sT_i} \cdot x'_s(s) + \frac{K_e \cdot K_p}{sT_i} \cdot \frac{x_{s \lim}}{s} + \frac{x_i(0)}{s} \end{aligned} \quad 7.60$$

ce qui donne finalement

$$x'_s(s) - \frac{x_{s \lim}}{s} = \frac{1}{K_e} \cdot \frac{1 + sT_i}{1 + \frac{sT_i}{K_e \cdot K_p}} \cdot x_e(s) + \frac{1}{K_e K_p} \cdot \frac{sT_i}{1 + \frac{sT_i}{K_e \cdot K_p}} \cdot (\frac{x_i(0)}{s} - \frac{x_{s \lim}}{s}) \quad 7.61$$

7.4.2.2 Choix du coefficient K_e limité aux considérations du régulateur

La stabilité de la boucle de limitation est garantie quelle que soit la valeur de K_e . La Figure 7-36 montre les diverses variations des grandeurs d'état du régulateur. Lorsque la limitation est active, on peut observer qu'en régime établi, l'écart fictif de réglage x'_e est nul. La différence entre l'entrée et la sortie du limiteur est directement fonction de K_e .

Exemple : Saut indiciel de l'écart de réglage.

| Écart de réglage | $0 \leq t < 0.5s$ | $0.5s \leq t < 1.5s$ | $1.5s \leq t < 3s$ |
|------------------|-------------------|----------------------|--------------------|
| $x_e(t)$ | 0 | +1.5 | -1.5 |

Partie proportionnelle : $K_p = 2$
 Partie intégrale : $T_i = 0.5s$
 Correction de l'écart de réglage : $K_e = 10$
 Limitation : $x_{slim} = \pm 4$

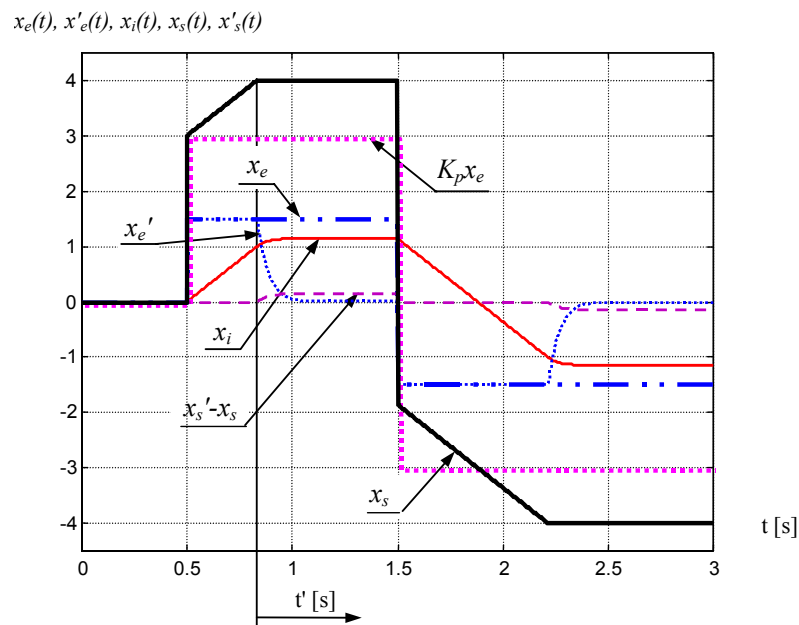


Figure 7-36 : Régulateur PI avec correction de la composante intégrale : grandeurs d'état internes

La transformée inverse de Laplace, pour un saut indiciel de l'écart de réglage, de la relation 7.61 nous donne

$$x'_s(t') - x_{slim} = \frac{1}{K_e} \cdot (1 - e^{-t'/(K_e K_p)}) \cdot x_e + e^{-t'/(K_e K_p)} \cdot (K_p x_e - x_{slim} + x_i(t'=0)) \quad 7.62$$

de plus, la condition initiale au moment où la sortie du régulateur atteint la limite permet d'écrire

$$K_p x_e - x_{slim} + x_i(t'=0) = 0 \quad 7.63$$

et par conséquent on a finalement

$$x'_s(t') - x_{s\lim} = \frac{1}{K_e} \cdot (1 - e^{-t'/(T_i/K_e K_p)}) \cdot x_e \quad 7.64$$

7.4.2.3 Choix du coefficient K_e par annulation de la dépendance de l'écart de réglage pour la grandeur d'état de l'intégrateur

Si la stabilité interne du régulateur n'est pas remise en cause par le type de limitation décrit au § 7.3.3, il est possible qu'une instabilité apparaisse sur le système bouclé lorsque K_e devient trop grand. Il est intéressant d'analyser de plus près la grandeur d'état x_i de l'intégrateur

$$x_i(s) = \left(x_e(s) - K_e \cdot (K_p \cdot x_e(s) + x_i(s) - \frac{x_{s\lim}}{s}) \right) \cdot \frac{K_p}{sT_i} + \frac{x_i(0)}{s} \quad 7.65$$

$$x_i(s) = \frac{1 - K_e K_p}{K_e} \cdot \frac{1}{1 + s \frac{T_i}{K_e K_p}} x_e(s) + \frac{1}{1 + s \frac{T_i}{K_e K_p}} \cdot \frac{x_{s\lim}}{s} + \frac{\frac{T_i}{K_e K_p}}{1 + s \frac{T_i}{K_e K_p}} x_i(0) \quad 7.66$$

La relation 7.66 montre qu'en posant

$$K_e K_p = 1 \quad 7.67$$

lors d'un saut indiciel de l'écart de réglage, on peut écrire pour la grandeur d'état de l'intégrateur

$$x_i(s) = \frac{1}{1 + sT_i} \cdot \frac{x_{s\lim}}{s} + \frac{T_i}{1 + sT_i} x_i(0) \quad 7.68$$

A ce stade, il est important de remarquer que, le cas où $K_e = 1/K_p$ est identique à l'utilisation d'une simple limitation incorporée au sens du § 7.3.3.

7.4.2.4 Réalisation analogique

Il existe une multitude de possibilités pour la réalisation d'un régulateur analogique PI avec correction de la composante intégrale. Dans le schéma proposé, nous avons essayé de limiter le nombre d'amplificateurs opérationnels à quatre, ce qui correspond à un circuit intégré.

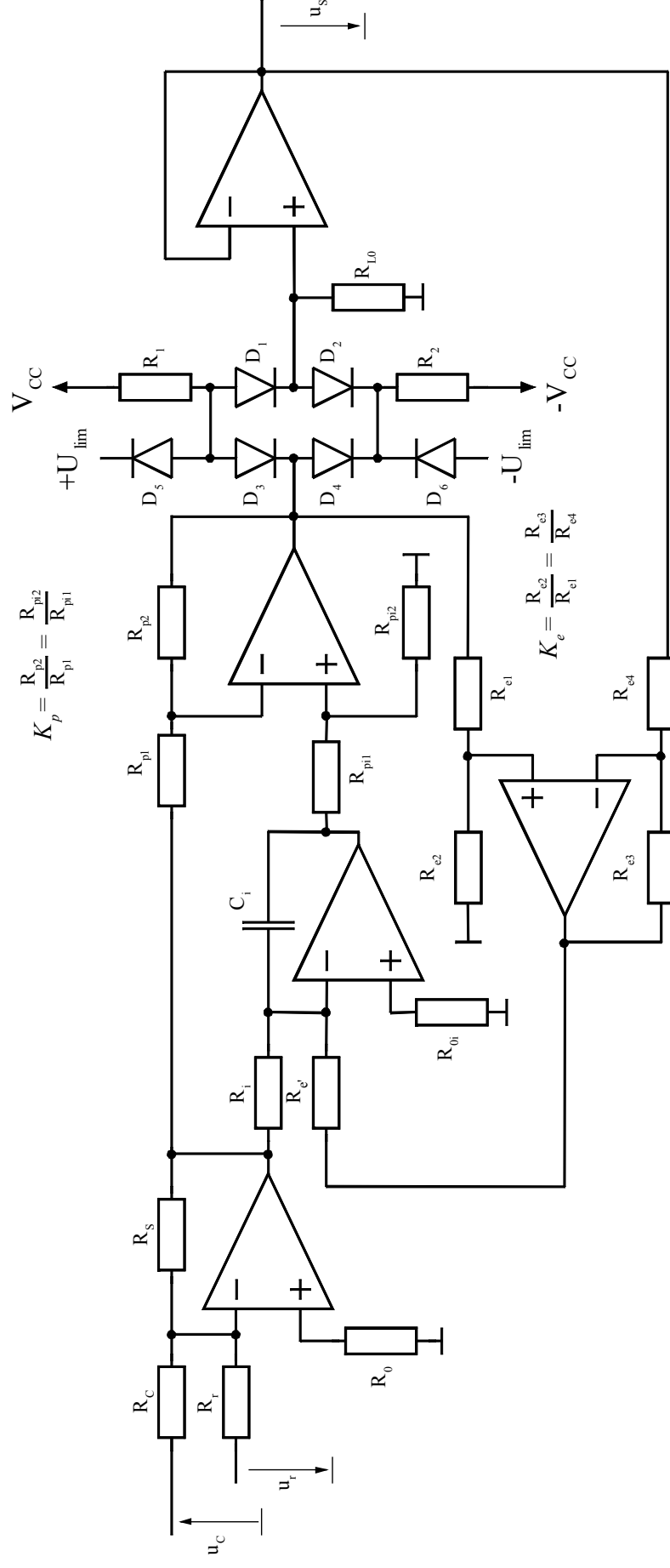


Figure 7-37 : Régulateur PI avec correction de la composante intégrale : schéma

7.5 RÉGULATEUR PI NUMÉRIQUE

7.5.1 Description

Dans le domaine continu, on a défini le régulateur PI par la fonction de transfert

$$u_{cm}(s) = K_p \frac{1 + sT_i}{sT_i} e(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) e(s) \quad 7.69$$

