# 19e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

**Mercredi 13 mars 2019[1], 2 énoncés (national et académique) en 4 heures, élèves de première générale et technologique[2] et de début de terminale[3], inscription auprès de votre professeur de mathématiques avant les vacances d'hiver selon académie.**

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

# SUJET + CORRIGÉ

## OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

## EXERCICES NATIONAUX

## Classes de première S • 2019

>> Métropole - Europe - Afrique - Orient - Inde

>> Amériques - Antilles - Guyane

>> Asie - Pacifique - Nouvelle Calédonie - Polynésie Française

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

académie Versailles

RÉGION ACADÉMIQUE ÎLE-DE-FRANCE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

# Olympiades nationales de mathématiques 2019

## Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

**Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition**.

# Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Triangles à côtés entiers*) et 2 (*Premières fois*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Triangles à côtés entiers*) et 3 (*AGADADAGA*).

# Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

## *Triangles à côtés entiers*

On dit qu'un triangle est un triangle entier si les longueurs de ses 3 côtés sont des entiers naturels non nuls.
On rappelle la propriété dite de l'« inégalité triangulaire » : dans tout triangle non aplati la longueur de chacun des côtés est strictement inférieure à la somme des longueurs des deux autres.

**1.** ***a.*** Parmi les triplets $(x, y, z)$ suivants, expliquer lequel désigne les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati, puis comment tracer ce triangle et avec quels outils :

(4, 4, 5) ; (3, 6, 9) ; (2, 2, 6)

***b.*** Quelles sont les valeurs possibles de l'entier $z$ si $(15, 19, z)$ désigne les longueurs des trois côtés d'un triangle entier non aplati rangées par ordre croissant de taille ?

***c.*** Étant donné trois entiers naturels non nuls $x, y$ et $z$ tels que $x \leq y \leq z$, quelle condition faut-il ajouter pour que le triplet $(x, y, z)$ désigne les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati ?

**2.** Soit $p$ un entier naturel non nul. On désigne par $E_p$ l'ensemble des triplets d'entiers naturels *rangés par ordre croissant* $x \leq y \leq z$ et désignant les côtés d'un triangle entier non aplati dont le périmètre est égal à $p$.
Ainsi obtiendrait-on $E_9 = \{(1, 4, 4), (2, 3, 4), (3, 3, 3)\}$ .
***a.*** Si le triplet $(x, y, z)$ appartient à $E_{18}$, quelles sont les valeurs maximale et minimale pour $z$ ?
***b.*** Donner la composition de $E_{18}$ et représenter dans un repère orthonormé l'ensemble des couples $(x, y)$ pour lesquels il existe un entier naturel $z$ tel que $(x, y, z) \in E_{18}$. Vérifier que ces couples se situent à l'intérieur ou sur les bords d'un triangle dont les sommets ont des coordonnées entières.

**3.** ***a.*** Justifier que si $(x, y, z) \in E_p$ alors $(x + 1, y + 1, z + 1) \in E_{p+3}$.

***b.*** Soit $(x, y, z) \in E_{p+3}$. Déterminer une condition sur $x, y$ et $z$ pour que $(x - 1, y - 1, z - 1) \in E_p$.

***c.*** En déduire que si $p$ est impair alors $E_p$ et $E_{p+3}$ ont le même nombre d'éléments.

**4. Étude de $E_{2\,019}$.**
***a.*** $E_{2\,019}$ contient-il un triplet $(x, y, z)$ correspondant à un triangle équilatéral ?
***b.*** $E_{2\,019}$ contient-il des triplets $(x, y, z)$ correspondant à des triangles isocèles non équilatéraux? Si oui combien ?
***c.*** Montrer que si $E_{2\,019}$ contient un triplet $(x, y, z)$correspondant à un triangle rectangle alors
$2\,019^2 = 4\,038(x + y) - 2xy$.
En déduire que $E_{2\,019}$ ne contient pas de triangle rectangle.

**5.** Dans cette question on se propose de dénombrer $E_{2\,019}$.
***a.*** Soit $(x, y, z) \in E_{2\,022}$. On rappelle que $x \leq y \leq z$. Justifier que $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$.
***b.*** Réciproquement, montrer que si $x \leq y$, $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$ alors

$$(x, y, 2\,022 - x - y) \in E_{2022}.$$

***c.*** Justifier que, dans un repère orthonormé, l'ensemble des couples $(x, y)$ d'entiers naturels tels que $x \leq y$, $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$ constitue l'ensemble des points à coordonnées entières d'un triangle $ABC$ qui est rectangle. En déterminer l'aire $\mathcal{A}$ ainsi que le nombre de points à coordonnées entières situés sur ses côtés.

***d.*** On admet le théorème de Pick : « Si un polygone $\boldsymbol{P}$ est tel que tous ses sommets sont à coordonnées entières dans un repère orthonormé alors son aire $\mathcal{A}$ est donnée par la formule $\mathcal{A} = i + \frac{j}{2} - 1$ où $i$ désigne le nombre de points à coordonnées entières situés à l'intérieur de $\boldsymbol{P}$ et $j$ le nombre de ceux situés sur les côtés de $\boldsymbol{P}$. »
En déduire le nombre de triplets de $E_{2\,022}$ puis celui de $E_{2\,019}$.

**6. Une solution algorithmique**
De manière générale, concevoir un programme (à retranscrire sur sa copie) permettant d'énumérer et de dénombrer $E_p$. Le tester sur $E_{18}$ et sur $E_{2\,019}$.

## Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

### *Premières fois*

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel qui a exactement 2 diviseurs entiers naturels distincts : 1 et lui-même. Par exemple : 2, 3 et 5 sont premiers alors que 0, 1 et 6 ne le sont pas.

***Décomposition en produit de facteurs premiers :***
Pour tout entier naturel $n \geq 2$, il existe un unique entier naturel $k$, une unique liste de nombres premiers distincts rangés dans l'ordre croissant $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_k)$ et une unique liste d'entiers naturels non nuls $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k)$ tels que :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$$

On écrit, par exemple, $72 = 2^3 \times 3^2$ (ici $k = 2$), ou $32 = 2^5$ (dans ce dernier exemple, $k = 1$). La décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre premier $p$ s'écrit simplement $p = p^1$.

***Une fonction agissant sur les nombres entiers naturels***
On souhaite savoir s'il est possible de considérer une fonction $\Delta\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ possédant les propriétés suivantes :
Propriété (1) : $\Delta(0) = \Delta(1) = 0$ ;
Propriété (2) : Pour tout entier premier $p$, $\Delta(p) = 1$ ;
Propriété (3) : Pour tous entiers naturels $a$ et $b$ : $\Delta(a \times b) = \Delta(a) \times b + a \times \Delta(b)$.
**1.** Soit $p$ un nombre premier. Les propriétés précédentes permettent-elles d'exprimer $\Delta(p^2)$ ? $\Delta(p^3)$ ? Un entier naturel $n$ étant donné, quelle est l'image par $\Delta$ de $p^n$ ?
**2. *a.*** Soit $p$ et $q$ des nombres premiers distincts, $m$ et $n$ des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. Les propriétés précédentes permettent-elles d'exprimer $\Delta(p^m \times q^n)$ ?
***b.*** Le nombre $\Delta(10^n)$ est-il un multiple de 7 pour $n \geq 1$ ?
**3.** À tout nombre entier $n \geq 2$, dont la décomposition en produit de facteurs premiers s'écrit :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$$

on associe les quotients $q_1$ de $n$ par $p_1$, $q_2$ de $n$ par $p_2$,... , $q_k$ quotient de $n$ par $p_k$.
***a.*** Montrer que si $n \geq 2$ alors,
$\Delta(n) = \alpha_1 \times q_1 + \alpha_2 \times q_2 + \alpha_3 \times q_3 + \dots + \alpha_k \times q_k$.
***b.*** Vérifier que l'expression ainsi obtenue satisfait les propriétés (2) et (3) ci-dessus.

***Étude de quelques images d'entiers par la fonction*** $\Delta$.
**4. *a.*** Calculer $\Delta(12), \Delta(56), \Delta(1\,001)$.
***b.*** Quelles sont les solutions de l'équation $\Delta(x) = 0$ ?
***c.*** Quelles sont les solutions de l'équation $\Delta(x) = 1$ ?
***d.*** Tout entier naturel $m$ a-t-il au moins un antécédent par $\Delta$ ?
***e.*** Est-il vrai que, pour tout entier naturel $n$, $\Delta(n) \leq n$ ?
**5. *a.*** Montrer que si $p$ et $q$ sont des nombres premiers alors $\Delta(p \times q) = p + q$.
***b.*** Est-il vrai que pour tous entiers naturels $a$ et $b$ : $\Delta(a \times b) = \Delta(a) + \Delta(b)$ ?
**6. *a.*** Est-il vrai que pour tous entiers naturels $a$ et $b$ : $\Delta(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b)$ ?
***b.*** Soient $a$ et $b$ deux entiers naturels tels que $\Delta(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b)$ et un entier naturel quelconque $k$.
Montrer que : $\Delta(ka + kb) = \Delta(ka) + \Delta(kb)$.

***Les points fixes de la fonction*** $\Delta$
**7. *a.*** Soit $p$ un nombre premier. Soit $m$ un entier naturel. On suppose que $m$ est un multiple de $p^p$. Montrer que dans ce cas, $\Delta(m)$ est aussi un multiple de $p^p$.
***b.*** Soit $n$ un entier naturel et $p$ un nombre premier. Soit $\alpha$ l'exposant de $p$ dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $n$. On suppose que $\alpha \geq 1$. Montrer que si $\alpha < p$, alors $\alpha - 1$ est l'exposant de $p$ dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $\Delta(n)$.
**8.** Résoudre l'équation $\Delta(x) = x$.

## Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries **autres** que la série S)

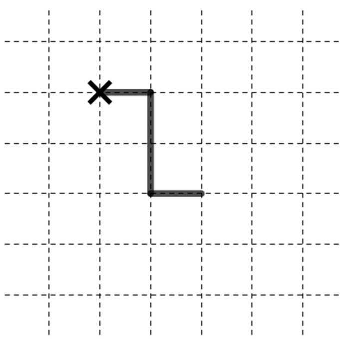
### *AGADADAGA*

Dans cet exercice, on appellera *mot* toute suite de lettres formée des lettres A, D et G. Par exemple : ADD, A, AAADG sont des *mots*.
Astrid possède un logiciel qui fonctionne de la manière suivante : un utilisateur entre un *mot* et, après un clic sur EXÉCUTER, chaque lettre A du *mot* (s'il y en a) est remplacée par le *mot* AGADADAGA. Ceci donne un nouveau *mot*.
Par exemple, si l'utilisateur rentre le *mot* AGA, on obtient le *mot* AGADADAGAGAGADADAGA. Un deuxième clic sur EXÉCUTER réitère la transformation décrite ci-dessus au nouveau *mot*, et ainsi de suite.

**1.** Quels sont les mots qui restent inchangés quand on clique sur EXÉCUTER ?

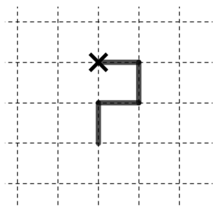
**Traitement de texte**
Astrid rentre le *mot* A.
**2.** Quel *mot* obtient-elle après avoir cliqué deux fois sur EXÉCUTER ?
**3.** Combien de clics au minimum faut-il pour obtenir un *mot* contenant un milliard de A ?
**4.** Après 20 clics, combien le mot obtenu contient-il de lettres D ?

