Bab 7

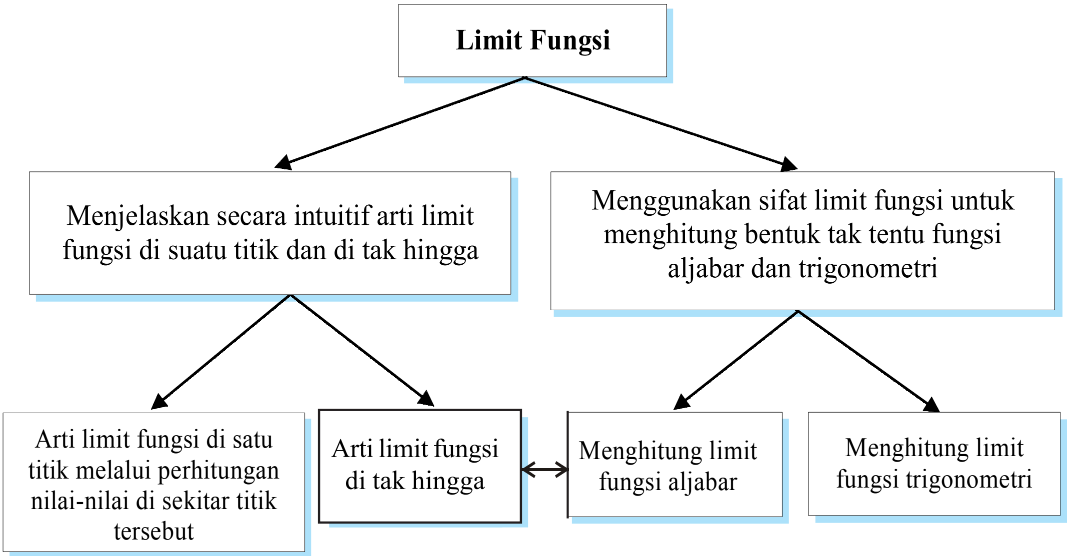
Limit Fungsi

Limit Fungsi di Suatu Titik dan di Tak Hingga ☑

Sifat Limit Fungsi untuk Menghitung Bentuk Tak Tentu Fungsi Aljabar dan Trigonometri ☑

Cobalah kamu mengambil kembang gula-kembang gula dalam sebuah tempat dengan genggaman sebanyak lima kali. Setelah dihitung, pengambilan pertama terdapat 5 bungkus, pengambilan ke dua 6 bungkus, pengambilan ke tiga 5 bungkus, pengambilan ke empat 7 bungkus, dan pengambilan kelima 6 bungkus. Jika dirata-rata pada pengambilan pertama, ke dua, sampai ke lima adalah $\frac{29}{5} = 5{,}8$ dan dikatakan hampir mendekati 6. Dalam contoh sehari-hari, banyak sekali kamu temukan kata-kata hampir, mendekati, harga batas, dan sebagainya.Pengertian tersebut sering dianalogikan dengan pengertian limit. Limit merupakan konsep dasar atau pengantar dari deferensial dan integral pada kalkulus. Untuk lebih jelasnya, dalam bab ini kamu akan mempelajari konsep limit fungsi dalam pemecahan masalah.

Peta Konsep



Kata Kunci

- limit fungsi
- limit fungsi tak hingga
- limit fungsi berhingga
- limit fungsi aljabar
- limit fungsi trigonometri

A Pengertian Limit Fungsi di Suatu Titik dan di Tak Hingga

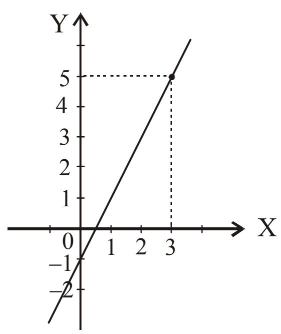
1. Limit Fungsi di Satu Titik Melalui Perhitungan Nilai-Nilai di Sekitar Titik Tersebut

Diketahui fungsi $f : R \to R$ yang ditentukan oleh $f(x) = 2x - 1$. Jika variabel x diganti dengan 3, maka $f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$. Berapakah nilai yang akan didekati $f(x)$ jika variabel x mendekati 3? Untuk menjawab persoalan ini diperlukan tabel sebagai berikut.

x	1,5	1,75	2,5	2,75	2,85	2,95	2,97	2,98	2,99	….
$f(x)$	2	2,5	4	4,5	4,7	4,9	4,94	5,96	4,98	…..

Dari tabel dapat dilihat jika x mendekati 3 dari pihak kurang dari 3, maka nilai $f(x)$ mendekati 5. Apakah nilai $f(x)$ akan mendekati 5 jika x lebih besar dari 3? Untuk menjawabnya kita lihat tabel berikut ini.

x	…..	3,01	3,10	3,25	3,50	3,50	3,75	4,25	….
$f(x)$	…..	5,02	5,20	5,50	6,00	6,50	6,50	7,50	…..



Dari tabel dapat dilihat bahwa jika x mendekati 3 dari pihak lebih dari 3 maka nilai $f(x)$ mendekati 5, sehingga dikatakan bahwa fungsi $f(x) = 2x - 1$ mempunyai limit 5 untuk x mendekati 3 dan ditulis "jika $f(x) = 2x - 1$, maka $\lim\limits_{x \to 3} 2x - 1 = 5$". Grafiknya dapat kamu amati pada gambar di samping.

Dari penjelasan di atas, kamu juga dapat menentukan nilai dari $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$. Nilai $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ untuk x mendekati 2 dapat disajikan dengan tabel sebagai berikut.

x	1,75	1,85	1,95	1,97	1,99	1,999	…	2	…	2,001	2,01	2,1	2,2	2,9	3,1
$f(x)$	3,75	4,85	4,95	4,97	4,99	4,999	…	$\frac{0}{0}$	…	5,001	5,01	5,1	5,2	5,9	6,1

Dari tabel dapat dilihat jika variabel $x = 2$, maka $f(2) = \frac{0}{0}$ yaitu suatu bentuk tak tentu, tetapi jika x mendekati 2 dari arah kiri maka nilai $f(x)$ mendekati 5. Demikian juga jika x mendekati 2 dari arah kanan maka nilai $f(x)$ mendekati 5.

Oleh karena itu dapat ditulis:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$$

Dari uraian di atas, secara intuitif limit dapat didefinisikan sebagai berikut.

> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ artinya jika x mendekati a (tetapi $x \neq a$) maka $f(x)$ mendekati nilai L.

2. Sifat-Sifat Limit Fungsi

Apabila k suatu konstanta, f dan g merupakan fungsi-fungsi yang mempunyai limit untuk $x \to a$, $a \in R$ maka berlaku:

a. $\lim_{x \to a} k = k$

b. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

c. $\lim_{x \to a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \to a} f(x)$

d. $\lim_{x \to a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

e. $\lim_{x \to a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

f. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, untuk $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

g. $\lim_{x \to a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^n$

Untuk lebih memahami tentang sifat-sifat limit fungsi, pelajarilah contoh soal berikut.

Contoh soal

Diketahui $f(x) = 2x - 5$ dan $g(x) = 3x^2 + 4x$. Tentukan:

1. $\lim_{x \to 3} f(x) + \lim_{x \to 3} g(x)$
2. $\lim_{x \to 3} \{f(x) + g(x)\}$

Penyelesaian

1. $$\begin{aligned} \lim_{x \to 3} f(x) + \lim_{x \to 3} g(x) &= \lim_{x \to 3} (2x - 5) + \lim_{x \to 3} (3x^2 + 4x) \\ &= 2 \cdot 3 - 5 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \\ &= 6 - 5 + 3 \cdot 9 + 12 \\ &= 1 + 27 + 12 = 40 \end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{x \to 3} \{f(x)+g(x)\} = \lim\limits_{x \to 3} \{(2x-5)+(3x^2+4x)\}$

$$= \lim_{x \to 3} (3x^2+6x-5)$$
$$= 3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 - 5$$
$$= 3 \cdot 9 + 18 - 5$$
$$= 27 + 18 - 5 = 40$$

3. Limit Fungsi di Tak Berhingga

Diketahui $f(x) = \frac{2}{x}$. Jika dibuat tabel untuk x bilangan sebagai berikut.

x	1	2	3	4	....	10	....	100	....	200	...
$f(x)$	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	....	$\frac{1}{5}$	....	$\frac{1}{50}$	....	$\frac{1}{1.000}$	...

Apabila nilai x makin besar, ternyata nilai $f(x)$ makin lama makin kecil. Apabila x besar sekali atau x mendekati tak berhingga, ditulis $x \to \infty$, maka nilai $\frac{2}{x}$ akan mendekati nol, dikatakan limit dari $\frac{2}{x}$ untuk x mendekati tak berhingga adalah nol dan ditulis:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2}{x} = 0$$

Sekarang perhatikan contoh berikut ini.

Hitunglah $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x}{x+1}$.

Untuk menjawab limit tersebut, dapat dicoba dengan tabel berikut ini.

x	1	2	3	....	10	....	100	....	1.000	...
$\frac{2x}{x+1}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	....	$\frac{20}{11}$	....	$\frac{200}{101}$	....	$\frac{2.000}{1.001}$	...

Apabila x menjadi semakin besar, maka nilai $\frac{2x}{x+1}$ akan mendekati 2. Dikatakan bahwa $L = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x}{x+1} = 2$.

Limit fungsi yang berbentuk $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ dapat diselesaikan dengan cara membagi bagian pembilang $f(x)$ dan bagian penyebut $g(x)$ dengan x^n, n adalah pangkat tertinggi dari $f(x)$ atau $g(x)$ untuk setiap n bilangan positip dan a bilangan real, maka:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{a}{x^n} = 0}$$

Dari contoh itu dapat ditulis:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x+1}{x}} \qquad \text{(pembilang, penyebut dibagi } x\text{)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x}} \qquad \left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0\right)$$

$$= \frac{2}{1+0} = \frac{2}{1} = 2$$

Contoh soal

Hitunglah limit dari:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{x^2+5x-3}$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x+5}{x^2-3x+2}$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+2x+1}{5x-4}$

Penyelesaian

1. $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{x^2+5x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x-1}{x^2}}{\frac{x^2+5x-3}{x^2}} \qquad \text{(pembilang dan penyebut dibagi } x^2\text{)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}$$

$$= \frac{0-0}{1+0-0} = \frac{0}{1} = 0$$

2. $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x+5}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2-x+5}{x^2}}{\frac{x^2-3x+2}{x^2}} \qquad \text{(pembilang dan penyebut dibagi } x^2\text{)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}$$

$$= \frac{2-0+0}{1-0+0} = \frac{2}{1} = 2$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+2x+1}{5x-4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{4x^2+2x+1}{x^2}}{\frac{5x-4}{x^2}}$ (pembilang dan penyebut dibagi x^2)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{5x}{x^2}-\frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}}$$

$$= \frac{4+0+0}{0-0} = \frac{4}{0} = \infty$$

Bentuk $\frac{4}{0}$ adalah bentuk tak terdefinisi, tetapi karena angka 0 pada $\frac{4}{0}$ bukan angka nol tetapi angka yang kecil sekali sehingga suatu bilangan dibagi kecil sekali hasilnya besar sekali atau ∞.

Dari contoh-contoh diatas dapat diambil kesimpulan nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ adalah sebagai berikut.

1. Jika derajat dari pembilang $f(x)$ lebih besar daripada derajat penyebut $g(x)$, maka nilai $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.
2. Jika derajat dari pembilang $f(x)$ sama dengan derajat penyebut $g(x)$, maka nilai $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} =$ real.
3. Jika derajat dari pembilang $f(x)$ lebih kecil daripada derajat penyebut $g(x)$, maka nilai $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Untuk lebih memahami, pelajarilah contoh berikut.

Contoh soal

Hitunglah limit berikut.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2x}{x+1}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-4x}\right)$

Penyelesaian

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2x}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x(x+1)-2x(x-1)}{(x-1)(x+1)}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+3x-2x^2+2x}{x^2-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5x}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+5x}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x^2}} \text{ (pembilang dan penyebut dibagi } x^2\text{)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{5}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1+0}{1-0} = 1$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-4x}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-4x}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x})^2-(\sqrt{x^2-4x})^2}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-(x^2-4x)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-x^2+4x}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})}+\sqrt{x^2(1-\frac{4}{x})}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{4}{x}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{6}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{4}{x}}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{6}{2} = 3$$

Latihan 7.1

Kerjakan soal-soal dibawah ini dengan benar.

1. a. Gambarlah grafik $f(x) = 3x - 5$.
   b. Lengkapilah tabel berikut.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	…	0,99	1	1,001	…	1,01	1,2	1,3
$f(x) = 3x - 5$													

   c. Carilah nilai $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3x - 5$.

2. Lengkapilah tabel berikut.

x	1,0	1,1	….	1,9	1,999	2	2,001	2,002	….	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$														

3. Carilah limit-limit berikut.

   a. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x+5}{x-1}$

   c. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-2x+1}{x+3}$

   b. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+2}{x^2+x-1}$

4. Carilah limit-limit berikut.

   a. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3^x-1}{3^x+5}$

   b. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{5x^2-2}}{x}$

5. Carilah limit-limit berikut.

   a. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2+4x} - x$

   b. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2+6x} - (x-4)$

B Sifat Limit Fungsi untuk Menghitung Bentuk Tak Tentu Fungsi Aljabar dan Trigonometri

1. Menghitung Limit Fungsi Aljabar

Perhatikan fungsi $f(x) = 2x$ pada tabel di bawah ini.

x	0	1,5	1,7	2	2,5	2,6	2,75	2,85	2,95	2,98	2,999	….	3
$f(x) = 2x$	1	3	3,5	4	5	5,2	5,5	5,70	5,90	5,96	5,998	…	6

Dari tabel terlihat jika nilai x diperbesar hingga mendekati 3, maka nilai $f(x)$ mendekati 6, dikatakan bahwa limit dari $2x$ untuk x mendekati 3 adalah 6 ditulis:

$$\lim_{x \to 3} 2x = 6$$

Menentukan limit dengan cara di atas ternyata lambat dan tidak efisien. Misalkan untuk menyelesaikan $\lim_{x \to a} f(x)$, maka dapat dilakukan dengan cara yang lebih cepat dengan menggunakan rumus sebagai berikut.

1. Jika $f(a) = C$, maka nilai $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = C$
2. Jika $f(a) = \frac{C}{0}$, maka nilai $\lim_{x \to a} f(x) = \frac{C}{0} = \infty$
3. Jika $f(a) = \frac{0}{C}$, maka nilai $\lim_{x \to a} f(x) = \frac{0}{C} = 0$
4. Jika $f(a) = \frac{0}{0}$, maka nilai $\lim_{x \to a} f(x)$, maka sederhanakan atau ubahlah lebih dahulu bentuk $f(x)$ hingga menjadi bentuk (1), (2), atau (3).

Untuk lebih memahami, perhatikan contoh berikut.

