

Département de Physique
©Pierre Amiot, 2011.

LES TRANSFORMATIONS DU SYSTÈME DE COORDONNÉES

EFFETS SUR LES COORDONNÉES DU POINT, LES CHAMPS ET LES COMPOSANTES DES VECTEURS

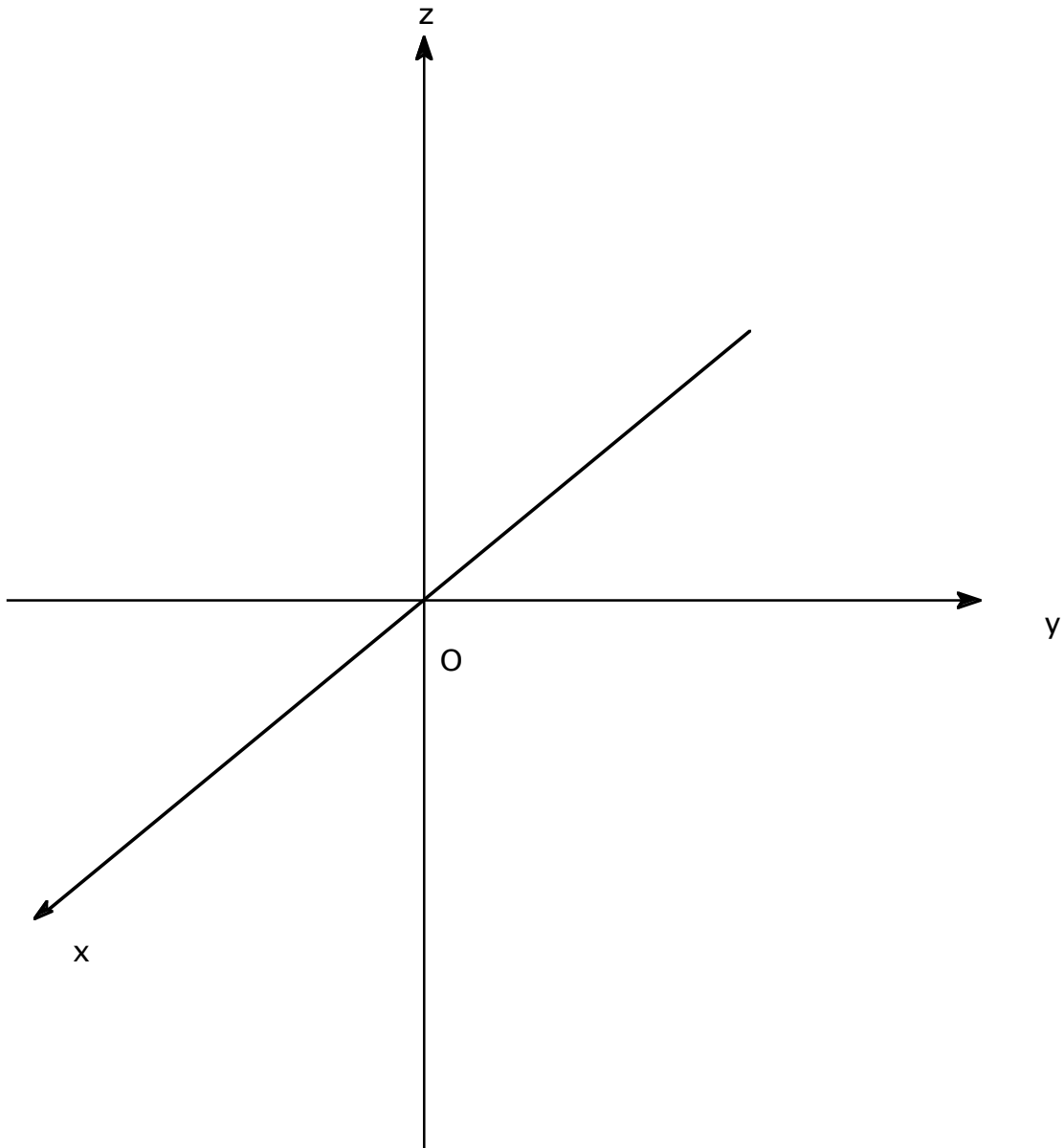
NOTE : On trouve une table des matières en pages 45-46

I. Situation et besoins en Physique

A. Représentation de l'espace

Nous nous limitons ici à l'espace euclidien 3-D qui constitue le cadre de notre environnement macroscopique habituel. Largeur, hauteur et profondeur en sont les mesures les plus usuelles. Sa représentation la plus fréquente et toujours très utile est due à Descartes (XVIIe siècle). Elle repose sur le trièdre ci-contre, appelé référentiel ou système (de coordonnées) cartésien, constitué de trois axes orthogonaux (à angle droit) qui s'étendent de $-\infty$ à $+\infty$ et qu'on note généralement $Oxyz$.

Tout point de l'espace physique y est représenté par un point, P , complètement identifié par la donnée des trois coordonnées, x , y et z , dont la valeur numérique est la projection orthogonale du *bâton* OP sur les axes Ox , Oy , et Oz respectivement. Le référentiel cartésien, $Oxyz$, est le plus simple et le plus intuitif de tous les systèmes possibles et nous servira de point de départ. Il vaut peut-être la peine de dire dès maintenant que sa simplicité mène à une forme pour les lois physiques qui est également très simple. Cette simplicité est à la fois un avantage et un désavantage. Avantage parce qu'il est plus facile d'y décomposer les équations vectorielles qui modélisent souvent les lois physiques. Désavantage parce que cette même simplicité ne développe pas notre intuition sur la forme la plus générale que peuvent prendre ces lois physiques lorsqu'on veut *profiter* des symétries naturelles du système physique.



Par exemple la loi de Newton pour un système conservatif, $\vec{F} = m\vec{a}$, donne, en système cartésien

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

C'est très joli et paraît très simple, mais pas de forme générale. Malheureusement, utiliser ces équations pour étudier le système Terre-Lune, par exemple, nous mène à un enfer

d'équations couplées sans espoir de solution. La raison est que ce système planétaire a une symétrie sphérique, et même cylindrique, alors que le système de coordonnées cartésiennes a une symétrie cubique. Un finissant d'un cours avancé de Physique mathématique vous dira que la solution est très simple, la forme générale de l'équation de Newton pour un système conservatif est

$$m \left[\frac{d^2 q^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dq^j}{dt} \frac{dq^k}{dt} \right] = -g^{il} \frac{\partial}{\partial q^l} V \quad , \quad i=1,2,3$$

C'est vrai, mais pas évident!

Le présent module vise un juste milieu où nous apprendrons à nous libérer de l'*esclavage* des coordonnées cartésiennes et de leur symétrie cubique, sans tomber dans l'ensemble des difficultés techniques de l'analyse tensorielle. Par contre, pour ceux et celles intéressé/e/s à en savoir plus, c'est là qu'il faut chercher.

Pourquoi alors utiliser les coordonnées curvilignes s'il y a un prix à payer? C'est que ce prix est souvent faible devant la simplicité inhérente associée à l'utilisation d'un système de coordonnées dont la symétrie interne reflète celle du système physique étudié. Des simplifications d'origine géométrique arrivent alors qui l'emportent, sans compter que les données sont beaucoup plus *proches* de la réalité observée du système. Encore une fois, la position d'une planète selon ses coordonnées x , y et z est *correcte* mais ne parle pas à l'esprit. On *voit* beaucoup mieux cette position à l'aide de sa distance p/r au soleil et un angle mesuré p/r à une direction de référence, un rayon et un angle. Dans ce cas toujours, le potentiel gravitationnel, au centre de toute la mécanique céleste, s'écrit

$$V(\vec{r}) = \frac{-GmM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{en cartésien}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{-GmM}{r} \quad \text{en sphérique, une seule variable.}$$

Ce dernier exemple laisse prévoir un type important de simplification dans l'utilisation d'un système curviligne. Notre but est le plus souvent d'écrire une loi physique qui se matérialisera généralement sous la forme d'équations différentielles. Techniquement, si ces équations sont couplées, i.e. si chacune implique plusieurs degrés de liberté, alors leur solution sera généralement beaucoup plus difficile. L'utilisation d'un système curviligne nous permet de réduire ce couplage et rend techniquement la solution plus simple et rend plus facile l'utilisation des symétries et des lois de conservation.

B. Représentation des quantités physiques.

En Physique, un référentiel représente l'espace et nous aide à donner des valeurs numériques aux quantités qui nous intéressent. Nous soulignons ici certaines de ces quantités.

1. Les lieux géométriques

i) Le point

Un point, P , dans le référentiel représente un point dans l'espace physique, typiquement l'endroit où se trouve (momentanément) une particule extrêmement fine (ponctuelle). Le point est complètement identifié par ses trois coordonnées, x , y , et z . On écrit souvent $P(x, y, z)$ ou $\vec{r} = (x, y, z)$. Cette dernière expression est un vecteur qui va de l'origine O jusqu'au point P . Ses composantes ont comme valeur les longueurs Ox , Oy , et Oz qui sont simplement les valeurs numériques x , y , et z égales aux *longueurs* des

projections orthogonales de \vec{r} sur les axes, \vec{r} étant le *bâton* (ou rayon vecteur) orienté OP .

ii) La courbe

La courbe peut être vue comme résultant du déplacement continu du point. On l'utilise, par exemple, pour représenter la trajectoire qu'une particule ponctuelle suit dans l'espace lorsque le temps *croît*. La courbe/trajectoire est un lieu physique à une dimension. En effet, si on connaît la courbe, il suffit d'une seule *longueur*, mesurée à partir d'une origine choisie arbitrairement, pour déterminer en quel point de la courbe on se trouve.

Plusieurs façons existent pour décrire mathématiquement la courbe. En Physique, une des plus utiles est la forme paramétrique et le plus souvent, ce paramètre est le temps. Dans ce cas, la courbe est généralement la trajectoire d'une particule. Connaître cette trajectoire signifie qu'à chaque temps, t , nous connaissons le point où se trouve la particule. Nous avons donc des fonctions qui, de la seule connaissance de t , nous disent le point, donc ses coordonnées. Nous avons donc les trois *équations*

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(t)$$

Clairement un paramètre indépendant (t) est nécessaire et suffisant pour générer cette courbe/trajectoire. C'est tout-à-fait cohérent avec le fait que c'est un lieu à une dimension.

Une autre représentation table directement sur le fait que la courbe est à une dimension et qu'en conséquence, une seule coordonnée indépendante est suffisante. Supposons que l'on choisisse z comme coordonnée indépendante. Il est alors évident que, sur une courbe, connaître z impose une seule valeur à x et à y . Nous aurons donc des fonctions qui nous donnent comment x et y varient lorsque z varie, donc

$$x = x(z)$$

$$y = y(z)$$

Il y a une façon équivalente d'écrire cela, en imposant deux contraintes/reliations entre les coordonnées, par exemple

$$f(x, y, z) = 0$$

$$g(x, y, z) = 0$$

Ces deux équations *contraignent* deux des variables à dépendre de l'autre qui reste alors la seule variable indépendante. Par définition, cela générera une courbe, un lieu à une dimension.

Ici encore, nous sommes souvent amenés à utiliser des coordonnées *adaptées* au système physique.

iii) La surface

La surface est un lieu géométrique à deux dimensions. Il suffit de deux coordonnées indépendantes pour y définir un point. Par exemple, la surface de la terre est une surface et il suffit de connaître la longitude et la latitude pour savoir où on est, i.e. en quel point on se trouve. Un front d'onde, par exemple, peut être représenté par une surface. La surface requiert deux coordonnées indépendantes, comme sur la Terre. Ainsi une seule contrainte/relation, comme $f(x, y, z) = 0$ laisse deux des coordonnées indépendantes et cette équation définit donc une surface.

Par exemple, un câble coaxial a une évidente symétrie cylindrique, avec le conducteur au centre et la surface extérieure conductrice servant de mise à terre. Cette enveloppe extérieure a la forme d'un très long cylindre et l'équation de sa surface est

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{en cartésien}$$

$$\rho = a \quad \text{en cylindrique}$$

Cette dernière expression l'emporte aisément par sa simplicité. De plus, elle n'implique qu'une seule coordonnée et ne génère donc pas de couplage entre les coordonnées.

2. Les quantités

i) Le scalaire

Le scalaire est un nombre comme la longueur d'un segment, la pression d'un gaz, le potentiel gravitationnel,... Il n'a pas de direction. Sa valeur est indépendante du système de coordonnées utilisé, de l'orientation du système (tête en haut ou à l'envers), en fait elle est indépendante de toutes les transformations qui n'affectent pas la *nature* du système étudié, mais cette valeur peut changer d'un point à l'autre. Comme contre-exemple, on pourrait suggérer qu'une transformation de compression ou d'étirement des axes va changer la longueur d'un segment. C'est vrai, mais ça va aussi changer la nature du système physique! C'est donc généralement une transformation non permise. (Certains systèmes physiques exotiques le permettent, mais leur étude tombe en dehors du présent module).

La composante d'un vecteur n'est pas un scalaire, en effet, si on change l'orientation du système d'axes, toutes les composantes seront changées, elles ne sont pas invariantes sous cette transformation qui avait pourtant laissé la longueur d'un segment invariant. Tout nombre n'est donc pas un scalaire.

Le champ scalaire : Une quantité physique peut être un scalaire, néanmoins sa valeur peut changer d'un point à l'autre. Par exemple, la pression atmosphérique varie avec l'altitude (hauteur) et elle varie aussi sous un déplacement transversal, la pression n'est pas la même dans la zone de haute pression au dessus des grands lacs et dans la zone de basse pression sur le golf St-Laurent. Pour exprimer cette variation de la pression, p , avec la position, on écrit une *équation*

$$p = p(x, y, z)$$

C'est ce qu'on appelle un champ scalaire. Ici nous avons fait l'abus habituel de notation . Nous utilisons le même symbole, p , pour signifier la quantité physique (à gauche) et la fonction (à droite) dont l'évaluation numérique en un point (x, y, z) donne la valeur de la quantité physique.

Le champ scalaire peut dépendre d'un paramètre comme le temps, t . Cette dépendance peut prendre deux formes. Le champ peut dépendre de t uniquement à travers une dépendance des coordonnées sur t . Nous avons alors $p = p(x(t), y(t), z(t))$. La situation est claire : nous avons un cas où x , y et z dépendent du temps; nous sommes donc sur une trajectoire le long de laquelle nous étudions la variation de la pression et nulle part ailleurs. La pression pourrait aussi dépendre directement de t , que les coordonnées en dépendent ou non. Dans ce cas, le temps joue un rôle qui se rapproche de celui d'une coordonnée additionnelle et nous aurons $p = p(x, y, z, t)$ dans ce qui est réellement un espace à quatre dimensions.

ii) Le vecteur

La *définition* d'un vecteur comprend sa *longueur* ou amplitude et sa direction et sert à représenter des quantités physiques qui ont ces propriétés, comme la force \vec{F} , la vitesse \vec{v} , le champ électrique \vec{E} ,

On représente souvent le vecteur par une flèche dont la *longueur* donne l'amplitude, la valeur absolue de la grandeur et la direction donne la... direction! Une façon simple d'écrire un vecteur \vec{F} , le vecteur force par exemple, résulte d'une décomposition selon ses composantes : on projette orthogonalement le vecteur sur les trois axes cartésiens, ce qui identifie trois grandeurs : F_x, F_y et F_z .

Il faut ici soulever un problème. Le vecteur \vec{F} ne se mesure pas, en général, comme une longueur. Le représenter dans notre espace cartésien original où les axes mesurent des longueurs et non des forces, est certainement un abus. On devrait *créer* un nouveau système où les axes auraient les dimensions physiques de force. Sans introduire explicitement le jargon spécialisé d'espace tangent etc..., on comprendra que, lorsqu'on *dessine* un vecteur force en un point $P(x, y, z)$ où se trouve la particule, on fait un abus, facilement compris, mais strictement et mathématiquement incorrect. On s'en sort par la pirouette suivante. *Attaché/associé* à chaque point P , existe un référentiel d'axes OF_x, OF_y, OF_z . Lorsqu'on dessine le vecteur force au point P de $Oxyz$, c'est une *image* du vecteur \vec{F} , dans son référentiel à lui, qu'on a rapporté en $P(x, y, z)$ mais sans prendre la peine d'en dessiner les axes. La réalité est suffisamment claire pour éviter les confusions et...c'est si pratique.