**Motif**
Astrid souhaite maintenant dessiner un motif sur une feuille de papier quadrillé, en utilisant le dernier mot obtenu par le logiciel. Pour cela, elle lit de gauche à droite chaque lettre de ce mot et trace une ligne brisée sans lever le stylo en suivant les consignes suivantes :

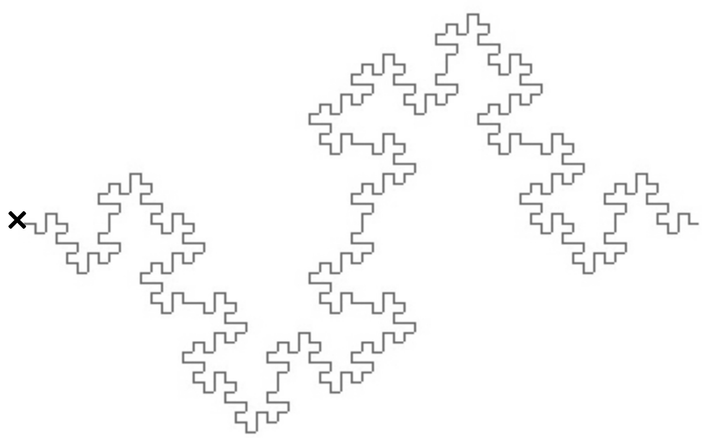


- Le point de départ de la ligne est une croix située sur un nœud du quadrillage ;
- si la lettre lue est A, elle trace horizontalement et de gauche à droite un segment de longueur un carreau ;
- si la lettre lue est G, elle tourne la feuille d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre ;
- si la lettre lue est D, elle tourne la feuille d'un quart de tour dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ;
- quand toutes les lettres sont lues, elle remet la feuille dans la position initiale pour regarder le motif obtenu.

Par exemple, le motif obtenu à partir du *mot* ADAAGA est représenté à gauche.



**5.** Astrid a réalisé le motif de droite. Quel *mot* avait-elle obtenu ?
**6.** Astrid entre le *mot* A et clique deux fois sur EXÉCUTER. Dessiner le motif obtenu.
**7.** Astrid reprogramme le logiciel et remplace le mot AGADADAGA par un autre mot dont elle ne se souvient plus. Elle rentre le mot A et obtient le motif ci-dessous après avoir cliqué trois fois sur EXÉCUTER. Quel est le mot oublié par Astrid ?
**8.** On s'intéresse dans cette question uniquement aux motifs obtenus à partir de *mots* qui commencent par la lettre A, et se poursuivent en juxtaposant des séquences GA ou DA. On appelle *largeur* du motif le nombre de carreaux compris entre les points les plus à gauche et à droite du motif obtenu. Par exemple, la largeur du motif obtenu à partir du *mot* ADAGAGA est 2.



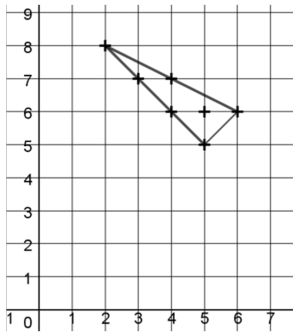
***a.*** Quelle est la largeur du motif obtenu à partir du *mot* AGAGADA ?
***b.*** Un *mot* conforme à l'hypothèse du **8.** comporte dix lettres D et dix lettres G. Déterminer toutes les largeurs possibles du motif obtenu.

# Correction

**Triangles à côtés entiers (Toutes séries)**

**Éléments de solution**

**1. *a.*** (4, 4, 5) est le seul qui réponde à la définition.
On trace un segment [BC] de longueur 5. Le cercle de centre B de rayon 4 coupe la médiatrice de [BC] en deux points. A est l'un d'eux.



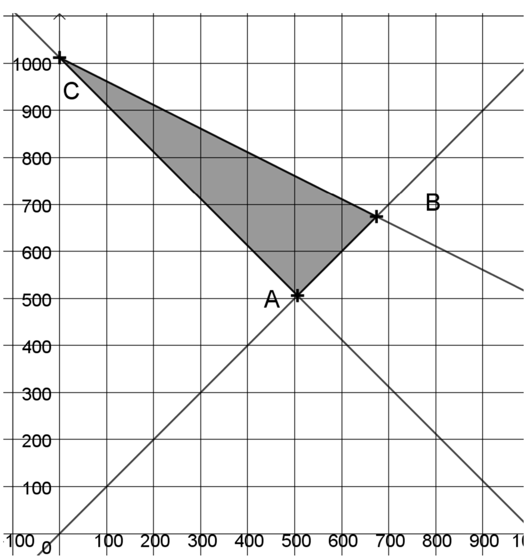

***b.*** En appliquant la définition $19 \leq z \leq 33$.
***c.*** C'est l'inégalité stricte qui manque : $z < x + y$. Une fois $z$ déclaré le plus grand, le fait que la longueur de chaque côté soit inférieure à la différence des longueurs des deux autres est acquis.

**2. *a.*** Comme $z < x + y$, $x + y + z > 2z$. Il s'ensuit que $z \leq 8$. La plus petite valeur de $z$ est celle pour laquelle les trois côtés sont de même longueur, 6.
***b.*** Pour énumérer les éléments de $E_{18}$ , on tient compte du fait que les deux plus petits côtés ont des longueurs $x$ et $y$ telles que $x + y > 9$. On obtient :
$E_{18} = \{(2,8,8), (3,7,8), (4,6,8), (4,7,7), (5,5,8), (5,6,7), (6,6,6)\}$. Le triangle est représenté ci-dessus.

**3. *a.*** L'inégalité est transportée lorsqu'on ajoute 1 au plus petit membre et 2 au plus grand, la somme est la bonne.
***b.*** Pour que le triplet $(x - 1, y - 1, y - 1)$ appartienne à $E_{p-3}$, il faut que $z - 1 < x - 1 + y - 1$, c'est-à-dire $z < x + y - 1$. Comme on a affaire à des entiers vérifiant $z < x + y$, il suffit que $z \neq x + y - 1$ et que d'autre part $x \neq 1$ pour que le nouveau triangle en soit un.
***c.*** Si $p$ est impair, l'égalité $x - 1 + y - 1 = z - 1$ est impossible, attendu que $x - 1 + y - 1 + z - 1$ doit être pair. Il n'y a pas de triplet $(1, y, z)$ dans $E_{p+3}$, car $1 + y + z = p + 3$ et $z < y + 1$ conduisent à $p + 3 < 2y + 1$, ou $p + 2 < 2y$, ce qui fait de $y$ la plus grande longueur à égalité avec $z$, mais $y + z$ est impair, puisque $p + 3$ est pair. Les deux ensembles ont le même nombre d'éléments.

**4. Étude de $E_{2\,019}$.**
***a.*** Oui, car $2\,019 = 3 \times 673$.
***b.*** Deux sortes de triangles isocèles sont a priori possibles : ceux dont les côtés égaux ont la plus petite longueur et ceux dont les côtés égaux ont la plus grande. Les triplets $(x, x, z)$ tels que $2x + z = 2\,019$ et $z > x$ vérifient $3x < 2019 < 4x$, car $z < 2x$. On a donc $x \in \{504, 505, \dots, 671, 672\}$.
Les triplets $(x, z, z)$ tels que $x + 2z = 2\,019$ vérifient $674 < z < 1\,009$ et donc $z \in \{675, 676, \dots, 1\,007, 1\,008\}$.
Il y a en tout $168 + 336 = 504$ triangles isocèles non équilatéraux dans $E_{2019}$.
***c.*** Le triplet $(x, y, z)$ correspond à un triangle rectangle de périmètre 2 019 si $z^2 = x^2 + y^2$ et $x + y + z = 2\,019$.
On a donc : $2\,019^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(x + y)z + 2xy = x^2 + y^2 + z^2 + 2\big(2\,019 - x - y\big)(x + y) + 2xy$
$= 4\,038(x + y) - 2xy$.
Mais ce dernier nombre est pair. Donc le problème n'a pas de solution.

**5. *a.*** Ces conditions sont celles données dans la définition.
***b.*** La somme des trois longueurs vaut bien 2 022, les deux conditions imposent $2\,022 - x - y \geq y$ , donc $2\,022 - x - y > 0$, et $2\,022 \geq y + 1\,012$ qui donne l'ordre.
***c.*** Le triangle – appelé ici ABC par commodité - est reproduit sur la figure de droite. L'angle droit est à l'intersection des droites de pentes 1 et −1. Les points à coordonnées entières de la droite d'équation $y = x$ sont les points d'abscisse entière comprise entre l'abscisse de A (506) et celle de B (674). Les points à coordonnées entières sur le côté [AC] d'équation $y = 1\,012 - x$ sont aussi ceux dont l'abscisse est entière supérieure ou égale à 2 et inférieure ou égale à 506. Les points à coordonnées entières sur le côté [BC] sont aussi ceux dont l'abscisse est paire (l'équation de la droite est $y = 1\,022 - \frac{x}{2}$) et comprise entre 2 et 674.
Au total, cela en fait 1 011, mais les sommets du triangle ont été



comptés chacun deux fois. L'effectif cherché est donc 1 008. L'aire du triangle rectangle est $84\ 672$ (demi-produit des longueurs des cathètes).
***d.*** On utilise la formule pour trouver le nombre de points intérieurs à partir de l'aire et du nombre de points sur le périmètre (attention à ne pas compter A, B et C deux fois). On trouve le nombre de triplets dans $E_{2\ 022}$, qui est le même d'après la question **3.** que dans $E_{2\ 019}$ : $84\ 169$.

**6. Une solution algorithmique**
Le programme doit permettre de faire la liste des triplets d'entiers $(x, y, z)$ pour lesquels $x + y + z = p$, $x + y > p$, et $x \leq y \leq z$. On commencera par déterminer les valeurs extrêmes de $z$, ce qui nécessite d'étudier la parité et la divisibilité par 3 de $p$. On distinguera 6 cas :

| *Il existe un entier $q$ tel que :* | Valeur maximale de $z$ | Valeur minimale de $z$ |
|---|---|---|
| $p = 6q$ | $3q - 1$ | $2q$ |
| $p = 6q - 1$ | $3q - 1$ | $2q - 1$ |
| $p = 6q - 2$ | $3q - 2$ | $2q - 1$ |
| $p = 6q - 3$ | $3q - 2$ | $2q - 1$ |
| $p = 6q - 4$ | $3q - 3$ | $2q - 2$ |
| $p = 6q - 5$ | $3q - 3$ | $2q - 2$ |

Une fois déterminés ce minimum et ce maximum, on programme une boucle de $z_{min}$ à $z_{max}$. Dans cette boucle, à chaque valeur de $z$ sont associées successivement les valeurs de $x$ allant de 1 à $\left[\frac{z}{2}\right]$ (*partie entière*). À chacune des valeurs de $x$ correspond une seule valeur de $y$ telle que $x \leq y \leq z$ et $z < x + y$.

*Autre déroulé* : on peut aussi utiliser une boucle **For** sur la plus petite des longueurs, $x$, et à chaque tour de boucle boucler sur $y$.