Contoh soal

1. Hitunglah nilai limit-limit berikut ini.

a. $\lim_{x \to -2} (5x + 7)$

b. $\lim_{x \to 1} (2x^2 - 3)$

c. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5}{x^2 + 1}$

d. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x}{x - 3}$

e. $\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{2x + 1}$

f. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 8x + 15}{x - 3}$

Penyelesaian

a. $\lim_{x \to -2} (5x + 7) = 5(-2) + 7 = -10 + 7 = -3$

b. $\lim_{x \to 1} (2x^2 - 3) = 2 \cdot 1^2 - 3 = 2 - 3 = -1$

c. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5}{x^2 + 1} = \frac{(-1)^2 + 5}{(-1)^2 + 1} = \frac{1 + 5}{1 + 1} = \frac{6}{2} = 3$

d. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x}{x - 3} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3}{3 - 3} = \frac{9 - 6}{0} = \frac{3}{0} = \infty$

e. $\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{2x + 1} = \frac{5 - 5}{2 \cdot 5 + 1} = \frac{0}{10 + 1} = \frac{0}{11} = 0$

f. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-8x+15}{x-3} = \dfrac{3^2-8\cdot 3+15}{3-3} = \dfrac{9-24+15}{0} = \dfrac{0}{0}$

Karena nilai limit $= \dfrac{0}{0}$, maka perlu diubah lebih dahulu dengan jalan difaktorkan.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-8x+15}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-5)(x-3)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3} x-5 = 3-5=-2$$

2. Hitunglah limit-limit berikut.

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x^2-x}$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

Penyelesaian

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{1-1}{\sqrt{1}-1} = \dfrac{1-1}{1-1} = \dfrac{0}{0}$

Jadi harus diubah lebih dahulu dengan jalan dikalikan dengan sekawannya.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(\sqrt{x}-1)}\cdot\frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2-1^2}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}\\
&= \lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right) = \sqrt{1}+1 = 1+1=2
\end{aligned}$$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \dfrac{\sqrt{0+2}-\sqrt{2}}{0} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{0} = \dfrac{0}{0}$

Jadi harus diubah lebih dahulu dengan jalan dikalikan dengan sekawannya.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})}{x}\cdot\frac{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{2})^2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x+2-2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0+2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x^2-x} = \frac{1-\sqrt{0+1}}{0^2-0} = \frac{1-\sqrt{1}}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$

Jadi harus diubah lebih dahulu dengan jalan dikalikan dengan sekawannya.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x^2-x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{x+1})}{(x^2-x)}\cdot\frac{(1+\sqrt{x+1})}{(1+\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1^2-(\sqrt{x+1})^2}{(x^2-x)(1+\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-(x+1)}{(x^2-x)(1+\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-x-1}{x(x-1)(1+\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(x-1)(1+\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{(x-1)(1+\sqrt{x+1})} = \frac{-1}{(0-1)(1+\sqrt{0+1})}$$

$$= \frac{-1}{(-1)(1+1)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

3. Carilah $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, jika diketahui fungsi $f(x)$ di bawah ini.

   a. $f(x) = 2x + 3$

   b. $f(x) = 3x^2 - x$

   Penyelesaian

   a. $f(x) = 2x + 3$

   $f(x + h) = 2(x + h) + 3$

   $= 2x + 2h + 3$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2x+2h+3-(2x+3)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2x+2h+3-2x-3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 2 = 2$$

b. $f(x) = 3x^2 - x$

$$f(x+h) = 3(x+h)^2 - (x+h)$$
$$= 3(x^2 + 2xh + h^2) - x - h$$
$$= 3x^2 + 6xh + 3h^2 - x - h$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2-x-h-(3x^2-x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2-x-h-3x^2+x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2-h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{6xh}{h}+\frac{3h^2}{h}-\frac{h}{h}\right)$$
$$= \lim_{h\to 0}(6x+3h-1)$$
$$= 6x + 3\cdot 0 - 1 = 6x - 1$$

Tugas Kelompok

Buatlah kelasmu menjadi beberapa kelompok, lalu kerjakan soal-soal berikut secara berkelompok.

1. $\lim_{x\to 2}\frac{3}{x-2}\left(\frac{1}{2x^2-x-3}-\frac{2}{x^2+x}\right)$

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{1+2+3+....+x}{x^2}$

Cocokkan dengan kelompok lain adakan diskusi kelas.

Ingat!!

$S_n = \frac{1}{2}n\ \{2a + (n-1)b\}$

di mana:

S_n = jumlah n suku

a = suku pertama

b = beda (selisih suku-suku yang berurutan)

n = banyaknya suku

Latihan 7.2

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan benar.

1. Tentukan nilai limit berikut.

   a. $\lim\limits_{x \to -2} (2x + 7)$ b. $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 4x - 9)$ c. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2x - 3}{x^2 - 4x + 1}$

2. Diketahui $f(x) = \begin{cases} x - 2, \text{ untuk } x < 4 \\ x^2 + x - 7, \text{ untuk } x \geq 4 \end{cases}$

   Hitunglah nilai limit berikut.

   a. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ b. $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

3. Hitunglah nilai limit berikut ini.

   a. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$ b. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$ c. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x^2 - 6x}{x - 3}$

4. Carilah $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, jika diketahui fungsi di bawah ini.

   a. $f(x) = 3x + 2$ b. $f(x) = x^2 + 3x - 1$

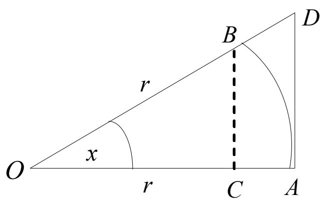
5. Tentukan nilai limit berikut ini.

   a. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2 - \sqrt{5 - x}}{x - 1}$ b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

6. Jika diketahui $f(x) = 3x - 2$ dan $g(x) = x^2 + x - 3$, tentukan:

   a. $\lim\limits_{x \to 2} \{f(x) - g(x)\}$ b. $\lim\limits_{x \to 1} \{f(x)\}^2$ c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{f(x)}$

2. Menghitung Limit Fungsi Trigonometri



Perhatikan gambar di samping. Dari gambar di samping diketahui panjang jari-jari lingkaran = r, besar sudut AOB adalah x radian, BC dan AD tegak lurus OA untuk $0 < x < \frac{1}{2}\pi$

$$\frac{BC}{OB} = \sin x \Rightarrow BC = OB \sin x$$

$$BC = r \sin x$$

$$\frac{AD}{OA} = \tan x \Rightarrow AD = OA \tan x$$

$$= r \tan x$$

$$L_{\Delta\, OBC} < L_{\text{juring } OAB} < L_{OAD}$$

$$\frac{1}{2} \cdot OC \cdot BC < \frac{1}{2} x\, r^2 < \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AD$$

$$\frac{1}{2} \cdot OC \cdot r \sin x < \frac{1}{2} x \cdot r^2 < \frac{1}{2} \cdot OA \cdot r \cdot \tan x \quad : \frac{1}{2} r^2$$

$$\frac{\frac{1}{2} OC \cdot r \cdot \sin x}{\frac{1}{2} r^2} < \frac{\frac{1}{2} x \cdot r^2}{\frac{1}{2} r^2} < \frac{\frac{1}{2} OA \cdot r \cdot \tan x}{\frac{1}{2} r^2}$$

$$\frac{OC}{r} \sin x < x < \frac{OA}{r} \tan x$$

$$\cos x \sin x < x < \frac{r}{r} \tan x$$

$$\cos x \sin x < x < \tan x \quad : \sin x$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x \to 0} \cos x < \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} < \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos 0 < \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos 0}$$

$$1 < \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{1}$$

$$1 < \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} < 1$$

Maka $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ atau $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Dari persamaan:

$$\cos x \sin x < x < \tan x \quad : \tan x$$

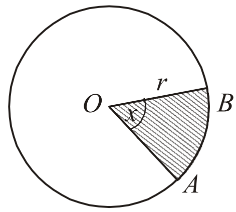
$$\frac{\cos x \ \sin x}{\tan x} < \frac{x}{\tan x} < \frac{\tan x}{\tan x}$$

$$\frac{\cos x \ \sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}} < \frac{x}{\tan x} < 1$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \cos x \cdot \sin x < \frac{x}{\tan x} < 1$$

$$\cos^2 x < \frac{x}{\tan x} < 1$$

Ingat!!



$$\text{Luas juring} = \frac{x}{2\pi} \pi r^2$$

$$= \frac{1}{2}\ x\ r^2$$

$$\lim_{x\to 0} \cos^2 x < \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} < 1$$

$$1 < \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} < 1$$

Maka $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$ atau $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

Dengan cara yang sama didapat rumus:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{ax}{\sin ax} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{ax}{\tan ax} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$$

Untuk lebih memahami tentang limit fungsi trigonometri, perhatikan contoh berikut.

Contoh soal

1. Carilah nilai limit berikut.

   a. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x}$

   b. $\lim_{x\to 0} \frac{5x}{3\sin 3x}$

   c. $\lim_{x\to 0} \frac{4\tan 5x}{3x}$

   d. $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\tan 4x}$

   Penyelesaian

   a. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x} \cdot \frac{2x}{2x}$

   $= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2x}{3x}$

   $= 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

   b. $\lim_{x\to 0} \frac{5x}{3\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{3\sin 3x} \cdot \frac{3x}{3x}$

   $= \lim_{x\to 0} \frac{3x}{3\sin 3x} \cdot \frac{5x}{3x}$

   $= \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{5x}{3x}$

   $= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{9}$

c. $\lim_{x\to 0} \frac{4\tan 5x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\ \tan\ 5x}{3x} \cdot \frac{5x}{5x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{4\tan 5x}{5x} \cdot \frac{5x}{3x}$

$= 4 \cdot 1 \cdot \frac{5}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$

d. $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\tan 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\tan 4x} \cdot \frac{4x}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{\tan 4x} \cdot \frac{2x}{4x}$

$= 1 \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

2. Carilah limit berikut.

a. $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin 5x}{\tan 2x}$

c. $\lim_{x\to 0} 2x \cdot \cot x$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{3\tan 4x}{\sin 6x}$

Penyelesaian

a. $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin 5x}{\tan 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 5x}{\tan 2x} \cdot \frac{2x}{2x} \cdot \frac{5x}{5x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 5x}{5x} \cdot \frac{2x}{\tan 2x} \cdot \frac{5x}{2x}$

$= 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{2} = 5$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{3\tan 4x}{\sin 6x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\tan 4x}{\sin 6x} \cdot \frac{4x}{4x} \cdot \frac{6x}{6x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{3\tan 4x}{4x} \cdot \frac{6x}{\sin 6x} \cdot \frac{4x}{6x}$

$= 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{4}{6} = 2$

c. $\lim_{x\to 0} 2x \cdot \cot x = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\tan x}$

$= \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{x}{\tan x} = 2 \cdot 1 = 2$

Ingat!!

$\tan x \cot x = 1$

3. Carilah limit berikut.

a. $\lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos 2x}{x^2}$

c. $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

b. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{x-\frac{\pi}{4}}$

Penyelesaian

a. $$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos 2x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\{1-(1-2\sin^2 x)\}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2(1-1+2\sin^2 x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2(2\sin^2 x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2 x}{x^2}$$

$$= 4\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$= 4\cdot 1^2 = 4$$

> **Ingat!!**
>
> cot $2x = 1 - 2\sin^2 x$

b. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{x-\frac{\pi}{4}}$$

misal $y = x - \frac{\pi}{4}$

$x = y + \frac{\pi}{4}$

untuk $x \to \frac{\pi}{4}$, maka $y = 0$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\cos 2(y+\frac{\pi}{4})}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\cos(2y+\frac{\pi}{2})}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{(\cos 2y\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\sin 2y\cdot\sin\frac{\pi}{2})}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{(\cos 2y\cdot 0-\sin 2y\cdot 1)}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{(0-\sin 2y)}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{-\sin 2y}{y}\cdot\frac{2y}{2y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{-\sin 2y}{2y}\cdot\frac{2y}{y}$$

$$= -1\cdot 2 = -2$$

> **Ingat!!**
>
> $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$
> $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

c. $$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{1}{2}\{(x+h)+x\}\cdot\sin\frac{1}{2}\{(x+h)-x\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{1}{2}h)\cdot\sin\frac{1}{2}h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{1}{2}h\right)\sin\frac{1}{2}h}{2 \cdot \frac{1}{2}h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{1}{2}h\right) \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}$$

$$= \cos\left(x + \frac{1}{2} \cdot 0\right) \cdot 1$$

$$= \cos x$$

Ingat!!

$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B)$

$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cdot \sin \frac{1}{2}(A - B)$

Latihan 7.3

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan benar.

1. Carilah limit berikut.

   a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{5x}$

   b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{2\sin x}$

   c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6\tan x}{4x}$

   d. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{7x}{5\sin 5x}$

2. Carilah limit berikut.

   a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin 5x}{3\sin 2x}$

   b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4\sin 2x}{\tan 4x}$

   c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 8x}{4\sin 4x}$

   d. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3\tan 2x}{2\tan 3x}$

3. Tentukan nilai dari:

   a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\sin 3x}{\tan^2 x}$

   b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \frac{4}{3}x}{3x}$

4. Hitunglah nilai dari:

   a. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} \dfrac{1 + \cos 2x}{\cos x}$

   b. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}\pi} \dfrac{\tan x - 1}{\cos 2x}$

5. Hitunglah nilai dari:

   a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2}$

   b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x \ \sin x}{x^2}$

Rangkuman

1. Pengertian limit

   Limit sering dikatakan sebagai nilai pendekatan.

2. Limit tak berhingga

   Untuk mengerjakan limit menuju tak berhingga berbentuk $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ berlaku sebagai berikut.

   a. Jika derajat dari pembilang $f(x)$ lebih besar daripada derajat penyebut $g(x)$, maka nilai $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ adalah ∞.

   b. Jika derajat dari pembilang $f(x)$ sama dengan derajat penyebut $g(x)$, maka nilai $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ adalah real.

   c. Jika derajat dari pembilang $f(x)$ lebih kecil daripada derajat penyebut $g(x)$, maka nilai $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ adalah 0.

3. Limit berhingga

   Untuk mengerjakan limit menuju berhingga berbentuk $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ berlaku sebagai berikut.

   a. Jika $f(a) = C$, maka nilai $\lim\limits_{x\to a} f(x) = C$.

   b. Jika $f(a) = \dfrac{C}{0}$, maka nilai $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

   c. Jika $f(a) = \dfrac{0}{C}$, maka nilai $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

   d. Jika $f(a) = \dfrac{0}{0}$, maka nilai $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ harus diubah lebih dahulu supaya berbentuk *a, b,* atau *c*.

4. Sifat-sifat limit

   Apabila k suatu konstanta, f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit untuk x mendekati a, maka berlaku:

   a. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

   b. $\lim\limits_{x\to a} k = k$

   c. $\lim\limits_{x\to a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

   d. $\lim\limits_{x\to a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

e. $\lim\limits_{x \to a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

f. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

g. $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x)\right)^n = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)^n$

Evaluasi

I. Pilihlah salah satu jawaban yang paling tepat.

1. Nilai $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x^2 - 9}$ adalah ....

   a. 2   b. 3   c. 4   d. 5   e. 6

2. Nilai $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-4}{3-x}$ adalah ....

   a. 3   b. 1   c. 0   d. $\frac{1}{3}$ e. $-\frac{1}{3}$

3. Nilai $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - 2}{x - 1} = \ldots.$

   a. 0   b. 1   c. 2   d. 4   e. 6

4. Nilai $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x-1}{3-x}$ adalah ....

   a. –2   b. –1   c. 0   d. $\frac{2}{3}$ e. 2

5. Nilai $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6-4x^4}{2+x^4}$ adalah ....

   a. –6   b. –4   c. 3   d. 4   e. 6

6. Nilai $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+x}$ adalah ....

a. $-\frac{3}{2}$
b. $-\frac{1}{2}$
c. $\frac{1}{2}$
d. 1
e. $\frac{3}{2}$

7. Nilai $\lim_{x\to-3} \frac{x^2-9}{x+3}$ adalah ....

a. 6
b. 4
c. –4
d. –2
e. –6

8. Nilai $\lim_{x\to-2} \frac{x^2-x-6}{x+2}$ adalah ....

a. –5
b. –2
c. –1
d. 5
e. 2

9. Nilai $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x+3}{2^x-1}$ adalah ....

a. 2
b. 1
c. –1
d. 0
e. –3

10. Nilai $\lim_{x\to8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ adalah ....

a. 12
b. 10
c. 6
d. 8
e. 4

11. Jika $\lim_{x\to0} f(x) = 3$, $\lim_{x\to0} g(x) = -5$, dan $\lim_{x\to0} h(x) = \frac{1}{2}$, maka nilai dari $\lim_{x\to0} \frac{(2f(x)+g(x))^2}{h(x)}$ adalah ....

a. $\frac{1}{2}$
b. 2
c. 8
d. 4
e. 16

12. Nilai $\lim_{x\to2} \left(\frac{x^2-8}{x-2} + \frac{x^2-2x}{2x-4} \right) = \ldots.$

a. 3
b. 5
c. 9
d. 8
e. ∞

13. Nilai $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} = \ldots.$

a. 3
b. 4
c. 5
d. 6
e. 7

14. Nilai $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - 2x}} = \ldots.$

a. 2
b. 1
c. 0
d. –1
e. –2

15. Nilai $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2x - 1}}{x - 1} = \ldots.$

a. 1
b. $\frac{1}{2}$
c. $-\frac{1}{2}$
d. –1
e. 0

16. Nilai $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 \sin 5x}{\sin 3x} = \ldots.$

a. $\frac{5}{3}$
b. $\frac{5}{2}$
c. 4
d. 3
e. 5

17. Nilai $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \sin x} = \ldots.$

a. $\frac{2}{3}$
b. $\frac{1}{2}$
c. 0
d. $\frac{1}{3}$
e. –1

18. Nilai $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2} = \ldots.$

a. $\frac{1}{4}$
b. $\frac{1}{2}$
c. $\frac{3}{2}$
d. 1
e. 2

19. Nilai $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \ldots.$

a. $\frac{1}{2}$
b. 1
c. 4
d. 2
e. 6

20. Nilai $\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{1 - \sin x}{x - \frac{1}{2}\pi} = \ldots.$

a. –2
b. –1
c. 1
d. 0
e. 2

II. Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan benar.