Puisque la direction, aussi bien que la longueur, a une signification physique, elle est indépendante du système d'axes utilisé. Si on change l'orientation des axes, on devra changer la valeur des composantes du vecteur pour garantir que la direction initiale est conservée. Une composante de vecteur n'est donc pas un scalaire qui, lui, ne changerait pas de valeur. Cette phrase a une importance que les limites techniques que nous nous sommes imposés ne permettent pas de saisir complètement. Elle devra suffire ici. Ce qui serait plus difficile à faire, c'est de définir le vecteur *aussi bien* que nous avons défini le scalaire. Les composantes du vecteur changent si on fait une transformation *permise*, c'est clair. Comment changent-elles, c'est ce que nous verrons. Comment devraient-elles changer, c'est ce que nous ne verrons pas! Voyons deux exemples qui soulignent le problème : nous considérons deux vecteurs bien connus en Physique, la vitesse d'une particule \vec{v} et le moment cinétique de cette particule \vec{l} , où

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{l} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

Considérons une transformation où nous inversons les directions des trois axes : x devient $-x$, Il s'ensuit des définitions ci-dessus que \vec{r} devient $-\vec{r}$ et que \vec{v} devient $-\vec{v}$. Par contre, à cause du double signe -, l_x reste l_x , donc \vec{l} reste \vec{l} . Sous cette transformation (réflexion d'espace) qui ne devrait avoir aucune conséquence physique, puisque l'orientation des axes est complètement arbitraire, on voit que la direction d'une *sorte* de vecteur comprenant la position, la vitesse ... change de signe. Par contre, il semble exister une autre *sorte* de vecteur comprenant le moment cinétique, ... qui ne

change pas de signe! Il y a définitivement un problème et on trouve parfois l'expression *pseudo-vecteur* pour nommer ces quantités. En fait, ce problème s'estompe un peu si on interdit ce type de transformation ou si on utilise l'arsenal tensoriel. Malheureusement, nous ne disposons pas ici des outils pour déterminer quelles transformations doivent être évacuées. Nous nous concentrerons d'ailleurs sur les plus courantes des transformations de coordonnées qui ne posent pas de problème (et s'il y en a, nous n'en parlerons pas!).

Le champ de vecteur

Un vecteur peut changer de longueur et de direction d'un point à l'autre de l'espace. Il le fera par l'intermédiaire d'une dépendance de ses composantes sur les coordonnées du point et nous aurons les trois *équations*

$$\left. \begin{array}{l} F_x = F_x(x, y, z) \\ F_y = F_y(x, y, z) \\ F_z = F_z(x, y, z) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{F}(x, y, z) = \hat{i}F_x(x, y, z) + \hat{j}F_y(x, y, z) + \hat{k}F_z(x, y, z)$$

C'est un champ vectoriel qui est composé de trois composante, chacune étant une fonction des coordonnées du point $P(x, y, z)$ où ce vecteur est évalué. On peut y ajouter une dépendance sur un paramètre, t , comme dans le cas du champ scalaire. Les composantes d'un vecteur réfèrent aux vecteurs de base du système, eux-mêmes liés au choix des coordonnées du point. Cependant, le choix de la base pour les composantes et le choix des coordonnées dont dépendent ces composantes sont deux choses indépendantes, non reliées.

Le rayon vecteur et la vitesse

On appelle souvent *rayon vecteur* le vecteur \vec{r} qui va de l'origine O jusqu'au point $P(x, y, z)$. Ses composantes sont évidemment x , y , et z . Plaçant sur les axes les vecteurs unitaires (longueur 1 et sans dimension physique) notés \hat{i} , \hat{j} et \hat{k} , on peut clairement écrire

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Parce qu'il est directement associé au point P lui-même, ce vecteur est spécial et nous le reverrons souvent par la suite. Puisque les axes cartésiens sont immobiles, les vecteurs \hat{i} , \hat{j} et \hat{k} sont constants non seulement en longueur, mais aussi en direction. Cela simplifie énormément l'évaluation du vecteur vitesse dans ce référentiel puisqu'alors on le définit comme le taux de changement temporel du vecteur position. Il se calcule donc comme suit

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} + x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}} + z\dot{\hat{k}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

où le point au dessus d'une quantité signifie la dérivée (totale) par rapport au temps. Cette simplification n'existe que pour le système cartésien qui est spécial, parce que ses vecteurs unitaires pointent toujours dans la même direction et que leur dérivée p/r au temps est alors nulle.

On voit que les unités de mesure (dimensions physiques) sont complètement évacuées des vecteurs de la base et on se sent plus rassuré d'écrire, pour un vecteur en général

$$\vec{F} = \hat{i}F_x + \hat{j}F_y + \hat{k}F_z$$

Si \vec{F} est un champ vectoriel, ses composantes dépendront en général des coordonnées du point où nous l'évaluons. En écrivant les lois physiques, nous aurons fréquemment à calculer les taux de changement des vecteurs. Ce calcul, et pas seulement celui du taux temporel, est très facile dans le système cartésien. Calculons par exemple le taux de variation de \vec{F} sous une variation de y , gardant x et z constants. Ce taux est

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial y} F_x + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} F_y + \hat{k} \frac{\partial}{\partial y} F_z \quad \text{puisque} \quad \frac{\partial}{\partial y} \hat{i} = \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} = \frac{\partial}{\partial y} \hat{k} = 0$$

C'est évidemment un vecteur, puisque le changement d'un vecteur se fait aussi bien en grandeur qu'en direction et est donc lui-même un vecteur.

Revenant à la vitesse, le calcul de $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ implique que les composantes x, y , et z dépendent explicitement du paramètre t . Sous-jacentes à la possibilité de définir un vecteur vitesse non trivial, on trouve les trois relations

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}(t) \quad \text{définit une courbe .}$$

Le calcul de la vitesse se fait donc sur une courbe paramétrique, donc sur une trajectoire. C'est complètement cohérent, la vitesse d'une particule dont la trajectoire est représentée par cette courbe n'est définie, évidemment, que sur la trajectoire (là où passe la particule).

Note : Le système cartésien est le seul qui donne aux vecteurs et à leur représentation une forme et des propriétés aussi simples. C'est à la fois intéressant pour la simplification, mais aussi un peu dangereux, au sens où les expressions obtenues n'ont pas une forme générale et nous préparent mal à la forme qu'elles prendront dans d'autres systèmes de coordonnées.

II. Autres systèmes orthogonaux et certaines de leurs propriétés

A. Description

0. Introduction

Le système cartésien est orthogonal. Il l'est en tout point, au sens où d'un point à l'autre, on peut le glisser, les vecteurs de base restant de même longueur et parallèles à eux-mêmes. Il existe d'autres systèmes de coordonnées. En fait leur nombre est infini. Certains d'entre eux sont orthogonaux en tout point de l'espace, la différence avec le système cartésien vient du fait qu'en déplaçant le référentiel d'un point à l'autre, les vecteurs unitaires changent de direction. On les appelle généralement les systèmes curvilignes.

Il doit cependant être évident que la Physique ne peut pas dépendre du système utilisé qui reste un outil de représentation de la réalité. Par exemple, un point P existe, indépendamment de la façon dont on note sa position; c'est la façon dont on note cette position qui doit s'ajuster à cette position, pas l'inverse. Mathématiquement, cela signifie qu'on doit être capable de passer d'un système de coordonnées à l'autre, aller-retour. Ainsi, si (x, y, z) déterminent la position d'un point P dans un système cartésien et si (q_1, q_2, q_3) représentent le même point dans un autre système, alors doivent exister des relations entre ces deux ensembles de coordonnées puisque trois coordonnées sont suffisantes pour entièrement déterminer ce point. On ne peut pas avoir six coordonnées

simultanément indépendantes, cela surdéfinirait le point; or une surdéfinition a rarement une solution. Nous devons donc avoir, de façon unique

$$\left. \begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3) \\ y &= y(q_1, q_2, q_3) \\ z &= z(q_1, q_2, q_3) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 = q_1(x, y, z) \\ q_2 = q_2(x, y, z) \\ q_3 = q_3(x, y, z) \end{cases}$$

Ce sont les équations de transformation. Dans un cas comme dans l'autre, trois équations entre six variables n'en laissent que trois indépendantes, c'est parfait.

Nous nous concentrerons dans ce qui suit sur deux systèmes curvilignes orthogonaux, le système cylindrique et le système sphérique.

1. Le système cylindrique

Ici, un point est identifié par les trois nombres ρ, φ et z . Les deux premiers sont des coordonnées polaires dans le plan xOy alors que z mesure l'élévation au-dessus de ce plan. La coordonnée ρ mesure la longueur de la projection de OP dans le plan xOy et la coordonnée φ mesure l'angle p/r à l'axe Ox que fait cette projection. La coordonnée z est la même qu'en cartésien. On le voit ci-dessous et on peut le définir à partir des coordonnées cartésiennes via une transformation.

La géométrie est très simple et la relation avec le système cartésien facile à obtenir par trigonométrie élémentaire

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = (x^2 + y^2)^{1/2} \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

Il est assez simple de vérifier que les domaines de variation sont

$$\rho = [0, \infty]$$

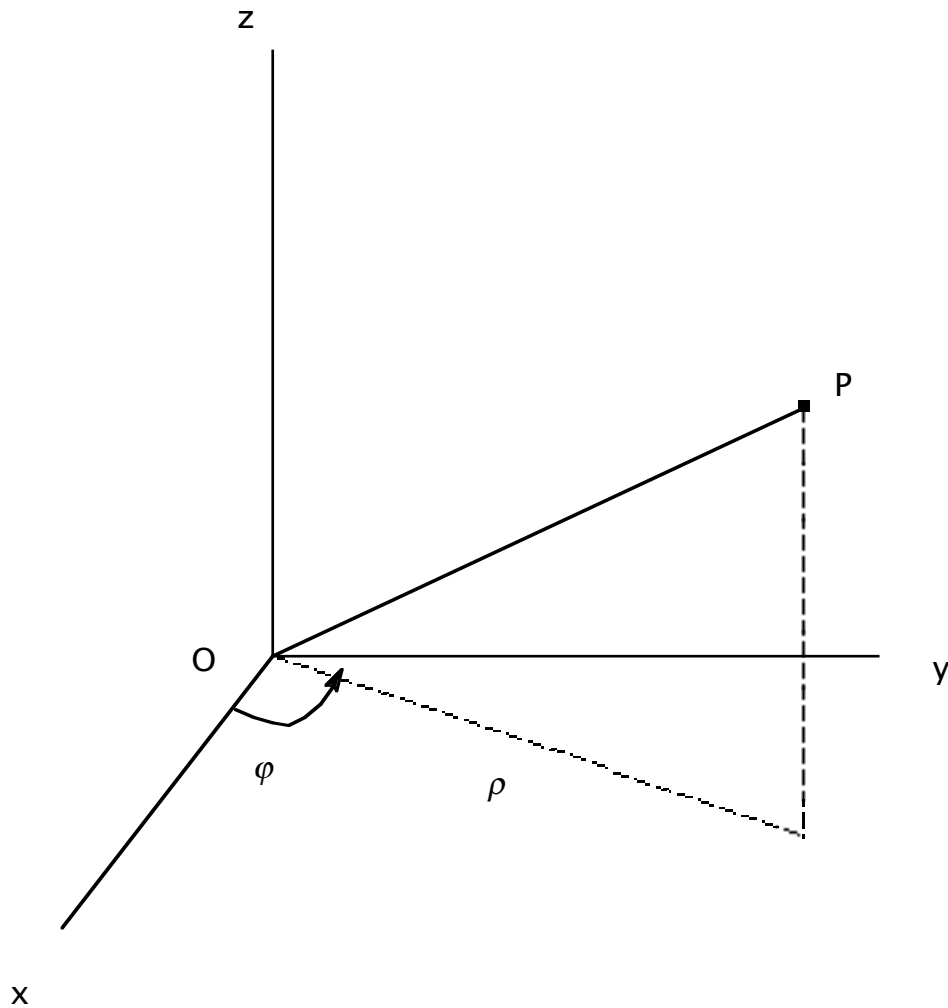
$$\varphi = [0, 2\pi]$$

$$z = [-\infty, +\infty]$$

de façon à ce que tout point puisse être identifié d'une et d'une seule façon et même si, physiquement, l'infini n'existe pas.

On note qu'une des coordonnées, φ , est un angle et n'a donc pas de dimension de mesure.

Quant à z , il est identique à celui du système cartésien.



2. Le système sphérique

Ici les trois coordonnées du point P sont r, θ et φ , où r mesure la longueur du rayon vecteur qui va de O à P . L'angle θ mesure l'inclinaison de ce rayon vecteur par rapport à l'axe Oz et φ a la même définition qu'en coordonnées cylindriques, mesurant l'angle à partir de l'axe Ox de la projection du rayon vecteur sur le plan xOy .

Ici, nous avons deux angles, donc deux des trois coordonnées sont sans dimension de mesure. Les domaines de variation sont faciles à déterminer, ce sont

$$r = [0, \infty]$$

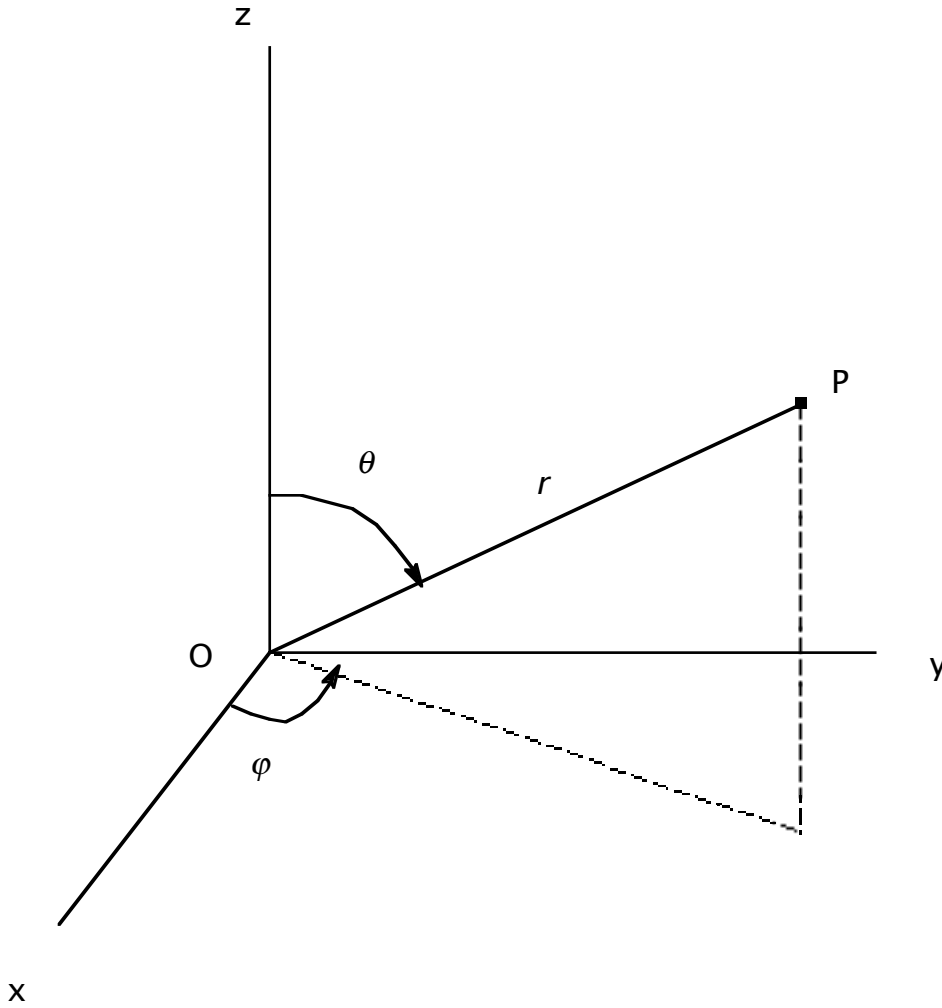
$$\varphi = [0, 2\pi]$$

$$\theta = [0, \pi]$$

qui assurent que chaque point est représenté d'une et d'une seule façon.