**Premières fois (Série S)**
**Éléments de solution**

**1.** En écrivant $p^2 = p \times p$ et en appliquant la définition : $\Delta(p^2) = p \times \Delta(p) + \Delta(p) \times p = 2p$.
On poursuit : $\Delta(p^3) = \Delta(p \times p^2) = 1 \times p^2 + p \times 2p = 3p^2$.
Supposons que pour un entier naturel $n$, sur lequel on ne fait aucune autre hypothèse, on ait : $\Delta(p^n) = n \times p^{n-1}$.
En appliquant la définition, on obtient : $\Delta(p^{n+1}) = p \times \Delta(p^n) + 1 \times p^n$, ce qui donne, en utilisant notre hypothèse $\Delta(p^{n+1}) = n \times p^n + p^n = (n+1)p^n$.
Finalement pour tout entier premier $p$ et tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1 : $\Delta(p^n) = np^{n-1}$.
**2. *a.*** $\Delta(p^m \times q^n) = \Delta(p^m) \times q^n + p^m \times \Delta(q^n) = mp^{m-1} \times q^n + p^m \times nq^{n-1} = (mq + np)p^{m-1}q^{n-1}$
***b.*** On applique le résultat précédent à $10^n = 2^n \times 5^n$. On obtient $\Delta(2^n \times 5^n) = (5n + 2n)10^{n-1}$.
Le second membre de l'égalité est bien multiple de 7.
**3.** Le nombre $n$ peut être écrit $n = {p_1}^{\alpha_1} \times n_1$, les nombres premiers apparaissant dans la décomposition de $n_1$ étant les mêmes et avec les mêmes exposants que dans la décomposition de $n$, sauf évidemment $p_1$. Avec cette écriture, $\Delta(n) = \alpha_1 {p_1}^{\alpha_1 - 1} \times n_1 + {p_1}^{\alpha_1} \times \Delta(n_1) = \alpha_1 \times q_1 + {p_1}^{\alpha_1} \times \Delta(n_1)$.
La prochaine étape fera apparaître le produit ${p_1}^{\alpha_1} \times \alpha_2 \times {p_2}^{\alpha_2 - 1} \times n_2$, où $n_2$ fait apparaître les nombres premiers apparaissant dans la décomposition de $n$, avec les mêmes exposants, sauf $p_1$ et $p_2$, etc. D'où le résultat :
$\Delta(n) = \alpha_1 \times q_1 + \alpha_2 \times q_2 + \alpha_3 \times q_3 + \dots + \alpha_k \times q_k$.
**4.** Pour un nombre premier $p$, le calcul est rapide, $\alpha_1 = 1$ et $q_1 = 1$ donc $\Delta(p) = 1$.
Pour le produit de deux nombres entiers $a$ et $b$, on peut, dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $ab$, « étiqueter » les nombres premiers qui figureraient à la fois dans les décompositions de $a$ et de $b$ en les traitant comme des premiers distincts. On adapte la formule ci-dessus donnant $\Delta(n)$, en convenant par exemple pour calculer $\Delta(a)$ de remplacer $\alpha_i$ par 0 si l'entier premier $p_i$ apparaît dans la décomposition de $b$ mais pas dans celle de $a$. On aurait, en adaptant les notations : $\Delta(a) = \alpha_1 \times q_1 + \alpha_2 \times q_2 + \alpha_3 \times q_3 + \dots + \alpha_k \times q_k$,
$\Delta(b) = \beta_1 \times r_1 + \beta_2 \times r_2 + \beta_3 \times r_3 + \dots + \beta_k \times r_k$. La somme $a \times \Delta(b) + \Delta(a) \times b$ fait alors apparaître des termes comme $\alpha_1 \times q_1 \times b + \beta_1 \times r_1 \times a$, mais $b \times q_1 = a \times r_1$(c'est aussi le quotient de $ab$ par $p_1$), et donc ce terme est exactement $(\alpha_1 + \beta_1)s_1$, où $s_1$est le quotient de $ab$ par $p_1$ et $\alpha_1 + \beta_1$l'exposant de $p_1$ dans la décomposition de $ab$.
Conclusion : les *propriétés* imposées permettent de *définir* une application $\Delta\colon \ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui les possède. Tout repose évidemment sur l'existence de la décomposition en produit de facteurs premiers, que nous avons admise pour ce problème.

***Étude de quelques images d'entiers par la fonction*** $\Delta$.
**5. *a.*** $\Delta(12) = 2 \times 2 \times 3 + 2^2 \times 1 = 16$ , $\Delta(56) = 3 \times 2^2 \times 7 + 8 \times 1 = 92$,
$\Delta\big(1\,001\big) = 11 \times 13 + 7 \times 13 + 7 \times 11 = 311$ .
***b.*** Aucun $x$ entier composé non nul ne peut satisfaire $\Delta(x) = 0$ , car , $\Delta(x)$ est dans ce cas une somme d'entiers positifs. Les seules solutions sont 0 et 1.
***c.*** Les nombres premiers sont par définition solutions de $\Delta(x) = 1$. Dans la formule donnant en général $\Delta(n)$, pour que cette somme de termes positifs soit égale à 1, il faudrait que tous les termes fussent nuls sauf un, égal à 1. Ce n'est pas possible, le produit de deux entiers ne peut être égal à 1 que s'ils le sont l'un et l'autre.
***d.*** Le nombre 2 n'a pas d'antécédent par $\Delta$. La raison est la même que ci-dessus : il faudrait deux termes égaux à 1 dans la somme permettant le calcul de $\Delta(n)$, ou un terme égal à 2. Mais s'il y a un terme égal à 2, il y en a nécessairement un autre, car $\Delta(2^2) = 2 \times 2$ (l'un vient de l'exposant).
***e.*** On a donné des exemples de la situation contraire à la question **5. *a.***
**6. *a.*** Si $p$ et $q$ sont des nombres premiers, on trouve $\Delta(p \times q) = p \times \Delta(q) + q \times \Delta(p) = p + q$
***b.*** On a trouvé $\Delta(12) = 16$, tandis que $\Delta(4) + \Delta(3) = 4 + 1 = 5$. La réponse est non.
**7. *a.*** On a trouvé $\Delta(56) = 92$, tandis que $\Delta(49) = 14$ et $\Delta(7) = 1$.
***b.*** Dans l'hypothèse envisagée, on obtient : $\Delta(ka + kb) = \Delta\big(k \times (a + b)\big) = (a + b) \times \Delta(k) + k \times \Delta(a + b)$.
Ou encore : $\Delta(ka + kb) = a \times \Delta(k) + b\Delta(k) + k\Delta(a) + k\Delta(b)$, d'où le résultat, en réorganisant.

***Les points fixes de la fonction*** $\Delta$
**8. *a.*** Il existe un entier $k$ tel que $m = k \times p^p$. On a : $\Delta(m) = \Delta(k) \times p^p + p \times p^{p-1} \times k = p^p \times (\Delta(k) + k)$
***b.*** $\Delta(n)$ s'écrit comme combinaison linéaire des quotients de $n$ par les chacun des nombres premiers apparaissant dans sa décomposition. Ces quotients sont des produits des nombres premiers apparaissant dans la décomposition de $n$, pour chaque terme de la combinaison linéaire, un des exposants a été diminué de 1. Mais un

des facteurs premiers peut être « rétabli » par le coefficient qui l'affecte dans la combinaison linéaire, c'est-à-dire par son exposant originel, c'est le cas des nombres qui interviennent avec un exposant qui leur est égal…
**9.** D'après ce qui précède, l'exposant originel ne peut être rétabli que dans le cas où $n = p^p$.

**AGADADAGA (Séries autres que S)**
**Éléments de solution**

**1.** Les mots inchangés sont ceux qui ne contiennent pas la lettre A.

**Traitement de texte**

**2.** Après avoir cliqué deux fois sur EXÉCUTER, on obtient (avant suppression des espaces qui facilitent la lecture) :

AGADADAGA G AGADADAGA D AGADADAGA D AGADADAGA G AGADADAGA

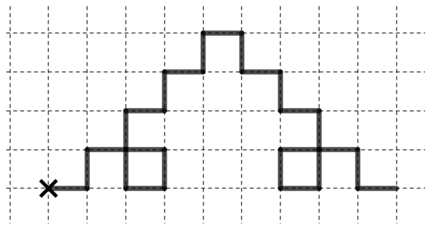
**3.** Le nombre de A est multiplié par 5 à chaque clic et $5^{12} < 10^9 < 5^{13}$, il faut donc au minimum 5 clics.

**4.** Après chaque clic, le nombre de D est égal à la somme du double du nombre de A qu'il y avait avant ce clic et du nombre de D qu'il y avait à l'étape précédente. Les effectifs sont donc successivement : $0, 2, 2 + 2 \times 5, 2 + 2 \times 5 + (2 + 2 \times 5) \times 2$, etc. Chaque effectif à partir du deuxième apparaît comme la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 5. Après 20 clics, il y a $2 \times \frac{5^{20}-1}{5-1} = \frac{5^{20}-1}{2}$ (ce nombre est bien un entier…supérieur à 47 trillions).

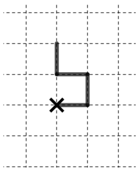
**Motif**

**5.** Pour ce motif, le mot obtenu est ADADAGA.

**6.** Le motif correspondant à AGADADAGAGAGADADAGADAGADADAGADAGADADAGAGAGADADAGA est reproduit ci-contre à droite.

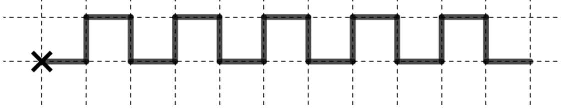


**7.** Elle a entré le mot ADAGAGAADADAGA



**8.** ***a.*** Le motif obtenu (à gauche) est de largeur 1.

***b.*** Le motif obtenu peut avoir une largeur de de 11 carreaux au maximum avec le mot :
AGADADAGAGADADAGAGADADAGAGADADAGAGADADAGA



Toutes les largeurs impaires comprises entre 1 et 11 peuvent être obtenues : pour une largeur 9, il suffit de reprendre le mot précédent et remplacer les six dernières lettres par GADADA ; puis de longueur 7 en remplaçant les 12 dernières lettres par GAGADAGADADA. On obtient de même des mots de largeur 5, 3 ou 1.

On remarque tout d'abord que les traits tracés sont alternativement horizontaux et verticaux quel que soit le mot comprenant 10 D et 10 G : on considère les séquences de 4 lettres en partant de la deuxième lettre du mot, les séquences GADA et DAGA font augmenter la largeur de la partie du motif tracé de 1 carreau, et les séquences GAGA et DADA la font diminuer de 1 carreau. La longueur du mot ne peut donc pas être paire.

# Olympiades nationales de mathématiques 2019

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

## Amériques - Antilles - Guyane -

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

**Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition**.

# Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Grands pairs…*) et 2 (*Des droites et des mots*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Grands pairs…*) et 3 (*Additionnons des points*).

# Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

***Grands pairs…***

Dans ce problème, on ne considère que des nombres entiers naturels non nuls. Pour chacun de ces entiers, on numérote les chiffres de son écriture décimale de gauche à droite. Le premier chiffre de gauche ne peut être 0.
Par exemple, pour le nombre 3 021, le chiffre 3 reçoit le numéro 1, le chiffre 0 le numéro 2, le chiffre 2 le numéro 3 et le chiffre 1 le numéro 4.