Où e représente le signal d'entrée (erreur entre consigne et mesure) et u_{cm} la grandeur de commande.

La transition du domaine continu au domaine discret suppose une approximation de l'intégrale par une somme discrète. Il y a plusieurs manières de réaliser cette intégration. Deux de ces dernières sont expliquées dans les paragraphes qui suivent.

7.5.2 Intégration : approximation d'ordre zéro

Dans le cas de cette approximation, le signal est échantillonné à l'instant k et maintenu jusqu'à l'instant $k+1$.

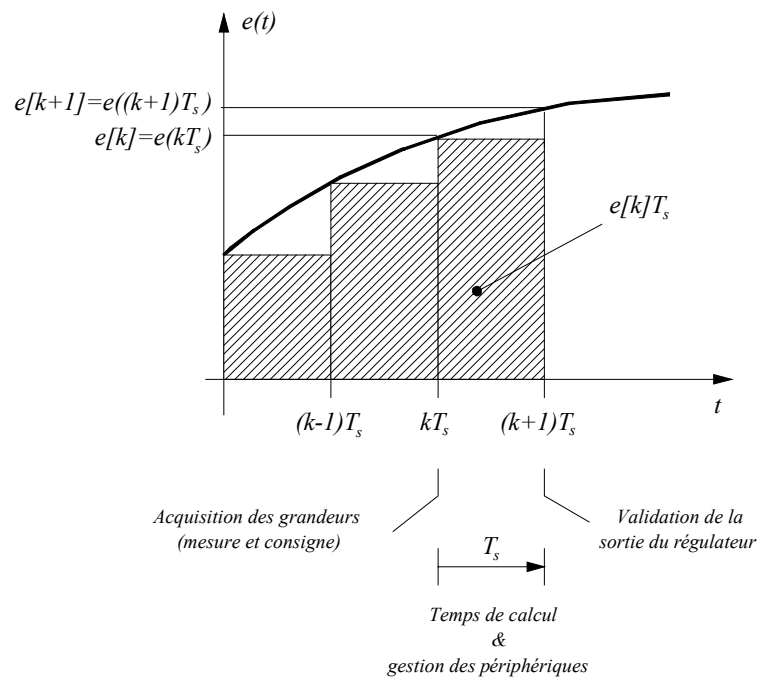


Figure 7-38 : Approximation d'ordre zéro de l'intégrale

$$I[k+1] = I[k] + e[k]T_s = \underbrace{\sum_{n=0}^{k+1} e_n T_s}_{I[k+1]} = \underbrace{\sum_{n=0}^k e_n T_s}_{I[k]} + e[k]T_s \quad 7.70$$

Dans le domaine z , la relation 7.70 devient

$$zI(z) = I(z) + e(z)T_s \quad 7.71$$

et finalement

$$I(z) = \frac{T_s}{z-1} e(z) \quad 7.72$$

Finalement en utilisant la forme de la relation 7.69, on peut écrire pour un régulateur PI numérique :

$$u_{cm}(z) = K_p \left(e(z) + \frac{1}{T_i} I(z) \right) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i} \frac{T_s}{z-1} \right) e(z) = K_p \left(\frac{z + \left(\frac{T_s}{T_i} - 1 \right)}{z-1} \right) e(z) \quad 7.73$$

L'équation aux différences prend alors la forme suivante

$$u_{cm}[k+1] = K_p e[k+1] + K_p \left(\frac{T_s}{T_i} - 1 \right) e[k] + u_{cm}[k] \quad 7.74$$

7.5.3 Intégration : approximation d'ordre un

Une meilleure approximation de l'intégrale peut être obtenue par une approximation du 1^{er} ordre.

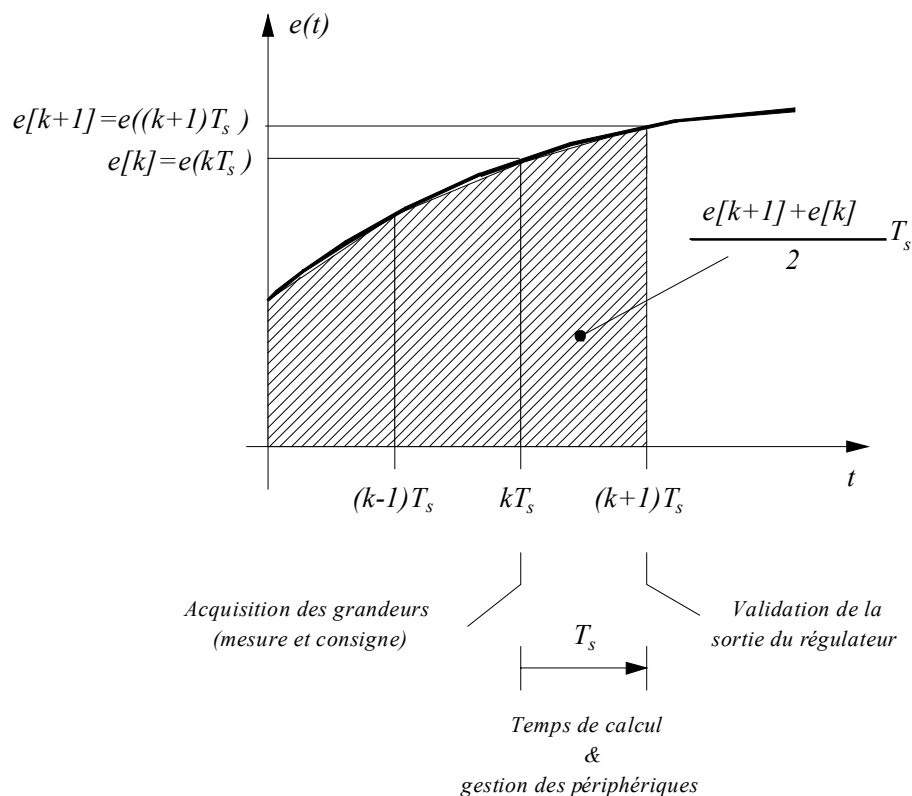


Figure 7-39 : Approximation d'ordre un de l'intégrale

$$I[k+1] = I[k] + \frac{e[k] + e[k+1]}{2} T_s \quad 7.75$$

Dans le domaine z , la relation 7.75 devient

$$zI(z) = I(z) + e(z) \frac{z+1}{2} T_s \quad 7.76$$

et finalement

$$I(z) = \frac{z+1}{z-1} \frac{T_s}{2} e(z) \quad 7.77$$

Finalement en utilisant la forme de la relation 7.69, on peut écrire pour un régulateur PI numérique :

$$u_{cm}(z) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i} \frac{z+1}{z-1} \frac{T_s}{2} \right) e(z) = K_p \left(\frac{z(1 + \frac{1}{2} \frac{T_s}{T_i}) - 1 + \frac{1}{2} \frac{T_s}{T_i}}{z-1} \right) e(z) \quad 7.78$$

L'équation aux différences prend alors la forme suivante

$$u_{cm}[k+1] = K_p \left(1 + \frac{1}{2} \frac{T_s}{T_i} \right) e[k+1] + K_p \left(\frac{1}{2} \frac{T_s}{T_i} - 1 \right) e[k] + u_{cm}[k] \quad 7.79$$

7.5.4 Implémentation dans un DSP

7.5.4.1 Mise à l'échelle

Les relations 7.74 et 7.79 ont la même forme, il est donc possible d'écrire la relation générale suivante

$$u_{cm}[k+1] = A_1 e[k+1] + A_0 e[k] + u_{cm}[k] \quad 7.80$$

Il s'agit d'une séquence d'opérations de multiplication et d'addition facilement implantable dans un DSP tel que ceux de la famille ADCP21xx d'Analog Devices. Il faut toutefois être très prudent lors de la représentation des nombres en 16 bits virgule fixe. Pour que les opérations se déroulent correctement, les coefficients et les variables d'état doivent être mis à l'échelle, c'est à dire dans le format 1.15. En faisant l'hypothèse que l'erreur (grandeur d'entrée) est en format 1.15, il est possible d'écrire la relation 7.80 sous la forme

$$\begin{aligned} B_0 u_{cm}[k+1] &= B_0 A_1 e[k+1] + B_0 A_0 e[k] + B_0 u_{cm}[k] \\ &= A_1^{sc} e[k+1] + A_0^{sc} e[k] + B_0 u_{cm}[k] \end{aligned} \quad 7.81$$

A_1^{sc} et A_0^{sc} correspondent aux coefficients mis à l'échelle. B_0 est choisi de manière à avoir A_1^{sc} et A_0^{sc} en format 1.15 de manière à garder un maximum de précision. Pour faciliter la détermination de u_{cm} , B_0 est fixé à la puissance de 2 supérieure la plus proche de la mise à l'échelle. De cette manière u_{cm} est obtenu par une simple opération de décalage.