La trigonométrie demeure assez simple (voir ci-dessous) et les équations de transformation sont

$$\left. \begin{array}{l} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ \theta = \cos^{-1} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \end{array} \right.$$



B. Vecteurs unitaires et orthonormalité

1. Définition générale des vecteurs de base

L'identification des vecteurs \hat{i}, \hat{j} et \hat{k} est immédiate dans le système cartésien. Elle supporte néanmoins deux définitions différentes qui, dans ce cas, donnent le même résultat. On peut dire de \hat{i} qu'il donne simultanément la direction dans laquelle x augmente et celle de la direction perpendiculaire au plan yOz . Ces deux définitions ne sont pas identiques, mais elles donnent ici la même réponse.

Nous allons donc étudier un peu plus en détails comment on peut, quantitativement, définir des vecteurs unitaires de base pour un système curviligne en général. Ceux/celles intéressé/e/s à un traitement plus complet peuvent consulter le livre "Vector Analysis" dans la série Schaum.

Notre point de départ est bien connu, c'est le rayon vecteur du point P , i.e. le vecteur \vec{r} qui va de O à P

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \vec{r}(x, y, z)$$

Puisque le point P est indépendant du système, nous avons vu que doivent exister des équations de transformation avec un système de coordonnées (q_1, q_2, q_3)

$$\left. \begin{array}{l} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_1 = q_1(x, y, z) \\ q_2 = q_2(x, y, z) \\ q_3 = q_3(x, y, z) \end{array} \right.$$

Par remplacement direct, nous obtenons

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x(q_1, q_2, q_3)\hat{i} + y(q_1, q_2, q_3)\hat{j} + z(q_1, q_2, q_3)\hat{k} = \vec{r}(x(q_1, q_2, q_3), y(q_1, q_2, q_3), z(q_1, q_2, q_3)) \\ \vec{r} &= \vec{r}(q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

avec le léger abus de langage habituel. Cela nous donne, en 1ère ligne, le vecteur \vec{r} dont les composantes dépendent des coordonnées (q_1, q_2, q_3) mais sont définies sur la base cartésienne puisque les vecteurs de base demeurent \hat{i}, \hat{j} et \hat{k} .

2. Définition et calcul des vecteurs de base

a. Méthode générale

La direction d'un vecteur unitaires (de la base) peut être fixée comme étant la direction du vecteur qui mesure le changement de \vec{r} lorsque la coordonnée correspondante est variée. Les coordonnées sont notées $\{q_i \mid i=1,2,3\}$ et les vecteurs unitaires \hat{e}_i . La direction de \hat{e}_i sera celle que donne la direction du changement de \vec{r} lorsque la coordonnée q_i est changée. Le vecteur \vec{r} est $\vec{r}(q_i) \equiv \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$. Changeant q_i en $q_i + dq_i$ change $\vec{r}(q_i)$ en $\vec{r}(q_i + dq_i)$. Selon notre définition ci-dessus, nous avons donc que la direction de \hat{e}_i est donnée par

$$\hat{e}_i \sim \lim_{dq_i \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(q_i + dq_i) - \vec{r}(q_i)}{dq_i}$$

Clairement, à la limite nous avons simplement la dérivée et nous aurons

$\hat{e}_i \sim \frac{\partial \vec{r}(q_j)}{\partial q_i}$ comme définition de la direction, mais ce vecteur n'est pas

unitaire. Nous voulons un vecteur unitaire (de longueur un) sans dimension physique. Pour l'obtenir, nous divisons simplement le vecteur ci-dessus par sa norme

et alors $\hat{e}_i = \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{r}(q_j)}{\partial q_i} \right|} \frac{\partial \vec{r}(q_j)}{\partial q_i}$, ce qui garantit la direction et la normalisation.

Nous allons maintenant appliquer cette *recette* générale aux différents systèmes que nous avons présentés, commençant avec le système cartésien, pour vérifier si ça marche. Pour les autres, nous utiliserons le système cartésien comme point de départ, de comparaison.

b. Système cartésien

Dans le cas cartésien, nous avons simplement

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Identifiant $q_i = (x, y, z)$ pour $i=1, 2, 3$, il est trivial de calculer

$$\hat{e}_1 \sim \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \hat{i} \quad \text{où} \quad \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \right| = |\hat{i}| = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{e}_1 = \frac{1}{1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \hat{i}$$

et de même pour $\hat{e}_2 = \hat{j}$, $\hat{e}_3 = \hat{k}$.

Ce résultat est trivial, mais il permet au moins de vérifier que notre définition générale pour les vecteurs de base est cohérente avec ce que nous utilisons déjà.

c. Système cylindrique

Nous allons appliquer la même méthode en partant du même vecteur \vec{r} , mais en y remplaçant les x , y , et z par leurs expressions en fonction de ρ , φ et z :

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \rho \cos \varphi \hat{i} + \rho \sin \varphi \hat{j} + z\hat{k}$$

(Les composantes sont cartésiennes mais elles dépendent des coordonnées cylindriques).

Identifiant maintenant $q_i = (\rho, \varphi, z)$ pour $i=1, 2, 3$, nous aurons

$$\hat{e}_1 \sim \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}$$

$$\text{avec} \quad \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$$

$$\Rightarrow \hat{e}_1 = \frac{1}{1} (\cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}) = \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}$$

Aussi

$$\hat{e}_2 \sim \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi \hat{i} + \rho \cos \varphi \hat{j}$$

$$\text{avec} \quad \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = \rho \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \rho$$

$$\Rightarrow \hat{e}_2 = \frac{1}{\rho} (-\rho \sin \varphi \hat{i} + \rho \cos \varphi \hat{j}) = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}$$

et trivialement $\hat{e}_3 = \hat{k}$.

Nous savons donc exprimer nos *nouveaux* vecteurs de base en fonction des *anciens*. Ces expressions peuvent évidemment s'inverser

$$\left. \begin{aligned} \hat{e}_1 &= \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \\ \hat{e}_2 &= -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \\ \hat{e}_3 &= \hat{k} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \hat{i} &= \cos \varphi \hat{e}_1 - \sin \varphi \hat{e}_2 \\ \hat{j} &= \sin \varphi \hat{e}_1 + \cos \varphi \hat{e}_2 \\ \hat{k} &= \hat{e}_3 \end{aligned} \right.$$

Vérifions ce que devient le vecteur \vec{r} lors d'une transformation de base

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \rho \cos \varphi \hat{i} + \rho \sin \varphi \hat{j} + z\hat{k} \\ &= \rho \cos \varphi (\cos \varphi \hat{e}_1 - \sin \varphi \hat{e}_2) + \rho \sin \varphi (\sin \varphi \hat{e}_1 + \cos \varphi \hat{e}_2) + z\hat{e}_3 \\ &= \hat{e}_1 [\rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi] + \hat{e}_2 [-\rho \cos \varphi \sin \varphi + \rho \cos \varphi \sin \varphi] + z\hat{e}_3 \\ \vec{r} &= \rho \hat{e}_1 + z\hat{k} \end{aligned}$$

C'est tout-à-fait conforme à ce que la simple géométrie d'Euclide nous dit. On note que le vecteur unitaire \hat{e}_2 qui *correspond* à la coordonnée φ n'apparaît pas dans la définition du rayon vecteur. Il est clair que la direction de \vec{r} dépend de la valeur de φ , mais il doit être aussi clair que vectoriellement, \hat{e}_2 n'entre pas dans la définition de \vec{r} .

Un élément nouveau et très important apparaît : l'orientation des vecteurs de base \hat{e}_1 et \hat{e}_2 n'est pas constante puisqu'elle dépend de l'angle φ . Ceci est très différent du système cartésien, c'est néanmoins une caractéristique générale, seul le système cartésien y échappe. On verra que cela *complique* singulièrement le calcul des dérivées des vecteurs parce que les vecteurs de la base ne sont plus des constantes.

On peut également vérifier explicitement que le système cylindrique est orthonormal. Il est effectivement assez simple de calculer, sachant que $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} \equiv 0$,

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = -\cos \varphi \sin \varphi + \cos \varphi \sin \varphi \equiv 0$$

$$\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1 \equiv 0$$

ce qui démontre l'orthogonalité de cette base (elle est déjà normalisée).

d. Système sphérique

Les mêmes opérations sont possibles dans le système sphérique en remplaçant dans \vec{r} les x , y et z par leur expression donnée par les équations de transformation

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \\ &= (r \sin \theta \cos \varphi)\hat{i} + (r \sin \theta \sin \varphi)\hat{j} + r \cos \theta \hat{k} \end{aligned}$$

Ici, nous identifions $q_i = (r, \theta, \varphi)$ pour $i = 1, 2, 3$. Appliquant notre règle générale :

$$\hat{e}_1 \sim \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$$

$$\text{où } \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta}$$

$$= \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 1$$

$$\Rightarrow \hat{e}_1 = \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$$

De même

$$\hat{e}_2 \sim \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \varphi \hat{i} + r \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - r \sin \theta \hat{k}$$

$$\text{où } \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = r \sqrt{\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta}$$

$$= r \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = r$$

$$\Rightarrow \hat{e}_2 = \cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}$$

et

$$\hat{e}_3 \sim \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -r \sin \theta \sin \varphi \hat{i} + r \sin \theta \cos \varphi \hat{j}$$

$$\text{où } \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = r \sqrt{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} = r \sin \theta$$

$$\Rightarrow \hat{e}_3 = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}$$

Ces équations peuvent s'inverser, comme il se doit,

$$\left. \begin{aligned} \hat{e}_1 &= \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \\ \hat{e}_2 &= \cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \hat{k} \\ \hat{e}_3 &= -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \hat{i} &= \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_1 + \cos \theta \cos \varphi \hat{e}_2 - \sin \varphi \hat{e}_3 \\ \hat{j} &= \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_1 + \cos \theta \sin \varphi \hat{e}_2 + \cos \varphi \hat{e}_3 \\ \hat{k} &= \cos \theta \hat{e}_1 - \sin \theta \hat{e}_2 \end{aligned} \right.$$

Ici aussi, on peut remplacer tout ça dans l'expression pour \vec{r} , ce qui donne, après quelques manipulations que le lecteur est invité à faire

$$\vec{r} = r \hat{e}_1$$

qui est géométriquement évident et trivial, puisque le vecteur de base (unitaire) \hat{e}_1 est dans la direction du vecteur \vec{r} lui-même et que r est la longueur de ce vecteur.

Deux caractéristiques nouvelles : le rayon vecteur n'a qu'une seule composante, c'est la conséquence du fait que ce système décrit *bien* un système avec symétrie sphérique (la sphère). De plus, deux des coordonnées sont des angles et n'ont aucune dimension (de mesure).

On constate que la direction des trois vecteurs (unitaires) de la base varie d'un point à l'autre de l'espace. Vraisemblablement, cela rendra techniquement plus difficile le calcul des dérivées sur des vecteurs dans cette base. Cela *complique* aussi notre visualisation des vecteurs dans cette base, sauf pour des symétries particulières, pour lesquelles ce système a précisément été développé, les systèmes à symétrie sphérique : systèmes planétaires, atomiques,...l'univers!

Il reste ici à vérifier l'orthogonalité de cette base. Nous calculons donc

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = \sin \theta \cos \varphi \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi \cos \theta \sin \varphi - \cos \theta \sin \theta$$

$$= \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - \sin \theta \cos \theta \equiv 0$$

$$\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = -\cos \theta \cos \varphi \sin \varphi + \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \equiv 0$$

$$\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1 = -\sin \varphi \sin \theta \cos \varphi + \cos \varphi \sin \theta \sin \varphi \equiv 0$$

Le système est orthogonal en tout point de l'espace. Nous en concluons donc que, d'un point à l'autre de l'espace, le trièdre des vecteurs de base se déplace en *tournoyant*, mais que les trois vecteurs restent toujours orthonormaux.

3. Un aperçu des conséquences de la variation des \hat{e}_i

Le changement d'orientation des vecteurs unitaires de base est une propriété générale de tous les systèmes de coordonnées, sauf le système cartésien. Cela jouera un grand rôle lorsque nous chercherons à calculer des dérivées de vecteur, comme la vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ou l'accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. D'autres types de dérivée jouent aussi un grand rôle en Physique,

en particulier les opérations impliquant l'opérateur nabla $\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$.

La simplicité du système cartésien en fait un mauvais modèle de ce que nous allons obtenir lors de ces opérations, par contre cette même simplicité est mise à contribution lorsque nous cherchons à visualiser ce qui se passe dans d'autres référentiels. C'est pourquoi nous avons développé les coordonnées curvilignes à partir des coordonnées cartésiennes.

Comme exemple, étudions un peu ce qui se passe dans le cas d'une loi physique a priori très simple, la loi de Newton : $\vec{F} = m\vec{a}$. En cartésien, cette équation vectorielle se décompose en

$$\left. \begin{array}{l} m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y \\ m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z \end{array} \right\} \Leftrightarrow m \frac{d^2q_i}{dt^2} = F_i$$

Le problème est que cette forme très simple $m \frac{d^2q_i}{dt^2} = F_i$ n'est valide qu'en coordonnées cartésiennes. C'est un cas particulier qui est très peu pédagogique sur la forme générale que devrait prendre cette équation. Par exemple, il est évident que

$$m \frac{d^2\varphi}{dt^2} = F_\varphi$$

n'a pas de sens et est complètement faux; même les dimensions de mesure ne sont pas satisfaites, puisque les dimensions physiques à gauche ne sont pas celles d'une force.

4. Autre définition des vecteurs unitaires de base

Nous avons vu ci-dessus comment définir des vecteurs de base que nous avons notés \hat{e}_i et pour lesquels nous avons développé une formule générale permettant de les calculer à partir des vecteurs de la base cartésienne $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ qui nous sont familiers. Il existe une autre façon possible de définir des vecteurs de base de manière systématique. Rappelons que \hat{e}_i donne la direction selon laquelle évolue le vecteur \vec{r} lorsque nous varions la coordonnée q_i .

Nous allons maintenant définir les \hat{E}_i (la notation est la même que dans Schaum et plusieurs autres manuels) comme donnant la direction perpendiculaire au plan complémentaire instantané. Au point P , imaginons les axes de direction q_1, q_2, q_3 . Ces axes sont courbes, mais au voisinage immédiat de P , ces courbes peuvent être identifiées à leur tangente (droite). Prises deux à deux, elles définissent des plans. Les vecteurs unitaires \hat{E}_i seront définis comme étant perpendiculaires à ces plans. Ainsi, au voisinage du point P , \hat{E}_1 est perpendiculaire au plan $q_2 P q_3$, etc. Le plan $q_2 P q_3$ est défini par l'équation $q_1 = c$ ou $q_1 - c = 0$. Il s'ensuit que le vecteur \hat{E}_1 sera dans la direction du gradient de cette dernière équation :

$$\hat{E}_1 \sim \nabla(q_1 - c) = \nabla q_1 \quad : \text{direction}$$

$$\therefore \hat{E}_1 = \frac{1}{|\nabla q_1|} \nabla q_1 \quad : \text{après normalisation}$$

Nous en reparlerons brièvement à la section C.

5. Les facteurs d'échelle et leur rôle

a. Définition

Nous prendrons l'habitude d'utiliser le symbole standard h_i pour relier le vecteur unitaire \hat{e}_i à $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$. Ce symbole s'appelle le facteur d'échelle et il est défini par

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = h_i \hat{e}_i \quad \Rightarrow \quad \hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \quad \xrightarrow{\text{identifie}} \quad h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|$$

En fait, nous les avons déjà calculés pour les coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques pour normaliser les vecteurs de base

$$\text{cartésiennes} : h_1 = h_2 = h_3 = 1$$

$$\text{cylindriques} : h_1 = 1, h_2 = \rho, h_3 = 1$$

$$\text{sphériques} : h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta$$

Ces facteurs d'échelle tiennent compte simultanément de la géométrie de symétrie du système de coordonnées et des dimensions de mesure des coordonnées. Par exemple, le système sphérique est adapté aux problèmes à symétrie sphérique et deux de ses coordonnées n'ont pas de dimension de mesure. Considérons par exemple $h_3 = r \sin \theta$ en coordonnées sphériques qui est relié à la coordonnée φ . La coordonnée φ n'a pas de dimension de mesure, c'est $h_3 = r \sin \theta$ qui a les habituelles mesures de longueur.

