

LIMIT FUNGSI

A. Menentukan Limit Fungsi Aljabar

A.1. Limit $x \rightarrow a$

Contoh A.1:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 2 + 1 = 3$

Contoh A.2 :

$$2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$

Latihan 1

1. Hitunglah nilai limit fungsi-fungsi berikut ini.

a. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1)$

.....
.....
.....

b. $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 4)$

.....
.....
.....

c. $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x + 4)$

.....
.....
.....

d. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{10 - x}$

.....



2. Hitunglah nilai limit fungsi-fungsi berikut ini.

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

.....
.....
.....

b. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

.....
.....
.....

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$

.....
.....
.....

Kesimpulan :

.....
.....
.....
.....

A.2. Limit $x \rightarrow \infty$

Perhatikan contoh berikut !

Misalkan fungsi f ditentukan dengan rumus $f(x) = \frac{1}{x}$. Yang menjadi pertanyaan berapa

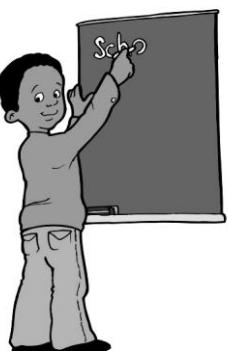
nilai $f(x)$ jika x mendekati tak-berhingga atau ditulis $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$. Untuk menjawab

pertanyaan tersebut, perhatikan tabel berikut.

X	1	2	3	4	...	10	...	100	...	10.000	...	100.000	...	∞
$\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$...	$\frac{1}{10}$...	$\frac{1}{100}$...	$\frac{1}{10.000}$...	$\frac{1}{100.000}$...	$\rightarrow 0$

2

"We all gonna die, but the most important thing is what we do before the die became"
(Kita semua akan mati, tapi yang terpenting adalah perbuatan kita sebelum kematian itu datang)



Kesimpulan :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \dots$$

.....

Limit aljabar dengan peubah x mendekati tak-berhingga yang sering dijumpai biasanya berbentuk :

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - g(x)\}$

Dengan subsitusi langsung, didapat bentuk-bentuk $\frac{\infty}{\infty}$ atau $(\infty - \infty)$. Bentuk-bentuk itu dikenal sebagai bentuk-bentuk tak tentu. Oleh karena itu, perhitungan limit fungsi aljabar dengan peubah x mendekati tak-berhingga ditentukan dengan cara-cara sebagai berikut.

1. Membagi dengan pangkat tertinggi

Bentuk $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ dapat dihitung dengan cara membagi pembilang $f(x)$ dan penyebut $g(x)$ dengan x^n , dimana n adalah pangkat tertinggi dari $f(x)$ atau $g(x)$.

Contoh A.2.1

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-1}{8x+3}$

.....

.....

.....

Contoh A.2.2

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2-1}{x-2}$

.....



Contoh A.2.3

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^3 + 4x - 8}$

.....
.....
.....

Berdasarkan contoh diatas maka dapat diambil sebuah kesimpulan :

1. Jika pangkat tertinggi $f(x) =$ pangkat tertinggi $g(x)$, maka :
-
.....
.....

2. Jika pangkat tertinggi $f(x) >$ pangkat tertinggi $g(x)$, maka :
-
.....
.....

3. Jika pangkat tertinggi $f(x) <$ pangkat tertinggi $g(x)$, maka :
-
.....
.....

2. Mengalikan dengan faktor lawan

Bentuk $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - g(x)\}$ dapat dicari dengan cara mengalikan dengan $\frac{f(x) + g(x)}{f(x) + g(x)}$,

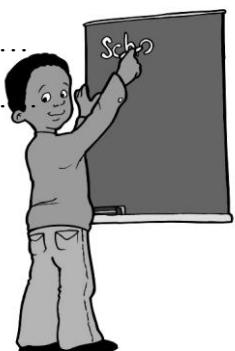
sehingga bentuk limit itu menjadi $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - g(x)\} \frac{f(x) + g(x)}{f(x) + g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^2(x) + g^2(x)}{f(x) + g(x)}$

Selanjutnya ditentukan dengan cara seperti pada contoh sebelumnya yaitu dengan membagi dengan pangkat tertinggi.

Contoh B.1:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})$

.....
.....
.....



Contoh B.2

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 4} - \sqrt{x^2 - x + 2})$

.....
.....
.....
.....
.....

Contoh B.3

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + 3x - 1})$

.....
.....
.....
.....
.....