1. Hitunglah nilai limit berikut ini.

a. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x + 3}{x^2 - 5}$

b. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + 3x} - x$

c. $\lim_{x \to \infty} \frac{2^x + 5}{2^x - 3}$

2. Hitunglah nilai limit berikut ini.

a. $\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 + 9}$

b. $\lim_{x \to -2} \frac{3x + 2}{x + 2}$

c. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + x - 5}{x^2 - x + 4}$

3. Hitunglah nilai limit berikut ini.

a. $\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

b. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

c. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{2x}$

4. Hitunglah limit $\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ untuk $f(x)$ berikut ini.

a. $f(x) = 3x$
b. $f(x) = x^2$
c. $f(x) = 2x^2 - 3$

5. Hitunglah nilai limit berikut ini.

a. $\lim_{y \to 0} \frac{2 \tan 3y}{\sin 2y}$

b. $\lim_{x \to 45} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$

c. $\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{1 + \cos 2x}{\cos x}$

d. $\lim_{y \to 0} \frac{1 - \cos y}{y^2}$

e. $\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x}$

Bab 8

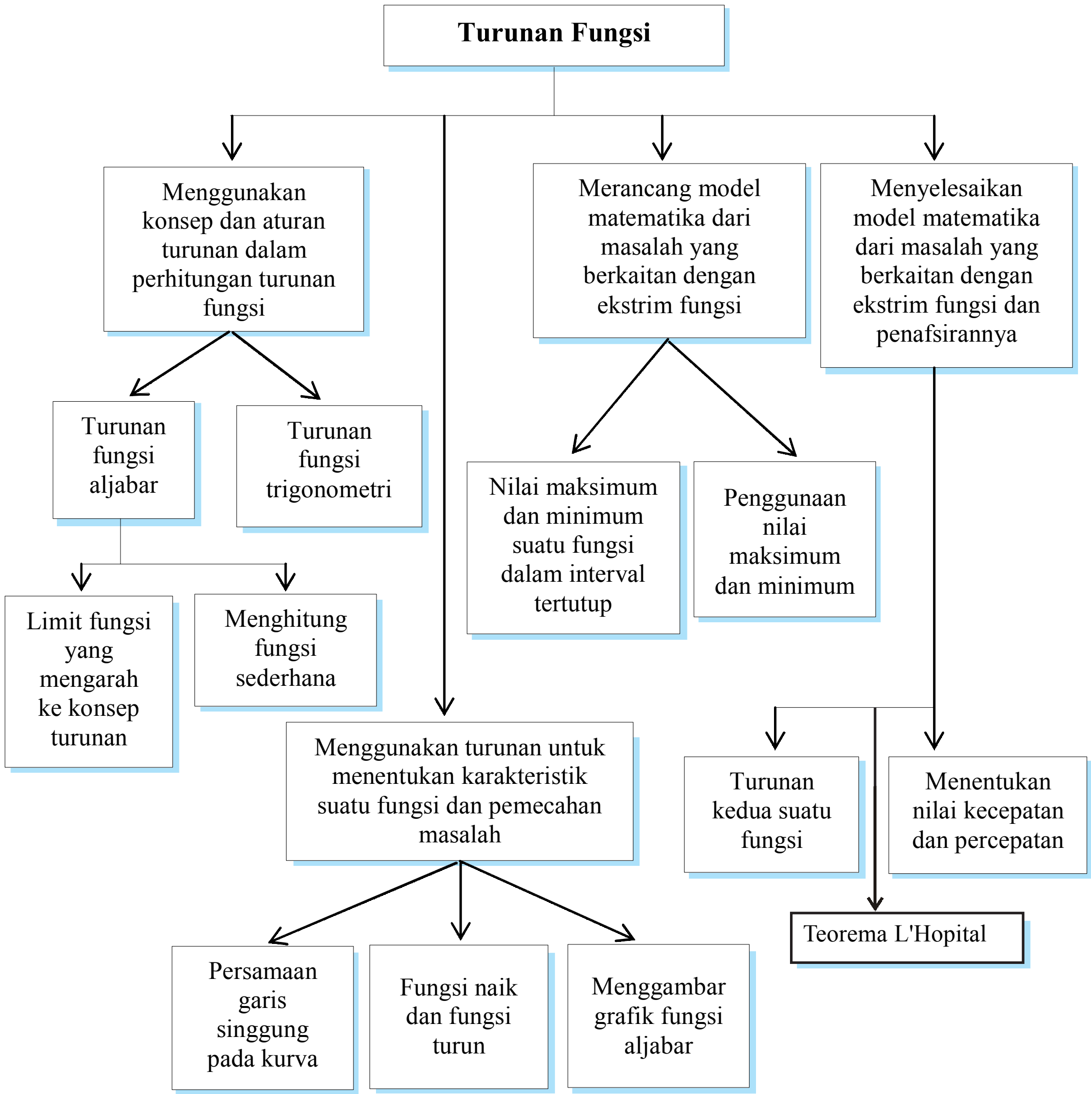
Turunan Fungsi

- Penggunaan Konsep dan Aturan Turunan ☑
- Penggunaan Turunan untuk Menentukan Karakteristik Suatu Fungsi ☑
- Model Matematika dari Masalah yang Berkaitan dengan Ekstrim Fungsi ☑
- Penyelesaian Model Matematika dari Masalah yang Berkaitan dengan Ekstrim Fungsi dan Penafsirannya ☑

Dengan bertambahnya jumlah penduduk, maka kebutuhan akan adanya perumahan juga bertambah. Peristiwa ini dikatakan bahwa laju jumlah penduduk sejalan dengan bertambahnya perumahan. Dalam kehidupan sehari-hari, kamu dapat menjumpai istilah-istilah laju penyebaran penyakit, laju kecepatan kendaraan, dan sebagainya. Kejadian-kejadian seperti ini dapat diselesaikan dengan turunan fungsi yang merupakan tahapan awal dari kalkulus diferensial.

Dalam bab ini kamu akan mempelajari mengenai konsep turunan fungsi dalam pemecahan masalah. Dengan mempelajarinya, kamu akan dapat menggunakan konsep dan aturan turunan fungsi untuk menghitung dan menentukan karakteristik turunan fungsi, merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan ekstrim fungsi, sekaligus menyelesaikan dan memberikan penafsirannya.

Peta Konsep



Kata Kunci

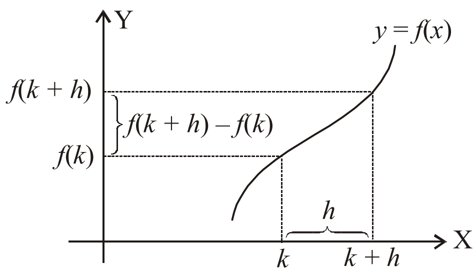
- diferensial
- turunan fungsi aljabar
- turunan fungsi trigonometri
- turunan pertama ($\frac{dy}{dx}$)
- turunan kedua $\left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right)$
- gradien garis singgung
- fungsi naik
- fungsi turun
- nilai stasioner
- nilai maksimum
- nilai minimum
- titik balik minimum
- titik balik maksimum

A. Penggunaan Konsep dan Aturan Turunan

1. Turunan Fungsi Aljabar

a. Menghitung Limit Fungsi yang Mengarah ke Konsep Turunan

Dari grafik di bawah ini, diketahui fungsi $y = f(x)$ pada interval $k < x < k + h$, sehingga nilai fungsi berubah dari $f(k)$ sampai dengan $f(k + h)$.



Perubahan rata-rata nilai fungsi f terhadap x dalam interval $k < x < k + h$ adalah $\dfrac{f(k+h)-f(k)}{(k+h)-k} = \dfrac{f(k+h)-f(k)}{h}$. Jika nilai k makin kecil maka nilai $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(k+h)-f(k)}{h}$ disebut laju perubahan nilai fungsi f pada $x = k$. Limit ini disebut turunan atau derivatif fungsi f pada $x = k$.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ disebut turunan fungsi f di x yang ditulis dengan notasi $f'(x)$, sehingga kita peroleh rumus sebagai berikut:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Jika nilai limitnya ada, fungsi f dikatakan diferensiabel di x dan f' disebut fungsi turunan dari f. Turunan dari $y = f(x)$ seringkali ditulis dengan $y' = f'(x)$. Notasi dari $y' = f'(x)$ juga dapat ditulis: $\dfrac{dy}{dx}$ dan $\dfrac{d\,f(x)}{dx}$.

Untuk lebih memahami tentang turunan, perhatikan contoh soal berikut.

Contoh soal

Tentukan turunan pertama dari:

a. $f(x) = 8$

b. $f(x) = x - 2$

c. $f(x) = x^3 + 5$

d. $f(x) = \dfrac{2}{x}$

Penyelesaian

a. $f(x) = 8$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{8-8}{h} = 0$$

Jadi, turunan fungsi konstan adalah nol.

b. $f(x) = x - 2$

$f(x + h) = x + h - 2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-2-(x-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-2-x+2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

c. $f(x) = x^3 + 5$

$f(x + h) = (x + h)^3 + 5$

$= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 5$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+5-(x^3+5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+5-x^3-5}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right)$$

$$= 3x^2 + 3x \cdot 0 + 0^2$$

$$= 3x^2 + 0 + 0 = 3x^2$$

d. $f(x) = \frac{2}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{x+h} - \frac{2}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2x-2(x+h)}{(x+h)x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x-2x-2h}{hx(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{hx(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2}{x(x+h)}$$

$$= \frac{-2}{x(x+0)} = \frac{-2}{x^2}$$

Dengan menggunakan rumus $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, lengkapilah tabel berikut.

$f(x)$	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	...	x^n
$f'(x)$	0	1	$2x$	$3x^2$	...	...	...	$n\,x^{n-1}$

Dari tabel dapat dilihat bahwa jika $f(x) = x^n$, maka $f'(x) = nx^{n-1}$, atau:

$$\boxed{\text{jika } f(x) = ax^n, \text{ maka } f'(x) = anx^{n-1}}$$

Contoh soal

Carilah $f'(x)$ jika diketahui fungsi berikut.

a. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

b. $f(x) = \frac{5}{x^2}$

c. $f(x) = 4x^3$

d. $f(x) = \frac{2x^2}{3\sqrt{x}}$

Penyelesaian

a. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}$$

$$= \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

b. $f(x) = \frac{5}{x^2} = 5 \cdot x^{-2}$

$$f'(x) = 5\,(-2)\,x^{-2-1}$$

$$= -10\,x^{-3} = \frac{-10}{x^3}$$

c. $f(x) = 4x^3$

$$f'(x) = 4 \cdot 3x^{3-1}$$

$$= 12x^2$$

d. $f(x) = \frac{2x^2}{3\sqrt{x}} = \frac{2x^2}{3x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}x^{1\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot x^{1\frac{1}{2}-1}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$= x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Latihan 8.1

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan benar.

1. Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan menggunakan rumus $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

   a. $f(x) = 2$

   b. $f(x) = 2x - 5$

   c. $f(x) = \frac{3}{x}$

   d. $f(x) = \frac{5}{x^2}$

   e. $f(x) = 2\sqrt{x}$

2. Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan menggunakan rumus $f(x) = x^n$ mempunyai turunan $f'(x) = n\, x^{n-1}$.

   a. $f(x) = -5x^6$

   b. $f(x) = \frac{6}{x^4}$

   c. $f(x) = \frac{5}{\sqrt[5]{x}}$

   d. $f(x) = -9\sqrt[3]{x}$

   e. $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x^3}$

3. Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan benar.

   a. Jika $f(x) = 4x^3$, tentukan $f'(-1)$

   b. Jika $f(x) = \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2}$, tentukan $f'(1)$

   c. Jika $f(x) = \frac{3}{x^2}$, tentukan $f'(-2)$

   d. Jika $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$, tentukan $f'(4)$

4. Carilah $f'(x)$ kemudian nilai fungsi turunan untuk nilai x yang diberikan.

   a. $f(x) = 5x^2$, untuk $x = -3$ dan $x = 1$

   b. $f(x) = 2x^3$, untuk $x = -1$ dan $x = 2$

   c. $f(x) = \frac{6}{x^2}$, untuk $x = -1$ dan $x = 1$

   d. $f(x) = 2\sqrt{x}$, untuk $x = 4$ dan $x = 9$

b. Menghitung Turunan Fungsi yang Sederhana dengan Menggunakan Definisi Turunan

1) Turunan fungsi yang berbentuk $y = u \pm v$

Bila $y = f(x) = u(x) + v(x)$ di mana turunan dari $u(x)$ adalah $u'(x)$ dan turunan dari $v(x)$ adalah $v'(x)$, maka turunan dari $f(x)$ adalah $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Bukti:

$f(x) = u(x) + v(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - \{u(x) + v(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x) + v(x+h) - v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

$f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Dengan cara yang sama, bisa dibuktikan bahwa bila $f(x) = u(x) - v(x)$, maka $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Jadi jika $y = u \pm v$, maka $y' = u' \pm v'$.

Agar lebih jelasnya, pelajarilah contoh soal berikut.