Géométriquement, φ mesure une rotation dans le plan xOy , donc autour de l'axe Oz . Cette rotation ne peut exister que si elle dispose d'un bras de rotation, or la longueur de ce bras est précisément $r \sin \theta = h_3$. De ce fait, $r \sin \theta d\varphi$ mesure précisément la longueur du déplacement d'un point P qui passe de (r, θ, φ) à $(r, \theta, \varphi + d\varphi)$. On voit aussi que si $\theta = 0$ ou π , nous sommes sur l'axe Oz et il ne peut donc pas y avoir de rotation autour de cet axe. On note qu'à ces angles, $r \sin \theta = h_3 = 0$.

b. Représentation de vecteurs, exemple cylindrique

Nous sommes habitués à l'utilisation des vecteurs de base \hat{i}, \hat{j} et \hat{k} pour écrire un vecteur selon ses composantes

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

Puisque nous passons aux coordonnées curvilignes, il devient naturel de chercher à écrire ce même vecteur, mais selon ses composantes curvilignes. Rappelons que les composantes et la façon dont ces composantes dépendent des coordonnées sont deux problèmes différents. Nous chercherons donc à écrire, de façon générale

$$\vec{A} = A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3$$

Cela exige que nous sachions écrire les composantes A_i en fonction des A_x, A_y et A_z que nous supposons *connues*. C'est la généralisation d'un exercice que nous avons déjà fait pour le rayon vecteur dans les sections **B.2.c** et **d**. ci-dessus. La procédure est assez directe. Nous avons déjà obtenu des expressions donnant les $\hat{e}_i = \hat{e}_i(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, expressions que nous avons inversées pour écrire les \hat{i}, \hat{j} et \hat{k} en fonction des \hat{e}_i . Ce sont ces dernières expressions que nous remplaçons dans $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$, ce qui donne

$$\vec{A} = A_x \hat{i}(\hat{e}_i) + A_y \hat{j}(\hat{e}_i) + A_z \hat{k}(\hat{e}_i)$$

Regroupant selon les \hat{e}_i permet alors d'identifier les composantes $A_i = A_i(A_x, A_y, A_z)$.

Pour illustrer la procédure nous analysons un exemple concret où nous cherchons à obtenir les composantes cylindriques d'un vecteur. Ici $q_i = (\rho, \theta, \varphi)$ pour $i = 1, 2, 3$. Nous avons déjà obtenu

$$\left. \begin{aligned} \hat{e}_1 &= \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \\ \hat{e}_2 &= -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \\ \hat{e}_3 &= \hat{k} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \hat{i} &= \cos \varphi \hat{e}_1 - \sin \varphi \hat{e}_2 \\ \hat{j} &= \sin \varphi \hat{e}_1 + \cos \varphi \hat{e}_2 \\ \hat{k} &= \hat{e}_3 \end{aligned} \right.$$

et nous remplaçons dans $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$, ce qui donne

$$\vec{A} = A_x (\cos \varphi \hat{e}_1 + \sin \varphi \hat{e}_2) + A_y (\sin \varphi \hat{e}_1 - \cos \varphi \hat{e}_2) + A_z \hat{k}$$

Regroupant les termes selon les vecteurs unitaires donne

$$\vec{A} = (A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi) \hat{e}_1 + (A_x \sin \varphi - A_y \cos \varphi) \hat{e}_2 + A_z \hat{k}$$

Nous identifions donc immédiatement

$$A_1 = A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi$$

$$A_2 = A_x \sin \varphi - A_y \cos \varphi$$

$$A_3 = A_z$$

Comme on le voit, la procédure est directe et simple.

C. Types de vecteurs

Cette section est une parenthèse qui *annonce* des sujets qui ne seront pas poursuivis dans le présent module. Les méthodes de transformation présentées ici sont *élémentaires* et nous n'offrons pas vraiment de façon de classer les quantités : qu'est un vrai scalaire, un vrai vecteur... Y a-t-il moyen de généraliser? La réponse à ces questions

est OUI et la méthode pour y arriver exige précisément une définition plus précise de ce que sont les scalaires, vecteurs...tenseurs en général.

Nous sommes habitués à écrire un vecteur

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

mais puisque $\hat{e}_i \sim \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$, on pourrait choisir d'écrire

$$\vec{A} = a_1 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} + a_2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} + a_3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}$$

Nous avons introduit ici deux éléments inhabituels. D'abord, les vecteurs $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ qui

servent de vecteurs de base ne sont pas normalisés. De plus, ils peuvent être dimensionnés, ce qu'on ne retrouve pas avec les $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}, \hat{e}_i \dots$. Ça peut sembler étrange à première vue, mais cette façon de faire peut s'avérer extrêmement fructueuse lorsqu'on tente une formulation unifiée des quantités mathématiques comme les scalaires, les vecteurs, les...tenseurs... dans le cadre de l'analyse tensorielle. Dans ce cas-là, les a_i ci-dessus s'appellent les composantes *contravariantes* du vecteur \vec{A} . Nous n'en reparlerons plus dans le présent module, reportant cette discussion à un module ultérieur portant sur les tenseurs.

III. Revue des quantités en transformation

A. Les lieux géométriques simples

Nous savons très bien comment représenter les lieux géométriques simples en coordonnées cartésiennes. Nous verrons qu'il est tout aussi simple de les représenter en coordonnées curvilignes. Nous procéderons en utilisant des exemples explicites.

1. Le point

Pour définir un point en cartésien, on donne/fixe la valeur numérique des trois coordonnées x, y , et z . Dans un système curviligne, disons le système sphérique, on définit la valeur numérique de r, θ et φ . Par exemple, le point $(x = 2, y = 2, z = 4)$ est simplement le point

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \approx 4.9$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{4}{2\sqrt{6}} \approx 0.62 \text{ rd}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{2}{2} \approx 0.79 \text{ rd}$$

Ici aussi, chaque coordonnée se voit attribuer UNE valeur.

2. La courbe ordinaire

Dans un point, les trois coordonnées sont fixées. Dans une courbe, une coordonnée (ou une combinaison) reste indépendante. La courbe requiert donc deux équations entre les coordonnées, de façon à ce qu'une seule des coordonnées demeure indépendante. En cartésien, ce seront

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{array} \right\} 2 \text{ équations}$$

qu'en principe, on peut résoudre, par exemple en gardant ici z indépendante, sous la forme

$$\left. \begin{array}{l} x = x(z) \\ y = y(z) \end{array} \right\} 2 \text{ équations}$$

À chaque valeur de z , on a une valeur pour x et une pour y , ce qui donne un point. Laisant varier z change aussi x et y , déplace le point et ainsi génère la courbe.

Un exemple simple est le cercle de rayon a dans le plans xOy . Ses équations sont simplement

$$z = 0 \quad \text{nous place dans le plan } xOy$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \quad \text{l'équation du cercle lui-même}$$

ou, en coordonnées cylindriques ou sphériques

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{qui nous place dans le plan } xOy$$

et $r = a$ équation du cercle lui-même

Le tout est remarquablement simple, beaucoup plus simple qu'en cartésien.

On peut continuer comme cela avec la courbe paramétrique, la surface...

3. Le champ scalaire

Un champ scalaire possède une seule *composante* qui représente une quantité physique, comme la pression atmosphérique par exemple et décrit sa variation d'un point à l'autre de l'espace

$$p = p(x, y, z)$$

Dans une transformation de coordonnées, l'unicité d'existence de tout point P fait qu'entre les *anciennes* et les *nouvelles* coordonnées, existent des équations réversibles) de transformation

$$x_i = x_i(q_j) \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_1(q_1, q_2, q_3) \\ x_2 = x_2(q_1, q_2, q_3) \\ x_3 = x_3(q_1, q_2, q_3) \end{cases}$$

Il suffit alors de remplacer directement dans l'expression pour p

$$\begin{aligned} p &= p(x_1(q_1, q_2, q_3), x_2(q_1, q_2, q_3), x_3(q_1, q_2, q_3)) \\ &= p(q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

La dernière ligne est un abus de langage souvent employé en Physique. Il est clair que la fonction p dépend de (x, y, z) de façon différente de (q_1, q_2, q_3) et par conséquent $p(q_1, q_2, q_3)$ est une fonction différente de $p(x, y, z)$. Nous avons néanmoins employé le même symbole. En général ceci est bien compris et est utilisé parce que ne prêtant pas vraiment à confusion et que c'est physiquement plus clair, p demeurant la pression.

IV. Transformation des quantités

0. Introduction

Cette section et la suivante constituent la portion majeure de ce module d'apprentissage, son premier but.

Nous avons déjà commencé à en parler, surtout dans le calcul des vecteurs unitaires. Le problème le plus difficile sera de développer une méthode systématique pour faire les opérations différentielles sur les vecteurs.

1. Éléments de longueur et de volume

a. Élément de déplacement (longueur)

Le vecteur position d'un point P est noté $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$. Sa différentielle est

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3$$

Nous avons déjà défini $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = h_i \hat{e}_i$, ce qui permet d'écrire

$$d\vec{r} = h_1 dq_1 \hat{e}_1 + h_2 dq_2 \hat{e}_2 + h_3 dq_3 \hat{e}_3$$

C'est là la forme générale qui se réduit, en système cartésien, à

$$d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k},$$

où tous les h_i sont identiquement égaux à 1. C'est le seul système pour lequel c'est vrai.

À la limite des variations infinitésimales, la longueur de $d\vec{r}$ est simplement la longueur du déplacement du point P (le long d'une trajectoire par exemple). Traditionnellement, le module carré de cette longueur est noté ds^2 ou $d\vec{s}^2$. Clairement

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2,$$

lorsque les coordonnées sont orthogonales : $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$, les seuls cas que nous étudions ici.

b. Élément de volume

L'élément de volume est donné par la formule habituelle du triple produit pour calculer le volume d'un parallélépipède, ici de côtés de longueur $h_1 dq_1$, $h_2 dq_2$ et $h_3 dq_3$

$$dV = h_1 dq_1 \hat{e}_1 \cdot h_2 dq_2 \hat{e}_2 \times h_3 dq_3 \hat{e}_3$$

Les vecteurs \hat{e}_i étant unitaires et le système orthogonal, nous avons $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = 1$ et alors

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

Appliquons ces formules aux trois systèmes étudiés à date. Rappelons que nous avons déjà calculé les h_i en **III** :

$$\text{* cartésien : } \begin{cases} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ dV = dx dy dz \end{cases}$$

$$\text{* cylindrique : } \begin{cases} ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \\ dV = \rho d\rho dz \end{cases}$$

$$\text{* sphérique : } \begin{cases} ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ dV = r^2 \sin^2 \theta dr d\theta d\varphi \end{cases}$$

On voit que ces expressions très utiles (et très connues) sont obtenues assez facilement et systématiquement.

2. La métrique et les h_i

(Cette section peut être passée en première lecture).

Nous l'avons déjà dit, il doit exister des équations de transformation entre les systèmes de coordonnées, en particulier entre le système cartésien $\{x_i | i = 1, 2, 3\}$ et un système curviligne $\{q_j | j = 1, 2, 3\}$

$$x_i = x_i(q_j)$$

De plus, ce système d'équations doit être réversible, le pont P étant unique et pouvant être spécifié aussi bien à l'aide des trois coordonnées seulement, qu'elles soient cartésiennes ou curvilignes, donc nous devons avoir

$$q_j = q_j(x_i) \Rightarrow \begin{cases} q_1 = q_1(x_1, x_2, x_3) \\ q_2 = q_2(x_1, x_2, x_3) \\ q_3 = q_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

Une façon simple et directe de vérifier que le système d'équation est réversible, i.e. que la transformation est réversible, est de calculer son Jacobien, J , qui est le déterminant de la matrice de Jacobi $[J]$ d'éléments $J_{ij} = \partial x_i / \partial q_j$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{bmatrix} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{vmatrix}$$

comme nous le donne un calcul simple et direct. Calculons d'abord la différentielle de

$$x_i = x_i(q_j),$$

$$\rightarrow dx_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j$$

qui permet d'écrire, de façon condensée (matricielle)

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix}$$

L'inverse de cette équation est simplement, multipliant chaque côté par $[J]^{-1}$,

$$\begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}$$

Pour que cet inverse existe, il faut que la matrice inverse $[J]^{-1}$ existe, ce qui exige que son déterminant J soit non nul.

Poussons la chose plus loin et prenons la transposée de la première équation, cela donne

$$\begin{bmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dq_1 & dq_2 & dq_3 \end{bmatrix} [J]^T$$

Le calcul matriciel élémentaire donne

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= [dx_1 \quad dx_2 \quad dx_3] \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = [dq_1 \quad dq_2 \quad dq_3] [J]^T [J] \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix} \\
 &= [dq_1 \quad dq_2 \quad dq_3] [g] \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

où la matrice $[g]$ est appelée la métrique et est clairement définie par

$$[g] = [J]^T [J]$$

Si on rappelle la définition des termes dans la matrice de Jacobi, on voit immédiatement que

$$g_{ij} = \sum_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right) \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$$

une formule simple qui permet de calculer directement cette matrice.

Note : La métrique joue un rôle central en géométrie différentielle, par exemple en Relativité générale. La métrique caractérise l'espace, ici un espace euclidien en 3-D. Dépendant du système de coordonnées utilisé, les éléments de la métrique changent beaucoup, sans que les propriétés fondamentales de l'espace changent, évidemment puisque cet espace est premier et que le système de coordonnées utilisé pour y noter les points est un simple outil.

De la formule ci-dessus pour l'élément de longueur, nous obtenons, explicitant l'équation matricielle

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dq_i dq_j$$

Par ailleurs, nous savons déjà que pour un système orthogonal,

$$ds^2 = \sum_i h_i^2 dq_i^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2$$

Cela nous dit immédiatement que, pour un système orthogonal, la métrique est diagonale et se résume à

$$g_{ii} = h_i^2 \Rightarrow [g] = \begin{bmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{bmatrix}$$

Exercice : on vérifie ce résultat pour les systèmes cartésien, cylindrique et sphérique.

Cela donne

$$\begin{aligned}
 * \text{ cartésien} \quad [g] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 * \text{ cylindrique} \quad [g] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$* \text{ sphérique } [g] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Il est clair que ces trois matrices sont diagonales, les trois systèmes sont orthogonaux, comme nous l'avons déjà vérifié explicitement. Par contre les éléments de la diagonale sont très différents d'un système à l'autre.

3. Composantes des vecteurs

Un vecteur est défini par ses composantes dans une base. En cartésien, nous avons

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

mais dans un système en général, nous écrivons

$$\vec{A} = A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3$$

Nous cherchons une méthode qui nous permette de calculer les composantes A_i , si nous connaissons les (A_x, A_y, A_z) . Évidemment, ce problème n'a rien à voir avec le fait que ces composantes puissent elles-mêmes dépendre des coordonnées. Cette dépendance peut s'exprimer en n'importe quel ensemble de coordonnées, les $\{x_i\}$, les $\{q_j\}$, les...