On nomme « grand pair » tout nombre dont chaque chiffre en position paire, s'il y en a, est au moins aussi grand que ses chiffres directement voisins (s'il en a). On nomme « grand impair » tout nombre dont chaque chiffre en position impaire est au moins aussi grand que ses chiffres directement voisins (s'il en a).
Par exemple :
- le nombre 3 021 est un grand impair, mais pas un grand pair ;
- les nombres 3, 2, 7 et 777 sont à la fois des grands pairs et des grands impairs ;
- le nombre 2 019 n'est ni un grand pair, ni un grand impair.

**1.** Le nombre 384 957 est-il un grand pair ? Un grand impair ?

**2.** Déterminer les nombres qui sont à la fois des grands pairs et des grands impairs.

**3.** Parmi les nombres s'écrivant avec deux chiffres, y a-t-il davantage de grands pairs ou de grands impairs ?

**4.** ***a.*** Le nombre 3 021 peut-il s'écrire comme la somme de deux grands impairs ayant le *même* nombre de chiffres ?
***b.*** Le nombre 3 021 peut-il s'écrire comme la somme de deux grands pairs ayant le *même* nombre de chiffres ?

**5.** Prouver que tout nombre entier peut s'écrire comme la somme de deux grands impairs (rien n'est ici imposé quant au nombre de chiffres de ces deux grands impairs).

**6.** Démontrer que tout nombre grand impair strictement inférieur à 100 peut s'écrire comme la somme de deux grands pairs (sans contrainte quant au nombre de chiffres de ces grands pairs).

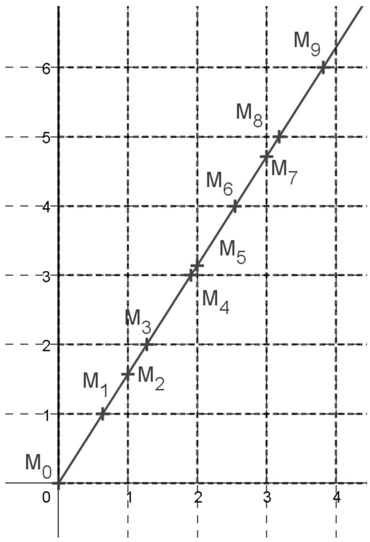
**7.** Déterminer le plus petit grand impair supérieur ou égal à 2 qui ne peut pas s'écrire comme la somme de deux grands pairs (sans contrainte quant au nombre de chiffres de ces grands pairs).

**8.** Compléter le pseudocode ci-dessous (ou s'en inspirer) pour rédiger un algorithme (à retranscrire sur sa copie), qui, partant d'un tableau « T » représentant un nombre « N » (par exemple 384 957) de « nb » chiffres (ici 6), renvoie « 1 » si N est un grand pair, et « 0 » sinon :

```
nb = 6                                   ## Commentaire : ici N = 384 957 est à 6 chiffres
T = [3 ; 8 ; 4 ; 9 ; 5 ; 7]              ##Commentaire : ici T[1] = 3, T[2] = 8, T[3]=4, … ,T[nb]=7
resultat = 1
i = 1
…
while ((resultat == 1) and i≤ nb) :
        … … …
        i = i+2
print(resultat)
```

# Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

### *Des droites et des mots*




Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine O. Dans tout le problème, on s'intéresse aux demi-droites issues de O et contenues dans le premier quadrant (ensemble des points du plan dont l'abscisse et l'ordonnée sont positives). À tout entier naturel $n$, on associe la droite d'équation $x = n$ et la droite d'équation $y = n$. L'ensemble de ces droites constitue un « quadrillage ».

Toute demi-droite $(d)$ issue de O et de pente strictement positive possède des points d'intersection notés $\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \dots, \mathrm{M}_n, \dots$ avec les droites du quadrillage, les points étant numérotés dans l'ordre croissant de leurs abscisses. À chaque point $\mathrm{M}_i$ on associe la lettre H, la lettre V ou la lettre C selon qu'il est le point d'intersection de $(d)$ avec une droite horizontale, une droite verticale ou les deux à la fois. On construit ainsi des « mots » de longueur infinie. Le mot correspondant à la figure ci-contre débute par : CHVHHVHVHH.

**1.** Représenter, dans un repère orthonormé d'unité 1 cm, la demi-droite d'équation $y = 1{,}5x$ et donner les huit premières lettres du mot qu'on peut lui associer.

**2.** Pourquoi les mots associés aux demi-droites commencent-ils tous par la lettre C ?

Un mot est dit « périodique » si une séquence se répète indéfiniment à partir de la première lettre. On appelle « motif » la plus petite séquence qui sé répète indéfiniment et « période » le nombre de lettres du motif.
Par exemple, CVVCVVCVVCVV … est un mot périodique de période 3 dont le motif est CVV.

**3.** Déterminer et représenter la demi-droite qui donne naissance au mot périodique de période 3 de motif CVV.

**4.** ***a.*** Montrer que si on rencontre la séquence VV dans le mot associé à une demi-droite, alors la pente de cette demi-doite est strictement inférieure à 1.

***b.*** Que peut-on dire de la pente d'une demi-droite si on rencontre la séquence HH dans le mot associé ?

***c.*** Tous les mots associés à une demi-droite commencent par C. Tout mot commençant par C est-il associé à une demi-droite ?

**5.** On suppose dans cette question que le point $\mathrm{M}_6$ est associé à la septième lettre d'un mot de période 6. Quelles sont les droites pouvant conduire à ce résultat ? Quels mots leur sont associés ?

**6.** Énoncer et prouver une condition nécessaire et suffisante portant sur la pente d'une demi-droite pour que le mot qui lui est associé soit périodique.

**7.** On donne un entier naturel $p$ non nul. Est-il possible de trouver un mot périodique de période $p$ ?

**8.** Soit $W$ le mot correspondant à la demi-droite de pente $\sqrt{2}$. Pour tout entier naturel $n$, le point d'intersection de la demi-droite avec la droite d'équation $x = n$ a pour lettre associée V : pourquoi ? On appelle $F_W(n)$ le nombre de lettres H précédant V dans l'écriture de $W$. La suite de terme général $\frac{F_W(n)}{n}$ possède-t-elle une limite ?

## Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

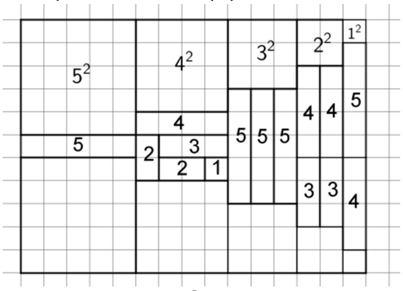
### *Additionnons des points*

**Somme de carrés**

Un nombre entier $n$ étant donné, on cherche dans cette partie à estimer

$$S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$$

Sur la photo ci-contre, on a représenté une pyramide de boulets de pierre, à base carrée, avec 6 étages qui contiennent $6^2, 5^2$, ….,1 boulets. Le nombre de boulets qui la composent est $S(6) = 91$.




**1.** Dans le cas $n = 5$, le puzzle présenté à gauche permet d'estimer $S(5)$. Comment ? Quelle valeur obtient-on par cette méthode ?

**2.** Les exemples précédents inspirent la formule $S(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

***a.*** Montrer que l'entier $n(n+1)(2n+1)$ est bien un multiple de 2 et de 3.

***b.*** Si on suppose que pour un certain $n$, sur lequel on ne fait aucune autre hypothèse, $S(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, quelle formule obtient-on pour $S(n) + (n+1)^2$ ? On peut donc décider que la formule de $S(n)$ est vraie pour tout entier $n$.

**3.** Montrer que $S(24)$, somme des 24 premiers carrés, est un carré.

**Addition sur une courbe**

On considère l'ensemble (E) des points du plan dont les coordonnées $(x, y)$ satisfont la relation

$$y^2 = \frac{1}{6}x(x+1)(2x+1)$$

**4. Un peu d'exploration**

***a.*** Les points de coordonnées $(1, 1)$ et $(24, 70)$ appartiennent-ils à cet ensemble ? Fournir deux autres exemples.

***b.*** Les points de coordonnées $(-2, 1)$ et $\left(-\frac{1}{4}, 3\right)$ appartiennent-ils à (E) ?

***c.*** Quelles relations doit vérifier le réel $x$ pour qu'il y ait un point d'abscisse $x$ dans l'ensemble (E) ? Dans ce cas, combien y a-t-il de points d'abscisse $x$ dans (E) ?

**5. La forme de la courbe**

***a.*** Sur l'annexe qui servira aux tracés, on a représenté l'ensemble (E) qu'on appellera dorénavant courbe (E). On peut identifier des « branches infinies ».

Comment expliquer que le quotient $\frac{3y^2}{x^3}$ s'approche de 1 lorsque l'abscisse $x$ du point de coordonnées $(x, y)$ de la courbe devient très grande ? On a alors $\approx \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{3}}$.

***b.*** Expliquer pourquoi la courbe (E) présente une partie « fermée ».

**6. Somme de deux points**

***a.*** Sur la feuille annexe, à rendre avec la copie, on a représenté la courbe (E). Pour tout couple (A, B) de points distincts de la courbe (E), on trace la droite (AB). Quand elle recoupe la courbe en un troisième point D, on note $\mathrm{A}\oplus\mathrm{B}$ le symétrique de D par rapport à l'axe des abscisses. Représenter le point $\mathrm{A}\oplus\mathrm{B}$ sur la figure 1.

***b.*** Pour tout point A de la courbe (E), on trace la tangente en A à la courbe (E). Quand elle recoupe la courbe (E) en un point D, on note $\mathrm{A}\oplus\mathrm{A}$ le symétrique de D par rapport à l'axe des abscisses. Représenter le point $\mathrm{A}\oplus\mathrm{A}$ sur la figure 2.

***c.*** On note 2A $= \mathrm{A}\oplus\mathrm{A}$ , 3A$= \mathrm{A}\oplus 2\mathrm{A}$ , etc. Représenter le point 3A sur la figure 3.

**7. Un système de codage**

La correspondance entre Alice et Bruno est protégée par une clef : les quatre premières décimales de l'abscisse du point $ab\mathrm{M}$, obtenu de la manière suivante :

1. Ils choisissent ensemble un point M sur la courbe (E) ;
2. Alice choisit un entier $a$ et ne donne à Bruno que les coordonnées du point $a\mathrm{M}$ ;
3. Bruno choisit un entier $b$ et ne donne à Alice que les coordonnées du point $b\mathrm{M}$ ;

Dans ce processus, ils choisissent le point M de coordonnées (1, 1). Alice donne à Bruno les coordonnées (0,02083333, 0,06076389). Bruno donne à Alice les coordonnées (0,02908309, −0,07265188). En s'aidant du tableau fourni en regard, indiquer quelle est la clef.

| $k$ | Abscisse du point $k\mathrm{M}$ | Ordonnée du point $k\mathrm{M}$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0,02083333 | 0,06076389 |
| 3 | 5,63265731 | −8,73904883 |
| 4 | 1,06401114 | 1,07001139 |
| 5 | 0,02908309 | −0,07265188 |
| 6 | 3,93363878 | 5,35550512 |
| 7 | 0,651426 | −0,64256859 |
| 8 | 0,00115486 | 0,01389763 |
| 9 | 107,8640 | −651,271826 |
| 10 | 26,5927 | 81,40364156 |

# Correction

**Grands pairs et grands impairs (Toutes séries)**

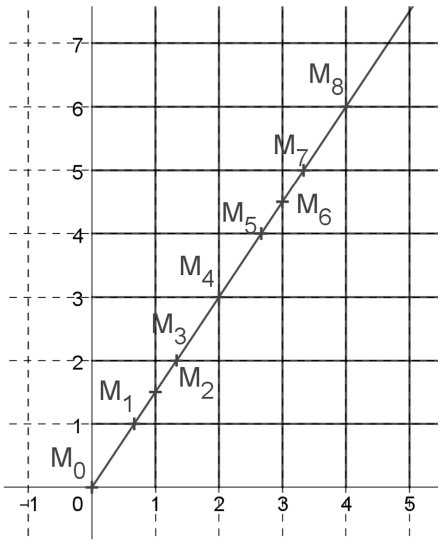
**Éléments de solution**

**1.** Le nombre $384\,957$ est un *grand pair*, mais pas un *grand impair*, car $8$ est supérieur à $3$.
**2.** Il faut (et il suffit) que tout chiffre soit plus grand que son successeur et plus petit que son successeur. Les nombres cherchés sont ceux dont tous les chiffres sont identiques.
**3.** Les *grands pairs* : $11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,$
$22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 55, 56, 57, 58, 59, 66, 67, 68, 69,$
$77, 78, 79, 88, 89, 99$ ;
Les *grands impairs* : $10, 11, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 40, 41, 42, 43, 44, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 60, 61, 62, 63, 64,$
$65, 66, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99.$
Il y a davantage de *grands impairs* : $54$ contre $45$ (cela fait $99$, ce qui est trop, mais les multiples de $11$ sont comptés dans les deux catégories).