7.5.4.2 Précision de la routine

On voit que, selon la relation 7.81, la modification de u_{cm} devient de plus en plus petite lorsque l'erreur $e[k]$ diminue et que par conséquent $e[k+1]$ ne diffère plus de manière significative de $e[k]$. Il est également possible que le coefficient d'échelle B_0 soit petit ce qui peut entraîner pour certaines conditions que la sortie $u_{cm}[k]$ ne varie plus alors que l'erreur $e[k]$ est non nulle. Un tel comportement entraîne donc une erreur statique. Dans ce cas il faut augmenter la taille de la variable u_{cm} à 32 bits par exemple.

7.5.4.3 Limitation de la grandeur de sortie

La grandeur de sortie $u_{cm}[k+1]$ peut facilement être limitée dans le domaine $[-1 \dots 1]$.

7.5.5 Exemple d'algorithme pour régulateur PI

7.5.5.1 Détermination des coefficients

La synthèse du régulateur peut se faire dans le domaine continu ou échantillonné. Dans le cas d'une synthèse dans le domaine continu, en respectant les limites suivantes, l'erreur d'approximation est inférieure à 3%

- Approximation d'ordre zéro (ZOH)

$$\frac{T_s}{T_i} \leq \frac{1}{20} \quad 7.82$$

- Approximation d'ordre un (FOH)

$$\frac{T_s}{T_i} \leq \frac{1}{10} \quad 7.83$$

Les coefficients A_0 et A_1 sont déterminés à partir des relations 7.74 et 7.79. Le facteur d'échelle

$$B'_0 = \frac{1}{\max(|A_0|, |A_1|, 1)} \quad 7.84$$

Pour simplifier le calcul et la limitation de la grandeur de sortie B_0 est fixé à la puissance de 2 directement supérieure en valeur absolue, soit

$$B_0 = 2^{-\text{ceil}(\log_2(\max(|A_0|, |A_1|, 1)))} \quad 7.85$$

| Paramètres | Approximation d'ordre zéro (ZOH) | Approximation d'ordre un (FOH) |
|------------|--|--|
| T_s | $\leq \frac{1}{20} T_i$ | $\leq \frac{1}{10} T_i$ |
| A_0 | $K_p \left(\frac{T_s}{T_i} - 1 \right)$ | $K_p \left(\frac{1}{2} \frac{T_s}{T_i} - 1 \right)$ |
| A_1 | K_p | $K_p \left(1 + \frac{1}{2} \frac{T_s}{T_i} \right)$ |

| <i>Paramètres</i> | <i>Approximation d'ordre zéro (ZOH)</i> | <i>Approximation d'ordre un (FOH)</i> |
|-------------------|--|---------------------------------------|
| n | $\text{ceil}(\log_2(\max(A_0 , A_1 , 1)))$ | |
| B_0 | $B_0 = 2^{-n}$ | |
| A_0^{sc} | $B_0 A_0$ | |
| A_1^{sc} | $B_0 A_1$ | |

Tableau 7-1 : Paramètres du régulateur PI

7.5.5.2 Exemple

On prendra comme exemple le système à régler suivant :

$$G_s(s) = \frac{10}{\frac{1}{100}s + 1} \quad 7.86$$

La synthèse du régulateur PI donne les paramètres ci-dessous

Régulateur analogique

$K_p = 0.025$: Partie proportionnelle du régulateur analogique
 $T_i = 1/314$: Partie intégrale du régulateur analogique

Régulateur numérique ZOH

$A_0 = 0xFCE6$: En décimal : -0.024200439453125
 $A_1 = 0x0333$: En décimal : 0.024993896484375
 $B_0 = 1$:

Régulateur numérique FOH

$A_0 = 0xFCDA$: En décimal : -0.02459716796875
 $A_1 = 0x0340$: En décimal : 0.025390625
 $B_0 = 1$:

7.5.5.2.1 Effet de la précision de calcul

Une simulation comportementale de ces trois types de régulateur permet de mettre en évidence les problèmes liés aux limites de résolution des calculs réalisés sur DSP.

De plus, pour les régulateurs numériques, il est important de réaliser les opérations arithmétiques comme elles sont faites dans le DSP. On admet également que les convertisseurs A/N et N/A ont une résolution de 12 bits.

On voit sur la Figure 7-40 que pour un saut indicial de la consigne, une erreur subsiste en régime permanent malgré l'intégrateur. Ce phénomène est dû à la précision de calcul limitée à 16 bits pour le calcul de la grandeur de commande u .

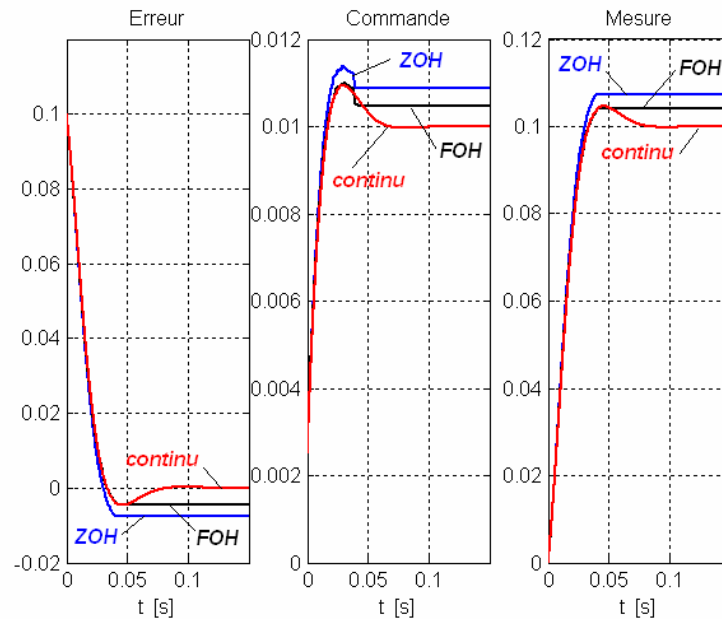


Figure 7-40 : Tech=100us, ADC : 12 bits, PI16, Algorithmes : Continu, ZOH, FOH

La Figure 7-41 montre par contre que pour un calcul de la grandeur de commande en multiprécision (32 bits), l'erreur statique n'est plus visible, bien que non nulle

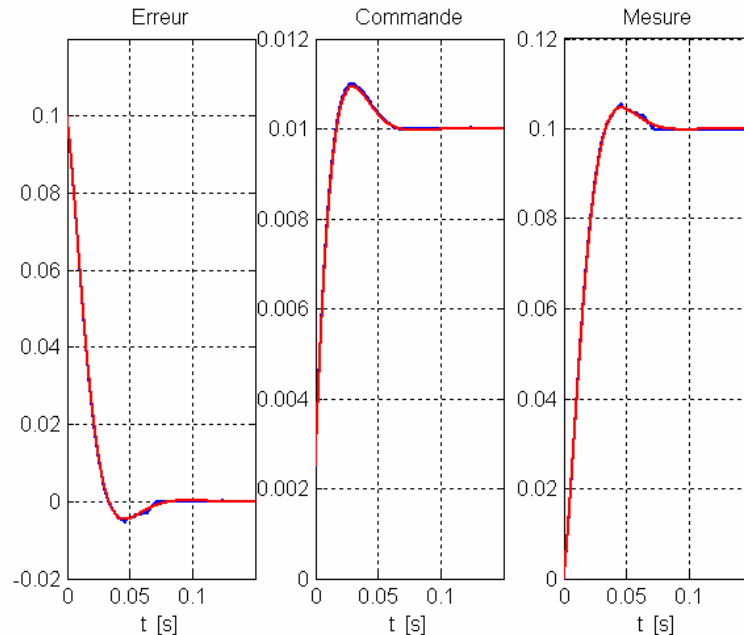


Figure 7-41 : Tech=100us, ADC : 12 bits, PI32, Algorithmes : Continu, ZOH, FOH

Sur la Figure 7-42 on voit par contre l'effet de la période d'échantillonnage qui, malgré de nouvelles valeurs pour les coefficients du régulateur, montre une différence marquée entre le cas analogique et le cas numérique.