Il est géométriquement clair, les composantes étant des projections de \vec{A} sur les axes propres à notre base, que $A_i = \hat{e}_i \cdot \vec{A}$ et donc

$$A_i = \hat{e}_i \cdot \vec{A} = \hat{e}_i \cdot \hat{i} A_x + \hat{e}_i \cdot \hat{j} A_y + \hat{e}_i \cdot \hat{k} A_z$$

Pour calculer les produits scalaires ci-dessus, retournons à ce que nous connaissons : l'élément de longueur

$$d\vec{s} \equiv d\vec{r} = \hat{i} dx + \hat{j} dy + \hat{k} dz$$

Par ailleurs, les équations de transformation nous donnent

$$x = x(q_1, q_2, q_3) \quad \text{et donc nous pouvons calculer}$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3 = \sum_j \frac{\partial x}{\partial q_j} dq_j$$

ce qui permet d'écrire, remplaçant dans l'expression pour $d\vec{s}$

$$d\vec{s} = \hat{i} \sum_j \frac{\partial x}{\partial q_j} dq_j + \hat{j} \sum_j \frac{\partial y}{\partial q_j} dq_j + \hat{k} \sum_j \frac{\partial z}{\partial q_j} dq_j,$$

d'où nous identifions

$$\hat{i} \cdot d\vec{s} = \sum_j \frac{\partial x}{\partial q_j} dq_j.$$

Simultanément, nous savons pouvoir écrire a priori dans la base curviligne

$$d\vec{s} = \hat{e}_1 h_1 dq_1 + \hat{e}_2 h_2 dq_2 + \hat{e}_3 h_3 dq_3,$$

ce qui nous permet une seconde évaluation de $\hat{i} \cdot d\vec{s}$

$$\hat{i} \cdot d\vec{s} \equiv dx = \hat{i} \cdot \hat{e}_1 h_1 dq_1 + \hat{i} \cdot \hat{e}_2 h_2 dq_2 + \hat{i} \cdot \hat{e}_3 h_3 dq_3$$

Une fois la transformation de coordonnées faite, les $\{q_i\}$ sont indépendants les uns des autres et par conséquent, les $\{dq_i\}$ le sont aussi et peuvent représenter des variations arbitraires. Chacune des deux expressions pour $\hat{i} \cdot d\vec{s}$ est une somme de trois termes et

chaque terme contient un dq_i , or chaque dq_i peut être une variation arbitraire. Dans une telle situation, la seule façon pour que les deux expressions pour $\hat{i} \cdot d\vec{s}$ soient égales, c'est que les facteurs des mêmes dq_i soient les mêmes dans les deux expressions. Cela donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial q_j} &= \hat{i} \cdot \hat{e}_j h_j \Rightarrow \hat{i} \cdot \hat{e}_j = \frac{1}{h_j} \frac{\partial x}{\partial q_j} \\ \frac{\partial y}{\partial q_j} &= \hat{j} \cdot \hat{e}_j h_j \Rightarrow \hat{j} \cdot \hat{e}_j = \frac{1}{h_j} \frac{\partial y}{\partial q_j} \\ \frac{\partial z}{\partial q_j} &= \hat{k} \cdot \hat{e}_j h_j \Rightarrow \hat{k} \cdot \hat{e}_j = \frac{1}{h_j} \frac{\partial z}{\partial q_j}\end{aligned}$$

On remplace facilement dans l'expression pour $A_i = \hat{e}_i \cdot \vec{A}$, ce qui donne

$$A_j = \frac{1}{h_j} \frac{\partial x}{\partial q_j} A_x + \frac{1}{h_j} \frac{\partial y}{\partial q_j} A_y + \frac{1}{h_j} \frac{\partial z}{\partial q_j} A_z$$

Ce résultat est important, d'autant plus que les quantités sont générales, valides pour tout système curviligne orthogonal.

Exemple : Nous allons calculer ici toutes les quantités définies dans cette section, en nous limitant au système et à la base cylindrique. Ici, $q_j = (\rho, \varphi, z)$ dans cet ordre pour $j = 1, 2, 3$.

$$x_1 \equiv x = \rho \cos \varphi \equiv q_1 \cos q_2$$

$$x_2 \equiv y = \rho \sin \varphi \equiv q_1 \sin q_2$$

$$x_3 \equiv z = z \equiv q_3$$

Nous laissons tomber la notation à indice dans ce qui suit pour utiliser la notation *usuelle* pour les coordonnées cartésiennes et cylindriques. Nous calculons d'abord quelques dérivées qui permettent de construire la matrice de Jacobi et/ou de calculer la (matrice) métrique

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho \cos \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

Selon la formule générale développée ci-dessus, nous calculons directement les éléments de la métrique

$$g_{11} = \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial z}{\partial \rho} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + 0 = 1$$

$$g_{22} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \rho^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + 0 = \rho^2$$

$$g_{33} = \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z} = 0 + 0 + 1 = 1$$

On vérifie aussi que les termes hors diagonale sont nuls, par exemple

$$g_{12} = \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\rho \cos \varphi \sin \varphi + \rho \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

et ainsi de suite, nous obtenons la métrique

$$[g] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{bmatrix}$$

permettant de vérifier automatiquement que le système est orthogonal (g est diagonale) et d'identifier

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \rho, \quad h_3 = 1$$

Nous pouvons maintenant écrire directement les quantités d'intérêt dans le système cylindrique. L'élément de longueur est

$$d\vec{s} \equiv d\vec{r} = \hat{e}_\rho d\rho + \hat{e}_\varphi \rho d\varphi + \hat{k} dz$$

$$\Rightarrow ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$$

L'élément de volume est trivialement

$$dV = h_1 h_2 h_3 d\rho d\varphi dz = \rho d\rho d\varphi dz$$

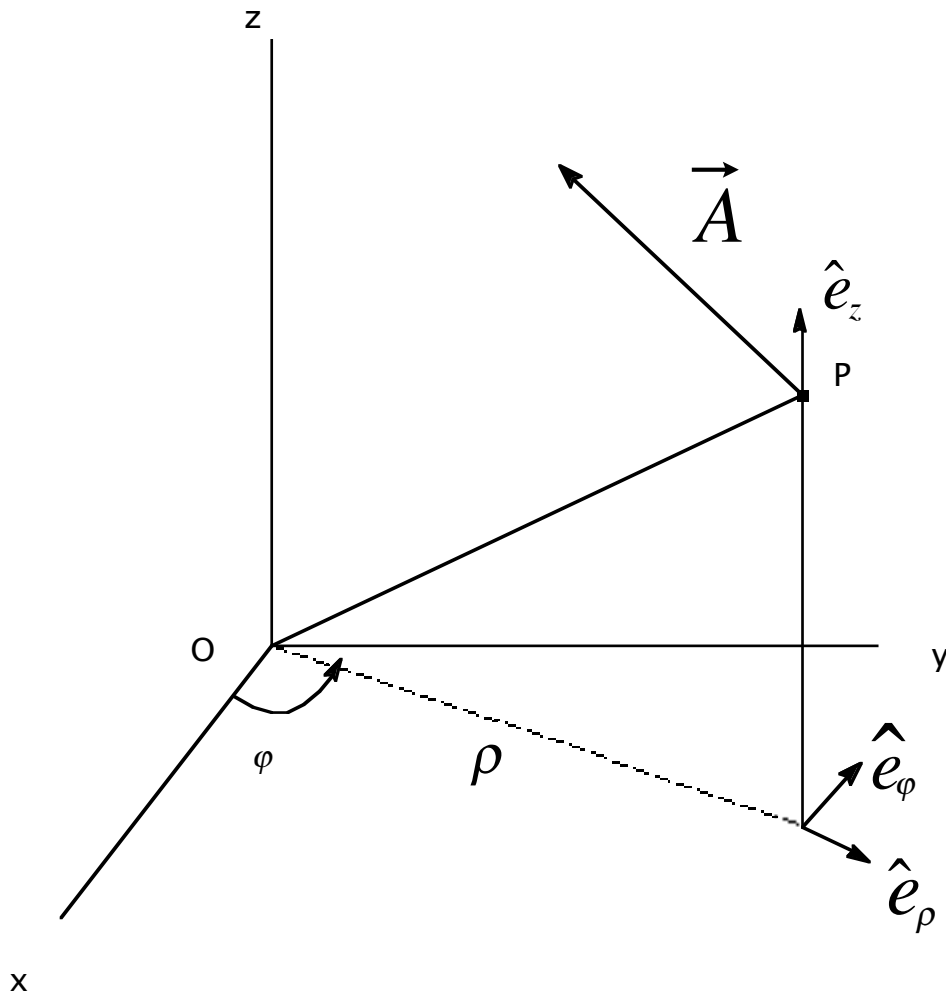
Toujours selon les formules générales ci-dessus, les composantes de vecteur sont

$$A_\rho = \frac{1}{1} \cos \varphi A_x + \frac{1}{1} \sin \varphi A_y + 0$$

$$A_\varphi = \frac{1}{\rho} (-\rho \sin \varphi) A_x + \frac{1}{\rho} (\rho \cos \varphi) A_y + 0$$

$$= -\sin \varphi A_x + \cos \varphi A_y$$

$$A_z = A_z$$



Exercice : Refaite ces calculs pour le système sphérique.

4. Champ vectoriel

Un champ vectoriel est un vecteur dont la grandeur, longueur et direction, change de point en point. Dans ce cas, chaque composante du vecteur est elle-même une fonction des coordonnées. Quelles coordonnées on utilise pour exprimer cette dépendance est une question *pratique* et n'a rien à voir avec la base utilisée pour exprimer les composantes du vecteur, quoiqu'en général on utilise les coordonnées qui correspondent à la base. Par exemple un champ

$$\vec{A}(\vec{r}) = \hat{i}A_x(x, y, z) + \hat{j}A_y(x, y, z) + \hat{k}A_z(x, y, z)$$

est exprimé ici dans la base cartésienne et la dépendance des composantes sur les coordonnées est exprimée en utilisant les coordonnées cartésiennes. Mais on pourrait tout aussi bien conserver la base et changer la façon d'exprimer la dépendance des composantes sur les coordonnées (sans changer le champ évidemment)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \hat{i}A_x(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) + \hat{j}A_y(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) + \hat{k}A_z(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$$

Les composantes sont toujours cartésiennes. La variation point à point de chacune de ces composantes cartésiennes est exprimée en utilisant les coordonnées cylindriques.

Il est important de bien faire cette différence entre base et coordonnées pour les vecteurs. Cela devient spécialement important dans les opérations différentielles sur les champs de vecteur. Parce que ces opérations sont particulièrement simples dans la base cartésienne, certains traités s'y limitent, en électromagnétique par exemple. La section suivante nous montrera comment nous libérer de cette servitude.

V. Opérations différentielles sur les vecteurs en système curviligne

Nous allons identifier cinq opérations où apparaissent des dérivées sur des vecteurs : la dérivée p/r au temps, le gradient d'un champ scalaire, la divergence et le rotationnel d'un vecteur et finalement le Laplacien d'un champ scalaire.

1. La dérivée totale par rapport au paramètre invariant (temps)

Le champ de vecteur peut être aussi simple que le vecteur $\vec{r}(t)$ qui va de l'origine au point P où se trouve une particule en mouvement. Avec le temps, la particule se déplace, donc $\vec{r}(t)$ change. Le taux de variation temporel de ce vecteur, évalué par

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) \quad \text{où le } (\dot{}) \text{ signifie dérivée (totale) p/r au temps.}$$

Ce vecteur varie en longueur et en direction, c'est donc un vecteur qui donne le taux de variation, i.e. cette dérivée donne un vecteur.

En cartésien, cette dérivée est triviale à exprimer pour un champ $\vec{A}(\vec{r})$

$$\dot{\vec{A}}(\vec{r}) = \hat{i}\dot{A}_x(\vec{r}) + \hat{j}\dot{A}_y(\vec{r}) + \hat{k}\dot{A}_z(\vec{r})$$

parce que $\hat{i} = \hat{j} = \hat{k} \equiv 0$. Le calcul des $\dot{A}_x, \dot{A}_y, \dot{A}_z$ se fait comme dans la dérivée de quantités scalaires. Mais en système curviligne, nous aurons

$$\dot{\vec{A}}(\vec{r}) = \hat{e}_1\dot{A}_1 + \hat{e}_2\dot{A}_2 + \hat{e}_3\dot{A}_3 + \dot{\hat{e}}_1A_1 + \dot{\hat{e}}_2A_2 + \dot{\hat{e}}_3A_3$$

Sauf en système cartésien, les $\dot{\hat{e}}_i$ ne sont jamais tous nuls. Pour les calculer, rappelons un résultat déjà connu en **III.B.2**.

$$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \Rightarrow \dot{\hat{e}}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)$$

Pour illustrer la méthode et son utilisation, nous allons faire le calcul au long pour le système cylindrique où nous avons déjà calculé que

$$\hat{e}_1 = \hat{e}_\rho = \hat{i} \cos \varphi + \hat{j} \sin \varphi$$

$$\hat{e}_2 = \hat{e}_\varphi = -\hat{i} \sin \varphi + \hat{j} \cos \varphi$$

$$\hat{e}_3 = \hat{k}$$

Les dérivées se font de façon directe

$$\dot{\hat{e}}_1 = -\hat{i}\dot{\varphi} \sin \varphi + \hat{j}\dot{\varphi} \cos \varphi = \dot{\varphi}(-\hat{i} \sin \varphi + \hat{j} \cos \varphi) \equiv \dot{\varphi}\hat{e}_2$$

$$\dot{\hat{e}}_2 = -\hat{i}\dot{\varphi} \cos \varphi - \hat{j}\dot{\varphi} \sin \varphi = -\dot{\varphi}(\cos \varphi + \hat{j} \sin \varphi) \equiv -\dot{\varphi}\hat{e}_1$$

$$\dot{\hat{e}}_3 = 0$$

Nous aurons donc, regroupant les termes selon les vecteurs de base,

$$\dot{\vec{A}}(\vec{r}) = \hat{e}_1(\dot{A}_1 - \dot{\varphi} A_2) + \hat{e}_2(\dot{A}_2 + \dot{\varphi} A_1) + \hat{e}_3\dot{A}_3$$

Utilisation

Étudions le plus simple des exemples, le vecteur position $\vec{r}(t)$ que nous avons étudié en système cylindrique au **III.B.2**. Son taux de variation temporelle est physiquement le vecteur vitesse de la particule dont le vecteur $\vec{r}(t)$ donne la position.

$$\vec{r}(t) = \rho \hat{e}_1 + z \hat{k} \Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = \dot{\rho} \hat{e}_1 + \dot{z} \hat{k} + \rho \dot{\hat{e}}_1 = \dot{\rho} \hat{e}_1 + \dot{z} \hat{k} + \rho \dot{\phi} \hat{e}_2$$

où l'évaluation est très simple parce que nous avons déjà calculé les $\dot{\hat{e}}_i$ pour le système cylindrique. Il est intéressant de noter que la composante 2 (celle en \hat{e}_2 ou \hat{e}_ϕ) n'apparaît pas dans le vecteur position, mais qu'elle apparaît dans le vecteur vitesse $\dot{\vec{r}}(t)$.

On peut pousser plus loin et calculer le vecteur accélération dont on sait qu'il joue un grand rôle en Physique (équation de Newton)

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}(t) &= \ddot{\rho} \hat{e}_1 + \dot{\rho} \dot{\hat{e}}_1 + \ddot{z} \hat{k} + \dot{\rho} \dot{\phi} \hat{e}_2 + \rho \ddot{\phi} \hat{e}_2 \\ &= \ddot{\rho} \hat{e}_1 + \dot{\rho} \dot{\phi} \hat{e}_2 + \ddot{z} \hat{k} + \rho \ddot{\phi} \hat{e}_2 + \rho \dot{\phi} (-\dot{\phi} \hat{e}_1) \\ &= \hat{e}_1 (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) + \hat{e}_2 (\rho \ddot{\phi} + \dot{\rho} \dot{\phi}) + \ddot{z} \hat{k} \end{aligned}$$

où, encore une fois, le calcul est facile. Nous reviendrons à l'utilisation de ces expressions dans l'équation de Newton.

2. Le gradient

Le gradient d'un champ (fonction) scalaire $\psi(\vec{r})$ est un vecteur. Il mesure le taux directionnel de variation du champ scalaire. Comme on peut étudier cette variation en se déplaçant selon Ox , selon Oy ou selon Oz , il y a trois taux distincts, chacun correspondant à une direction. Nous avons donc un vecteur, somme toute simple à écrire à partir de sa définition ci-dessus. Par définition donc, la composante x , en direction \hat{i} , du gradient est

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\psi(x + \Delta x, y, z) - \psi(x, y, z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi(x, y, z)}{\Delta x} \xrightarrow{\lim} \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial x}$$

et de même pour les composantes y et z .