Contoh soal

Carilah $f'(x)$ jika:

a. $f(x) = 3x^2 + 7x$

b. $f(x) = -x^3 - 8x^2$

c. $f(x) = 4x^3 - 5x + \dfrac{3}{x^2}$

d. $f(x) = 6x - \sqrt[3]{x^2} + 3$

Penyelesaian

a. $f(x) = 3x^2 + 7x$

Misal: $u = 3x^2 \rightarrow u' = 3 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 6x^1 = 6x$

$v = 7x \rightarrow v' = 7 \cdot 1 \cdot x^{1-1} = 7x^0 = 7 \cdot 1 = 7$

Jadi jika $f(x) = u + v$, maka $f'(x) = u' + v' = 6x + 7$

b. $f(x) = -x^3 - 8x^2$

Misal: $u = -x^3 \rightarrow u' = -3x^{3-1} = -3x^2$

$v = 8x^2 \rightarrow v' = 8 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 16\,x^1 = 16x$

Jadi jika $f(x) = u - v$, maka $f'(x) = u' - v' = -3x^2 - 16x$

c. $f(x) = 4x^3 - 5x + \dfrac{3}{x^2}$

Misal: $u = 4x^3 \rightarrow u' = 4 \cdot 3\,x^{3-1} = 12x^2$

$v = 5x \rightarrow v' = 5 \cdot 1\,x^{1-1} = 5x^0 = 5 \cdot 1 = 5$

$w = \dfrac{3}{x^2} = 3x^{-2} \rightarrow w' = 3 \cdot (-2) \cdot x^{-2-1} = -6x^{-3} = \dfrac{-6}{x^3}$

Jadi jika $f(x) = u - v + w$, maka $f'(x) = u' - v' + w'$

$$= 12x^2 - 5 + \left(\frac{-6}{x^3}\right)$$

$$= 12x^2 - 5 - \frac{6}{x^3}$$

e. $f(x) = 6x - \sqrt[3]{x^2} + 3$

Misal: $u = 6x \quad \rightarrow \quad u' = 6 \cdot 1x^{1-1} = 6\,x^0 = 6$

$v = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \quad \rightarrow \quad v' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$w = 3 \quad \rightarrow \quad w' = 0$

Jadi jika $f(x) = u - v + w$, maka $f'(x) = u' - v' + w'$

$$= 6 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + 0$$

$$= 6 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

2) Turunan fungsi yang berbentuk $y = u \cdot v$

Jika $y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$, di mana turunan dari $u(x)$ adalah $u'(x)$ dan turunan dari $v(x)$ adalah $v'(x)$, maka turunan dari $f(x)$ adalah $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

Bukti:

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x) + u(x+h) \cdot v(x) - u(x+h) \cdot v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x+h) \cdot v(x) + u(x+h) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot \{v(x+h) - v(x)\} + v(x) \cdot \{u(x+h) - u(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} u(x+h) \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \lim_{h \to 0} v(x) \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

$f'(x) = u'(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$

Jadi jika $y = u \cdot v$, maka $y' = u'\,v + u\,v'$.

Agar lebih jelas, pelajarilah contoh soal berikut.

Contoh soal

Carilah $\frac{dy}{dx}$ jika:

a. $y = x(5x + 3)$

b. $y = 3(2x + 1)\, x^2$

c. $y = (2x + 1)(x - 5)$

d. $y = (x^2 - 7)(2x - 3)$

Penyelesaian

a. $y = x(5x + 3)$

Cara 1: $y = x\,(5x + 3)$

$y = 5x^2 + 3x$; maka $y' = 5 \cdot 2x^{2-1} + 3 \cdot 1\, x^{1-1}$

$y' = 10x^1 + 3 \cdot x^0$

$y' = 10x + 3 \cdot 1$

$y' = 10x + 3$ atau $\frac{dy}{dx} = 10x + 3$

Cara 2: $y = x\,(5x + 3)$

misal: $u = x \;\rightarrow\; u' = 1$

$v = 5x + 3 \;\rightarrow\; v' = 5 + 0 = 5$

Jadi jika $y = u \cdot v$, maka $y' = u'\,v + u\,v'$

$y' = 1\,(5x + 3) + x\,(5)$

$y' = 5x + 3 + 5x$

$y' = 10x + 3$ atau $\frac{dy}{dx} = 10x + 3$

b. $y = 3(2x + 1)\, x^2$

Cara 1: $y = 3(2x + 1)\, x^2$

$y = 6x^3 + 3x^2$, maka $y' = 6 \cdot 3x^{3-1} + 3 \cdot 2\, x^{2-1}$

$= 18x^2 + 6x$

Cara 2: $y = 3(2x + 1)\, x^2 = (2x + 1)\, 3x^2$

misal: $u = 2x + 1 \;\rightarrow\; u' = 2$

$v = 3x^2 \;\rightarrow\; v' = 3 \cdot 2\, x^{2-1} = 6x$

Jadi jika $y = u \cdot v$, maka $y' = u'\,v + u\,v'$

$y' = 2 \cdot 3x^2 + (2x + 1)\, 6x$

$y' = 6x^2 + 12x^2 + 6x$

$y' = 18x^2 + 6x$

c. $y = (2x + 1)\,(x - 5)$

misal: $u = 2x + 1 \;\rightarrow\; u' = 2$

$v = x - 5 \;\rightarrow\; v' = 1$

Jadi jika $y = u \cdot v$, maka $y' = u'\,v + u\,v'$

$= 2(x - 5) + (2x + 1)1$

$= 2x - 10 + 2x + 1$

$= 4x - 9$

d. $y = (x^2 - 7)(2x - 3)$

$u = x^2 + 7 \quad \rightarrow \quad u' = 2x$

$v = 2x - 3 \quad \rightarrow \quad v' = 2$

Jadi jika $y = u \cdot v$, maka
$$\begin{aligned} y' &= u'\,v + u\,v' \\ &= 2x\,(2x - 3) + (x^2 + 7)2 \\ &= 4x^2 - 6x + 2x^2 + 14 \\ &= 6x^2 - 6x + 14 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama didapat rumus:

Untuk u dan v masing-masing fungsi x, u' turunan dari u dan v' turunan dari v dan k bilangan konstan maka berlaku sebagai berikut.

$$\boxed{\begin{aligned} &y = u \pm v, \text{ maka } y' = u' \pm v' \\ &y = k\,u, \text{ maka } y' = k\,u' \\ &y = u\,v, \text{ maka } y' = u'v + uv' \\ &y = \frac{u}{v}, \text{ maka } y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ &y = u^n, \text{ maka } y' = n \cdot u^{n-1}\,u' \end{aligned}}$$

Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh soal berikut ini.

Contoh soal

1. Carilah turunan pertama dari:

   a. $y = \dfrac{3x - 2}{5x + 6}$ b. $y = \dfrac{x^2 + 2x}{x - 3}$

2. Carilah turunan pertama dari:

   a. $y = (x^3 - 3x)^2$

   b. $y = (2 + 5x^2)^5$

Penyelesaian

1. a. $y = \dfrac{3x - 2}{5x + 6}$

   misal: $u = 3x - 2 \quad \rightarrow \quad u' = 3$

   $v = 5x + 6 \quad \rightarrow \quad v' = 5$

   Jika $y = \dfrac{u}{v}$, maka
$$\begin{aligned} y' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{3(5x + 6) - (3x - 2)5}{(5x + 6)^2} \\ &= \frac{15x + 18 - 15x + 10}{(5x + 6)^2} \\ &= \frac{28}{(5x + 6)^2} \end{aligned}$$

b. $y = \dfrac{x^2 + 2x}{x - 3}$

misal: $u = x^2 + 2x \quad \rightarrow \quad u' = 2x + 2$

$v = x - 3 \quad \rightarrow \quad v' = 1$

Jika $y = \frac{u}{v}$, maka $y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \dfrac{(2x+2)(x-3) - (x^2+2x)\cdot 1}{(x-3)^2}$

$= \dfrac{2x^2 - 6x + 2x - 6 - x^2 - 2x}{(x-3)^2}$

$= \dfrac{x^2 - 6x - 6}{(x-3)^2}$

2. a. $y = (x^3 - 3x)^2$

misal: $u = x^3 - 3x \quad \rightarrow \quad u' = 3x^2 - 3$

Jika $y = u^n$, maka $y' = n \cdot u^{n-1}\, u'$

$= 2(x^3 - 3x)^{2-1} \cdot (3x^2 - 3)$

$= 2(x^3 - 3x)\,(3x^2 - 3)$

$= 2(3x^5 - 3x^3 - 9x^3 + 9x)$

$= 2(3x^5 - 12x^3 + 9x)$

$= 6x^5 - 24x^3 + 18x$

b. $y = (2 + 5x^2)^5$

misal : $u = 2 + 5x^2 \quad \rightarrow \quad u' = 10x$

Jika $y = u^n$, maka $y' = n\, u^{n-1}\, u'$

$= 5(2 + 5x^2)^{5-1} \cdot 10x$

$= 50x(2 + 5x^2)^4$

Tugas Kelompok

Coba kamu diskusikan dan buktikan teorema berikut dengan kelompokmu.

Jika $y = \dfrac{u}{v}$ maka $y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Aturan Rantai untuk Mencari Turunan Fungsi

Untuk mencari turunan dari $y = (2x - 5)^2$, lebih dahulu harus menjabarkan $(2x - 5)^2$ menjadi $4x^2 - 20x + 25$ kemudian menurunkannya satu persatu. Tetapi kamu belum bisa mencari turunan fungsi yang berbentuk $y = \sqrt{2 + x^2}$. Untuk itu perlu dikembangkan teknik yang erat hubungannya dengan fungsi-fungsi majemuk yang telah kita pelajari. Untuk lebih jelasnya, pelajarilah uraian berikut.

Jika $y = f \circ g$ sedemikian hingga $y = f(g(x))$ di mana f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai turunan, maka y juga mempunyai turunan sehingga:

$$\boxed{y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Dalam bentuk lain dapat diuraikan sebagai berikut.

Misalnya $z = g(x)$, maka $g'(x) = \frac{dz}{dx}$ dan $f'.\ g(x)) = f'(z) = \frac{dy}{dz}$

sehingga $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Jadi: $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}}$

Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh soal berikut ini.

Contoh soal

Tentukan turunan pertama dari $y = (2x^2 + 4x - 3)^{10}$.

Penyelesaian

Misal: $z = 2x^2 + 4 - 3 \rightarrow \frac{dz}{dx} = 4x + 4$

$y = z^{10} \rightarrow \frac{dy}{dz} = 10z^9$

$$y' = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 10z^9 \cdot (4x + 4)$$

$$= 10(2x^2 + 4x - 3)^9 \cdot (4x + 4)$$

Latihan 8.2

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan benar.

1. Carilah turunan pertama dari:
   a. $y = 3x^5 - 12x^3 + 5x$
   b. $y = 2x - 5x^2 + 7x^5$
   c. $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x^2 + 3x$
2. Carilah turunan pertama dari:
   a. $y = (x + 2)(2x - 7)$
   b. $y = (3x + 4)(5x - 2)$
   c. $y = (5x + 2)(x^2 - 3)$

3. Carilah turunan pertama dari:

a. $y = \dfrac{x-5}{4x+2}$

b. $y = \dfrac{2-5x}{x+2}$

c. $y = \dfrac{x^2+1}{1-x}$

4. Carilah turunan pertama dari:

a. $y = (2x + 3)^3$

b. $y = (2 - x)^5$

c. $y = \sqrt{x^2+5}$

5. Carilah turunan fungsi-fungsi di bawah ini, kemudian carilah nilai fungsi turunan itu untuk nilai x yang diberikan.

a. $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 4$, untuk $x = 2$

b. $y = (2x + 5)(3x - 2)$, untuk $x = -1$

c. $y = \dfrac{2x+6x}{3x-1}$, untuk $x = 1$

d. $y = (3x^2 + 2)^3$, untuk $x = 2$

6. Dengan aturan rantai carilah turunan pertama dari:

a. $y = (2x - 1)^9$

b. $y = \sqrt[3]{x^2-5}$

c. $y = \dfrac{1}{x^2-3x+4}$

2. Turunan Fungsi Trigonometri

Untuk menentukan turunan fungsi trigonometri dapat dicari sebagai berikut.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Perhatikan contoh soal berikut.

Contoh soal

1. Tentukan turunan dari $f(x) = \sin x$.

Penyelesaian

$f(x) = \sin x$

$f(x + h) = \sin (x + h)$, maka

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{1}{2}(x+h+x)\sin\frac{1}{2}(x+h-x)}{h} \end{aligned}$$

Ingat!!

$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\cdot \sin\frac{1}{2}(A - B)$

$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A + B)\cdot \sin\frac{1}{2}(A - B)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(x+\frac{1}{2}h)\sin\frac{1}{2}h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2\cos\,(x+\frac{1}{2}h)\ \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{1}{2}h}{2\cdot\frac{1}{2}h}$$

$$= \frac{2\cos x}{2} = \cos x$$

2. Tentukan turunan dari $f(x) = \cos x$.

Penyelesaian

$f(x) = \cos x$

$f(x + h) = \cos\,(x + h)$, maka:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\left(x+\frac{1}{2}h\right)\sin\frac{h}{2}}{h}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\sin\left(x+\frac{1}{2}h\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= -\sin\,(x+0)\cdot 1 = -\sin x$$

Ingat!!

$\cos A = \dfrac{1}{\sec A}$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

Tugas Kelompok

Buatlah kelasmu menjadi beberapa kelompok, buktikan:

1. Jika $y = \tan x$, maka $y' = \sec^2 x$
2. Jika $y = \cot x$, maka $y' = -\mathrm{cosec}^2\, x$
3. Jika $y = \sin u$, maka $y' = u' \cos u$

Setelah itu cocokkan dengan kelompok lain, adakan diskusi per kelompok.

Dengan cara yang sama didapat rumus sebagai berikut.

1. Jika $y = \sin x$, maka $y' = \cos x$
2. Jika $y = \cos x$, maka $y' = -\sin x$
3. Jika $y = \tan x$, maka $y' = \sec^2 x$
4. Jika $y = \cot x$, maka $y' = -\text{cosec}^2\, x$
5. Jika $y = \sin U$, maka $y' = U' \cos U$
6. Jika $y = \sin^n U$, maka $y' = \text{n} \sin^{n-1} U \cos U'$
7. Jika $y = \sec x$, maka $y' = \sec x \tan x$
8. Jika $y = \text{cosec}\, x$, maka $y' = \text{cosec}\, x \cot x$

Contoh soal

1. Tentukan turunan pertama fungsi berikut.
   a. $f(x) = \sin 3x$
   b. $f(x) = 5 \sin (\frac{1}{5}x + 6)$

   Penyelesaian

   a. $f(x) = \sin 3x$
      $f'(x) = 3 \cos 3x$

   b. $f(x) = 5 \sin (\frac{1}{5}x + 6)$

      $f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{5} \cos (\frac{1}{5}x + 6)$

      $= \cos (\frac{1}{5}x + 6)$

2. Jika $y = 7 \tan x$, tentukan $\frac{dy}{dx}$.

   Penyelesaian

   $y = 7 \tan x = \dfrac{7 \sin x}{\cos x}$

   misal: $u = 7 \sin x \rightarrow u' = 7 \cos x$

   $v = \cos x \rightarrow v' = -\sin x$

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\
&= \frac{7\cos x \cdot \cos x - 7 \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{7\cos^2 x + 7\sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{7(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{7}{\cos^2 x} = 7 \sec^2 x
\end{aligned}
$$

Ingat!!

$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

$\dfrac{1}{\cos A} = \sec A$

3. Carilah $f'(x)$ dan nilai $f'(\frac{1}{3}\pi)$ jika diketahui $f(x) = x^2 \sec x$.

Penyelesaian

$f(x) = x^2 \sec x$

$f'(x) = 2x \sec x + x^2 \sec x \tan x$

$$f'(\tfrac{1}{3}\pi) = 2 \cdot \tfrac{1}{3}\pi \cdot \sec \tfrac{1}{3}\pi + (\tfrac{1}{3}\pi)^2 \cdot \sec \tfrac{1}{3}\pi \cdot \tan \tfrac{1}{3}\pi$$

$$= \tfrac{2}{3}\pi \cdot 2 + \tfrac{1}{9}\pi^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}$$

$$= \tfrac{4}{3}\pi + \tfrac{2}{9}\pi^2\sqrt{3}$$

Latihan 8.3

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan benar.