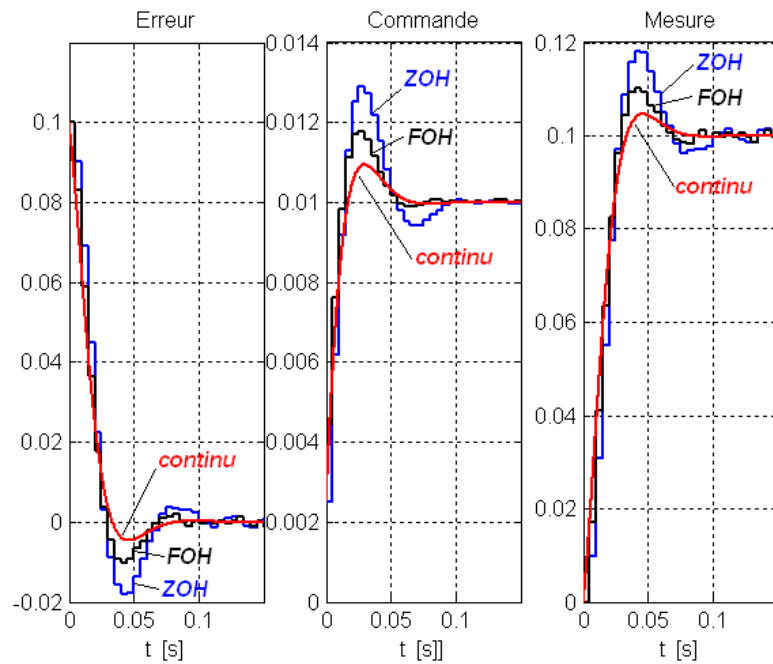


Figure 7-42 : Tech=5ms, ADC : 12 bits, PI32, Algorithmes : Continu, ZOH, FOH

7.5.5.2.2 Effet de la limitation

La Figure 7-43 montre le cas où les variables d'états du régulateur atteignent la limite en format 1.15, soit $[-1 \dots 1]$.

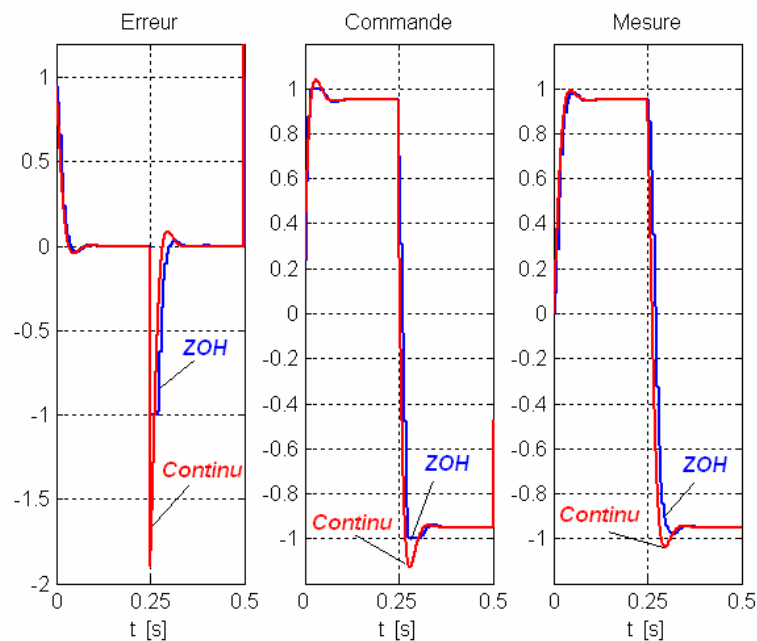


Figure 7-43 : Tech=100us, ADC : 12 bits, PI16, Algorithmes : Continu, ZOH avec limitation

La limitation utilisée agit directement sur la partie intégrale du régulateur PI. On voit qu'il n'y a aucun effet de retard.

7.5.5.2.3 *Programme principal et routine d'interruption*

Le programme principal doit contenir les déclarations de variables et constantes propres au régulateur PI. Les constantes sont placées dans la mémoire de programme alors que les variables sont elles placées dans la mémoire de données. Une telle structure va permettre la réalisation de multi-instructions.

```

{ ----- Définition des variables et constants pour PI16 ou PI32 bits ----- }

#define PI_n 0                                {n}

.VAR/RAM/PM/CIRC/SEG=USER_PM1 PI16_Coeff[3];
.INIT PI_Coeff : 0xE10100, 0x200000;0x7FFF00    {A0, A1,B0=2n}

.VAR/RAM/DM/CIRC/SEG=USER_DM1 PI16_Var[2];      {pour PI 16 bits : Ik, Uk}
.INIT PI16_VAR : 0x0000, 0x0000 ;

{ ----- Programme principal ----- }

Startup:
...;
...;                                     {Initialisation des interruptions, périphériques, ...}
...;
    INIT_PI16(PI16_VAR, 0x0000);          {Initialisation des variables du régulateur PI16 Ik, Uk}

Main:                                     {Boucle d'attente des interruptions}
    jump Main;

    rts;

{ ----- Routine d'interruption ----- }

ROUTINE_ISR:
...;

    ax0= grandeur de consigne ;
    ay0= grandeur mesurée ;

    ena AR_SAT;                          {Calcul de l'erreur de réglage}
    ar = ax0 - ay0;
    dis AR_SAT;

    PI16(PI16_VAR, PI16_Coeff, PI_n);     {Algorithme du régulateur PI16}

    output value= sr1;
    ...
    RTI;

```

7.5.5.2.4 Initialisation régulateur 16 bits

Au démarrage les grandeurs d'états du régulateur doivent être initialisées. Pour ce faire on utilise par exemple une macro instruction

```
{----- Macro instruction d'initialisation du régulateur PI 16 bits -----}

{initialisation des paramètres d'entrée de la routine PI16_Control_
Entrée :  %0      : buffer PI_VAR (I(k), U(k))
          %1      : valeur initiale pour I(k)=0 et U(k)=0}

.MACRO Init_PI16(%0, %1);
    I3 = ^%0;          {pointeur sur le buffer PI16_VAR}
    L3 = %%0;          {longueur du buffer PI16_VAR}
    M3 = 1;            {incrément du pointeur}

    ar = 0;
    DM(I3,M3) = ar;    {I(k)=0}
    ar = %1;
    DM(I3,M3) = ar;    {u(k)=valeur initiale}
.ENDMACRO;
```

7.5.5.3 Macroinstruction régulateur PI 16 bits

Dans beaucoup d'application, comme par exemple la commande de moteurs, il y a plusieurs régulateurs PI. Il est donc recommandé passer les paramètres au travers d'une macro instruction qu'elle même fait appel à une sous routine.

```
{----- Macro instruction du régulateur PI 16 bits -----}
{
Entrée :  %0      : buffer PI16_VAR (E(k), U(k))
          %1      : buffer PI_COEF (A0, A1)
          %2      : facteur d'échelle (n : nb de décalage pour la mise en format 1.15 des coeff. A0 et A1)
          ar       : erreur de réglage en format 1.15

Sortie :  sr1      : grandeur de commande en format 1.15 }

.MACRO PI16(%0, %1, %2);
    I3 = ^%0;          {pointeur sur le buffer PI16_VAR (E(k), U(k))}
    L3 = %%0;          {longueur du buffer PI16_VAR}
    M3 = 1;            {incrément du pointeur du buffer PI16_VAR}

    I7 = ^%1;          {pointeur sur le buffer PI_COEF (A0, A1)}
    L7 = %%1;          {longueur du buffer PI_COEF}
    M7 = 1;            {incrément du pointeur du buffer PI_COEF (A0, A1)}

    ay0= %2;           {facteur d'échelle n}

    CALL PI16_Control_; {appel de la routine PI16_Control}
.ENDMACRO;
```