Traditionnellement, le gradient est noté $\nabla \psi(\vec{r})$

$$\nabla \psi(\vec{r}) = \hat{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

L'objet ∇ s'appelle *nabla* (*del* en anglais) et n'est pas une quantité, mais un opérateur différentiel

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Clairement, si on se déplace d'une longueur Δx selon Ox , donc //^{ment} à \hat{i} , la valeur numérique de la fonction $\psi(\vec{r})$ variera de $\Delta \psi$ avec le taux $\frac{\Delta \psi}{\Delta x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, où le symbole standard ∂ (dérivée partielle) est utilisé pour dire clairement que y et z sont gardés constants dans cette évaluation.

En système curviligne (orthogonal), nous voulons garder la même interprétation. Il faut cependant se souvenir que les coordonnées $\{q_i\}$ n'auront pas toutes des dimensions de longueur, au même sens que x , y et z . Nous avons cependant vu au **III.B.5** qu'un des rôles des facteurs d'échelle est de garantir l'uniformité des dimensions et que

$h_1 dq_1, h_2 dq_2$ et $h_3 dq_3$ ont même dimension que dx, dy , et dz . La définition du gradient en système curviligne devient donc immédiate

$$\nabla \psi(\vec{r}) = \frac{\hat{e}_1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{\hat{e}_2}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \frac{\hat{e}_3}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3}$$

L'application de cette formule aux deux systèmes curvilignes utilisés comme exemples ici est très simple

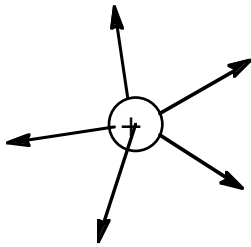
* cylindrique
$$\nabla \psi(\vec{r}) = \frac{\hat{e}_1}{1} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\hat{e}_2}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{\hat{e}_3}{1} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \hat{e}_\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\hat{e}_\phi}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \hat{k} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

* sphérique
$$\nabla \psi(\vec{r}) = \frac{\hat{e}_1}{1} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\hat{e}_2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\hat{e}_3}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = \hat{e}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\hat{e}_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}$$

3. La divergence d'un champ vectoriel

La divergence d'un champ vectoriel $\vec{A}(\vec{r})$ se note $\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r})$. Elle mesure la génération, ou la perte d'amplitude d'un champ vectoriel au voisinage d'un point P situé en \vec{r} . Nous en donnons deux exemples tirés de l'électrostatique et de la magnétostatique.

On sait qu'il existe des charges électriques. Pour décrire l'effet de leur présence sur d'autres charges, nous définissons un champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ qui donne la densité de force d'une charge (source située quelque part) sur une autre charge qui serait placée au point \vec{r} . Les charges génèrent littéralement le champ qu'il est pratique de représenter par les lignes de champ : la direction de ces lignes donne la direction de la force générée par la charge source et la densité des ces lignes dans une région de l'espace donne l'amplitude de cette force. Pour une charge ponctuelle située en \vec{r}_0 , on dessine la figure ci-contre où les lignes de champ émergent de ce point. Les charges peuvent évidemment être distribuées selon une densité et la divergence du champ électrique mesurera précisément cette densité qui est un lieu de génération de lignes de champ.



Cette réalité physique se traduit mathématiquement en écrivant

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) \sim \text{densité de charge en (autour de) } \vec{r}$$

Clairement, dans une région où il n'y a pas de charge la divergence est nulle, il sort de cette région exactement le même nombre de lignes de champ qu'il en rentre et alors

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \text{en tout point de cette région vierge de charges.}$$

Le cas du champ magnétique $\vec{B}(\vec{r})$ est différent. Il n'y a pas de charges magnétiques (le monopole (charge) magnétique demeure un animal mythique, du moins classiquement). Il s'ensuit qu'aucune ligne de champ n'est jamais créée ni détruite. Donc toute ligne de champ doit se refermer sur elle-même. C'est effectivement comme cela qu'on les dessine. Mathématiquement, nous exprimons cette réalité physique en écrivant

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad \text{en tout point de l'espace}$$

Un exemple simple peut être tiré du flot de l'eau dans l'espace libre, que nous décrivons à l'aide du champ $\vec{F}(\vec{r})$ dont la direction est celle du mouvement de l'eau et sa longueur, la densité d'eau autour du point P en \vec{r} . La chantepleure vue de la cuisine est une *source nette* d'eau (il en sort mais n'en entre pas) mais, en régime permanent, dans toute autre région de l'espace libre, toute quantité d'eau qui y entre en sort. Pas toute région en fait, l'eau disparaît de l'espace libre en entrant dans l'égout. Mathématiquement, nous écrirons donc

$$\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) > 0 \quad \text{à la bouche de la chantepleure}$$

$$\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0 \quad \text{dans l'espace libre}$$

$$\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) < 0 \quad \text{à la bouche de l'égout}$$

Une façon élégante et utile d'étudier la divergence est dans le cadre du théorème de Gauss qui s'écrit

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{a} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV$$

S est une surface fermée englobant le volume V , avec $d\vec{a}$ un élément de surface dont la direction est toujours perpendiculaire à la surface et pointant vers l'extérieur. La signification est géométriquement assez claire, la quantité $\vec{A} \cdot d\vec{a}$ mesure le flux du vecteur \vec{A} sortant de l'élément de surface $d\vec{a}$. En intégrant (sommant) sur toute la surface, on mesure à gauche le flux net du champ \vec{A} à travers l'ensemble de la surface S . À droite, on mesure donc la même chose, mais en intégrant sur la totalité du volume intérieur à S . C'est donc qu'on y somme, point par point, toute génération de champ, positive ou négative. La divergence mesure donc bien la génération de champ.

Pour évaluer le côté gauche, considérons un *cube* infinitésimal centré à (q_1, q_2, q_3) ci-dessous.

Ses côtés ont longueur $h_1 dq_1, h_2 dq_2, h_3 dq_3$ et nous étudierons les faces par paires opposées. D'abord les faces $abcd$ et $eflm$. Le vecteur $d\vec{a}$ y est de directions opposées puisqu'il doit pointer vers l'extérieur. Le flux net selon la *direction* q_1 est

$$\begin{aligned} d\phi_1 &= \phi_{abcd} + \phi_{eflm} \\ &= \phi(q_1) + \phi(q_1 + dq_1) \end{aligned}$$

Par géométrie élémentaire, nous calculons ces deux contributions.

Sur $abcd$ l'élément de surface est $d\vec{a} = (-\hat{e}_1)h_2 h_3 dq_2 dq_3$

et sur $eflm$ elle est $d\vec{a} = (+\hat{e}_1)h_2 h_3 dq_2 dq_3$.

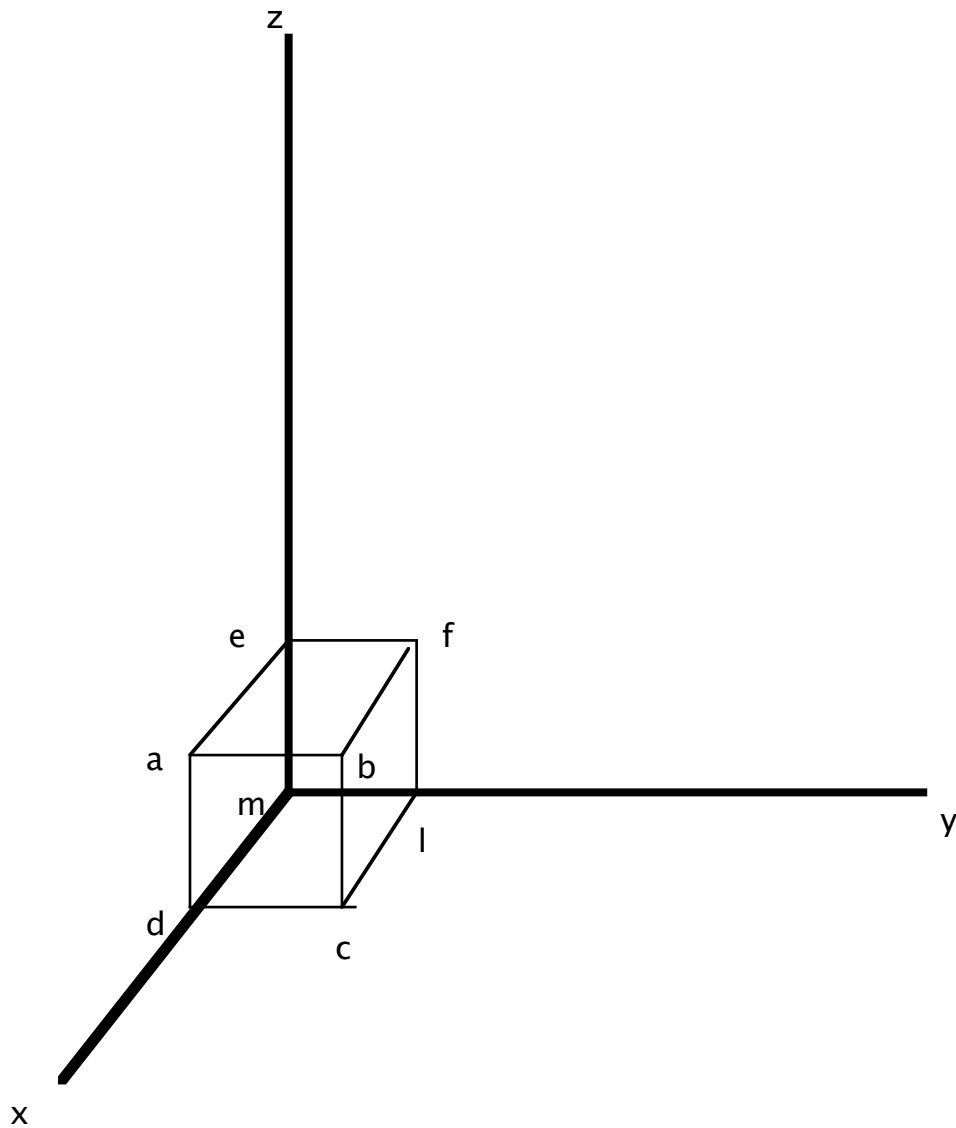
La face $abcd$ est à q_1 alors que la face $eflm$ est à $q_1 + dq_1$. Ainsi donc

Sur $abcd$ $\phi_{abcd} = \phi(q_1) = -A_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3$ à cause de la direction de $d\vec{a}$ sur cette face

Sur $eflm$ $\phi_{eflm} = \phi(q_1 + dq_1) \approx \phi(q_1) + \frac{\partial \phi}{\partial q_1} dq_1$ par série de Taylor,

mais ici $\phi(q_1) = +A_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3$ à cause de la direction de $d\vec{a}$ sur cette face

et donc $\frac{\partial \phi}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3) = \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) dq_2 dq_3$



Rassemblant les termes, il ne restera, pour la contribution des deux faces, que

$$d\phi_1 = \frac{\partial}{\partial q_1}(A_1 h_2 h_3) dq_1 dq_2 dq_3$$

D'un autre côté, nous savons que $dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$ et il est alors possible d'écrire cette contribution comme

$$d\phi_1 = \frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} \frac{dV}{h_1 h_2 h_3}$$

Pour les deux autres paires de faces, la symétrie de l'expression ci-dessus nous dit que leurs contributions seront

$$d\phi_2 = \frac{\partial(A_2 h_1 h_3)}{\partial q_2} \frac{dV}{h_1 h_2 h_3}$$

$$d\phi_3 = \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \frac{dV}{h_1 h_2 h_3}$$

donc, pour l'ensemble du cube infinitésimal, le côté gauche donne

$$d\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_2 h_1 h_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right] dV$$

Pour un volume infinitésimal, dV , l'intégrale du côté droit se résume à

$$\int_{dV} \nabla \cdot \vec{A} dV \approx \nabla \cdot \vec{A} dV$$

Le côté gauche étant égal au côté droit (équation!), nous identifions facilement, comme facteur de dV de part et d'autre de l'équation,

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_2 h_1 h_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right]$$

Cette formule est générale et son utilisation est facile. Encore ici, la connaissance des facteurs d'échelle nous permet d'écrire directement l'expression pour la divergence. Comme exemple, voyons à développer l'expression générale dans le système cylindrique. Évidemment ici $\{q_i, i=1,2,3\} = (\rho, \varphi, z)$ et nous savons que $h_1 = h_3 = 1, h_2 = \rho$ et donc

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial(A_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\rho A_z)}{\partial z} \right] \\ &= \frac{A_\rho}{\rho} + \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned}$$

On laisse à faire en exercice le cas du système sphérique.

4. Le rotationnel $\nabla \times \vec{A}$

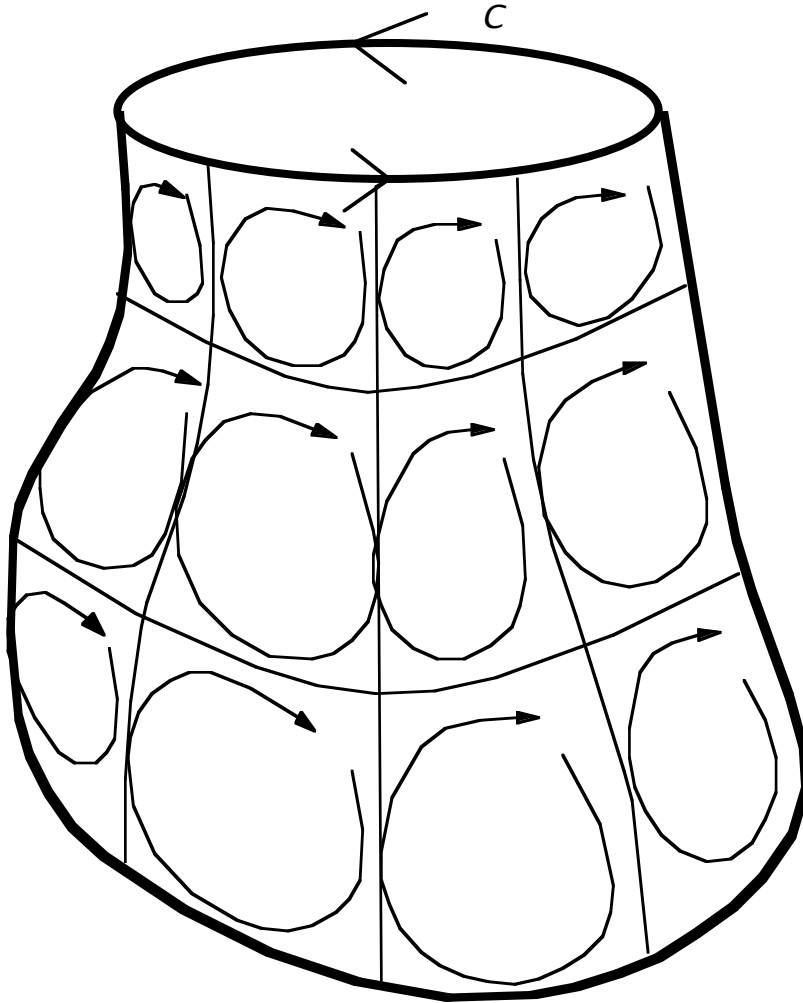
Le rotationnel d'un champ vectoriel est un champ vectoriel. En cartésien, le rotationnel de \vec{A} est

$$\nabla \times \vec{A} = \hat{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

La signification du rotationnel n'est pas aussi simple que celle de la divergence. D'abord c'est un vecteur, puis sa géométrie est plus *compliquée*. Elle apparaît cependant mieux dans le théorème de Stokes

$$\int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Ici S est une surface ouverte dont la courbe fermée C dessine la bouche. Comme précédemment, $d\vec{a}$ est un élément de surface sur S orienté (vers l'extérieur) et $d\vec{l}$ est un élément de *longueur* sur la courbe C que l'intégrale à droite nous fait parcourir au complet. À droite comme à gauche, la quantité calculée est un scalaire. La figure ci-dessous illustre la situation.