Latihan 2

1. Hitunglah tiap limit fungsi berikut ini.

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 5}{2x + 4}$

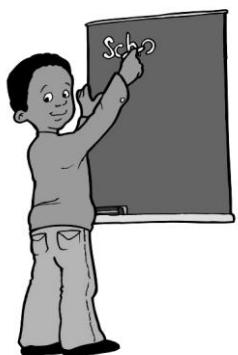
.....
.....
.....
.....
.....

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 2}{2x - 10}$

.....
.....
.....
.....
.....

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^3 + 7x^2 + 2x + 1}{x^3 - 2x^2 + 3x - 4}$

.....
.....
.....
.....
.....



d. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x} + x - 1}{\sqrt{x^3} + 2x - 1}$

.....
.....
.....

e. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - x + 5}{\sqrt{x^7} - 1}$

.....
.....
.....

2. Hitunglah tiap limit fungsi berikut :

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-4} - \sqrt{x+2})$

.....
.....
.....

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x + 4} - \sqrt{x^2 + x - 2})$

.....
.....
.....

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{4x^2 - 6x + 7} - (2x + 1) \right\}$

.....
.....
.....



B. TEOREMA LIMIT

Berikut ini adalah beberapa teorema limit yang sering digunakan untuk menentukan limit fungsi aljabar.

1. Jika $f(x) = k$, maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$ (untuk k konstanta dan a bilangan real)

Dikatakan :

Limit suatu fungsi konstanta nilainya sama dengan konstanta itu.

2. Jika $f(x) = x$, maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ (untuk tiap a bilangan real)

Dikatakan :

Limit suatu fungsi identitas nilainya sama dengan nilai pendekatan peubahnya.

3. a. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Dikatakan :

Limit jumlah beberapa fungsi sama dengan jumlah masing-masing limit fungsi.

- b. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Dikatakan :

Limit selisih beberapa fungsi sama dengan selisih masing-masing limit fungsi.

4. Jika k konstanta, maka $\lim_{x \rightarrow a} k.f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Dikatakan :

Limit hasil kali konstanta dengan fungsi sama dengan hasil kali konstanta dengan limit fungsi itu.

5. a. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x).g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Dikatakan :

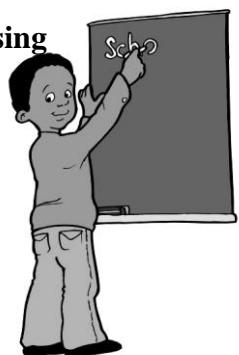
Limit hasil kali beberapa fungsi sama dengan hasil kali masing-masing limit fungsi.

- b. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, dengan catatan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

Dikatakan :

Limit hasil bagi beberapa fungsi sama dengan hasil bagi masing-masing limitnya dengan catatan limit penyebut tak boleh sama dengan nol.

6. a. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)\}^n = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\}^n$



Dikatakan :

Limit fungsi pangkat n sama dengan pangkat n dari limit fungsi itu.

b. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$, dengan catatan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$ untuk n genap

Dikatakan :

Limit akar pangkat n dari suatu fungsi sama dengan akar pangkat n dari limit fungsi itu.

C. Limit Fungsi Trigonometri

Jika $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ dan $f(x)$ merupakan fungsi trigonometri, maka limit itu dinamakan **limit fungsi trigonometri**. Berikut ini beberapa contoh bentuk limit fungsi trigonometri.

Dengan subsitusi langsung.

Contoh C.1 :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Contoh C.2 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2 x - \sin^2 x) = \{\cos^2(0) - \sin^2(0)\} = \{(1)^2 - (0)^2\} = 1$$

Contoh C.3 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x}$$

Dengan subsitusi langsung, diperoleh :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} = \frac{\sin(0)}{\sin 2(0)} = \frac{0}{0}$$

Oleh karena dengan subsitusi langsung diperolah bentuk $\frac{0}{0}$ (bentuk tak tentu),

maka kita harus berupaya dengan cara lain. Dengan mengingat bahwa $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, maka limit itu dapat ditentukan sebagai berikut:



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x \cos x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x} \\&= \frac{1}{2 \cos 0} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Jadi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}$

Rumus-rumus Limit Fungsi Trigonometri

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1\end{aligned}$$

Latihan 3

1. Hitunglah tiap limit fungsi Trigonometri berikut ini.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x$

.....
.....
.....

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

.....
.....
.....

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

.....
.....
.....