**4. *a.*** $3\,021 = 1\,000 + 2\,021 = 1\,010 + 2\,011$, cela fait deux sommes de grands impairs de quatre chiffres.
***b.*** Comme on cherche deux *grands pairs* de quatre chiffres, aucun des deux ne peut avoir $2$ comme chiffre des mille. Ils commencent donc par $1$ l'un et l'autre… On trouve par exemple : $3\,021 = 1\,509 + 1\,512$
**5.** Le cas des chiffres $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, qui sont aussi bien des grands pairs que des grands impairs, se résout en écrivant chacun comme la somme de deux plus petits : $3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1$, etc.
Si l'entier $n$ s'écrit avec deux chiffres ou plus, on peut écrire $n = \overline{\imath P \imath P \imath P \ldots}$, où les chiffres "$P$" apparaissant sont plus grands que les "$i$" qui les encadrent. Les nombres $\overline{\imath 0 \imath 0 \imath 0 \ldots}$(avec le même nombre de chiffres que $n$) et $\overline{P0P0P0 \ldots}$ (avec un chiffre de moins que $n$) sont de grands impairs dont la somme est $n$ (il n'y a jamais de retenue).
**6.** Considérons un *grand impair* $N$ inférieur à $100$. Supposons que $N$ s'écrive avec deux chiffres. Il existe des chiffres $a$ et $b$ tels que $n = 10a + b$ et $a \geq b$. On peut alors écrire $N = (10(a-1) + a) + (10 + b - a)$. Cette somme a pour termes un nombre s'écrivant avec un seul chiffre $(10 + b - a)$, donc *grand* pair, l'autre en ayant deux si $a > 1$ et il est *grand pair* par construction. Dans le cas où $a = 1$, on fait apparaître deux nombres à un seul chiffre, *grands pairs*. Reste le cas des nombres s'écrivant avec un seul chiffre. À l'exception de 1, ils sont tous sommes de deux nombres à un seul chiffre.
**7.** La question précédente montre qu'il faut chercher parmi les nombres supérieurs ou égaux à 100. On trouve :
$100 = 45 + 55, 101 = 46 + 55, 102 = 47 + 55, 103 = 48 + 55, 104 = 49 + 55, 105 = 39 + 66,$
$106 = 38 + 68, 107 = 39 + 68, 108 = 79 + 29.$
Supposons qu'il existe des chiffres $a, b, c, d$ tels que $109 = 10a + b + 10c + d$ et tels que $a \leq b$ et $c \leq d$. Pour que $109 = 10(a + c) + (b + d)$, il est nécessaire que $b + d > 10$, car sinon le second membre de l'égalité est inférieur ou égal à 100. Donc $b + d \geq 10$ et l'addition comporte une retenue, mais cela signifie que $b + d = 19$, ce qui est impossible pour des chiffres. Donc 109 est le nombre cherché.
**8.** On suit les indices de 2 en 2 en comparant $\mathrm{T}[i]$ à son prédécesseur et à son successeur. Tant que la comparaison reste à l'avantage de $\mathrm{T}[i]$, la variable « resultat » reste 1. Lorsque l'une des comparaisons tourne mal, « redultat » passe à 0 et l'algorithme s'achève sur ce résultat.

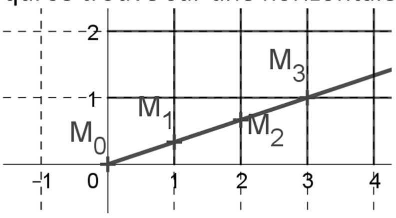
**Des droites et des mots (Série S)**

## Éléments de solution




**1.** La demi-droite d'équation $y = 1{,}5x$ détermine avec les droites du quadrillage les points $\mathrm{M}_i$ du graphique de droite, auxquels sont successivement associées les lettres C, H, V, H, C, H, V, H, etc.

**2.** La première intersection avec les droites du quadrillage est le point O, qui se trouve sur une horizontale et sur une verticale.



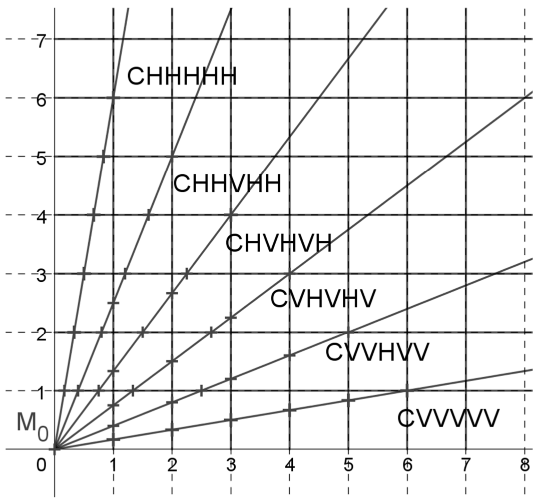

**3.** Le motif CVV est associé à une demi-droite qui rencontre la verticale d'équation $x = 3$ en même temps que l'horizontale d'équation $y = 1$. Cette demi-droite a donc pour équation $y = \frac{x}{3}$. On vérifie que les deux premiers points d'intersection avec les droites du quadrillage ont pour abscisses 1 et 2 et pour ordonnées $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.

**4. *a.*** Si on rencontre la succession VV dans le mot associé à la demi-droite d'équation $y = ax$, c'est qu'il existe un entier $n$ et un entier $p$ tels que les solutions des équations $ax = p$ et $ax = p + 1$ soient l'une à gauche de l'intervalle $]n-1, n[$, l'autre à droite. Leur différence $\frac{1}{a}$ est donc supérieure à 1, et donc $a < 1$.

***b.*** Pour des raisons semblables, on trouve la séquence HH dans le mot associé à la demi-droite d'équation $y = ax$ lorsque la pente de cette demi-droite est supérieure à 1.

***c.*** On a vu à la question **3.** que la succession CVV détermine une unique droite, dont le mot associé est CVVCVVCVV … Il n'y a donc pas de droite associée à un mot commençant par CVVHHC, par exemple.

**5.** La septième lettre d'un mot de période 6 est C. Si les coordonnées du point $M_6$ sont les entiers $a$ et $b$, la demi-droite associée a pour équation $y = \frac{b}{a}x$. La période ne peut être que 6. De $\mathrm{M}_0$ à $\mathrm{M}_6$, la demi-droite rencontre :




- ou bien 7 verticales et pas d'horizontale autre que celles d'équation $x = 0$ et $x = 1$; le point $\mathrm{M}_6$ a pour coordonnées $(6, 1)$ ;
- ou bien 7 verticales et l'horizontale d'équation $x = 1$ (plus celles d'équations $x = 0$ et $x = 2$). Ce cas est à exclure, car il conduit au motif CVV et à la période 3 ;
- ou bien 6 verticales (et une horizontale en un point non déjà compté) ; le point $\mathrm{M}_6$ a pour coordonnées $(5, 2)$ ;
- ou bien 5 verticales (et 2 horizontales en des points non déjà comptés) ; point $\mathrm{M}_6$ a pour coordonnées $(4, 3)$ ;
- ou bien 4 verticales ; point $\mathrm{M}_6$ a pour coordonnées $(3, 4)$ ;
- ou bien 3 verticales ; point $\mathrm{M}_6$ a pour coordonnées $(2{,}5)$ ;
- ou bien 2 verticales ; point $\mathrm{M}_6$ a pour coordonnées $(1, 6)$ ;

**6.** Pour que le mot associé à une demi-droite soit périodique, il faut qu'après un premier motif CXXXX … un autre débute, lui aussi par C, donc que la droite passe par un point à coordonnées entières. La pente de cette demi-droite est donc rationnelle. Réciproquement, une demi-droite de pente rationnelle a pour équation $y = \frac{a}{b}x$, $a$ et $b$ étant des entiers, donc elle passe par le point de coordonnées $(b, a)$.

**7.** La droite d'équation $y = \frac{1}{p}x$ réalise cet objectif.

**8.** La demi-droite de pente $\sqrt{2}$ rencontre la verticale d'équation $x = n$ en un point nécessairement codé V, puisque c'est le point d'intersection avec une verticale. Les points associés à la lettre H sont les points de coordonnées $(x, y)$ pour lesquels existe un entier $m$ tel que $y = m, x = \frac{m}{\sqrt{2}}$ et $\frac{m}{\sqrt{2}} < n$. Leur nombre est donc égal au plus grand entier inférieur à $n\sqrt{2}$. Cela donne $n\sqrt{2} - 1 \leq F_W(n) \leq n\sqrt{2}$. La limite de $\frac{F_W(n)}{n}$ existe et vaut $\sqrt{2}$.

# Additionnons des points

## Éléments de solution

**Somme de carrés**

**1.** Le rectangle de longueur $1+2+3+4+5=15$ et de largeur $2\times5+1=11$ a été rempli avec le contenu de trois pyramides carrées de base $5^2$, contenu qui a été détaillé « étage par étage ».
On a donc $15\times11=3\times S(5)$. Et donc $S(5)=55$.

**2. *a.*** Des nombres $n$ et $(n+1)$, consécutifs, l'un est pair. Si $n$ n'est pas multiple de 3 et $(n+1)$ non plus, alors $(2n+1)$ l'est (l'un a pour reste 1, l'autre pour reste 2, peu importe l'ordre, et leur somme a pour reste $1+2$, c'est-à-dire 0.

***b.*** $S(n)+(n+1)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2=\frac{1}{6}(n+1)(6n+6+2n^2+n)$
$=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$ . Nous avons établi un résultat général.

**3.** $S(24)=\frac{1}{6}\times24\times25\times49=4\times25\times49=(2\times5\times7)^2=70^2$.

**Addition sur une courbe**

**1. Un peu d'exploration**

***a.*** On vérifie que $70^2=\frac{1}{6}(24\times25\times49)$ , ce qui avait été fait à la question précédente, tout comme pour $1^2=\frac{1}{6}\times1\times2\times3$.