1. Carilah $f'(x)$ dari fungsi-fungsi di bawah ini.
   a. $f(x) = \sin^2 x$
   b. $f(x) = \cos^2 x$
   c. $f(x) = 6 \sin x + 2 \cos x$
   d. $f(x) = 2 \cot x$

2. Carilah $f'(x)$ dan nilai dari fungsi $f'(x)$ dari:
   a. $f(x) = 4 \sin x - x^2$, untuk $x = \frac{\pi}{6}$
   b. $f(x) = 3x - \cos x$, untuk $x = \frac{\pi}{3}$
   c. $f(x) = 4 \tan x + x$, untuk $x = \frac{\pi}{6}$

3. Carilah turunan pertama dari:
   a. $y = \sin 3x$
   b. $y = \cos 4x$
   c. $y = \sin (2x + 3)$
   d. $y = \cos (3x - 2)$

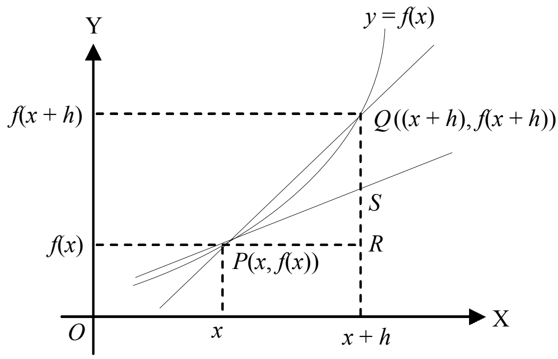
4. Carilah $\frac{dy}{dx}$ dari:
   a. $y = \sin \frac{1}{x}$
   b. $y = \cos x^2$
   c. $y = \frac{5}{\sin x}$
   d. $y = \frac{2}{\cos x}$

5. Carilah $\frac{dy}{dx}$ dari:
   a. $y = \cos^2 (3x - 2)$
   b. $y = \sin^2 (2 - x)$
   c. $y = x^2 \sin 3x$
   d. $y = x^2 \cos 2x$

B Penggunaan Turunan untuk Menentukan Karakteristik Suatu Fungsi

1. Persamaan Garis Singgung pada Kurva

Perhatikan gambar berikut.



Titik $P(x, y)$ adalah sembarang titik pada kurva $y = f(x)$, sehingga koordinat titik P dapat dituliskan sebagai $(x, f(x))$. Absis titik Q adalah $(x + h)$ sehingga koordinat titik Q adalah $\{(x + h), (f(x + h)\}$. Jika $h \to 0$, maka S akan menjadi garis singgung pada kurva di titik P yaitu PS. Dengan demikian gradien garis singgung pada kurva di titik P adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \to 0} \tan \angle QPR \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh soal berikut ini.

Contoh soal

1. Tentukan gradien garis singgung dari fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2$ di titik $(-2, -20)$.

   Penyelesaian

   $$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x^2 \\ f'(x) &= 3x^2 - 6x \\ f'(-2) &= 12 + 12 \\ &= 24 \end{aligned}$$

   Jadi, gradien garis singgung $f(x) = x^3 - 3x^2$ di titik $(-2, -20)$ adalah $m = 24$.

2. Jika diketahui $f(x) = 5 - \sqrt{x}$, tentukan gradien garis singgung kurva tersebut di titik yang ordinatnya 3.

Penyelesaian

$$\begin{aligned} f(x) &= 5 - \sqrt{x} \\ 3 &= 5 - \sqrt{x} \\ \sqrt{x} &= 2 \Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

$$f(x) = 5 - \sqrt{x} = 5 - x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$m = f'(4) = -\frac{1}{2\sqrt{4}} = -\frac{1}{4}$$

Jadi, gradien garis singgung kurva $f(x) = 5 - \sqrt{x}$ di titik (4, 3) adalah $m = -\frac{1}{4}$.

Persamaan garis singgung pada kurva di titik (x_1, y_1) dengan gradien m di mana $m = f'(x)$ adalah:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh soal berikut ini.

Contoh soal

Diketahui kurva $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2$. Tentukan persamaan garis singgung dari kurva tersebut yang mempunyai gradien –9.

Penyelesaian

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x = x^2 - 6x$$

$$\begin{aligned} m &= f'(x) \\ -9 &= x^2 - 6x \\ x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x - 3)^2 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= f(3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 \\ &= 9 - 27 = -18 \end{aligned}$$

Jadi, koordinat titik singgung (3, –18).

Maka persamaan garis singgungnya adalah:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y + 18 &= -9(x - 3) \\ y + 18 &= -9x + 27 \\ y &= -9x + 9 \\ y &= -9(x - 1) \end{aligned}$$

Latihan 8.4

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan benar.

1. Tentukan gradien dan kemudian persamaan garis singgung setiap kurva berikut ini pada titik yang diketahui.
   a. $y = 3x$ di titik (2, 6)
   b. $y = -7x$ di titik (1, –7)
   c. $y = x^2$ di titik (3, 9)
   d. $y = x^2 - 4x$ di titik (–1, 6)
   e. $y = x^3 - 3x^2 + 4$ di titik (0, 4)

2. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva berikut ini.
   a. $y = 4x^2$ pada $x = -1$
   b. $y = 3x^2 - 5$ pada $x = 2$
   c. $y = x^3$ pada $x = 2$
   d. $y = \frac{5}{x}$ pada $x = 1$
   e. $y = 5\sqrt{x}$ pada $x = 4$

3. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva berikut ini.
   a. $y = 4x$ pada $y = 8$
   b. $y = -2x^2$ pada $y = -\frac{1}{2}$
   c. $y = \sqrt{x}$ pada $y = 2$
   d. $y = x^2 - 2$ pada $y = 7$
   e. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pada $y = \frac{1}{4}$

4. a. Tentukanlah koordinat titik pada kurva $y = x^2 - 5$, sehingga garis singgung kurva di titik itu mempunyai gradien 4.
   b. Tentukan pula persamaan garis singgung di titik itu.

5. Carilah persamaan garis singgung pada kurva $y = x^2 - 3x + 3$, yang:
   a. tegak lurus $y = x + 6$,
   b. sejajar $5x + y = 1$.

2. Fungsi Naik dan Fungsi Turun

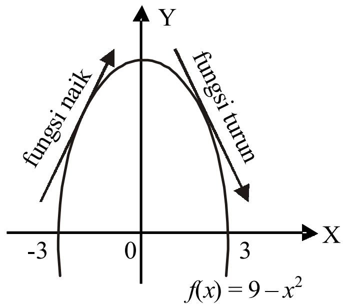
a. Pengertian Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Perhatikan gambar di samping.

$f(x) = 9 - x^2$

$f'(x) = -2x$

1) Bila $x < 0$ maka $f'(x) > 0$ (gradien di setiap titik positif). Terlihat grafiknya naik, maka dikatakan fungsi naik.
2) Bila $x > 0$ maka $f'(x) < 0$ (gradien di setiap titik negatif). Terlihat grafiknya menurun, maka dikatakan fungsi turun.



b. Menentukan Interval Suatu Fungsi Naik atau Fungsi Turun

Untuk menentukan interval fungsi $f(x)$ naik adalah dengan menyelesaikan pertidaksamaan $f'(x) > 0$. Demikian juga untuk menentukan interval fungsi $f(x)$ turun adalah dengan menyelesaikan pertidaksamaan $f'(x) < 0$.

Untuk lebih memahami, perhatikan contoh soal berikut.

Contoh soal

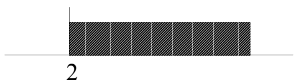
1. Tentukan interval-interval dari fungsi $f(x) = x^2 - 4x$ agar fungsi:
   a. naik,
   b. turun.

   Penyelesaian

   $f(x) = x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 2x - 4$

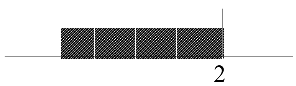
   a. Syarat supaya fungsi naik adalah:

   $$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \\ 2x - 4 &> 0 \\ 2x &> 4 \end{aligned}$$

   b. Syarat supaya fungsi turun adalah:

   $$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \\ 2x - 4 &< 0 \\ 2x &< 4 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

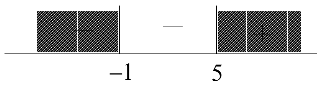
2. Ditentukan $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 10$. Tentukan interval agar:
   a. kurva $y = f(x)$ naik,
   b. kurva $y = f(x)$ turun.

   Penyelesaian

   a. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 10 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 4x - 5$

Syarat fungsi naik:

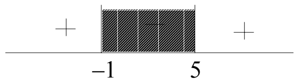
$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \\ x^2 - 4x - 5 &> 0 \\ (x+1)(x-5) &> 0 \\ x + 1 = 0 \quad \text{atau} \quad x - 5 &= 0 \\ x = -1 \quad \text{atau} \quad x &= 5 \end{aligned}$$



Interval x agar kurva naik adalah $x < -1$ atau $x > 5$.

b. Syarat fungsi turun

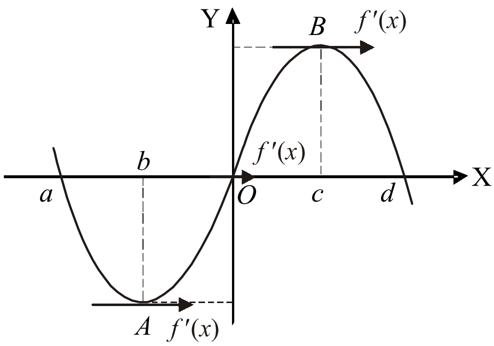
$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \\ x^2 - 4x - 5 &< 0 \\ (x+1)(x-5) &< 0 \\ x + 1 = 0 \quad \text{atau} \quad x - 5 &= 0 \\ x = -1 \quad \text{atau} \quad x &= 5 \end{aligned}$$



Interval x agar kurva turun adalah $-1 < x < 5$.

c. Nilai Stasioner dan Jenisnya

Perhatikan grafik berikut ini.



a. Nilai stasioner pada A adalah $f(b)$, jenisnya nilai balik minimum.
   Jenis nilai stasioner sebagai berikut.

x	b^-	b	b^+
$f'(x)$	–	0	+
Jenis min			

b. Nilai stasioner pada O adalah $f(0)$ jenisnya nilai belok.
   Jenis nilai stasioner sebagai berikut.

x	0^-	0	0^+
$f'(x)$	+	0	+
Jenis belok			

c. Nilai stasioner pada B adalah $f(c)$ jenisnya nilai balik maksimum
Jenis nilai stasioner sebagai berikut.

x	c^-	c	c^+
$f'(x)$	+	0	–
Jenis maks	/	—	\

Catatan:
b^-, 0^- dan c^- artinya kurang sedikit dari b, 0, c pada $f'(x)$.
b^+, 0^+ dan c^+ artinya lebih sedikit dari b, 0, c pada $f'(x)$.

Untuk lebih jelasnya, pelajarilah contoh soal berikut.

Contoh soal

1. Tentukan nilai stasioner dan jenisnya dari fungsi berikut.
   a. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$
   b. $f(x) = x^3 + 9x^2 + 24x + 8$

Penyelesaian

a. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$

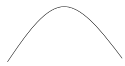
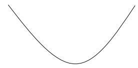
$\Rightarrow \quad f'(x) = x^2 - 5x + 6$

Syarat mencapai nilai stasioner: $f'(x) = 0$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$(x-3)(x-2) = 0$$
$$x - 3 = 0 \text{ atau } x - 2 = 0$$
$$x = 3 \text{ atau } x = 2$$
$$x = 3 \quad \rightarrow \quad y = f(x) = 4\frac{1}{2}$$
$$x = 2 \quad \rightarrow \quad y = f(x) = 4\frac{2}{3}$$

- Untuk $x = 2$ nilai stasioner adalah $4\frac{2}{3}$ jenisnya maksimum $\rightarrow$ titik stasioner maksimum $(2,\ 4\frac{2}{3})$.
- Untuk $x = 3$ nilai stasioner adalah $4\frac{1}{2}$ jenis minimum $\rightarrow$ titik stasioner minimum $(2,\ 4\frac{1}{2})$.

Untuk mengetahui jenisnya kita selidiki nilai fungsi di sekitar harga nol.

x	2^-	2	2^+	3^-	3	3^+
$x - 2$	–	0	+	+	+	+
$x - 3$	–	–	–	–	0	+
$f'(x)$	+	0	–	–	0	+
Bentuk grafik						

b. $f(x) = x^3 + 9x^2 + 24x + 8 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 18x + 24$

Syarat mencapai stasioner: $f'(x) = 0$

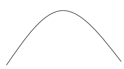
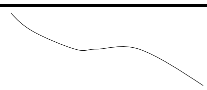
$$3x^2 + 18x + 24 = 0$$
$$3(x^2 + 6x + 8) = 0$$
$$3(x + 4)(x + 2) = 0$$
$$x = –4 \quad \text{atau} \quad x = –2$$

$x = –2 \Rightarrow y = f(x) = –12$

$x = –4 \Rightarrow y = f(x) = 32$

- Untuk $x = –2$ nilai stasioner adalah –12 jenisnya belok $\rightarrow$ titik belok (–2, –12).
- Untuk $x = –4$ nilai stasioner adalah 32 jenisnya maksimum $\rightarrow$ titik stasioner maksimum (–4, 32).

Untuk mengetahui jenisnya kita selidiki nilai fungsi di sekitar harga nol.

x	-4^-	-4	-4^+	-2^-	-2	-2^+
$x + 2$	–	–	–	–	0	–
$x + 4$	–	0	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	–	–	+	–
Bentuk gambar						

2. Diketahui fungsi $y = ax^3 + bx^2$ dengan a dan b konstan, memiliki titik stasioner pada titik (1, –1). Tentukan nilai a dan b.

Penyelesaian

$y = ax^3 + bx^2$

Syarat stasioner $y' = 0$

$$y = ax^3 + bx^2$$
$$y' = 3ax^2 + 2bx$$
$$0 = 3ax^2 + 2bx$$

titik stasioner (1, –1)

berarti $x = 1$, $y = –1$

$$
\begin{aligned}
3ax^2 + 2bx &= 0 \\
3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 &= 0 \\
3a + 2b &= 0 \;\ldots\ldots\ldots\; (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= ax^3 + bx^2 \\
-1 &= a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 \\
-1 &= a + b \;\ldots\ldots\ldots\; (2)
\end{aligned}
$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$
\begin{aligned}
3a + 2b &= 0 \quad | \times 1 | \\
a + b &= -1 \quad | \times 2 |
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3a + 2b &= 0 \\
2a + 2b &= -2 \quad - \\
\hline
a + 0 &= 2 \\
a &= 2
\end{aligned}
$$

$a = 2$ disubstitusikan ke persamaan (2)

$$
\begin{aligned}
a + b &= -1 \\
2 + b &= -1 \\
b &= -3
\end{aligned}
$$

Latihan 8.5

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan benar.

1. Tentukan interval agar fungsi berikut ini naik.
   a. $y = x^2 + 5x - 4$
   b. $y = 6 + 4x - x^2$
   c. $y = x^3 + 3x^2 + 5$
   d. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 2$
2. Tentukan interval agar fungsi berikut ini turun.
   a. $y = 2x^2 - 8x + 3$
   b. $y = 1 + 9x - 3x^2$
   c. $y = 2x^3 + x^2 - 4x + 1$
   d. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
3. Tunjukkan bahwa fungsi berikut selalu naik.
   a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 20x + 1$
   b. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + 9$

4. Tentukan nilai-nilai stasioner dan tentukan pula jenisnya fungsi-fungsi berikut ini.
   a. $f(x) = x^3 - 3x$
   b. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 2$

3. Menggambar Grafik Fungsi Aljabar

Langkah-langkah dalam menggambar grafik suatu fungsi aljabar atau suatu kurva sebagai berikut.

a. Menentukan titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat (sumbu X dan sumbu Y).
b. Menentukan titik-titik stasioner dan jenisnya (titik balik minimum, titik balik maksimum, dan titik belok).
c. Menentukan nilai y untuk x besar positif dan untuk x besar negatif.

Ingat!!

$f'(x) = ax^2 + bx + c$
$a > 0$ dan D < 0 maka
$f'(x)$ definit positif atau
$f'(x) > 0$

Untuk lebih memahami cara menggambar grafik fungsi aljabar, perhatikan contoh soal berikut.