7.5.5.3.1 Algorithme PI 16 bits

L'algorithme proprement dit est réalisé dans une sous-routine dont les paramètres d'entrée et de sortie sont clairement définis.

```

{-----Routine PI 16 bits -----}
{
Entrée :      I3      : pointeur sur le buffer PI_16VAR (E(k), U(k))
             M3      : incrément du pointeur du buffer PI_16VAR
             L3      : longueur du buffer PI_16VAR
             I7      : pointeur sur le buffer PI_COEF (A0, A1)
             M7      : incrément du pointeur du buffer PI_COEF (A0, A1)
             L7      : longueur du buffer PI_COEF
             ar      : erreur de réglage en format 1.15
             ay0     : facteur d'échelle (n : nb de décalage pour la mise en format 1.15 des coeff. A0 et A1)

Sortie :      sr1     : grandeur de commande en format 1.15}

PI16_Control_ :
    mx0= DM(I3,M3),  my0= PM(I7,M7);  { E(k) ,  A0}
    mr = mx0*my0 (SS),  my0= PM(I7,M7);  {E(k)*A0 ,  A1}
    mr = mr+ar*my0(SS),  mx0= DM(I3,M3),  my0= PM(I7,M7);  {E(k)*A0 I(k+1)*A1,  U(k) ,  B0}
    mr = mr+mx0*my0 (SS),  DM(I3,M3)= ar;  { E(k)*A0 I(k+1)*A1+U(k)*B0 ,E(k)=E(k+1)}
    if MV SAT mr;

    se=EXP mr1 (HI);  {détermine l'exposant de mr1 (nombre de bits de signe)}
    ax0=se;
    ar=ax0+ay0;  {calcul de l'exposant réel en tenant compte de n}
    if gt jump PISaturate16;  {limitation n est plus grand que l'exposant de U(k)}

    se=ay0;  {se=n}
    sr = ASHIFT mr1 (HI);  {décalage de n bit vers la droite de U(k+1)}
    sr = sr OR LSHIFT mr0 (LO);  {décalage de n bit vers la droite de U(k+1)}
    DM(I3,M3) = sr1;  {U(k)=U(k+1)}
    rts;

PISaturate16:
    astat=0x40;  {Impose le flag MAC overflow à 1}

    if MV SAT mr;
    sr1=mr1;  {U(k)=sat(U(k+1)) : grandeur de commande de sortie}
    DM(I3,M3) = sr1;  {U(k)=sat(U(k+1))}
    rts;

```

7.6 RÉGULATEUR PID NUMÉRIQUE

7.6.1 Description

Dans le domaine continu, on a défini le régulateur PID par la fonction de transfert

$$u_{cm}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_D \right) e(s) \quad 7.87$$

Où e représente le signal d'entrée (erreur entre consigne et mesure) et u_{cm} la grandeur de commande.

La transition du domaine continu au domaine discret suppose une approximation de l'intégrale par une somme discrète et de la dérivée par une différentiation discrète. La partie intégrale a déjà été effectuée aux § 7.5.2 et § 7.5.3. Il reste donc à développer une relation correspondant à la différentiation.

7.6.2 Différentiation

La dérivée peut facilement être approchée par la relation suivante

$$D[k+1] = \frac{e[k+1] - e[k]}{T_s} \quad 7.88$$

Dans le domaine z , la relation 7.70 devient

$$zD(z) = \frac{ze(z) - e(z)}{T_s} \quad 7.89$$

et finalement

$$D(z) = \frac{z-1}{zT_s} e(z) \quad 7.90$$

Finalement à l'aide des relations 7.73 et 7.90 (intégration ZOH) on peut écrire pour un régulateur PID numérique :

$$\begin{aligned} u_{cm}(z) &= K_p \left(1 + \frac{T_s}{T_i} \frac{1}{z-1} + \frac{T_D}{T_s} \frac{z-1}{z} \right) e(z) \\ &= \frac{K_p}{z-1} \left(z \left(1 + \frac{T_D}{T_s} \right) + \left(\frac{T_s}{T_i} - 1 - 2 \frac{T_D}{T_s} \right) + \frac{T_D}{T_s} z^{-1} \right) e(z) \end{aligned} \quad 7.91$$

L'équation aux différences prend alors la forme suivante

$$\begin{aligned} u_{cm}[k+1] &= K_p \left(1 + \frac{T_D}{T_s} \right) e[k+1] + K_p \left(\frac{T_s}{T_i} - 1 - 2 \frac{T_D}{T_s} \right) e[k] + K_p \frac{T_D}{T_s} e[k-1] + u_{cm}[k] \end{aligned} \quad 7.92$$

En utilisant l'intégration (FOH), on peut écrire à l'aide des relations 7.77 et 7.90

$$\begin{aligned}
 u_{cm}(z) &= K_p \left(1 + \frac{T_s}{2T_i} \frac{z+1}{z-1} + \frac{T_D}{T_s} \frac{z-1}{z} \right) e(z) \\
 &= \frac{K_p}{z-1} \left(z \left(1 + \frac{T_s}{2T_i} + \frac{T_D}{T_s} \right) + \left(\frac{T_s}{2T_i} - 1 - \frac{2T_D}{T_s} \right) + \frac{T_D}{T_s} z^{-1} \right) e(z)
 \end{aligned}
 \tag{7.93}$$

L'équation aux différences prend alors la forme suivante

$$\begin{aligned}
 u_{cm}[k+1] &= K_p \left(1 + \frac{T_s}{2T_i} + \frac{T_D}{T_s} \right) e[k+1] + K_p \left(\frac{T_s}{2T_i} - 1 - \frac{2T_D}{T_s} \right) e[k] + K_p \frac{T_D}{T_s} e[k-1] + u_{cm}[k]
 \end{aligned}
 \tag{7.94}$$

7.6.3 Implantation dans un DSP

7.6.3.1 Mise à l'échelle

En utilisant le même cheminement que pour le régulateur PI numérique, on a dans le cas du régulateur PID

$$u_{cm}[k+1] = A_1 e[k+1] + A_0 e[k] + A_{-1} e[k-1] + u_{cm}[k] \tag{7.95}$$

Il s'agit ici aussi d'une séquence d'opération de multiplication addition et d'addition facilement implantable dans un DSP. La procédure à appliquer est la même, Soit la mise à l'échelle des coefficients A_2, A_1, A_0 de manière à avoir des formats 1.15 pour tous les coefficients.

| Paramètres | Approximation d'ordre zéro (ZOH) | Approximation d'ordre un (FOH) |
|---------------|---|--|
| T_s | $\leq \frac{1}{20} T_i$ | $\leq \frac{1}{10} T_i$ |
| A_{-1} | $K_p \frac{T_D}{T_s}$ | $K_p \frac{T_D}{T_s}$ |
| A_0 | $K_p \left(\frac{T_s}{T_i} - 1 - \frac{2T_D}{T_s} \right)$ | $K_p \left(\frac{T_s}{2T_i} - 1 - \frac{2T_D}{T_s} \right)$ |
| A_1 | $K_p \left(1 + \frac{T_D}{T_s} \right)$ | $K_p \left(\frac{T_s}{2T_i} + 1 + \frac{T_D}{T_s} \right)$ |
| n | $\text{ceil}(\log_2(\max(A_0 , A_1 , A_{-1} , 1)))$ | |
| B_0 | $B_0 = 2^{-n}$ | |
| A_{-1}^{sc} | $B_0 A_{-1}$ | |
| A_0^{sc} | $B_0 A_0$ | |
| A_1^{sc} | $B_0 A_1$ | |

Tableau 7-2 : Paramètres du régulateur PID

7.7 REGULATEUR A ACTION À DEUX POSITIONS

7.7.1 Généralités

Les régulateurs étudiés dans ce chapitre sont caractérisés par le fait que les signaux d'entrée et de sortie sont des signaux analogiques, variant de manière continue entre les limites données par la saturation imposée par les limiteurs.

Lorsque le système à régler exige une action tout ou rien à son entrée, on peut avoir recours à des régulateurs à action à deux positions. Ce sont en principe des dispositifs hybrides, car à l'entrée est appliqué un signal analogique sous forme de tension continue, tandis que le signal de sortie est de type digital.

Le régulateur à action à deux positions permet d'enclencher et de déclencher un dispositif, comme on en a besoin par exemple, pour un réglage de chauffage (brûleur enclenché ou déclenché) ou pour commander un variateur de courant continu (contacteurs statiques enclenchés ou déclenchés).

7.7.2 Principe de fonctionnement

Le principe d'un régulateur à action à deux positions est représenté schématiquement à la Figure 7-44. La différence entre la valeur de consigne x_c et la valeur réelle x_r , c'est-à-dire l'écart de réglage x_e , est appliquée à l'entrée d'une bascule de Schmitt qui fournit le signal logique de sortie x_s . En augmentant x_e , le signal de sortie est $x_s = 1$ pour $x_e \geq x_{e(+)}$. En diminuant x_e , le signal de sortie passe à $s=0$ pour $x_e \leq x_{e(-)}$. **Les points de basculement $x_{e(+)}$ et $x_{e(-)}$ doivent être symétriques par rapport à l'origine de x_e .** La différence $x_{e(+)} - x_{e(-)}$ est appelé hystérèse x_{eh} .