Pour $x=2$, on doit avoir $y^2=\frac{1}{6}\times2\times3\times5$. On en déduit que le point de coordonnées $(2,\sqrt{5})$ appartient à l'ensemble, tout comme le point de coordonnées $(2,-\sqrt{5})$.

***b.*** Pour $x=-2$, on doit avoir $y^2=\frac{1}{6}\times-2\times-1\times-3$. Comme le second membre de l'égalité est négatif, il n'y a pas de solution en $y$. Pour $x=-\frac{1}{4}$, on doit avoir $y^2=\frac{1}{6}\times-\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}$, le second membre de l'égalité est négatif…

***c.*** Pour qu'il y ait un point d'abscisse $x$ donnée sur la courbe, il est nécessaire que $x(x+1)(2x+1)$soit positif. L'ensemble admissible pour $x$ est donc $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\cup[0,+\infty[$. Pour une abscisse $x$ située à l'intérieur d'un des deux intervalles, il y a deux ordonnées possibles, opposées, donc deux points sur la courbe, symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Pour $x=-1, x=-\frac{1}{2}, x=0$, le point appartient à l'axe des abscisses.

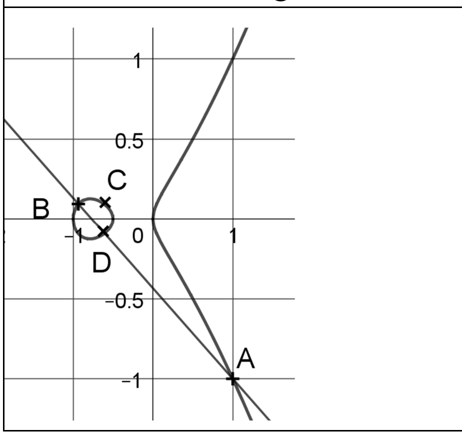
**2. La forme de la courbe**

***a.*** On a $\frac{3\times y^2}{x^3}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)$. Les deux facteurs figurant entre parenthèses au second membre s'approchent respectivement de 1 et 2 lorsque $x$ tend croît. Donc le quotient figurant au premier membre s'approche de 2

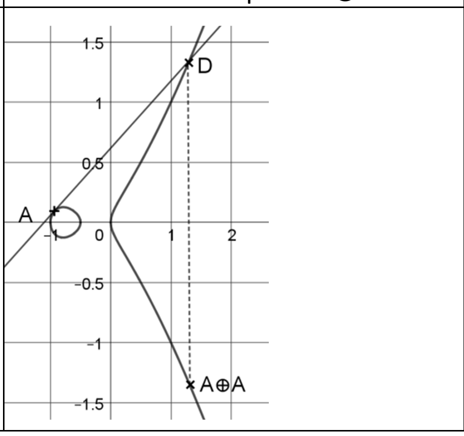
***b.*** Lorsque $x$ décrit l'intervalle $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$, le point de la courbe d'abscisse $x$ appartient à un arc de courbe situé au-dessus de l'axe des abscisses, ou à son symétrique situé au-dessous. Ces deux arcs se recollent aux points d'abscisses $-1$ et $-\frac{1}{2}$.

**3. Somme de deux points**

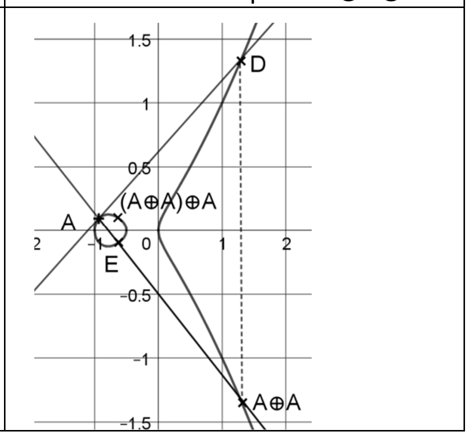
***a.*** Construction de A⊕B




***b.*** Construction du point A⊕A




***c.*** Construction du point A⊕A⊕A




**4. Un système de codage**

Alice donne à Bruno les coordonnées (0,02083333, 0,06076389), qui sont les coordonnées de 2M. Bruno donne à Alice les coordonnées (0,02908309, −0,07265188), qui sont les coordonnées de M. La clef est donc constituée des quatre premières décimales de l'abscisse de 10M : 5 9 2 7.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

# Olympiades nationales de mathématiques 2019

## Asie - Pacifique - Nouvelle Calédonie - Polynésie Française

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

**Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition**.

# Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*La tête aux carrés*) et 2 (*Ne dérange pas mes cercles !*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*La tête aux carrés*) et 3 (*Clairs horizons*).

## Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

### *La tête aux carrés*

Soit $n$ un entier naturel, on dit que $n$ est « décomposable en somme de carrés » s'il est égal à une somme de carrés d'entiers naturel. Par exemple 0, 10 et 33 admettent pour décompositions en carrés : $0 = 0^2$, $10 = 3^2 + 1^2$ et $33 = 5^2 + 2^2 + 2^2$.

**Partie préliminaire**

**1.** Écrire une décomposition en somme de carrés de chacun des nombres 5 et 22.

**2.** Ces décompositions sont-elles les seules sommes de carrés égales à 5 ou à 22 ?

**3.** Tout entier naturel non nul est-il décomposable en somme de carrés ?

**Avec deux carrés seulement**

Dans cette partie on s'intéresse aux entiers naturels $n$ décomposables en somme de deux carrés, c'est-à-dire pour lesquels il existe deux entiers naturels $a$ et $b$ tels que $n = a^2 + b^2$.

On appelle ces entiers naturels des « nombres bicarrés ».

Par exemple, 1, 18 et 1 402 sont des nombres bicarrés car $1 = 1^2 + 0^2$, $18 = 3^2 + 3^2$, $1\,402 = 31^2 + 21^2$.

**4.** Le nombre $58$ est-il un nombre bicarré ?

**5.** Le nombre $21$ est-il un nombre bicarré ?

**6.** Y a-t-il une infinité de nombres bicarrés ?

**7.** Dans cette question, on s'intéresse au produit de deux nombres dont chacun est un nombre bicarré.

***a.*** Commencer par montrer l'égalité de Lagrange, valable pour tous nombres $a$, $b$, $c$ et $d$ :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

***b.*** En déduire une décomposition en somme de deux carrés de $18 \times 58$.

***c.*** En déduire également une décomposition en somme de deux carrés du double d'un nombre bicarré.

***d.*** Montrer que la moitié d'un nombre pair bicarré est un nombre bicarré.

***e.*** $1\,344$ est-il un nombre bicarré ?

***f.*** Existe-t-il une infinité de nombres pairs bicarrés ?

***g.*** Existe-t-il une infinité de nombres pairs qui ne sont pas bicarrés ?

**Avec quatre carrés**

Dans cette partie on s'intéresse aux entiers naturels décomposables en sommes de carrés pour lesquels il existe une décomposition en somme de quatre carrés.

Par exemple $43 = 5^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2$ et $42 = 5^2 + 4^2 + 1^2 + 0^2$

*Joseph Louis Lagrange démontra en 1770 que tout nombre entier naturel est décomposable en quatre carrés.*

**8.** Écrire un algorithme fournissant une décomposition en quatre carrés d'un entier $N$ lorsque cela est possible.

**9. *a.*** Si on veut trouver une décomposition en quatre carrés du nombre $7\,044$, quel est le plus grand carré susceptible d'y figurer ? Y a-t-il une décomposition de $7\,044$ dans laquelle ce carré figure ?

***b.*** Il existe une décomposition de $7\,044$ en somme des carrés de quatre nombres en progression arithmétique, dont le plus petit est 1. Quels sont ces quatre nombres ?

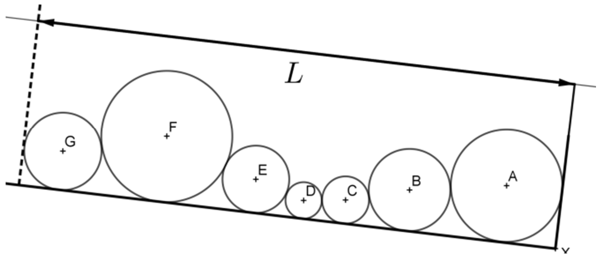
## Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

### *Ne dérange pas mes cercles !*

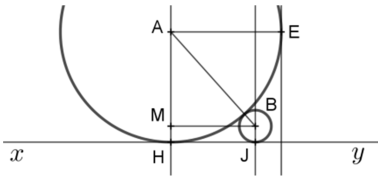
Selon la légende, *dernières paroles d'Archimède*

***Encombrement d'une suite de disques***

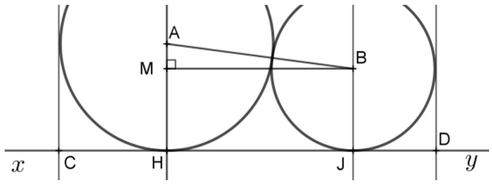
On place sur une étagère une série de rondelles de bois de même épaisseur, dont les rayons peuvent être différents. La légère pente donnée à l'étagère assure le contact : chaque disque est tangent à un ou des voisins. Le but du problème est d'étudier des dispositions qui minimisent l'encombrement $L$.




**1. Cas de deux disques**




Deux disques (centrés en A et B, de rayons $R$ et $r$, tels que $r \leq R$) sont tangents respectivement en H et J. à la droite $(xy)$, figure de droite.

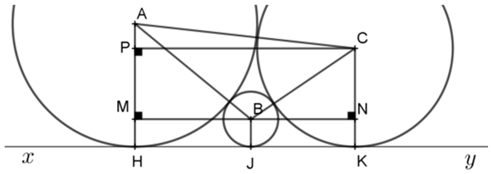



***a.*** Exprimer en fonction de $R$ le rayon maximal du petit disque $r$ pour lequel l'encombrement créé par les deux disques est le même que celui créé par le seul grand (figure de gauche). *On pourra être amené à résoudre une équation du second degré d'inconnue $x = \sqrt{r}$.*

***b.*** Si $r$ est supérieur à ce maximum, établir que l'encombrement créé par les deux disques est :

$$L = R + r + 2\sqrt{Rr}$$

**2. Cas de trois disques**




***a.*** Trois disques, de centres A, B et C et de rayons $p, q$ et $r$ sont tangents à une même droite et tangents deux à deux, figure ci-contre. L'encombrement est donc égal à celui que les deux disques extérieurs créent à eux seuls. Exprimer le rayon $q$ du disque intérieur en fonction des rayons $p$ et $r$ des disques extérieurs.

***b.*** Dans cette question, les trois disques sont tangents à une même droite, et, de gauche à droite (dans l'ordre de leurs centres), le cercle de centre A est tangent au cercle de centre B, lui-même tangent au cercle de centre C, qui est sans point commun avec le cercle de centre A. Exprimer l'encombrement créé par ces trois disques en fonction de leurs rayons $p, q$ et $r$.

***c.*** On échange les places des disques de centres B et C et on suppose comme en ***b.*** que le disque central sépare ses deux voisins. Quel est le nouvel encombrement ?

Toujours sous l'hypothèse faite au ***b.***et au **c.**, on suppose de plus que $p \geq q \geq r$. On place les disques dans l'ordre A-B-C, A-C-B ou B-A-C (disposition dans l'ordre décroissant des rayons, ou le plus petit au milieu, ou le plus grand au milieu).