Contoh soal

1. Gambarlah grafik kurva $y = 3x^2 - x^3$.

   Penyelesaian

   a. Titik potong kurva dengan sumbu X, dipenuhi bila $y = 0$, maka diperoleh:
   $$3x^2 - x^3 = 0$$
   $$x^2(3 - x) = 0$$
   $$x_1 = x_2 = 0 \quad \text{atau} \quad 3 - x = 0$$
   $$x_3 = 3$$
   Jadi, titik potong dengan sumbu X adalah (0, 0) dan (3, 0).

   Titik potong kurva dengan sumbu Y, dipenuhi bila $x = 0$, maka diperoleh:
   $$\begin{aligned} y &= 3x^2 - x^2 \\ &= 3 \cdot 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$
   Jadi, titik potong dengan sumbu Y adalah (0, 0).

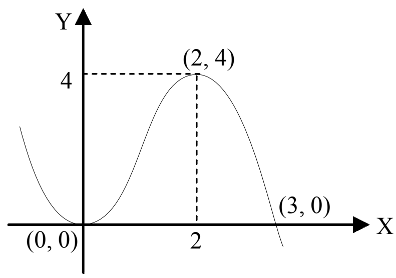
   b. Mencari titik-titik stasioner, syarat $f'(x) = 0$
   $$y = 3x^2 - x^3$$
   $$y' = 0$$
   $$6x - 3x^2 = 0$$
   $$3x(2 - x) = 0$$
   $$x = 0 \quad \text{atau} \quad x = 2$$

Untuk $x = 0 \rightarrow y = 0$ dan untuk $x = 2 \rightarrow y = 4$.

	$x = 0$			$x = 2$		
	0^-	0	0^+	2^-	2	2^-
y'	–	0	+	+	0	–
Bentuk grafik						

Jadi, titik (0, 0) merupakan titik balik minimum dan (2, 4) merupakan titik balik maksimum.

c. Untuk x besar positif, maka y = besar negatif.
Untuk x besar negatif, maka y = besar positif.
Sehingga grafiknya terlihat seperti gambar berikut.



2. Gambarlah grafik kurva $y = x^4 - 4x^3$.

Penyelesaian

a. Titik potong kurva dengan sumbu X, dipenuhi bila $y = 0$, maka diperoleh:

$$x^4 - 4x^3 = 0$$
$$x^3 (x - 4) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{atau} \quad x = 4$$

Jadi, titik potong dengan sumbu X adalah (0, 0) dan (4, 0).
Titik potong kurva dengan sumbu Y, dipenuhi bila $x = 0$, maka diperoleh:

$$y = x^4 - 4x^3$$
$$y = 0^4 - 4 \cdot 0^3$$
$$= 0$$

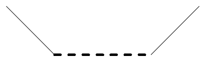
Jadi, titik potong dengan sumbu Y adalah (0, 0).

b. Titik stasioner, syarat $f'(x) = 0$

$$f = x^4 - 4x^3$$
$$f'(x) = 0$$
$$4x^3 - 12x^2 = 0$$
$$4x^2 (x - 3) = 0$$

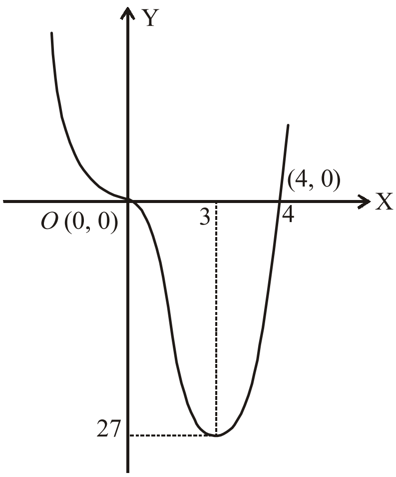
Untuk $x = 0$ dipenuhi: $y = 0^4 - 4 \cdot 0^3 = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Untuk $x = 3$ dipenuhi:
$$\begin{aligned} y &= 3^4 - 4 \cdot 3^3 \\ &= 3^3 (3 - 4) \\ &= -27 \Rightarrow (3, -27) \end{aligned}$$

	$x = 0$			$x = 3$		
	0^-	0	0^+	3^-	3	3^-
y'	–	0	–	–	0	+
Bentuk grafik						

Titik (0, 0) merupakan titik belok horizontal dan titik (3, –27) adalah merupakan titik balik maksimum.

c. Untuk x besar positif, maka y = besar positif.



Untuk x besar negatif, maka y = besar positif. Maka grafiknya seperti tampak pada gambar di samping.

Latihan 8.6

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan benar.

Gambarlah grafik kurva-kurva berikut ini.

1. $y = 2x^2$
2. $y = 4 - x^2$
3. $y = x^2 - 2x$
4. $y = x^3$
5. $y = x^3 - 3x$
6. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$
7. $y = x (x - 2) (x + 3)$
8. $y = 25x - 10x^2 + x^3$
9. $y = x (x + 1)^2$
10. $y = 3x^5 - 5x^2$

C Merancang Model Matematika dari Masalah yang Berkaitan dengan Ekstrim Fungsi

1. Nilai Maksimum dan Minimum Suatu Fungsi dalam Interval Tertutup

Untuk menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi dalam interval tertutup dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

a. Menentukan nilai fungsi pada batas interval.
b. Menentukan nilai stasioner apabila stationer dicapai pada x di dalam interval.
c. Menentukan nilai minimum dan maksimum berdasarkan hasil dari (a) dan (b).

Untuk lebih memahami, perhatikan contoh berikut.

Contoh soal

1. Tentukan nilai maksimum dan minimum untuk fungsi $f(x) = 6x^2 - x^3$ pada interval $-1 < x < 3$.

   Penyelesaian

   Fungsi $f(x) = 6x^2 - x^3$ pada interval $-1 < x < 3$.

   Nilai fungsi pada batas interval:

   $$f(-1) = 6\,(-1)^2 - (-1)^3 = 6 + 1 = 7$$
   $$f(3) = 6\,(3)^2 - (3)^3 = 54 - 27 = 27$$

   Nilai stasioner fungsi:

   $$f'(x) = 12x - 3x^2 \Rightarrow 12x - 3x^2 = 0$$
   $$3x\,(4 - x) = 0$$
   $$x = 0 \quad \text{atau} \quad x = 4$$

   $x = 0$ di dalam interval (dicari nilai fungsinya)
   $x = 4$ di luar interval (tidak dicari nilai fungsinya)

   $$f(0) = 6\,(0)^2 - (0)^3 = 0$$

   Diperoleh $f(-1) = 7, f(2) = 16, f(3) = 27$.

   Jadi, nilai maksimum adalah 27 dan nilai minimum adalah 0.

2. Tentukan nilai maksimum dan minimum untuk fungsi $f(x) = 2x - x^2$ pada interval $\{x \mid -1 < x < 2\}$.

   Penyelesaian

   Nilai fungsi pada batas interval.

   $$f(-1) = 2(-1) - (-1)^2 = -2 - 1 = -3$$
   $$f(2) = 2(2) - (2)^2 = 4 - 4 = 0$$

Nilai stasioner apabila $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - 2x \\ 0 &= 2 - 2x \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Untuk $x = 1 \quad \rightarrow \quad f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$

Jadi, nilai maksimum fungsi adalah 1 dan nilai minimum fungsi adalah –3.

2. Penggunaan Nilai Maksimum dan Minimum

Soal-soal cerita atau persoalan yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari dapat diselesaikan dengan menggunakan stasioner yaitu nilai maksimum dan minimum. Perhatikan contoh soal berikut ini.

Contoh soal

1. Sebuah bola dilempar vertikal ke atas. Dalam waktu t detik ketinggian yang dicapai oleh bola dengan persamaan $h(t) = 36t - 9t^2$.
   a. Tentukan waktu (t) yang diperlukan sehingga tinggi bola maksimum.
   b. Tentukan tinggi maksimum yang dicapai bola itu.

   Penyelesaian

   a. $h(t) = 72t - 9t^2$
      $h'(t) = 72 - 18t$

      Agar mencapai maksimum maka $h'(t) = 0$

      $$\begin{aligned} h'(t) &= 72 - 18t \\ 0 &= 72 - 18t \\ 18t &= 72 \\ t &= \frac{72}{18} = 4 \text{ detik} \end{aligned}$$

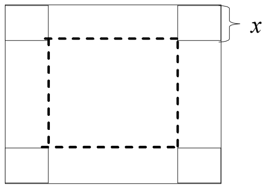
   b. Tinggi maksimum yang dicapai bola itu adalah:

      $$\begin{aligned} h(t) &= 72t - 9t^2 \\ &= 72 \cdot 4 - 9 \cdot 4^2 \\ &= 72 \cdot 4 - 9 \cdot 16 \\ &= 288 - 144 = 144 \text{ meter} \end{aligned}$$

2. Kita akan membuat kotak tanpa tutup dari sehelai karton yang berbentuk bujur sangkar (persegi) dengan rusuk = 20 cm, dengan jalan memotong bujur sangkar kecil pada keempat sudutnya, tentukan ukuran kotak supaya isinya sebanyak-banyaknya.

   Penyelesaian

   Masalah di atas dapat dituangkan dalam gambar. Misalkan potongan persegi pada sudutnya adalah x cm. Maka ukuran kotak yang akan dibuat adalah:



panjang $= (20 - 2x)$
lebar $= (20 - 2x)$
tinggi $= x$ cm

Sehingga volum kotak:

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= (20 - 2x)(20 - 2x)\, x \text{ cm}^3 \\ &= 400x - 80x^2 + 4x^3 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Terdapat suatu fungsi x dari volume kotak:

$$v(x) = 400x - 80x^2 + 4x^3$$

Supaya kotak tersebut mempunyai volume yang maksimum, maka:

$$\begin{aligned} v'(x) &= 0 \\ 400 - 160x + 12x^2 &= 0 \\ 12x^2 - 160x + 400 &= 0 \\ 3x^2 - 40x + 100 &= 0 \\ (3x - 10)(x - 10) &= 0 \end{aligned}$$

$3x - 10 = 0$ atau $x - 10 = 0$

$x = \frac{10}{3}$ $\qquad x = 10$

- Untuk $x = 10$, maka $v(0) = 0$, mendapatkan titik $(10, 0)$ merupakan titik balik minimum. Sehingga titik ini tidak memenuhi, karena yang diminta adalah volume maksimum.
- Untuk $x = \frac{10}{3}$ maka $v\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{16.000}{27}$ mendapatkan titik $\left(\frac{10}{3}, \frac{16.000}{27}\right)$ menunjukkan titik balik maksimum, sehingga supaya volume kotak yang dibuat maksimum dicapai bila $x = \frac{10}{3}$. Atau dengan kata lain: karton tersebut dipotong pada keempat sudutnya dengan bentuk bujur sangkar dengan sisi $\frac{10}{3}$ cm. Jadi ukuran kotaknya adalah:

  panjang $= (20 - 2 \cdot \frac{10}{3})$ cm $= \frac{40}{3}$ cm

  lebar = panjang

  tinggi kotak $= \frac{10}{3}$ cm

Latihan 8.7

Kerjakan soal-soal dibawah ini dengan benar.

1. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x) = 2x - x^3$ pada interval $\{x \mid 1 < x < 2\}$.
2. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $f(x) = 2x^2 - 8x$ pada interval $-1 < x < 4$.

3. Tentukan nilai maksimum dan minimum pada interval tertutup [1, 5] untuk fungsi $f(x) = x + \frac{9}{x}$.
4. Suatu kolam ikan dipagari kawat berduri, pagar kawat yang tersedia panjangnya 400 m dan kolam berbentuk persegi panjang. Tentukan ukuran kolam agar terdapat luas yang maksimum dan berapa luas maksimum itu.
5. Jumlah dua bilangan adalah 20, hasil kalinya p. Tentukan hasil kali yang terbesar.

D Penyelesaian Model Matematika Masalah yang Berkaitan dengan Ekstrim Fungsi dan Penafsirannya

1. Turunan Kedua Suatu Fungsi

Turunan pertama fungsi $y = f(x)$ adalah $f'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx}$, sedangkan turunan kedua ditulis $f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ dan turunan ketiga ditulis $f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$ dan seterusnya. Perhatikan contoh soal berikut ini.

Contoh soal

1. Tentukan $\frac{d^2 f}{dx^2}$ dari fungsi $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7$.

   Penyelesaian

   $$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7$$
   $$\frac{df}{dx} = 3x^2 - 5 \cdot 2x = 3x^2 - 10x$$
   $$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 3 \cdot 2x - 10 \cdot 1 = 6x - 10$$

2. Tentukan turunan kedua dari $y = \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 6$.

   Penyelesaian

   $$y = \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 6$$
   $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot 4x^3 + \frac{2}{3} \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 0$$
   $$= 2x^3 + 2x^2 - 10x$$
   $$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x - 10 = 6x^2 + 4x - 10$$

2. Menentukan Nilai Kecepatan dan Percepatan

Apabila diketahui fungsi $y = f(x)$, maka turunan pertama dapat ditulis $y' = f'(x)$, $f'(x)$ sering juga ditulis $\frac{df(x)}{dx}$ dan y' sering ditulis $\frac{dy}{dx}$.

Apabila diketahui $s = f(t)$, maka turunan pertama dari s ditulis $\frac{ds}{dt} = f'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$. $\frac{ds}{dt}$ merupakan besar kecepatan sesaat untuk setiap saat, atau ditulis $v = \frac{ds}{dt}$ atau $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$, di mana $\frac{dv}{dt}$ merupakan besarnya percepatan setiap saat.

Untuk memahami lebih jauh tentang nilai kecepatan dan percepatan, perhatikan contoh berikut.

Contoh soal

1. Jika suatu benda yang bergerak ditunjukkan oleh rumus $s = 10t + 5t^2$, dengan menggunakan $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$, tentukan:
   a. kecepatan pada setiap saat,
   b. percepatan pada setiap saat.

   Penyelesaian

   a. $s = 10t + 5t^2$,

$$
\begin{aligned}
v = \frac{ds}{dt} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\{10(t+h) + 5(t+h)^2\} - (10t + 5t^2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(10t + 10h + 5t^2 + 10th + 5h^2) - (10t + 5t^2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{10t + 10h + 5t^2 + 10th + 5h^2 - 10t - 5t^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{10h + 10th + 5h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(10 + 10t + 5h)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 10 + 10t + 5h \\
&= 10 + 10t + 5 \cdot 0 \\
&= 10 + 10t
\end{aligned}
$$

   Jadi, kecepatan pada setiap saat = $10 + 10t$.

b. $v = 10 + 10t$

$$a = \frac{dv}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{10 + 10\ \ (t+h)\} - (10 + 10t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{10 + 10t + 10h - 10 - 10t}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{10h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 10 = 10$$

Jadi, percepatan pada setiap saat = 10.

2. Ditentukan jarak s meter yang ditempuh dalam waktu t detik oleh benda yang jatuh dinyatakan oleh rumus $s = 4t^2$.
   a. Hitunglah kecepatan jatuhnya benda pada saat $t = 5$ detik.
   b. Tentukan pula percepatannya.

   Penyelesaian

   a. $s = 4t^2$

   $v = \frac{ds}{dt} = 8t$

   Kecepatan pada $t = 5$ detik adalah:

   $v = 8t$

   $= 8 \cdot 5 = 40$ m/det

   b. $a = \frac{dv}{dt} = 8$

   Jadi, percepatan pada $t = 5$ detik adalah 8 m/detik^2.

3. Jarak s meter yang ditempuh dalam waktu t detik yang dinyatakan dengan rumus $s = 3t^2 - 6t + 5$.
   a. Hitunglah kecepatan pada saat $t = 3$.
   b. Tentukan percepatannya pada waktu yang sama.