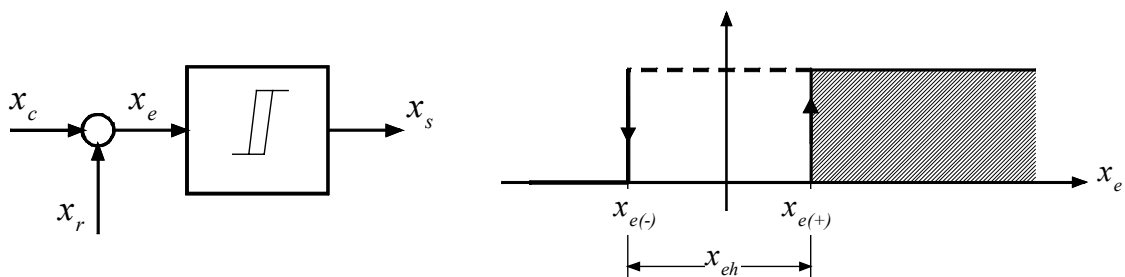


Figure 7-44 : Représentation schématique d'un régulateur à action à deux positions

Dans la boucle de réglage qui contient un régulateur à action à deux positions, le fonctionnement ne peut être que quasi stationnaire. Autrement dit, le système à régler est enclenché et déclenché à des intervalles réguliers. La fréquence de cette commutation dépend, d'une part, du comportement dynamique du système à régler et, d'autre part, de l'hystérèse du régulateur à action à deux positions. Il est nécessaire que l'hystérèse soit ajustable.

La Figure 7-45 représente une réalisation d'un régulateur à action à deux positions à l'aide d'un comparateur. Ce dernier possède une réaction positive (résistance R_0 et R_1) provoquant un basculement rapide de la tension de sortie u_s . Les diodes D_1 et D_4 constituent un montage en cascade de dispositif de formation de la valeur maximale et minimale et limite u_s à V_{CC} (tension de commutation nominale de niveau logique, par exemple 5V), par la diode D_2 , et à 0V par la diode D_4 , en formant ainsi le signal logique u_s .

En définissant la tension entre l'entrée (+) du comparateur et le 0V d'alimentation par $u_i(+)$, et la tension entre l'entrée (-) et le 0V commun d'alimentation par $u_i(-)$, on a les relations

$$\begin{aligned} u_i(+)-u_i(-) > 0 & : u'_s = U_{sat} \\ u_i(+)-u_i(-) < 0 & : u'_s = -U_{sat} \end{aligned} \quad 7.96$$

où U_{sat} est la tension de saturation à la sortie du comparateur. Pour les tensions $u_i(+)$ et $u_i(-)$ on en déduit

$$\begin{aligned} u_i(+)&= \frac{R_0}{R_0 + R_1} \cdot u'_s \\ u_i(-)&= -\frac{u_c - u_r}{2} = -\frac{u_e}{2} \end{aligned} \quad 7.97$$

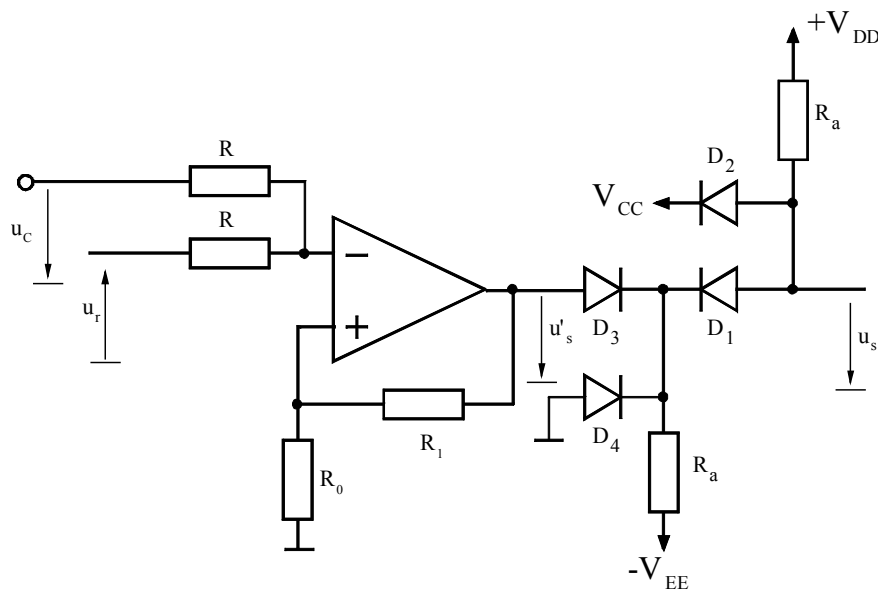


Figure 7-45 : Régulateur à action à deux positions à l'aide d'un comparateur

Il faut remarquer que la tension de consigne u_c est appliquée avec la polarité négative, tandis que la tension réelle est positive, contrairement à l'usage en vigueur pour les amplificateurs de réglage traités aux sections précédentes. Les deux résistances R forment un diviseur de tension pour u_c et u_r . Pour cette raison, le facteur $\frac{1}{2}$ apparaît dans la relation 7.97.

On peut déterminer les seuils de basculement en posant $u_i(+)-u_i(-)=0$

$$u_i(+)-u_i(-) = \frac{R_0}{R_0 + R_1} \cdot u'_s + \frac{u_c - u_r}{2} = \frac{R_0}{R_0 + R_1} \cdot u'_s - \frac{u_e}{2} = 0. \quad 7.98$$

On suppose d'abord $u'_s = -U_{sat}$, correspondant à $u_s = 0$ d'où l'on déduit le seuil de basculement supérieur

$$U_{e(+)} = \frac{2R_0}{R_0 + R_1} \cdot U_{sat} \quad 7.99$$

Si l'on a, par contre, $u'_s = U_{sat}$, correspondant à $u_s = V_{CC}$, on tire

$$U_{e(-)} = -\frac{2R_0}{R_0 + R_1} \cdot U_{sat} \quad 7.100$$

L'hystérèse est donnée par

$$U_{eh} = U_{e(+)} - U_{e(-)} = \frac{4R_0}{R_0 + R_1} \cdot U_{sat} \quad 7.101$$

L'hystérèse est donc ajustable, dans une large gamme, à l'aide de la résistance R_0 . Les seuils de basculement $u_{e(+)}$ et $u_{e(-)}$ se déplacent symétriquement par rapport à $u_e = 0$.

7.7.3 Régulateur à action à deux positions avec contre-réaction

Comme on l'a déjà indiqué, l'enclenchement et le déclenchement d'un régulateur à action à deux positions dépendent du comportement dynamique du système à régler, ainsi que de l'hystérèse du régulateur. En particulier, dans les cas où le système à régler présente des grands retards (constantes de temps élevées), le comportement du circuit de réglage peut devenir peu satisfaisant. Dans ces circonstances, il est judicieux de munir d'une contre-réaction le régulateur à action à deux positions (circuit RC). Ainsi, il est possible d'améliorer notablement le comportement des circuits de réglage. Les durées d'enclenchement et de déclenchement dépendent maintenant essentiellement des coefficients de la contre-réaction inhérents au régulateur.

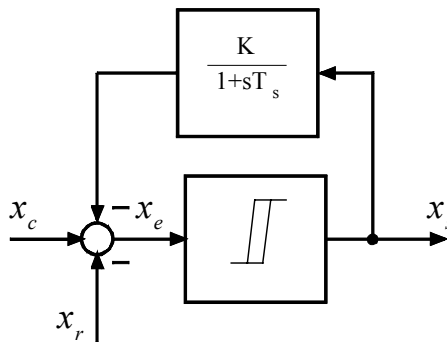


Figure 7-46 : Représentation schématique d'un régulateur à action à deux positions avec contre-réaction

Un montage avec un simple circuit RC de contre-réaction est représenté à la Figure 7-47 et son fonctionnement découle de la Figure 7-49. La contre-réaction est constituée par un circuit RC comprenant la résistance R_s , le condensateur C_s , l'amplificateur opérationnel A et la résistance de sommation R_{cr} .