***d.*** Montrer que la disposition A-B-C crée l'encombrement maximum.

***e.*** Montrer que la disposition B-A-C crée l'encombrement minimum si et seulement si $\sqrt{q} - \sqrt{r} \leq \sqrt{p} - \sqrt{q}$.

**3. Sept d'un coup**

Dans cette question, on dispose de sept disques de rayons 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10 (l'unité est le cm).

***a.*** On place le disque de rayon 10 en premier, puis les autres à sa droite, dans l'ordre décroissant des rayons. Compléter le tableau ci-contre (résultats arrondis au centième de mm) et donner un arrondi au mm de l'encombrement obtenu.

| **Rayon** | **10** | **9** | **8** | **7** | **6** | **5** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{r(r+1)}$ | | 9, 487 | 8, 485 | 7, 483 | 6, 481 | 5, 477 | 4, 472 |
| Encombrement | 20 | 37,974 | 53, 944 | | | | |

***b.*** Proposer un algorithme renvoyant l'encombrement créé par les sept disques placées comme ci-dessus et contrôler le calcul du ***a.***

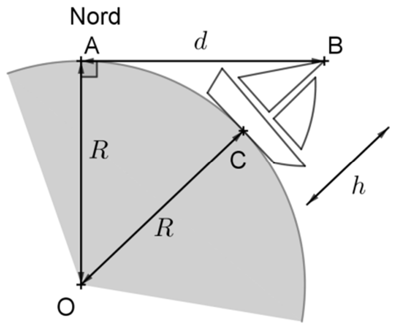
***c.*** Pourquoi cet encombrement est-il maximal pour ces sept disques dans la disposition du ***a*** ? Le comparer à la somme des diamètres des disques.
***d.*** De combien diminue l'encombrement total si, dans la disposition du ***a***, on fait passer le disque de rayon 4 de l'extrême droite à l'extrême gauche ?

**4.** ***a.*** Combien y a-t-il de façons différentes de disposer ces sept disques ?
***b.*** Parmi ces dispositions, combien y en a-t-il pour lesquelles le plus grand disque est placé au milieu, de façon qu'il n'y ait jamais trois disques consécutifs de rayons croissants ou de rayons décroissants (disposition en *dents de scie*) ?
***c.*** Combien y a-t-il de dispositions pour lesquelles les rayons forment une suite croissante, ou une suite décroissante, ou alors une suite d'abord croissante puis décroissante ?

## Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

***Clairs horizons***

### A. Calcul du rayon $R$ de la Terre




Un observateur se trouve sur le rivage en $A$ et voit s'éloigner vers le sud un bateau dont on connait la hauteur $h$ émergée (comme sur la figure ci-contre, qui n'est pas à l'échelle). Du fait de la rotondité de la Terre, le bâtiment disparait totalement de l'horizon, une fois éloigné de la côte de la distance $d = AB$ à vol d'oiseau.
On néglige la taille de l'observateur de telle sorte que $OA = R$.
On suppose connue la distance $d$. On rappelle que la ligne d'horizon $(AB)$ est tangente à la Terre en $A$.
**1.** Trouver une relation entre $R$, $d$ et $h$.
**2.** Justifier que $\frac{h}{R}$ est très petit.
**3.** En déduire que $R \approx \frac{d^2}{2h}$.
**4.** Application numérique : pour $h = 20\ \mathrm{m}$ et $d = 16\ \mathrm{km}$, donner une valeur approchée au km près du rayon $R$ de la Terre.
**5.** En quoi ce raisonnement est-il affecté si le bateau ne s'éloigne pas vers le sud ?

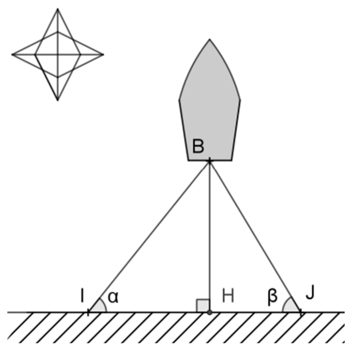
### B. Ligne d'horizon

Dans toute cette partie, on convient que $R = 6\,400\ \mathrm{km}$ .

**6.** On cherche quelle doit être la hauteur $h$ du bateau dans la figure ci-dessus pour que la vigie, située en haut du mat, aperçoive le rivage d'une île située à une distance (en ligne droite) $d$ donnée.
Montrer que cela revient à résoudre, pour $d$ donnée, l'équation d'inconnue $h$ : $(h + R)^2 = d^2 + R^2$

**7.** Dans le cas où $d = 50\ \mathrm{km}$, calculer la hauteur $h$ et la longueur de l'arc $\widehat{\mathrm{AC}}$.

### C. Calcul de la distance $d$




On mesure en pratique $d$ (dans la partie A, on l'a supposée donnée) par triangulation comme sur le schéma ci-contre (qui n'est pas à l'échelle).
L'écart entre les deux points de repère $I$ et $J$ situés sur la berge (appelés *amers*) est connu et les deux angles $\alpha$ et $\beta$ sont relevés à l'aide d'instruments de navigation.

**8.** Montrer l'égalité suivante : $d = \frac{IJ\ \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.
**9.** Retrouver la valeur donnée pour $d$ dans la partie A sachant que $IJ = 1\ \mathrm{km}$, $\alpha = 88°$ et $\beta = 88{,}42°$.

# Correction

## La tête aux carrés (à traiter par tous les candidats)

## Éléments de solution

**Partie préliminaire**

**1.** $5 = 2^2 + 1^2$ et $22 = 3^2 + 3^2 + 2^2$

**2.** On peut aussi écrire $5 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$ et $22 = 4^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$

**3.** Comme 1 est un carré, écrire $n = n \times 1$ correspond à une décomposition en somme de carrés.

**Avec deux carrés seulement**

**4.** $58 = 7^2 + 3^2$, la réponse est oui.

**5.** 21 n'est pas un carré et les carrés inférieurs à 21 sont 16, 9, 4 et 1. Aucune somme réalisée avec deux de ces quatre nombres n'est égale à 21. La réponse est donc non.

**6.** Il y a une infinité de carrés comme il y a une infinité de nombres entiers naturels. En ajoutant le nombre 1 à un carré, on obtient un nombre *bicarré* qui n'est égal à aucun de ceux qu'on a pu faire apparaître de cette manière. Il y a donc « plus » de *bicarrés* que de carrés, donc une infinité.

**7.** ***a.*** On développe chacun des deux membres pour vérifier l'égalité.

***b.*** $18 \times 58 = (3^2 + 3^2) \times (7^2 + 3^2) = (3 \times 7 + 3 \times 3)^2 + (3 \times 3 - 3 \times 7)^2 = 30^2 + 12^2$

***c.*** Si $n = a^2 + b^2$, alors $2n = (1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$. C'est bien une somme de deux carrés.

***d.*** Considérons un nombre pair *bicarré.* Il existe donc un entier $n$ et des entiers $a$ et $b$ tels que $2n = a^2 + b^2$. La somme de $a^2$ et $b^2$ ne peut être un nombre pair que si $a^2$ et $b^2$ sont de même parité, c'est-à-dire si $a$ et $b$ sont de même parité. On peut écrire $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} = n$. Donc la moitié d'un *bicarré* pair est un *bicarré.*

*Ce qui précède inclut la situation des carrés parfaits, qui sont bicarrés au sens de l'énoncé.*

***e.*** Pour savoir si 1 344 est un nombre *bicarré*, on peut essayer de lui soustraire les carrés des entiers de 1 à 37 (car $38^2 = 1\,444$) pour voir si la différence est un carré (on n'aura pas à les essayer tous) ou utiliser l'argument lié à la question précédente : si 1 344 est *bicarré*, sa moitié 672 l'est aussi, la moitié de sa moitié, 336, aussi, etc. jusqu'à 21. Mais 21 n'est pas *bicarré*. 1 344 non plus.

***f.*** et ***g.*** Pour tout nombre pair $n$, il existe un entier $k$ non nul et un entier impair $m$ tel que $n = 2^k \times m$. Il existe des nombres impairs *bicarrés*, comme 5, et des nombres impairs qui ne le sont pas, comme 21. À tout entier non nul $k$, on peut donc faire correspondre au moins un nombre pair *bicarré* et un nombre pair qui ne l'est pas. La réponse aux deux questions est donc oui.

**Avec au plus quatre carrés**

**8.** On peut utiliser l'algorithme ci-contre.

**9.** ***a.*** On commence par la racine carrée du nombre à décomposer. Le plus grand carré à essayer est donc $83^2 = 6\,889$. S'ils existent les trois autres carrés ont pour somme 155. Or, $155 = 121 + 25 + 9$
(Plus faciles à trouver, de tête ou avec l'algorithme).

Finalement $7\,044 = 83^2 + 11^2 + 5^2 + 3^2$.

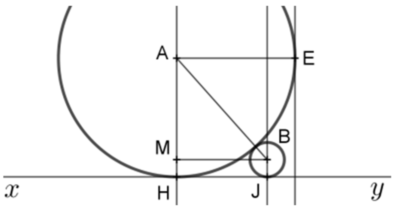
***b.*** Si on appelle $r$ la raison de cette suite, la condition s'écrit : $1 + (1 + r)^2 + (1 + 2r)^2 + (1 + 3r)^2 = 7\,044$. L'équation $7a^2 + 6a - 3520 = 0$ a pour solution entière positive 22.

Finalement $7\,044 = 1^2 + 23^2 + 45^2 + 67^2$

```
i ← 0 ; j ← 0 ; k ← 0 ; l ← 0 ; R ← Partie entière de √N
Pour i allant de R à 0 avec un pas de –1
   Pour j allant de 0 à i
      Pour k allant de 0 à j
         Pour l allant de 0 à k
            Si n=i^2+j^2+k^2+l^2 alors
               Aller à Label
            Fin Si
         Fin Pour
      Fin Pour
   Fin Pour
Fin Pour
Label :
Sortie
Afficher i, j, k, l
```

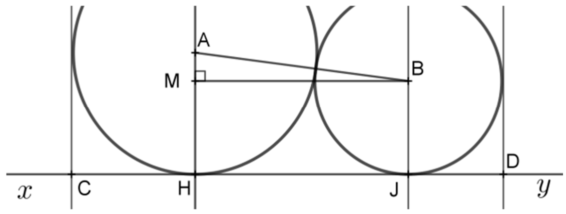
# « Ne dérange pas mes cercles ! » (Série S)

## Éléments de solution



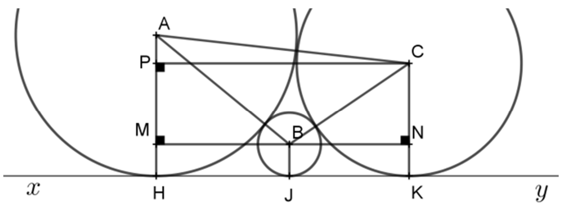

### 1. Cas de deux disques

***a.*** On applique le théorème de Pythagore au triangle ABM rectangle en M : $(R+r)^2 = (R-r)^2 + \mathrm{MB}^2$. D'où on tire $\mathrm{MB}^2 = 4Rr$. Le cercle de centre B est « caché » par le cercle de centre A lorsque $\mathrm{MB} + \mathrm{r} \leq R$. Cette condition s'écrit $r + 2\sqrt{R}\sqrt{r} - R \leq 0$ ou encore $\left(\sqrt{r}+\sqrt{R}\right)^2 - 2R \leq 0$, et finalement : $\sqrt{r} \leq \left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{R}$ ou $r \leq \left(3-2\sqrt{2}\right)R$.