   Penyelesaian

   a. $s = 3t^2 - 6t + 5$

   $v = \frac{ds}{dt} = 6t - 6$

   Kecepatan pada $t = 3$ detik adalah:

   $v = 6 \cdot t - 6$

   $= 6 \cdot 3 - 6 = 12$ m/det

   b. $a = \frac{dv}{dt} = 6$

   Jadi, percepatan pada $t = 3$ detik adalah $a = 6$ m/detik^2.

E. Teorema L'Hopital

Penggunaan turunan untuk menghitung bentuk-bentuk tak tentu limit fungsi dikenal sebagai Teorema L'Hopital. Misal f(x) dan g(x) adalah fungsi-fungsi yang diferensiabel.

Jika $g' \neq 0$ untuk setiap x ≠ a dan jika $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ mempunyai bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$ pada x = a maka:

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ dengan catatan } \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ ada}}$$

Apabila $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ masih mempunyai bentuk tak tentu. Diteruskan dengan menggunakan turunan kedua $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ = ... dan seterusnya. Sehingga diperoleh nilai limitnya.

Contoh soal

Hitunglah limit berikut menggunakan teorema L'Hopital.

a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x}$

b. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x7 - 1}{x - 1}$

Penyelesaian

a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{5 \cos 5x}{1} = 5 \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 5x}{1}$

$= 5 \cdot \frac{\cos 0}{1} = \frac{5 \cdot 1}{1} = 5$

b. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x7 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{7x}{1} = \frac{7 \cdot 1}{1}$

Latihan 8.8

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan benar.

1. Jarak suatu benda yang bergerak dinyatakan dengan $s = 2t^2 - 3$, s dalam meter dan t dalam detik.
   a. Carilah kecepatannya pada $t = 5$ detik.
   b. Carilah percepatannya pada $t = 5$ detik
2. Sebuah benda bergerak menurut lintasan sepanjang s meter pada waktu t detik dan dirumuskan dengan $s = t^3 - 6t$.
   a. Carilah besarnya kecepatan dan percepatan benda sebagai fungsi t.
   b. Hitunglah besarnya kecepatan dan percepatan benda pada saat $t = 2$ detik.
3. Sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus dirumuskan $s = 16 - 2t^2 + t^3$ dimana s dalam meter dan t dalam detik. Tentukan nilai berikut:
   a. panjang lintasan pada $t = 2$ dan $t = 4$,
   b. rumus kecepatan dan percepatan,
   c. kecepatan pada $t = 2$ dan percepatan pada $t = 3$,
   d. kecepatan pada waktu percepatannya = 0.
4. Sebuah benda diluncurkan ke bawah pada suatu permukaan yang miring dengan persamaan gerak $s = t^3 - 6t^2 + 12t + 1$. Tentukan waktu yang dibutuhkan agar percepatan benda 48 m/det^2.
5. Dengan teorema L'Hopital hitunglah limit-limit fungsi berikut.

   a. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{x^2-9}$ b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - 2\cos 2x}{x^2}$

Rangkuman

1. Jika diketahui fungsi $f(x)$, maka turunan pertamanya didefinisikan:

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. Turunan dari $f(x) = x^n$, adalah $f'(x) = n\,x^{n-1}$, $n \in R$.

   $f(x) = ax^n$, adalah $f'(x) = a\,n\,x^{n-1}$, a konstan, $n \in R$

3. Jika kurva $y = f(x)$, maka gradien garis singgung kurva tersebut di $x = a$ adalah:

   $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

   Persamaan garis singgung dari kurva $y = f(x)$ melalui (x_1, y_1) adalah:

   $(y - y_1) = m(x - x_1)$ atau $(y - y_1) = f'(x_1)\,(x - x_1)$

4. Rumus-rumus turunan fungsi aljabar:
   a. Jika $y = u + v$, maka $y' = u' + v'$
   b. Jika $y = u - v$, maka $y' = u' - v'$
   c. Jika $y = u\,v$, maka $y' = u'v + uv'$
   d. Jika $y = \frac{u}{v}$, maka $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
   e. Jika $y = u^n$, maka $y' = n\,u^{n-1}\,u'$, di mana $u = f(x)$
5. Turunan fungsi trigonometri
   a. Jika $y = \sin x$, maka $y' = \cos x$
   b. Jika $y = \cos x$, maka $y' = -\sin x$
6. Fungsi $f(x)$ dikatakan naik jika $f'(x) > 0$, dan fungsi $f(x)$ dikatakan turun jika $f'(x) < 0$.
7. Fungsi $f(x)$ dikatakan stasioner jika $f'(x) = 0$
   Jenis titik stasioner ada 3 yaitu:
   a. titik balik maksimum,
   b. titik balik minimum, dan
   c. titik belok horizontal.
8. Untuk menggambar grafik $y = f(x)$ dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut.
   a. Menentukan titik-titik potong grafik fungsi dengan sumbu-sumbu koordinat.
   b. Menentukan titik-titik stasioner dan jenisnya.
   c. Menentukan titik-titik bantu (menentukan nilai y untuk x besar positif dan untuk x besar negatif).
9. Turunan kedua dari suatu fungsi $y = f(x)$ adalah turunan dari turunan pertama dan diberi lambang:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2}$$

10. Dari suatu lintasan $s = f(t)$, maka berlaku:

$$\text{kecepatan} = v = \frac{ds}{dt}$$

$$\text{percepatan} = a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

Evaluasi

I. Pilih salah satu jawaban yang paling tepat.

1. Jika diketahui $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 5x + 8$, nilai dari $f'(2)$ adalah ….
   a. 13
   b. 21
   c. 23
   d. 33
   e. 49

2. Turunan dari $f(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$ adalah $f'(x) = $ ….
   a. $\dfrac{-3}{x\sqrt{x}}$
   b. $\dfrac{-3}{2x\sqrt{x}}$
   c. $\dfrac{-3}{4x\sqrt{x}}$
   d. $\dfrac{3}{x\sqrt{x}}$
   e. $\dfrac{6}{x\sqrt{x}}$

3. Diketahui fungsi $h(x) = x^2 + 3x$, maka $h(i + t) - h(t)$ adalah ….
   a. $2i + 3$
   b. $2t + 4$
   c. $5t^2$
   d. $t^2 + 3t$
   e. $t^2 + 5t$

4. Rumus untuk $f'(x)$ jika $f(x) = x - x^2$ adalah ….
   a. $1 - x$
   b. $1 - 2x$
   c. $1 - 2x^3$
   d. $x^2 - x^3$
   e. $x - 2x^2$

5. Fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ turun untuk ….
   a. $2 < x < 6$
   b. $1 < x < 4$
   e. $1 < x < 3$
   d. $0 < x < 2$
   e. $1 < x < 2$

6. Grafik dari $f(x) = x^3 - x^2 - 12x + 10$ naik untuk interval ….
   a. $3 < x < -2$
   b. $-2 < x < 3$
   c. $x < -2$ atau $x > 3$
   d. $x < 2$ atau $x > -3$
   e. $x < -3$ atau $x > -2$

7. Grafik fungsi $f(x) = x\,(6 - x)^2$ akan naik dalam interval ….
   a. $x < 0$ atau $x > 6$
   b. $0 < x < 6$
   e. $x < 2$ atau $x > 6$
   d. $x > 6$
   e. $x < 6$

8. Fungsi f yang dirumuskan dengan $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ turun pada interval ….

a. $-1 < x < 2$
d. $1 < x < 0$
b. $-2 < x < 1$
e. $1 < x < 4$
e. $1 < x < 3$

9. Titik-titik stasioner dari kurva $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ adalah ….

a. $(-1, 15)$ dan $(3, -17)$
d. $(1, -1)$ dan $(3, -17)$
b. $(-1, 15)$ dan $(-3, -17)$
e. $(3, -17)$ dan $(-2, 8)$
c. $(1, -1)$ dan $(-3, -17)$

10. Persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - 4x$ di titik yang absisnya 1 adalah ….

a. $x - y - 2 = 0$
d. $x + 2y + 1 = 0$
b. $x + y + 2 = 0$
e. $2x - 2y + 1 = 0$
c. $2x + y + 1 = 0$

11. Persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - 4$ yang tegak lurus garis $x - 2y + 4 = 0$ adalah ….

a. $2x + y + 5 = 0$
d. $x + y + 2 = 0$
b. $x + 2y + 5 = 0$
e. $2x - y - 5 = 0$
c. $x - 2y - 5 = 0$

12. Turunan dari $f(x) = 2 \sin 5x$ adalah $f'(x) = ...$

a. $2 \cos 5x$
d. $5 \cos 5x$
b. $10 \cos 5x$
e. $-2 \cos 5x$
c. $-10 \cos 5x$

13. Jika $f(x) = \sin^2 x$, maka nilai x yang memenuhi $f'(x) = \frac{1}{2}$ adalah ….

a. π
d. $\frac{\pi}{6}$
b. $\frac{\pi}{3}$
e. $\frac{\pi}{12}$
c. $\frac{\pi}{4}$

14. Jika $f(x) = 2 \sin x + \cos x$, maka $f'(\frac{\pi}{2}) = ...$

a. -1
d. -2
b. 2
e. 0
c. 1

15. Jika $y = \cos \frac{3}{x}$, maka $\frac{dy}{dx} = ...$

a. $-3 \sin \frac{3}{x}$
d. $-\frac{3}{x^2} \sin \frac{3}{x}$
b. $-\frac{2}{3} \sin \frac{3}{x}$
e. $\frac{2}{3} \sin \frac{3}{x}$
c. $\frac{3}{x^2} \sin \frac{3}{x}$

16. Fungsi $f(x)$ yang ditentukan oleh $f(x) = (x^3 - 1)^2$ dalam interval $-1 < x < 1$ mempunyai nilai minimum dan maksimum berturut-turut adalah ....

a. -4 dan 0
b. -1 dan 2
c. 2 dan 4
d. 0 dan 2
e. 0 dan 4

17. Fungsi $f(x)$ yang ditentukan oleh $f(x) = x^3 + ax^2 + 9x - 8$ mempunyai nilai stasioner untuk $x = 1$. Nilai a adalah ....

a. -6
b. -4
c. -2
d. 2
e. 4

18. Nilai maksimum dari $y = x^3 - 3x + 2$, pada interval $-2 < x < 2$ adalah ....

a. 6
b. 5
c. 4
d. 3
e. 2

19. Jumlah dua bilangan x dan y adalah 96. Jika x^3y maksimum maka nilai x adalah ....

a. 30
b. 25
c. 24
d. 20
e. 15

20. Diketahui keliling suatu persegi panjang $(2x + 20)$ cm dan lebarnya $(8 - x)$ cm. Agar luas persegi panjang maksimum maka panjangnya adalah ....

a. 3 cm
b. $3\frac{1}{2}$ cm
c. 10 cm
c. $4\frac{1}{2}$ cm
d. 9 cm

II. Kerjakan soal-soal berikut ini dengan benar.

1. Tentukan turunan fungsi di bawah ini pada titik yang diberikan.

a. $f(x) = x^3 + 4x - 1$ pada titik $x = 0$ dan $x = 1$

b. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$ pada $x = \dfrac{1}{4}$ dan $x = 1$

2. Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut

a. $y = 2x^2 - 3x - \dfrac{3}{x^2}$

b. $y = 3x\ (x^2 + 2x)$

c. $y = (3x + 4)^2$

d. $y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

3. Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut.

   a. $y = (4x^2 + 5x)(2x^2 - 6x + 1)$

   b. $y = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^4}\right)(3x^3 + 27)$

   c. $f(x) = (x^2 + 8)^{12}$

   d. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 3}$

4. Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi trigonometri berikut.

   a. $f(x) = \cos(x^2 + 1)$

   b. $f(x) = 6 \operatorname{cosec} x$

   c. $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

   d. $f(x) = x^2 \sec x$

5. Suatu fungsi didefinisikan oleh $f(x) = x^3 - 2x^2 - px - 5$. Jika fungsi itu memiliki nilai stasioner untuk $x = 5$, tentukan:

   a. nilai p;

   b. nilai stasioner untuk fungsi $f(x)$;

   c. titik stasionernya.

6. Tentukan titik stasioner dan jenisnya dari fungsi $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$.

7. Gambarlah kurva $y = (x - 1)^2 (x + 2)$.

8. Carilah persamaan garis singgung pada kurva $y = x^2 - 5x + 7$ yang tegak lurus garis $x + 3y = 9$.

9. Tentukan bilangan cacah yang jumlahnya 16 agar hasil kali salah satu dengan kuadrat bilangan lainnya menjadi maksimum.

10. Suatu persegi panjang diketahui keliling = $(2x + 24)$ cm dan lebar = $(8 - x)$ cm. Agar luasnya maksimum, hitunglah panjang, lebar, dan luas persegi panjang.

Glosarium

- ***Akar rasional*** : akar suatu persamaan yang bernilai positif. 162
- ***Algoritma*** : prosedur atau rumus perhitungan untuk menyelesaikan suatu bentuk persoalan. 145
- ***Aljabar*** : membahas struktur dari operasi-operasi pertambahan, perkalian, pemecahan, persamaan dan perangkat-perangkat aksioma. 180, 223
- ***Bimodal*** : suatu data yang mempunyai dua modus. 27
- ***Binomial*** : suku dua 68, 69
- ***Desil*** : membagi data yang telah diurutkan menjadi sepuluh bagian yang sama besar. 32
- ***Deviasi standar*** : akar dari jumlah kuadrat deviasi dibagi banyaknya data. 39
- ***Diagram batang daun*** : diagram yang terdiri dari batang dan daun. Batang memuat angka puluhan dan daun memuat angka satuan. 8
- ***Diagram batang*** : diagram berbentuk batang-batang tegak atau mendatar dan sama lebar dengan batang-batang terpisah untuk menggambarkan perkembangan nilai suatu objek penelitian dalam kurun waktu tertentu. 7
- ***Diagram cartesius*** : diagram yang menggunakan dua buah sumbu yang berpotongan tegak lurus di titik asal O. 173
- ***Diagram garis*** : diagram berbentuk garis yang digunakan untuk menyajikan data statistik yang diperoleh berdasarkan pengamatan dari waktu ke waktu secara berurutan. 5
- ***Diagram kotak garis*** : diagram berupa kotak dan garis untuk menggambarkan data terkecil, data terbesar, Q_1,Q_2, dan Q_3. 9
- ***Diagram lingkaran*** : gambar berbentuk lingkaran untuk menyajikan data statistik. 6
- ***Domain*** : daerah asal. 174
- ***Faktorial*** : perkalian suatu bilangan dengan bilangan-bilangna lainnya yang lebih kecil hingga angka 1. 58
- ***Frekuensi harapan*** : banyaknya kejadian dikalikan dengan peluang kejadian itu. 72
- ***Fungsi linear*** : fungsi yang ditentukan oleh $f(x) = ax + b$, di mana a dan b bilangan konstan, dan grafiknya berupa garis lurus. 175
- ***Fungsi*** : relasi dua himpunan A dan B yang memasangkan setiap anggota pada himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B. 173
- ***Garis singgung lingkaran:*** garis yang menyentuh suatu titik pada keliling lingkaran. 127
- ***Gradien*** : kemiringan. 128, 129, 133, 134, 237, 238