Trois résistances (R , R , R_{cr}) lient l'entrée (-) du comparateur aux tensions u_c , $-u_r$ et u_{cr} . La tension $u_{i(-)}$ est maintenant égale à

$$u_{i(-)} = \frac{R_{cr}}{2R_{cr} + R} \cdot (u_c - u_r) + \frac{R}{2R_{cr} + R} \cdot u_{cr} \quad 7.102$$

La tension de contre-réaction u_{cr} varie exponentiellement en fonction du temps, et provoque un basculement continu du régulateur à actions à deux positions dès que $u_{i(-)}$ a atteint la

valeur $u_{i(+)}$ selon la relation (7.97) où il faut poser u'_s égale à $+U_{sat}$ ou $-U_{sat}$ selon l'état de commutation. Pour $u_e = u_c - u_r = 0$, la tension u_{cr} varie entre $U_{e(+)}$ et $U_{e(-)}$. Les durées d'enclenchement et de déclenchement t_e et t_d du signal de sortie u_s sont égales (voir fig. 4.54). Lorsque u_e passe à une valeur positive, on constate d'abord un enclenchement prolongé. Ensuite, u_{cr} varie autour de $u_e > 0$ selon les seuils de basculement $U_{e(+)}$ et $U_{e(-)}$. La durée d'enclenchement t_e est maintenant supérieure à la durée de déclenchement t_d . Le contraire se produit ($t_e < t_d$) lorsque $u_e < 0$.

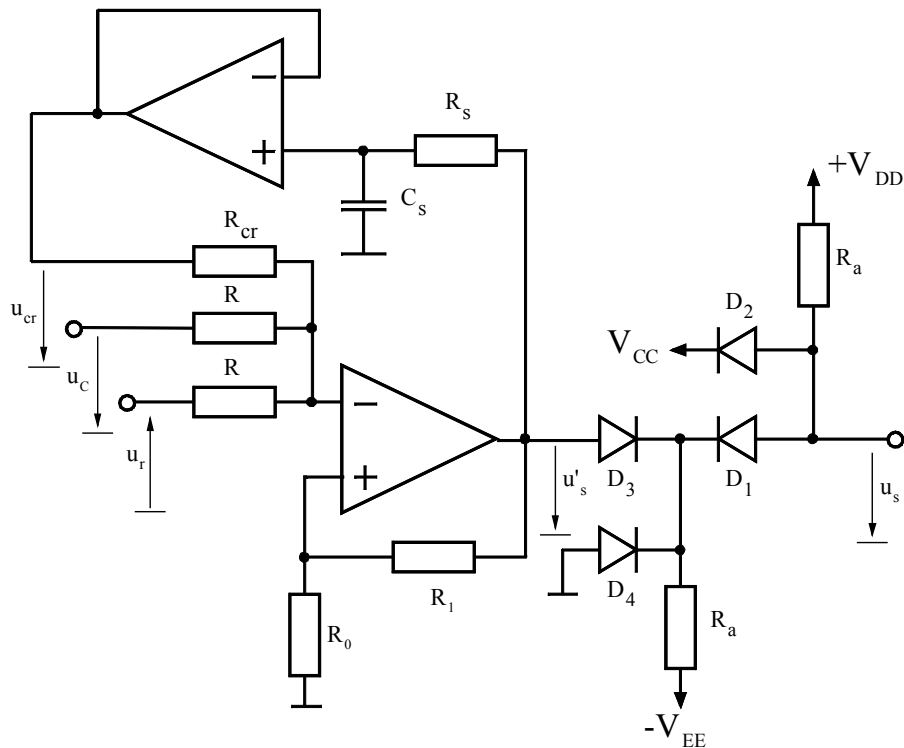


Figure 7-47 : Régulateur à action à deux positions avec contre-réaction

Les seuils de basculement (hypothèse : la tension de saturation U_{sat} est identique pour les deux polarités) sont définis par la relation

$$u_i(+)-u_i(-)=\frac{R_0}{R_0+R_1}u_s-\frac{R_{cr}}{R+2R_{cr}}(u_c-u_r)-\frac{R}{R+2R_{cr}}u_{cr}=0 \quad 7.103$$

En régime permanent, on peut définir les bornes (extremums) de la tension u_{cr}

$$U_{crMAX}=\frac{R_0}{R_0+R_1} \cdot \frac{R+2R_{cr}}{R}U_{sat}-\frac{R_{cr}}{R}(U_c-U_r) \quad 7.104$$

$$U_{crMIN}=-\frac{R_0}{R_0+R_1} \cdot \frac{R+2R_{cr}}{R}U_{sat}-\frac{R_{cr}}{R}(U_c-U_r) \quad 7.105$$

et finalement, on peut écrire

$$U_{crMAX} - U_{crMIN} = \frac{2R_0}{R_0 + R_1} \cdot \frac{R + 2R_{cr}}{R} U_{sat} \quad 7.106$$

Pour la tension u_{cr} , on peut écrire, en posant $\tau = R_s C_s$

Pour $u_s'(t) = U_{sat}$

$$u_{cr}(t) = U_{sat} \cdot (1 - e^{-t/\tau}) + U_{crMIN} \cdot e^{-t/\tau} \quad 7.107$$

et pour $u_s'(t') = -U_{sat}$

$$u_{cr}(t') = -U_{sat} \cdot (1 - e^{-t'/\tau}) + U_{crMAX} \cdot e^{-t'/\tau} \quad 7.108$$

Dans ce cas les extremums sont définis par la relation :

$$\left. \begin{aligned} U_{crMAX} &= \frac{1 - 2e^{-t_e/R_s C_s} + e^{-T_p/R_s C_s}}{1 - e^{-T_p/R_s C_s}} U_{sat} \\ U_{crMIN} &= -\frac{1 - 2e^{-t_d/R_s C_s} + e^{-T_p/R_s C_s}}{1 - e^{-T_p/R_s C_s}} U_{sat} \end{aligned} \right\} U_{crMAX} - U_{crMIN} = 2 \frac{(1 - e^{-t_e/R_s C_s})(1 - e^{-t_d/R_s C_s})}{1 - e^{-T_p/R_s C_s}} U_{sat} \quad 7.109$$

En supposant que $\tau = RC \gg T_p$, ce qui est le cas pour une hystérèse faible en regard de la tension de saturation U_{sat} , on peut simplifier l'expression précédente sous la forme

$$U_{crMAX} - U_{crMIN} \cong 2 \frac{t_e \cdot t_d}{T_p} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot U_{sat} \quad 7.110$$

La valeur moyenne U_{cr} se calcule à partir de la relation générale suivante

$$\begin{aligned} U_{cr} &= \frac{1}{T_p} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_p} u_{cr}(t) \cdot dt = \frac{1}{T_p} \cdot \int_0^{t_e} u_{cr}(t) \cdot dt + \int_0^{t_d} u_{cr}(t') \cdot dt' = \\ &= \frac{t_e - t_d}{T_p} \cdot U_{sat} \end{aligned} \quad 7.111$$

en utilisant l'approximation du 1^{er} ordre pour les exponentielles (variation linéaire de la tension aux bornes du condensateur C_s , on peut écrire

$$U_{cr} = \frac{U_{crMAX} + U_{crMIN}}{2} = -\frac{R_{cr}}{R} (U_c - U_r) = \frac{t_e - t_d}{T_p} U_{sat} \quad 7.112$$

avec pour définition du rapport cyclique : $D = \frac{t_e}{T_p}$

$$D = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_{cr}}{R} \frac{U_c - U_r}{U_{sat}} \right) \quad 7.113$$

et finalement pour la fréquence de commutation

$$T_p = 4 \frac{R_0}{R_0 + R_1} \cdot \frac{R + 2R_{cr}}{R} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{R_{cr}}{R} \frac{U_c - U_r}{U_{sat}} \right)^2} R_s C_s . \quad 7.114$$

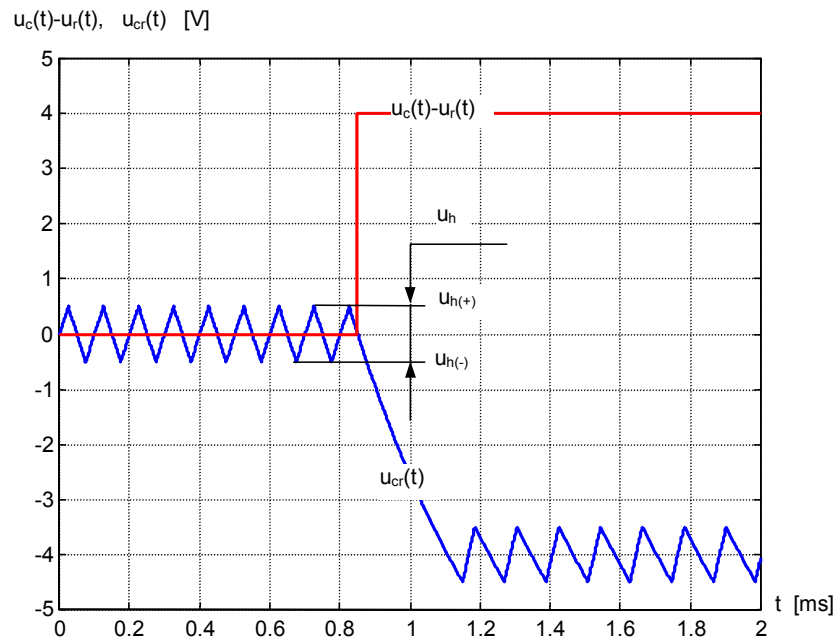


Figure 7-48 Entrée et contre-réaction d'un régulateur à action à deux positions avec contre-réaction