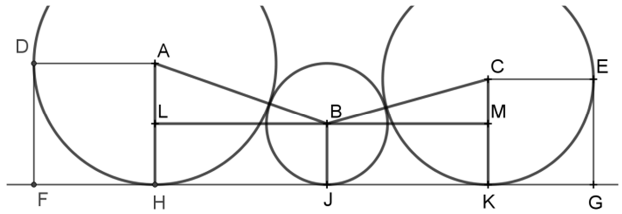



***b.*** On applique le théorème de Pythagore au triangle ABM rectangle en M : $(R+r)^2 = (R-r)^2 + \mathrm{BM}^2$.
La relation est la même, mais pour déterminer l'encombrement, il faut ajouter les rayons des deux cercles : $L = R + 2\sqrt{Rr} + r$.

### 2. Cas de trois disques




***a.*** C'est toujours le théorème de Pythagore qu'on applique, dans les triangles ABM rectangle en M, BCN rectangle en N et ACP rectangle en P :
$(p+q)^2 = (p-q)^2 + \mathrm{BM}^2$, $(q+r)^2 = (r-q)^2 + \mathrm{BN}^2$, et $(p+r)^2 = (p-r)^2 + \mathrm{PC}^2$se traduisent par : $\mathrm{BM}^2 = 4pq$, $\mathrm{BN}^2 = 4qr$ et $\mathrm{PC}^2 = 4pr$. Mais comme $\mathrm{PC} = \mathrm{MB} + \mathrm{BN}$, $\mathrm{PC}^2 = \mathrm{BM}^2 + \mathrm{BN}^2 + 2\mathrm{BM} \times \mathrm{BN}$, et donc finalement $q = \frac{pr}{\left(\sqrt{p}+\sqrt{r}\right)^2}$ . On peut exclure le cas où $q$ est inférieur à cette valeur (le contact n'est pas assuré), mais on doit conclure que l'encombrement d'une suite de trois disques peut être égal à l'encombrement des deux « extérieurs ».




***b.*** Le calcul est analogue aux précédents et utilise les mêmes arguments. Si les rayons, de la gauche vers la droite, sont $p, q$ et $r$, l'encombrement est : $L_1 = p + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{qr} + r$. S'ils sont dans l'ordre $q, p$ et $r$, l'encombrement est $L_2 = q + 2\sqrt{qp} + 2\sqrt{pr} + r$ et s'ils sont dans l'ordre $q, r$ et $p$, cela donne $L_3 = q + 2\sqrt{qr} + 2\sqrt{rp} + p$.
On trouve : $L_1 - L_2 = p - q + 2\sqrt{r} \times \left(\sqrt{q} - \sqrt{p}\right) = \left(\sqrt{p} - \sqrt{q}\right) \times \left(\sqrt{p} + \sqrt{q} - 2\sqrt{r}\right)$, donc $L_1 \geq L_2$.
Et : $L_1 - L_3 = r - q + 2\sqrt{p} \times \left(\sqrt{q} - \sqrt{r}\right) = \left(\sqrt{q} - \sqrt{r}\right) \times \left(2\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}\right)$ , donc $L_1 \geq L_3$.
Mais $L_2 - L_3 = r - p + 2\sqrt{q} \times \left(\sqrt{p} - \sqrt{r}\right) = \left(\sqrt{p} - \sqrt{r}\right) \times \left(2\sqrt{q} - \sqrt{p} - \sqrt{r}\right)$n'est négatif que si $\sqrt{q} - \sqrt{r} \leq \sqrt{p} - \sqrt{q}$, c'était la condition demandée. Le plus grand disque au milieu ou le plus petit peuvent donc créer l'encombrement minimum.

### 3. Sept d'un coup

On dispose de sept rondelles de rayons 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10 (l'unité est le cm).

***a.*** L'arrondi au mm de la longueur totale est donc 97,8 cm. La somme des diamètres est 98 cm. La différence est minime.

| **Rayon** | **10** | **9** | **8** | **7** | **6** | **5** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{r(r+1)}$ | | 9, 487 | 8, 485 | 7, 483 | 6, 481 | 5, 477 | 4, 472 |
| Encombrement | 20 | 37,974 | 53, 944 | 67,911 | 79,872 | 89,827 | 97,771 |

$L \leftarrow 20$
$R \leftarrow 10$
**Pour** $i = 0$ à 5
$L \leftarrow L + \sqrt{(R-i)(R-i-1)} + 1$
**Afficher** $L$
**Fin**

***b.*** À gauche, l'algorithme demandé (qui fait les mêmes calculs que le tableau).

***c.*** Toutes les suites isolées de trois disques sont placées dans la situation leur conférant l'encombrement maximal. La somme des diamètres des disques est 98 cm. La différence est minime.

***d.*** Placer le disque de rayon 4 à gauche du disque de rayon 10 augmente l'encombrement total de :
$\Delta = 4 + 2 \times \sqrt{10 \times 4} - 10$. Ou encore $\Delta = 4 \times \sqrt{10} - 6$
Cette augmentation est compensée : ôter le disque de rayon 4 de la place qu'il occupait diminue l'encombrement de $\nabla = 4 + 2 \times \sqrt{4 \times 5} - 5$, ou encore $\nabla = 4 \times \sqrt{5} - 1$. Le gain de place est donc : $\nabla - \Delta = 5 - 4 \times \sqrt{5} \times \left(\sqrt{2} - 1\right)$. Arrondi au cm, le gain est de 1,3 cm.

**4.** ***a.*** On a le choix entre 7 places pour le premier disque (il faut imaginer des cases), 6 pour le second, etc. Au total, $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5\,040$ (cela s'écrit aussi « factorielle 7 » et se note 7 !) On peut diviser ce nombre de *permutations* par 2, si on considère que deux dispositions symétriques (on échange la gauche et la droite) sont identiques.

***b.*** Les dispositions convenables doivent suivre l'ordre « petit-grand-petit-etc. » indiqué dans le tableau ci-contre, sauf que « petit » et « grand » sont relatifs, sauf pour 9 qui est nécessairement grand et 4 qui est nécessairement petit. On décompte les premières dispositions possibles telles que 4 soit à l'extrême gauche. Il y en a 20 (on aurait pu faire une économie, en compter 10 et doubler le nombre de triplets à droite, par symétrie).

On passe à 40 dispositions en plaçant le 4 à gauche du 10, et à 80 par symétrie.

| **Petit** | **Grand** | **Petit** | **10** | **Petit** | **Grand** | **Petit** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 9 | 8 | **10** | 6 | 7 | 5 |
| 4 | 9 | 8 | | 5 | 7 | 6 |
| 4 | 9 | 7 | | 6 | 8 | 5 |
| 4 | 9 | 7 | | 5 | 8 | 6 |
| 4 | 9 | 6 | | 5 | 8 | 7 |
| 4 | 9 | 6 | | 7 | 8 | 5 |
| 4 | 9 | 5 | | 6 | 8 | 7 |
| 4 | 9 | 5 | | 7 | 8 | 6 |
| 4 | 8 | 7 | | 5 | 9 | 6 |
| 4 | 8 | 7 | | 6 | 5 | 9 |
| 4 | 8 | 6 | | 5 | 9 | 7 |
| 4 | 8 | 6 | | 7 | 9 | 5 |
| 4 | 8 | 5 | | 6 | 9 | 7 |
| 4 | 8 | 5 | | 7 | 9 | 6 |
| 4 | 7 | 6 | | 8 | 9 | 5 |
| 4 | 7 | 6 | | 5 | 9 | 8 |
| 4 | 7 | 5 | | 8 | 9 | 6 |
| 4 | 7 | 5 | | 6 | 9 | 8 |
| 4 | 6 | 5 | | 8 | 9 | 7 |
| 4 | 6 | 5 | | 7 | 9 | 8 |

***c.*** Une fois placé le disque de plus grand rayon, et choisi ceux qui se trouveront à sa gauche et ceux qui se trouveront à sa droite, il n'y a qu'une disposition possible :

- si on met le grand disque à gauche, 1 disposition ;
- si on laisse une place à gauche, 6 dispositions ;
- si on laisse deux places à gauche, 15 dispositions ;
- si on laisse trois places à gauche, 20 dispositions ;

Puis, par symétrie, 15, 6 et 1. En tout 64 dispositions possibles.

*Remarque : comme dans la question précédente, ces dénombrements peuvent se faire à la main si on n'a pas connaissance des combinaisons. On peut aussi dire, sans mentionner les combinaisons, qu'on a passé en revue les parties d'un ensemble à 6 éléments (parties à 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 éléments) et que, justement il y en a $2^6$ (le nombre de suites de 6 symboles pris parmi 0 et 1).*

# Clairs horizons (Séries autres que S)
## Éléments de solution

### A. Calcul du rayon $R$ de la Terre

**1.** Le triangle ABO étant rectangle en A, on applique le théorème de Pythagore : $(R+h)^2 = R^2 + d^2$. Cette relation peut être simplifiée en : $2Rh = d^2 - h^2$. (1)

**2.** $h$ mesure quelques mètres, le rayon de la Terre des centaines de kilomètres. Leur rapport est de l'ordre du cent-millième.

**3.** En divisant par $2h$ chacun des membres de l'égalité (1), on obtient $R = \frac{d^2}{2h} - \frac{h}{2}$ et $\frac{h}{2}$ est négligeable devant $\frac{d^2}{2h}$.

**4.** On trouve $R \approx 6\,400$km.

**5.** Pour parler de rayon terrestre, il faut considérer des grands cercles.

### B. Ligne d'horizon

**6.** Si on suppose $d$ et $R$ donnés, la relation (1) peut être lue comme une équation en $h$.

**7.** Dans le cas où $d = 50$km, on conserve l'équation sous la forme $(6\,400 + h)^2 = 6\,400^2 + 50^2$, dont la solution (la racine positive est la seule qui ait un sens) est donnée par : $h = \sqrt{6\,400^2 + 50^2} - 6\,400$, qui fournit une valeur de $h$ exprimée en kilomètres. Finalement, $h = 19{,}5\text{m}$, valeur arrondie au dm.

D'autre part, $\tan \widehat{\text{COA}} = \frac{d}{R} = \frac{1}{128}$, ce qui donne un angle de 0,448 degré. La longueur de l'arc $\overset{\frown}{\text{AC}}$ est donnée par : $L = \frac{0{,}448}{180} \times \pi \times 6\,400 = 50{,}042$ valeur arrondie au mètre.

*Remarque : évidemment, la longueur de l'arc est très proche de la distance $d$.*

### C. Calcul de la distance $d$

**8.** On applique la « loi des sinus » dans le triangle $IBJ$ : $\frac{IB}{\sin\beta} = \frac{JB}{\sin\alpha} = \frac{IJ}{\sin(180-\alpha-\beta)}$,

En tenant compte du fait que $d = BJ\sin\beta$ et que $\sin(180-\alpha-\beta) = \sin(\alpha+\beta)$, on obtient l'égalité demandée.

**9.** On calcule $d = \frac{1\times\sin 88\times\sin 88{,}42}{\sin 176{,}42}$ avec les valeurs $\sin 88 = 0{,}999391$,

$\sin 88{,}42 = 0{,}999620$ et $\sin 176{,}42 = 0{,}062442$ et on trouve $d = 15{,}9989$ valeur qui sera arrondie à 15 km.