À droite de l'équation, l'intégrale calcule clairement la circulation du champ sur la courbe C . Sur la gauche, dans chaque élément de surface (cellule), $d\vec{a}$, la quantité $\nabla \times \vec{A}$ mesure la circulation giratoire du champ exprimée par un vecteur normal à cette surface. On voit que cette circulation s'annule aux frontières des éléments de surface, pour toute la surface sauf à la bouche, parce qu'il n'y a pas, dans cette bouche, de cellule dont la circulation viendrait l'annuler. Nous avons donc une explication pour le rotationnel et cette explication nous fait comprendre la raison du nom rotationnel.

Cette circulation que représente $\nabla \times \vec{A}$ est un peu similaire à ce qu'on mesure par la quantité physique appelée moment cinétique d'une particule de masse m , . On sait que cette quantité est liée au mouvement giratoire de la particule et que le vecteur moment cinétique est défini comme perpendiculaire au plan instantané du mouvement, le plan défini par les deux vecteurs \vec{r} et \vec{v} . Cette rotation de la particule signifie évidemment une circulation liée à un mouvement tournant. On voit qu'il y a une similitude, au moins géométrique, avec le rotationnel. Il est donc assez habituel d'associer un vecteur perpendiculaire au plan du mouvement pour décrire certaines propriétés du mouvement ou de la géométrie giratoire, comme avec .

On peut faire ici un raisonnement un peu semblable à celui fait pour la divergence dans le cadre du théorème de Gauss et on obtient que, pour un système curviligne orthogonal, le rotationnel devient

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

Ainsi, en cylindrique, nous aurons

$$= \hat{e}_\rho \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] + \hat{e}_\varphi \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \hat{k} \left[\frac{A_\varphi}{\rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right]$$

On laisse à l'étudiant/e le soin de calculer l'expression du rotationnel en système sphérique.

5. Le Laplacien

Si on devait choisir l'opération différentielle la plus utile en Physique, le Laplacien remporterait probablement la palme, surtout dans les théories de champ et en physique quantique. En physique microscopique (quantique) il n'y a d'ailleurs rien d'autre que des champs. On le rencontre aussi dans les champs classiques (ou macroscopiques), dans la description des ondes de toute sorte, en diffusion,... Le Laplacien d'un champ scalaire $\psi(\vec{r})$ est un scalaire et est défini comme la divergence du gradient de $\psi(\vec{r})$. Il y a donc une étape vectorielle dans son calcul. Il se note $\nabla^2 \psi(\vec{r})$ ou $\Delta \psi(\vec{r})$, la deuxième notation étant sensée être le standard, mais la première reste très populaire. La raison en est claire, puisque $\Delta = \nabla \bullet \nabla = \nabla^2$, d'ailleurs en cartésien sa forme est très simple

$$\Delta = \nabla \bullet \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Pour calculer le Laplacien de $\psi(\vec{r})$, on calcule d'abord son gradient, i.e. le taux de variation directionnel de $\psi(\vec{r})$. Comme la divergence mesure la génération de lignes de champ, le Laplacien de $\psi(\vec{r})$ mesurera donc la génération d'un champ de variation directionnelle d'une fonction scalaire.

Nous savons déjà calculer le gradient et la divergence dans un repère curviligne. Il est simple de mettre ensemble ces deux expressions pour obtenir

$$\text{* cartésien} \quad \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

et après quelques manipulations (à faire en exercice)

$$\text{* cylindrique} \quad \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

$$\text{* sphérique} \quad \nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}$$

VII. Applications et exemples

1. Équation de Newton

C'est la classique $\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, une équation différentielle vectorielle qu'en général on résout pour obtenir $\vec{r}(t)$ quand on connaît la force \vec{F} agissant sur l'objet (particule) de masse m . En cartésiens, cette équation se décompose très simplement

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z$$

Cette forme très simple nous laisse *souhaiter* qu'en système curviligne, disons cylindrique, nous aurions

$$\left. \begin{array}{l} m \frac{d^2\rho}{dt^2} = F_\rho \\ m \frac{d^2\varphi}{dt^2} = F_\varphi \end{array} \right\} \text{FAUX}$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z$$

où les deux premières équations sont complètement fausses. Il faut agir de façon plus systématique et nous avons développé tout ce qu'il faut pour y arriver. Il y a un *petit* problème additionnel. On peut imaginer sans trop de difficulté ce que signifie F_ρ , mais que signifierait F_φ dans une équation où le côté gauche ci-dessus n'a même pas les dimensions d'une force!

En fait, la plupart des calculs ont déjà été faits en **III.B.5.b** et en **V.1**.

Nous cherchons à calculer l'accélération, i.e. $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Le point de départ est donc ici le vecteur position lui-même (un cas simple). En **V.1**, nous avons déjà calculé que, dans la base et les coordonnées cylindriques

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\hat{e}_\varphi + \ddot{z}\hat{k}$$

ce qui nous donne le côté gauche de l'équation de Newton (au facteur m près). Il reste à transformer le côté droit, i.e. à transformer le vecteur force pour l'exprimer selon ses composantes cylindriques. Nous savons que la formule générale est

$$F_i = \frac{1}{h_i} \left[\frac{\partial x}{\partial q_i} F_x + \frac{\partial y}{\partial q_i} F_y + \frac{\partial z}{\partial q_i} F_z \right]$$

En système cylindrique, cela nous donnera simplement

$$\begin{aligned}
 F_\rho &= \frac{1}{1} \left[\frac{\partial x}{\partial \rho} F_x + \frac{\partial y}{\partial \rho} F_y + \frac{\partial z}{\partial \rho} F_z \right] \\
 &= \cos \varphi F_x + \sin \varphi F_y \\
 F_\varphi &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial x}{\partial \varphi} F_x + \frac{\partial y}{\partial \varphi} F_y + 0 \right] \\
 &= -\sin \varphi F_x + \cos \varphi F_y \\
 F_z &= F_z
 \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\therefore \vec{F} = \hat{e}_\rho F_\rho + \hat{e}_\varphi F_\varphi + \hat{k} F_z$$

où tous les F_i sont définis avec les mêmes dimensions de force.

Égalant les deux côtés de l'équation vectorielle nous permet d'identifier, composante par composante cylindrique

$$\begin{aligned}
 m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) &= F_\rho = \cos \varphi F_x + \sin \varphi F_y \\
 m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) &= F_\varphi = -\sin \varphi F_x + \cos \varphi F_y \\
 m\ddot{z} &= F_z
 \end{aligned}$$

Il vaut la peine d'étudier chacune de ces équations pour en voir la signification physique.

* L'équation en ρ se réécrit comme

$$m\ddot{\rho} = F_\rho + m\rho\dot{\varphi}^2$$

La force en ρ , F_ρ , agit directement sur l'accélération $\ddot{\rho}$, d'ailleurs la trigonométrie est simple qui la relie à F_x et F_y , elle est effectivement la composante de \vec{F} selon la direction donnée par \hat{e}_ρ . Là n'est pas le problème. Il y a une *force additionnelle* $m\rho\dot{\varphi}^2$ qui agit aussi sur $\ddot{\rho}$, le dessin ci-contre explique facilement sa source. Elle origine d'un comportement giratoire du mouvement puisqu'elle est proportionnelle à $\dot{\varphi}^2$. Elle est clairement le résultat de l'effet centrifuge relié à tout mouvement tournant, comme toute personne faisant tourner un objet au bout d'une corde a eu l'occasion de le constater, elle n'est pas une force extérieure agissant sur le système. Cette force est aussi proportionnelle à ρ et là aussi, l'expérience nous confirme que la force le long de la corde croît avec la longueur de la corde pour une même vitesse angulaire $\dot{\varphi}$. On constate que l'équation ne fait que refléter la réalité : tout mouvement en φ , une rotation, aura nécessairement un *effet centrifuge* en ρ , nous le savons tous!

* L'équation en φ peut se récrire, multipliant les deux côtés par ρ , comme

$$m \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\varphi}) \equiv \frac{d}{dt}(m\rho \rho \dot{\varphi}) = \rho F_\varphi \quad \text{a les dimensions d'un torque}$$

Géométriquement, $\rho\dot{\varphi}$ est la vitesse (linéaire) tangentielle au bout du *bras* de longueur ρ . Il est clair que $m\rho \rho \dot{\varphi}$ est la valeur du moment cinétique $\vec{l} = m\vec{r} \times \vec{v}$ dû au mouvement (tournant) dans le plan xOy . Ici

$$|\vec{l}| = m|\rho \hat{e}_\rho \times \rho \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi| = m(\rho^2 \dot{\varphi})$$

L'équation se comprend donc immédiatement :

$$\text{Taux de variation dans le temps du moment cinétique} = \text{Torque (ou couple)}$$

C'est l'équation bien connue

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{T}$$

qui est l'équivalent pour le mouvement tournant de l'équation de Newton écrite sous la forme

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \text{où } \vec{p} \text{ est la quantité de mouvement (linéaire } = m\vec{v}\text{)}.$$

2. Dérivée totale d'un champ scalaire p/r au temps

Certaines quantités physiques (scalaires) comme la pression peuvent varier d'un point à l'autre et aussi varier dans le temps. Un exemple est la pression atmosphérique, p . Nous écrivons donc, pour la décrire, $p = p(x, y, z, t) \equiv p(x_i, t)$ ou $p = p(q_j, t)$.

Clairement, la pression dépend de ces quatre variables/paramètres de façon indépendante: le climat varie d'un point à l'autre, mais aussi dans le temps. La différentielle de cette quantité est donc

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz + \frac{\partial p}{\partial t} dt$$

Imaginons que nous ayons besoin d'évaluer comment cette quantité varie au total dans le temps le long d'une trajectoire choisie. Cette trajectoire sera décrite par

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

Le taux total de variation de p dans le temps prend donc ici un sens, puisque t reste, sur une trajectoire, le seul paramètre/variable indépendant puisqu'alors

$$p = p(x(t), y(t), z(t), t)$$

Le taux total de variation est donc

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial p}{\partial t}$$

Ici les $dx/dt, \dots$ ont un sens (composantes de la vitesse \vec{v} sur la trajectoire) parce que nous sommes sur une trajectoire. On voit bien que cette expression peut s'écrire

$$\frac{dp}{dt} = \nabla p \cdot \vec{v} + \frac{\partial p}{\partial t}$$

3. Équation de conservation

Nous reprenons l'exemple de **V.3**, en permettant des fluctuations temporelles. Intuitivement, une fois l'eau sortie de la chantepleure, sa propagation dans l'espace conserve la quantité totale d'eau, au sens où l'eau n'est pas détruite ni créée dans cette propagation. Cependant l'éclaboussement garantit que la densité, D , d'eau varie dans l'espace et possiblement dans le temps. En fait, une mesure raisonnable du déplacement de l'eau est le débit local. On le décrit par la quantité d'eau qui traverse une surface par unité de temps, un débit. Il a évidemment une direction (celle de l'eau en mouvement), c'est donc un vecteur que nous notons ici \vec{J} . Les dimensions de D sont (masse)/(volume), alors que celles de \vec{J} sont (masse)/(unité de surface·temps). Imaginons un volume infinitésimal autour d'un point $P(x, y, z)$. Dans ce petit volume, la densité peut fluctuer

selon les fluctuations du jet d'eau lui-même la quantité $\nabla \cdot \vec{J}$ mesure la génération ou la perte nette de débit. Comme la quantité d'eau est clairement conservée, s'il y a gain de débit dans notre volume élémentaire, c'est que de l'eau qui était déjà dans dV est expulsée du volume, et la densité locale diminuera alors selon un taux correspondant au gain de débit. Cette conservation nette de l'eau se traduit donc par l'équation

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} = 0$$

C'est l'équation de conservation de la quantité d'eau. L'équation est différentielle, donc locale, i.e. elle s'applique à un volume infinitésimal. Si la densité locale augmente, c'est que le débit entrant est plus grand que le débit sortant et qu'il y a donc perte nette de débit. Dans ce cas,

$$\frac{\partial D}{\partial t} > 0 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \vec{J} < 0$$

et vice-versa. Il est (TRÈS) important de noter que l'équation est dimensionnellement cohérente, ses deux termes ayant les dimensions (physiques) de (masse)/(volume·temps).

Cette équation de conservation est très générale et s'applique sous une forme ou l'autre à toutes les quantités conservées globalement, comme la charge électrique,.... S'il n'y a pas de variation temporelle de la densité, on parlera parfois de régime permanent, alors la densité ne varie pas dans le temps, donc $\partial D / \partial t = 0$, et il s'ensuit que $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ aussi.

4. Électrostatique

L'équation de base de l'électrostatique est

$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$ où $\vec{E}(\vec{r})$ est ici le champ électrique et $\rho(\vec{r})$ la densité volumique de charges (dans un système d'unités approprié). Le problème de la charge ponctuelle comporte une difficulté technique que nous ne voulons pas soulever ici (sa densité est infinie en un point et nulle ailleurs). Imaginons à la place une densité uniforme et sphérique de charge à l'intérieur d'une sphère de rayon R . À l'intérieur, la densité est partout égale à ρ_0 . Comme le volume de la sphère est $\frac{4\pi}{3} R^3$, la charge totale est

$Q = \frac{4\pi}{3} \rho_0 R^3$. Comme le système a une symétrie sphérique, il est intéressant d'utiliser des coordonnées qui ont aussi cette symétrie intégrée dans leur définition. Nous utiliserons les coordonnées sphériques. Comme la sphère paraît la même sous toute orientation, il est clair qu'aucune quantité physique qui lui est reliée ne peut dépendre de l'orientation, donc ne peut dépendre des angles mesurant cette orientation. Ainsi

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \vec{E}(r, \theta, \varphi) = \vec{E}(r)$$

Comme aucune dépendance sur l'orientation n'est possible, il est aussi vrai que seule la composante E_r apparaît, i.e. le champ a toujours une direction perpendiculaire à une surface sphérique centrée sur notre densité de charge. De plus, E_r ne dépend que de r comme nous l'avons déjà vu. Même si l'expression pour la divergence est un peu plus *lourde* en système sphérique qu'en système cartésien, ici nous sommes gagnants. En effet

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\partial E_r(r)}{\partial r} + \frac{2E_r(r)}{r} = \frac{dE_r(r)}{dr} + \frac{2E_r(r)}{r}$$

À l'extérieur de la densité de charge (là où $r > R$), cette quantité = 0, donc

$$\frac{dE_r(r)}{dr} + \frac{2E_r(r)}{r} = 0 \Rightarrow E_r(r) = \frac{C}{r^2}$$

la solution de cette équation différentielle étant triviale. Comme il s'agit d'une équation différentielle, i.e. qui implique des taux de variation, la solution n'est évidemment définie qu'à une (parce que du premier ordre) constante près. Il nous reste à déterminer la constante par argument physique, i.e. à relier sa valeur à la charge qui génère le champ. Pour ce faire, nous utilisons ici le théorème de Gauss (pas la seule manière, mais la plus simple ici)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_V \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV \equiv \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

Le volume V sera celui de la sphère contenant la densité de charge et la surface S sera la surface de cette sphère, surface qui marque la frontière entre l'espace libre et l'espace chargé. Il est évident que le côté droit donne la charge totale, $Q = \frac{4\pi}{3} \rho_0 R^3$. À gauche, $d\vec{a}$ est normal à la surface, donc parallèle à $\vec{E}(r)$ qui, lui aussi, n'a que la composante $E_r(r)$. Ainsi

$$\vec{E} \cdot d\vec{a} = E_r(r) da \equiv E_r(R) da,$$

puisque nous évaluons toute cette intégrale sur la surface située à $r = R$. L'expression pour l'élément de surface est

$$da = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \equiv R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Puisque $E_r(r) = E_r(R)$ est constant sur toute la surface, l'intégrale est triviale à faire

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = E_r(R) \cdot R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi E_r(R) \cdot R^2$$

Les deux côtés du théorème de Gauss étant égaux, cela donne

$$4\pi E_r(R) \cdot R^2 = Q \Rightarrow E_r(R) = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Égalant l'expression générale plus haut évaluée à $r = R$, avec ce dernier résultat permet d'identifier la constante C

$$\frac{C}{R^2} = \frac{Q}{4\pi R^2} \Rightarrow C = \frac{Q}{4\pi}$$

qui, replacée dans l'expression générale donne

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad \text{et} \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{e}_r$$

Aucune surprise. Évidemment, le théorème de Gauss permet aussi de calculer le champ à l'intérieur de la densité de charge. Ce petit problème est laissé au lecteur.