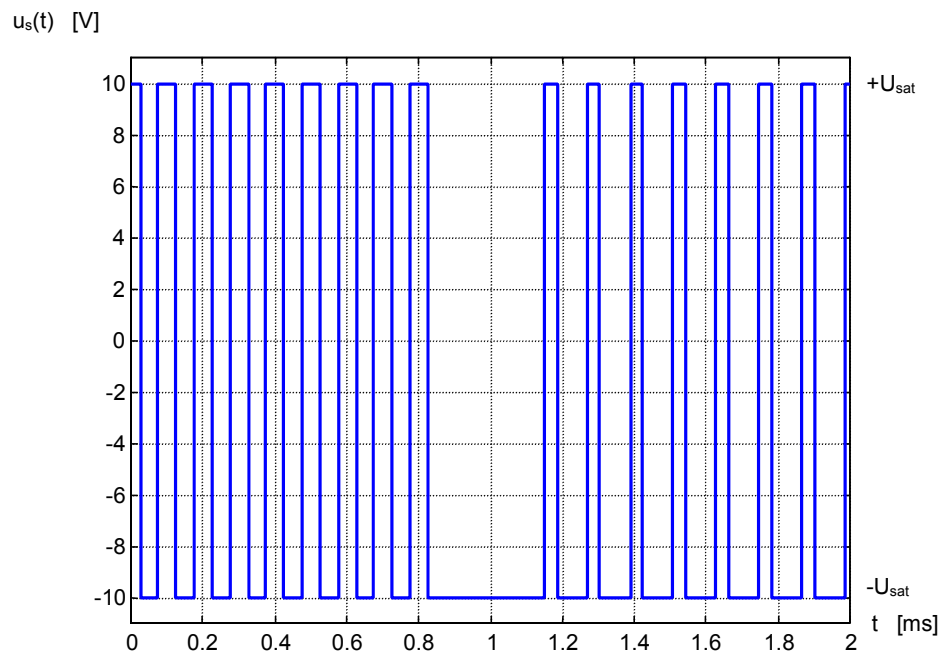


Figure 7-49 Sortie d'un régulateur à action à deux positions avec contre-réaction

A. COMPLEMENT MATHEMATIQUE

A.1 REGULATEUR PD

Le régulateur PD est donné par la fonction de transfert suivante

$$G_C(s) = G_{C0} \cdot \frac{(1 + \frac{s}{\omega_z})}{(1 + \frac{s}{\omega_p})} \quad \text{A. 1}$$

La réponse harmonique devient

$$G_C(j\omega) = G_{C0} \cdot \frac{(1 + j\frac{\omega}{\omega_z})}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_p})} = \frac{(1 + j\frac{\omega}{\omega_z})(1 - j\frac{\omega}{\omega_p})}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_p})(1 - j\frac{\omega}{\omega_p})} = \frac{1 + \frac{\omega^2}{\omega_z\omega_p} + j(\frac{\omega}{\omega_z} - \frac{\omega}{\omega_p})}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2} \quad \text{A. 2}$$

La phase s'exprime par la relation

$$\varphi(G_C(j\omega)) = \tan^{-1} \left(\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_z} - \frac{\omega}{\omega_p}\right)}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_z\omega_p}} \right) \quad \text{A. 3}$$

Le déphasage maximum se situe à une pulsation $\omega_{\varphi\max}$ correspondant à la moyenne géométrique des pulsations ω_z et ω_p .

$$\omega_{\varphi\max} = \sqrt{\omega_p \cdot \omega_z} \quad \text{A. 4}$$

En remplaçant ω par $\sqrt{\omega_p \cdot \omega_z}$ dans la relation A. 3, on obtient

$$\varphi(G_C(j\omega_{\varphi\max})) = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\sqrt{\omega_p}}{\omega_z} - \sqrt{\omega_p}}{2} \right) \quad \text{A. 5}$$

Il s'agit de résoudre cette relation par rapport à φ_{\max} . Soit

$$\tan(\varphi_{\max}) = \frac{\sin(\varphi_{\max})}{\cos(\varphi_{\max})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\omega_p}}{\omega_z} - \sqrt{\frac{\omega_z}{\omega_p}} \quad \text{A. 6}$$

En prenant le carré de cette expression, on a

$$\frac{\sin^2(\varphi_{\max})}{\cos^2(\varphi_{\max})} = \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_p}{\omega_z} - 2 + \frac{\omega_z}{\omega_p} \right) = \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{\omega_p}{\omega_z} \right)^2 - 2 \frac{\omega_p}{\omega_z} + 1}{\frac{\omega_p}{\omega_z}} \quad \text{A. 7}$$

puis

$$4 \frac{\omega_p}{\omega_z} \cdot \sin^2(\varphi_{\max}) = \left(\frac{\omega_p}{\omega_z} \right)^2 \cos^2(\varphi_{\max}) - 2 \frac{\omega_p}{\omega_z} \cos^2(\varphi_{\max}) + \cos^2(\varphi_{\max}) \quad \text{A. 8}$$

et pour finir

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega_p}{\omega_z} \right)^2 \cos^2(\varphi_{\max}) - 2 \frac{\omega_p}{\omega_z} (\cos^2(\varphi_{\max}) + 2 \cdot \sin^2(\varphi_{\max})) + \cos^2(\varphi_{\max}) \\ &= \left(\frac{\omega_p}{\omega_z} \right)^2 \cos^2(\varphi_{\max}) - 2 \frac{\omega_p}{\omega_z} (1 + \sin^2(\varphi_{\max})) + \cos^2(\varphi_{\max}) = 0 \end{aligned} \quad \text{A. 9}$$

En résolvant cette dernière relation par rapport à $\frac{\omega_p}{\omega_z}$ et sachant que $0 \leq \varphi_{\max} \leq 90^\circ$, donc que

$\sin(\varphi_{\max}) \geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\omega_p}{\omega_z} &= \frac{2(1 + \sin^2(\varphi_{\max})) \pm \sqrt{4(1 + \sin^2(\varphi_{\max}))^2 - 4\cos^4(\varphi_{\max})}}{2\cos^2(\varphi_{\max})} \\ &= \frac{(1 + \sin^2(\varphi_{\max})) \pm \sqrt{(1 + \sin^2(\varphi_{\max}) + \cos^2(\varphi_{\max}))(1 + \sin^2(\varphi_{\max}) - \cos^2(\varphi_{\max}))}}{\cos^2(\varphi_{\max})} \\ &= \frac{(1 + \sin^2(\varphi_{\max})) \pm \sqrt{4\sin^2(\varphi_{\max})}}{\cos^2(\varphi_{\max})} = \frac{1 \pm 2\sin(\varphi_{\max}) + \sin^2(\varphi_{\max})}{\cos^2(\varphi_{\max})} \quad \text{A. 10} \\ &= \frac{(1 \pm \sin(\varphi_{\max}))^2}{1 - \sin^2(\varphi_{\max})} = \frac{(1 \pm \sin(\varphi_{\max}))^2}{(1 - \sin(\varphi_{\max}))(1 + \sin(\varphi_{\max}))} \\ &= \frac{1 \pm \sin(\varphi_{\max})}{1 \mp \sin(\varphi_{\max})} \end{aligned}$$

La seule solution envisageable est celle pour laquelle le rapport $\frac{\omega_p}{\omega_z} \geq 1$. Dans ce cas la relation A. 10 devient

| |
|--|
| $\frac{\omega_p}{\omega_z} = \frac{1 + \sin(\varphi_{\max})}{1 - \sin(\varphi_{\max})} \quad \text{A. 11}$ |
|--|

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **TRAITE D'ELECTRICITE**
 VOLUME XVI : ELECTRONIQUE DE REGLAGE ET DE COMMANDE
 Auteur : H. Bühler
 ISBN : 2-604-00018-0

- [2] **COMPLEMENT AU TRAITE D'ELECTRICITE**
 CONCEPTION DE SYSTEMES AUTOMATIQUES
 Auteur : H. Bühler
 ISBN : 2-88074-149-1

- [3] **ANALOG DEVICES**
 IMPLEMENTING PI CONTROLLER WITH ADMC401
 Application note : AN-401-13

OUTILS DE CALCUL ET D'ANALYSE

- MATLAB Version 6**
Création des graphiques (Bode et Réponse indicielle)

- MATHEMATICA Version 3.0**
Transformation inverse de Laplace (calcul symbolique)