- ***Histogram*** : diagram frekuensi yang berbentuk batang berimpit. 14
- ***Horner*** : cara menentukan nilai suku banyak dengan skema. 146
- ***Invers*** : pengingkaran dari suatu fungsi. 187
- ***Jangkauan*** : selisih nilai terbesar dan nilai terkecil. 31
- ***Jari-jari lingkaran*** : jarak antara titik pusat lingkaran dengan setiap titik pada kelilingnya. 117, 119
- ***Kodomain*** : daerah kawan. 174
- ***Kombinasi*** : susunan yang mungkin dari unsur-unsur yang berbeda dengan tidak memperhatikan urutannya. 57, 66
- ***Korespondensi satu-satu*** : relasi yang memasangkan setiap domain dengan tepat satu kodomain dan tidak ada domain yang tidak mendapatkan pasangan. 187
- ***Kuadrat*** : bilangan-bilangan yang dikalikan bilangan-bilangan itu sendiri. 151, 155
- ***Kuartil*** : membagi data yang telah diurutkan menjadi empat bagian yang sama banyak. 29
- ***Lingkaran*** : bangun di mana setiap titik pada kelilingnya mempunyai jarak yang sama dari pusatnya.117
- ***Mean*** : rata-rata hitung. 19
- ***Median*** : nilai tengah yang telah diurutkan. 24
- ***Modus*** : nilai yang paling sering muncul. 27
- ***Multimodal*** : suatu data yang mempunyai lebih dari satu modus. 27
- ***Ogive*** : kurva frekuensi kumulatif. 17
- ***Peluang*** : kemungkinan munculnya suatu kejadian. 72
- ***Pemetaan*** : (= fungsi), relasi dua himpunan A dan B yang memasangkan setiap anggota pada himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B
- ***Permutasi*** : susunan yang mungkin dari unsur-unsur yang berbeda dengan memperhatikan urutannya. 57, 60
- ***Persentil*** : Membagi data yang telah diurutkan menjadi 100 bagian yang sama. 33, 34
- ***Poligon*** : diagram yang diperoleh dari menghubungkan titik-titik tengah dari histogram. 15
- ***Populasi*** : keseluruhan objek penelitian 72
- ***Range*** : hasil. 37, 174
- ***Relasi*** : memasangkan anggota himpunan satu ke himpunan lain. 173
- ***Sampel*** : sebagian dari objek penelitian yang dianggap mewakili keadaan populasi objek penelitian 72
- ***Segitiga Pascal*** : bilangan-bilangan yang disusun membentuk segitiga yang mempunyai pola tertentu. 68

- ***Simpangan rata-rata (deviasi rata-rata)*** : nilai rata-rata dari selisih setiap data dengan nilai rataan hitung. 38
- ***Statistika*** : cabang dari matematika terapan yang mempunyai cara-cara mengumpulkan dan menyusun data, mengolah dan menganalisis data serta menyajikan data dalam bentuk kurva atau diagram, menarik kesimpulan, menafsirkan parameter dan menguji hipotesa yang didasarkan pada hasil pengolahan data. 5
- ***Suku banyak*** : suatu bentuk yang memuat variabel berpangkat. 145
- ***Titik sampel*** : setiap hasil yang mungkin terjadi pada suatu percobaan. 72
- ***Trigonometri*** : ilmu ukur mengenai sudut dan sempadan segitiga. 99, 106, 205
- ***Turunan*** : laju perubahan suatu fungsi terhadap perubahan peubahnya. 223, 226, 228, 233
- ***Uni modal*** : suatu data yang mempunyai satu modus. 27
- ***Variansi*** : kuadrat dari simpangan baku 45

Notasi Matematika

- $\circ$: derajat 6, 7, 90, 94–100
- nP_r : permutasi dari n unsur diambil r unsur 58, 59, 64, 78
- nC_r : kombinasi dari n unsur yang berbeda dengan setiap pengambilan dengan r unsur 64, 65, 79
- $P(A)$: peluang dari suatu kejadian A 70–74, 76, 77, 79
- m : gradien 123, 126, 127, 131, 132, 135, 235, 236
- x^n : x berderajat n 143, 145, 163, 223
- $\in$: elemen (anggota) 171, 176
- $\neq$: tidak sama dengan 77, 79, 94, 95, 143, 176, 186, 192
- A^C : komplemen A 68, 74, 75
- $\cdot$: (dot), perkalian sakelar 21, 22, 39, 41, 105, 160, 164
- $\times$: (cross), perkalian vektor 77, 79, 179
- $|\ |$: harga mutlak 38, 39, 45, 175
- f^{-1} : fungsi invers dari f 185, 186, 187, 189, 190
- $\lim\limits_{x \to a} f(x)$: limit fungsi jika x mendekati a 198, 206
- ∞ : tak berhingga 198–203, 214
- $>$: lebih dari 121–124, 135, 238
- $<$: kurang dari 41, 45, 121, 123, 135, 173, 175, 221
- $\leq$: kurang dari atau sama dengan 14, 16, 18, 72, 79, 173, 175, 221
- $>$: lebih dari atau sama dengan 14, 16, 18, 41, 45, 175
- $\sum$: jumlah data 19–22, 38–42, 44–46, 66, 67
- $\overline{x}$: rataan hitung 19–21, 39, 40, 44, 45
- Me : (median), nilai tengah suatu data yang telah diurutkan 24, 25
- Mo : (modus), nilai yang paling sering muncul 27, 28
- Q : (kuartil), membagi data menjadi empat bagian yang sama banyak 9, 10, 29–31, 44
- S : simpangan baku 39–41, 45
- S^2 : variansi 42
- $n!$: faktorial 56, 58, 59, 61, 62, 78
- $\cap$: irisan 75–77, 79
- $\cup$: (union), gabungan 75–77, 79

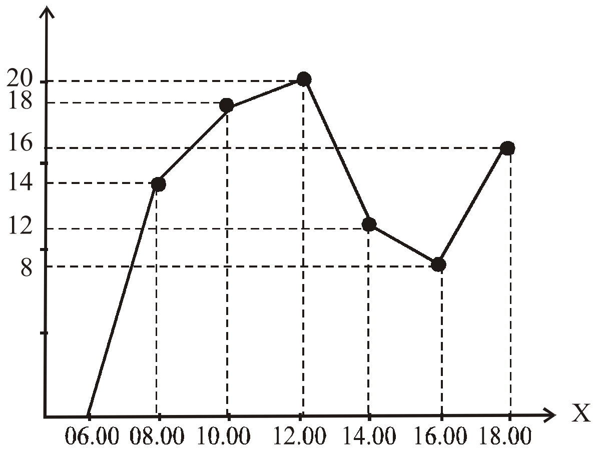
Kunci Jawaban

Evaluasi Bab 1 Statistika

I. 1. B 3. A 5. C 7. C 9. B 11. C 13. B 15. D
17. E 19. D

II.

1. Kendaraan



b. 20 kendaraan

3. a. 15 siswa

5. *Mo* = 16,49

7. *Me* = 63

9. a. Statistik lima serangkainya adalah 40, 46,17, 49,5, 53, 61
b. Hamparan (*H*) = 6, 83

Evaluasi Bab 2 Peluang

I. 1. B 3. E 5. C 7. B 9. D 11. B 13. E 15. D
17. D 19. D

II.

1. a. 75 b. 40

3. $\frac{6}{45}$

5. $\frac{7}{36}$

7. b. $n = 7$

9. Koefisien suku ke-5 = –280.

Evaluasi Bab 3 Trigonometri

I. 1. A 3. D 5. A 7. C 9. E 11. D 13. A 15. B
17. B 19. D

II.

1. a. $\frac{63}{65}$

3. a. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ b. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

5. a. $\dfrac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \dfrac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\tan \frac{1}{2}(A+B)}$

Penyelesaian ruas kiri

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)}{2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \; \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A-B)}$$

$$= \cot \frac{1}{2}(A+B) \cdot \tan \frac{1}{2}(A-B) = \frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\tan \frac{1}{2}(A+B)}$$

Terbukti ruas kiri sama dengan ruas kanan.

b. $\dfrac{\sin 3A + \sin A}{\cos 3A + \cos A} = \tan 2A$

Penyelesaian ruas kiri

$$\frac{\sin 3A + \sin A}{\cos 3A + \cos A} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(3A+A) \cos \frac{1}{2}(3A-A)}{2 \cos \frac{1}{2}(3A+A) \cos \frac{1}{2}(3A-A)}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2} \cdot 4A \;\cos \frac{1}{2} \cdot 2A}{\cos \frac{1}{2} \cdot 4A \cos \frac{1}{2} \cdot 2A} = \frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \tan 2\text{A}$$

Terbukti ruas kiri sama dengan ruas kanan.

7. a. $\cos A = \sqrt{0,875}$ b. $\sin A = \sqrt{0,125}$

9. $\cos A \sin B = \frac{1}{6}$

Evaluasi Bab 4 Lingkaran

I. 1. C 3. D 5. D 7. A 9. D 11. C 13. A 15. C

II.

1. a. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2y + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$
Pusat (2, –1) dan $r = 2$
b. Pusat (–1, 2) dan $r = 3$
3. a. Pusat $O(0, 0)$, jari-jari 6 $\Rightarrow$ persamaan lingkaran: $x^2 + y^2 = 36$
b. Pusat $A(-2, 5) \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 10y + 29 = 0$
c. Pusat $B(3, -4) \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$
5. a. $r = 5$, pusat (0, 0) $\Rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$
b. $r = 5\sqrt{2}$, pusat (0, 0) $\Rightarrow x^2 + y^2 = 50$
7. a. $x = 5$ pada garis singgung, maka $y = \pm 4$
Persamaan garis singgung: $x_1x + y_1y = 41 \Leftrightarrow 5x + 4y = 41$ atau $5x - 4y = 41$
b. Sejajar garis $3x + 3y = 10 \Rightarrow m_1 = -1$, agar sejajar maka $m_2 = -1$
Persamaan garis singgung: $y = mx \pm r\sqrt{1+m^2} \Leftrightarrow y = -x \pm \sqrt{82}$.
c. Tegak lurus $3x - 6y = 8 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$, agar tegak lurus maka $m_1 \cdot m_2 = -1$ atau $m_2 = -2$. Persamaan garis singgung: $y = -2x \pm \sqrt{205}$.
9. Tegak lurus garis $3x + y + 3 = 0$, maka $x - 3y - 18 = 0$ atau $x - 3y + 22 = 0$.

Evaluasi Bab 5 Suku Banyak

I. 1. B 3. A 5. D 7. E 9. A 11. B 13. E 15. C

II.

1. $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 3) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
a. Derajat sukunya 3
b. Koefisien variabel x^3 adalah 1, x^2 adalah 2, x adalah –5
c. Suku tetapnya –6
3.
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ & & -1 & 4 & -5 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & \boxed{-8} \end{array}$$
Hasil bagi $x^2 - 4x + 5$ dan sisa –8

5. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x + p$ habis dibagi $x + 1$
$f(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 - 4(-1) + p$
$0 = 7 + p \Rightarrow p = -7$
7. Sisa: $6x + 8$
9. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2px^2 + x + 1$
$f(-1) = (-1)^4 - 5(-1)^3 + 2p(-1)^2 + (-1) + 1 \Rightarrow p = -3$
11. HP = $\{-\frac{1}{2}, -3, 1\}$
13. $-x^4 + 3x^3 + x^2 + x - p$ dibagi $x - 2$ tersisa $-19 \Rightarrow p = 33$
15. a. $-\frac{b}{a} = \frac{-(-4)}{2} = 2$
b. $\frac{c}{a} = \frac{-18}{2} = -9$
c. $\frac{-d}{a} = \frac{-36}{2} = -18$

Evaluasi Bab 6 Komposisi Fungsi dan Invers Fungsi

I. 1. B 3. C 5. C 7. A 9. C 11. B 13. C 15. D

II.

1. a. Yang merupakan fungsi (a) dan (d)
b. fungsi (a) domain = {1, 2, 3, 4}, kodomain = $\{a, b, c, d\}$, range = $\{a, c, d\}$
fungsi (d) domain = {1, 2, 3, 4}, kodomain = $\{a, b, c, d\}$, range = $\{b, d\}$
3. a. $2x^2 + 3$ c. 5
b. $2x^2 + 8x + 9$ d. 1
5. a. $\frac{x-9}{6}$ c. $\frac{x-5}{3}$
b. $\frac{x-2}{6}$ d. $-\frac{2}{3}$

Evaluasi Bab 7 Limit Fungsi

I. 1. C 3. D 5. B 7. E 9. B 11. B 13. D 15. D
17. B 19. A

II.

1. a. 1 b. $\frac{3}{2}$ c. 1
3. a. 4 b. 4 c. $-\frac{1}{2}$
5. a. 3 c. 0 e. 1
b. $\sqrt{2}$ d. $\frac{1}{2}$

Evaluasi Bab 8 Turunan Fungsi

I. 1. C 3. A 5. E 7. R 9. A 11. A 13. C 15. E
17. A 19.C

II.

1. $f(x) = x^3 + 4x - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 4$
   $f(0) = 4$ dan $f(1) = 7$

3. a. $y' = 32x^3 - 42x^2 - 2x + 5$

   b. $y' = \frac{432}{x^5} - \frac{30}{x^3}$

   c. $f'(x) = 24x\,(x^2 + 8)^{11}$

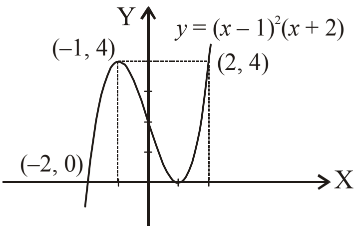
   f. $f'(x) = \frac{2x - 2}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 2x + 3)^2}}$

5. a. $p = 55$

   b. 345

   c. (5, 345)

7. Grafik:



9. 0 dan 16

Daftar Pustaka

Alders, CJ. 1987. *Ilmu Aljabar*. Jakarta: Pradnya Paramita.

——. 1987. *Ilmu Ukur Segitiga*. Jakarta: Pradnya Paramita.

Ayres JR, Frank. 1965. *Modern Algebra*. New York: Schaum Publishing.

——. 1954. *Plane and Spherical Trigonometry*. New York: Mc. Graw Hill Sook Company.

Budhi Setya Wono. 2003. *Langkah Awal Menuju Olimpiade*. Jakarta: Ricardo.

Handayani, dkk. 1991. *Evaluasi Matematika I*. Klaten: Intan Pariwara.

Nasoetion, Hakim Andi. 2003. *Matematika I.* Jakarta: Balai Pustaka.

Negoro ST, dkk. 1982. *Ensiklopedia Matematika*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

Puncell. J. Edwin, Dale Varberg. 1999. *Kalkulus dan Geometri Analisis*. Jakarta: Erlangga.

Rawuh R, dkk. 1962. *Ilmu Ukur Analisis Jilid 1 dan 2*. Bandung: Terate.

Roy, Hollands. 1991. *Kamus Matematika*. Jakarta: Erlangga.

Saputro, Tirto. 1992. *Pengantar Dasar Matematika*. Jakarta: Erlangga.

Soehakso RMST. 1978. *Pengantar Matematika Modern*. Jogjakarta: UGM Press.

Soemartojo N. 1992. *Kalkulus II*. Jakarta: Universitas Terbuka, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.

——. 1994. *Program Linear*. Jakarta: Universitas Terbuka, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.

Tim Penulis Matematika. 2007. *Rumus-Rumus Dasar Matematika*. Jogjakarta: Pustaka Widyatama.

Indeks

matematika 2

Belajar matematika bisa mudah dan mengasyikkan.

Sebagai ilmu universal, matematika memiliki peran penting dalam perkembangan teknologi modern. Kamu tentu tidak ingin ketinggalan zaman, maka penguasaan konsep matematika menjadi kebutuhanmu.

Apa yang akan kamu pelajari dalam buku ini?

Buku Matematika untuk SMA dan MA ini menyajikan aspek-aspek matematika yang meliputi logika, aljabar, geometri, trigonometri, kalkulus, statistika, dan peluang yang dapat kamu pahami dengan mudah dan mengasyikkan.

Dengan mempelajari buku ini, kamu akan mampu mengaplikasikan pemahamanmu untuk memecahkan masalah dengan pendekatan matematika dalam kehidupan. Dengan bekal pembelajaran matematika dari buku ini, kamu diharapkan mampu berpikir logis, analitis, sistematis, kritis, dan kreatif dalam menghadapi keadaan zaman yang selalu berubah, tidak pasti, dan kompetitif.

ISBN 979 462 586 8

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 34 Tahun 2008 tanggal 10 Juli 2008 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

HET (Harga Eceran Tertinggi) Rp.