5. Magnétostatique

L'équation de base en magnétostatique est

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r})$$

où $\vec{j}(\vec{r})$ est une densité (par unité de surface) de courant électrique (unités appropriées). Afin de comprendre la signification de base de cette équation, imaginons le cas le plus simple, celui d'un courant le long d'une droite sans fin (approximant un long fil tendu). Si on identifie le conducteur avec l'axe Oz du système cylindrique, on se convainc rapidement que rien de ce qui dépend physiquement de ce courant ne peut changer si on

varie l'angle φ , toutes ses directions étant physiquement équivalentes. On parle alors de symétrie cylindrique. D'autre part, puisque le fil est présumé infiniment long, il est clair que toutes les positions le long du fil sont totalement équivalentes et rien de physiquement significatif ne peut dépendre de cette coordonnée. Résumant, nous avons

$$\vec{j}(\vec{r}) = j\hat{k}, \quad j \text{ étant une constante (par construction)}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\rho, \varphi, z) = \vec{B}(\rho) \quad (\text{par déduction})$$

Puisque

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \rho\hat{e}_\varphi & \hat{k} \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ B_\rho & \rho B_\varphi & B_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\rho\hat{e}_\varphi \left(-\frac{\partial B_z}{\partial\rho} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial(\rho B_\varphi)}{\partial\rho} \right) \right] \end{aligned}$$

où nous n'avons gardé que les termes contenant des dérivées p/r à ρ qui est la seule variable dont peut dépendre le champ. Nous aurons, remplaçant dans l'équation différentielle

$$\frac{\partial B_z}{\partial\rho} = 0 \Rightarrow B_z = B_{z0} = \text{const}$$

et
$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho B_\varphi)}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho} B_\varphi + \frac{\partial}{\partial\rho} B_\varphi = j$$

Clairement l'équation ne nous donne aucun renseignement sur B_{z0} ni aucune manière d'en fixer la valeur. Nous devons donc poser cette valeur comme étant nulle, puisqu'une valeur non nulle pourrait être modifiée arbitrairement, changeant le champ avec chaque observateur. Clairement cela n'est pas acceptable. Nous n'avons aucune information sur B_ρ non plus, donc aucune façon d'en fixer la valeur physique (ce qui sera confirmé plus loin). Ceci n'est pas acceptable, le champ magnétique ne dépend pas d'un observateur qui en changerait arbitrairement des composantes. La seule solution physiquement acceptable est que $B_\rho = 0$,

Pour B_φ , nous devons d'abord résoudre l'équation différentielle ci-dessus. Plaçons nous d'abord en dehors du conducteur. Le courant est alors zéro en ces points et l'équation se réduit à

$$\frac{1}{\rho} B_\varphi + \frac{\partial}{\partial\rho} B_\varphi \equiv \frac{1}{\rho} B_\varphi + \frac{d}{d\rho} B_\varphi = 0$$

$$\therefore \frac{dB_\varphi}{B_\varphi} = -\frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow B_\varphi = \frac{b}{\rho} \quad \text{où } b \text{ est une constante}$$

Il reste à fixer la valeur de la constante b en l'exprimant en fonction de ce qui physiquement cause ce champ, le courant. Il est pratique ici d'utiliser le théorème de Stokes pour y arriver. Intégrons d'abord chaque côté de notre équation originale sur la surface de la section (circulaire de rayon R) du conducteur, là où $\rho = R$

$$\int_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{a} \equiv I$$

où I est le courant total dans le conducteur, égal, par définition, à l'intégrale sur la surface traversée par le courant par unité de surface! À gauche de l'équation, nous appliquons le théorème de Stokes

$$\int_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = I$$

Ici, la courbe fermée C est clairement la circonférence (à $\rho = R$) de la section du conducteur sur laquelle circule $d\vec{l}$ qui est clairement $d\vec{l} = \hat{e}_\varphi dl$. Ainsi, sur cette courbe C , le champ magnétique a une amplitude constante, puisque à $\rho = R$ tout le temps. De plus, seule la composante B_φ survit au produit scalaire avec $d\vec{l}$ et nous avons (confirmant l'arbitraire de B_z et de B_ρ)

$$\therefore B_\varphi(R) = \frac{I}{2\pi R} = \frac{b}{R} \Rightarrow b = \frac{I}{2\pi}$$

Ainsi $\vec{B}(\vec{r}) = \hat{e}_\varphi \frac{I}{2\pi\rho}$

Tout simplement, le champ \vec{B} trace des cercles autour du conducteur et ces cercles sont en densité décroissante à mesure qu'on s'éloigne du conducteur (comme $1/\rho$).

Ces quelques exemples tirés de problèmes physiques nous permettent d'apprécier l'avantage qu'il y a à utiliser les coordonnées curvilignes.

De façon générale, les lois physiques prennent la forme d'équations différentielles. Le but de l'opération de transformation est de mettre cette équation sous une forme séparable et la meilleure chance d'y arriver est d'utiliser un système de coordonnées dont les symétries reflètent celles du système physique étudié.

Ici, nous avons utilisé les théorèmes de Gauss et de Stokes pour introduire les conditions limites (dues aux sources) dans la solution des équations différentielles, permettant ainsi d'y fixer sur des bases physiques la valeur des constantes générées par l'intégration de ces équations.

6. Équation d'onde

Il n'est pas possible de ne pas dire un mot sur l'équation d'onde (limitons-nous à une onde scalaire). Elle s'écrit, en dehors de ses sources,

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{équation d'onde 3-D}$$

où $\psi(\vec{r}, t)$ mesure l'amplitude de l'onde dont nous ne spécifions pas ici la nature. Ce pourrait être la pression dans une onde sonore, par exemple.

* Onde plane

La solution en coordonnées cartésiennes est particulièrement utile dans la description d'une onde se propageant dans une seule direction. Supposons avoir choisi cette direction comme correspondant à un des axes cartésien, disons Oz . Dans ce cas, l'onde ne dépendra que de z et de t et l'équation se réduira à

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{équation d'onde 1-D}$$

La solution générale est simple et peut s'écrire comme

$$\psi(z,t) = A \sin(kz \mp \omega t + \delta_s)$$

ou $\psi(z,t) = B \cos(kz \mp \omega t + \delta_c)$.

Le signe (-) décrit une onde se dirigeant vers la droite et le signe (+) vers la gauche.

De façon générale, on peut écrire $\psi(z,t) = C_1 e^{i(kz - \omega t)} + C_2 e^{i(kz + \omega t)}$

L'important est le signe entre le terme spatial et le terme temporel dans l'argument; un signe global peut toujours être inclus dans les coefficients.

On vérifie, par simple substitution dans l'équation, que ces solutions (différentes façons d'écrire la même chose) satisfont l'équation, à condition que soit satisfaite la *relation de dispersion*

$$\omega^2 = k^2 c^2$$

Ici, $\omega = 2\pi\nu$ est la fréquence *angulaire* de l'onde, là où ν est sa fréquence *ordinaire* et c est la vitesse de cette onde monochromatique (une seule fréquence présente). La quantité $k = \pm \omega / c$ est le *vecteur ou nombre d'onde* avec $k > 0$ (< 0) selon que l'onde se propage vers les z croissants (décroissants).

C'est l'onde plane bien connue. Ici elle se propage selon la direction z et son front d'onde est l'ensemble (infini) du plan xOy . Apparemment aucune surprise. En fait l'onde plane n'existe pas dans la nature (ça c'est peut-être une surprise). En effet, une simple observation des fonctions ci-dessus indique clairement que ces ondes s'étendent de -l'infini à +l'infini avec une amplitude constante. Cela demande une énergie infinie que l'Univers lui-même ne possède pas! L'onde plane est cependant très utilisée à cause de sa simplicité, mais on en limite alors la portée, disons de $-a$ à $+a$, ce qui demande une énergie finie.

En fait, on note qu'une tranche d'*épaisseur* $\Delta l = z_2 - z_1$ contient une quantité d'énergie qui ne dépend pas de l'endroit où se trouve cette tranche. Si on la voit comme une tranche se propageant, on voit que l'énergie est conservée localement.

* Onde radiale

On verra assez souvent une onde émise par une source beaucoup plus petite que l'espace dans lequel l'onde évolue. Cette source pourra alors être vue comme un point, un point source, disons à l'origine. En général, l'onde ainsi émise l'est dans toutes les directions, pas seulement selon une direction : la voix du prof est entendue par tous les étudiants, pas seulement ceux de la 3e rangée ou ceux à droite. En général, l'onde se propagera dans toutes les directions, mais avec une amplitude qui varie avec la direction (l'angle d'émission). Pour simplifier ici, supposons qu'il n'y a pas de dépendance angulaire, l'onde est alors émise avec la même amplitude dans toutes les directions. Ainsi son amplitude ne dépendra que de la distance mesurée à partir de la source, c'est précisément ce que mesure la coordonnée r du système sphérique et l'amplitude devient

$$\psi(\vec{r}, t) \rightarrow \psi(r, t)$$

Remplaçant dans l'équation d'onde en coordonnées sphériques, nous ne gardons que les termes du Laplacien qui ne donnent pas un résultat identiquement nul du fait que l'amplitude ne dépend que de la variable radiale. Cela donne

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(r, t)}{\partial t^2} = 0$$

Explicitant, nous obtenons

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(r,t)}{\partial t^2} = 0$$

La façon la plus simple de résoudre s'appelle la méthode de séparation de variables. Son utilisation est assez simple ici pour être comprise même par ceux qui n'ont jamais vu cette méthode. On écrit

$$\psi(r,t) = \phi(r)T(t)$$

On remplace cette *solution* dans l'équation et on divise (par la gauche) par

$\psi(r,t) = \phi(r)T(t)$. Cela donne

$$\frac{1}{\phi(r)} \left[\frac{d^2 \phi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} \right] - \frac{1}{c^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = 0$$

On note deux choses. D'abord, les dérivées sont maintenant des dérivées ordinaires puisqu'elles n'opèrent que sur des fonctions d'une seule variable. Ensuite le premier terme contient toute et seulement la dépendance en r , alors que le deuxième terme fait la même chose pour la dépendance en t . Il s'ensuit, puisque r et t sont indépendants, que l'équation ne peut être satisfaite que si, à l'exception du signe, chacun des deux termes est égal à une constante, la même pour les deux termes et que nous noterons k^2 . Nous pouvons donc décomposer l'équation différentielle en deux

$$-\frac{1}{c^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = k^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -k^2 c^2 T(t) \equiv -\omega^2 T(t)$$

et l'équation est trivialement satisfaite $k^2 - k^2 \equiv 0$.

Dans les deux cas, il s'agit de l'équation harmonique et sa solution générale s'écrit comme

$$T(t) = A \sin(\omega t) \text{ ou } B \cos(\omega t) \text{ ou } (C e^{\pm i \omega t})$$

L'autre équation est

$$\frac{1}{\phi(r)} \left[\frac{d^2 \phi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} \right] = -k^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \phi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} = -k^2 \phi(r)$$

Pour la résoudre, il est avantageux de remplacer $\phi(r) = \frac{u(r)}{r}$, auquel cas l'équation devient

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} = -k^2 u(r)$$

encore une équation harmonique dont la solution est du type sinusoïdal. Adoptons la solution de type sin, nous aurons alors

$$u(r) = A \sin(kr)$$

$$\Rightarrow \phi(r) = \frac{A \sin(kr)}{r}$$

Le comportement temporel de l'onde décrite par $\psi(r,t)$ est harmonique (sinusoïdale). Le comportement spatial est aussi sinusoïdal, mais avec un facteur $1/r$ dont le rôle physique est important. Nous avons ici ce qui est communément appelé une onde radiale. C'est assez évident que cette onde issue d'un point situé à l'origine se propage radialement dans toutes les directions également (aucune dépendance angulaire), d'où son nom d'onde radiale et que son amplitude diminue à mesure que l'onde s'éloigne, de façon à conserver l'énergie. En fait, elle garde ce nom même dans les situations où sa

distribution angulaire n'est pas uniforme (dépendance sur les angles). Imaginons une série de couronnes sphériques successives de même épaisseur. Il est physiquement important de vérifier, pour une onde physique, que l'énergie ondulatoire dans chaque couronne est la même, puisque chaque couronne peut être vue comme la succession dans le temps de la couronne précédente. Nous souhaitons évidemment une conservation de l'énergie! L'énergie d'une onde n'est jamais donnée par son amplitude, $\psi(\vec{r}, t)$, mais est *toujours* proportionnelle à son intensité $I(r, t) = |\psi(r, t)|^2$ (la densité d'énergie est proportionnelle à l'intensité). Dans une couronne sphérique allant de R_1 à R_2 , l'énergie E sera donc proportionnelle à

$$E \sim \int_{R_1}^{R_2} |\psi(r, t)|^2 dV = |A|^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sin^2 kr}{r^2} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$E \sim 4\pi |A|^2 \int_{R_1}^{R_2} \sin^2 kr dr = \frac{4\pi |A|^2}{2k} [(R_2 - R_1) - \sin k(R_2 - R_1)]$$

Clairement, ce résultat ne dépend que de l'épaisseur de la couronne, i.e. de la distance entre R_1 à R_2 , et non de leur valeur absolue. C'est donc que deux couronnes sphériques de même épaisseur contiennent la même énergie ondulatoire, quelque soit la position de la couronne. Il y a donc conservation de l'énergie totale lorsque l'onde irradie radialement à partir de l'origine. Cette propriété vient évidemment du fait que l'amplitude varie comme $1/r$. Ce comportement où un phénomène a une amplitude décroissante avec la distance de la source est souvent appelé onde *radiale*. Puisque l'amplitude décroît comme $1/r$, il est clair que l'intensité varie comme $1/r^2$. Simultanément le volume de la couronne sphérique grandit comme r^2 avec la distance. Les deux facteurs se cancelent et permettent aux couronnes d'épaisseur égale de *contenir* la même énergie.

©Pierre Amiot, 2011.

Table des Matières

I. Situation et besoins en physique	1
A. Représentation de l'espace	1
B. Représentation des quantités physiques	3
1. Les lieux géométriques	3
i. Le point	3
ii. La courbe	4
iii. La surface	4
2. Les quantités	5
i. Les scalaires	5
ii. Les vecteurs	6
II. Autres systèmes orthogonaux et certaines propriétés	8
A. Description	8
0. Introduction	8
1. Le système cylindrique	9

2. Le système sphérique	10
B. Vecteurs unitaires et orthonormalité	12
1. Définition générale des vecteurs de base	12
2. Définition et calcul des vecteurs de base	12
a. La méthode générale	12
b. Système cartésien	13
c. Système cylindrique	13
d. Système sphérique	14
3. Un aperçu des conséquences de la variation des \hat{e}_i	16
4. Autre définition des vecteurs de base	16
5. Les facteurs d'échelle et leur rôle	17
a. Définition	17
b. Représentation des vecteurs, exemple cylindrique	18
C. Types de vecteurs	18
III. Revue des quantités en transformation	19
A. Les lieux géométriques et quantités simples	19
1. Le point	19
2. La courbe <i>ordinaire</i>	19
3. Le champ scalaire	20
IV. Transformation des quantités	21
0. Introduction	21
1. Éléments de longueur et de volume	21
a. Élément de déplacement/longueur	21
b. Élément de volume	21
2. La métrique et les h_i	22
3. Composantes des vecteurs	24
4. Champs vectoriels	27
V. Opérations différentielles sur les vecteurs en système curviligne	28
1. La dérivée totale p/r au paramètre invariant (temps)	28
2. Le gradient	29
3. La divergence d'un champ vectoriel	30
4. Le rotationnel	33
5. Le Laplacien	35
VI. Applications et exemples	36
1. Équation de Newton	36
2. Dérivée totale d'un champ p/r au paramètre invariant	38
3. Équation de conservation	38
4. Électrostatique	39
5. Magnétostatique	40
6. Équation d'onde (onde plane et onde sphérique)	42