

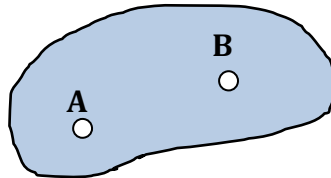
Fiche 1: Modélisation géométrique des mécanismes

Un mécanisme est un ensemble de pièces mécaniques reliées entre elles par des liaisons, appelées liaisons mécaniques, en vue de réaliser une fonction technique précise.

1. Modélisation des pièces mécaniques :

- Les pièces mécaniques sont modélisées par des solides indéformables.
- Le solide (S) est indéformable si quelque soient deux points A et B du solide (S) on a :

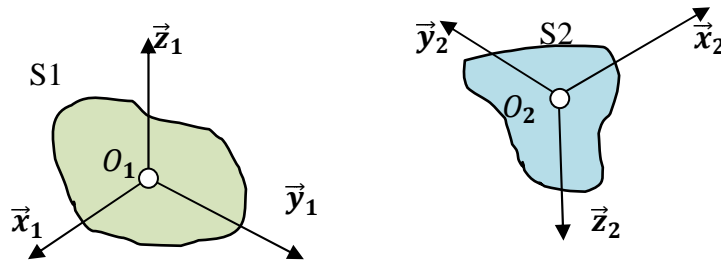
$$\|\overrightarrow{AB}\| = cte.$$



2. Position relative de deux solides indéformables :

- Un mécanisme est composé de plusieurs solides indéformables.
- Il est préalablement associé un repère à chacun de ces solides.
- La position relative de deux solides est alors définie par la position relative des repères qui leurs sont associés.

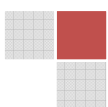
Soient $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ repère lié à S1 et $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ repère lié à S2.

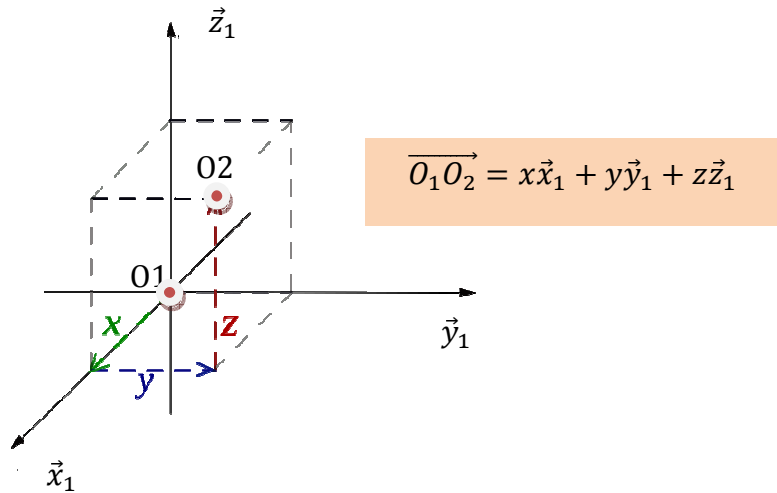


- La position de S2 ou R_2 est définie par rapport à S1 ou R_1 par 6 paramètres :
 - La position de O_2 dans $R_1 \rightarrow 3$ paramètres
 - L'orientation de la base B_1 associée à $R_1 \rightarrow 3$ paramètres

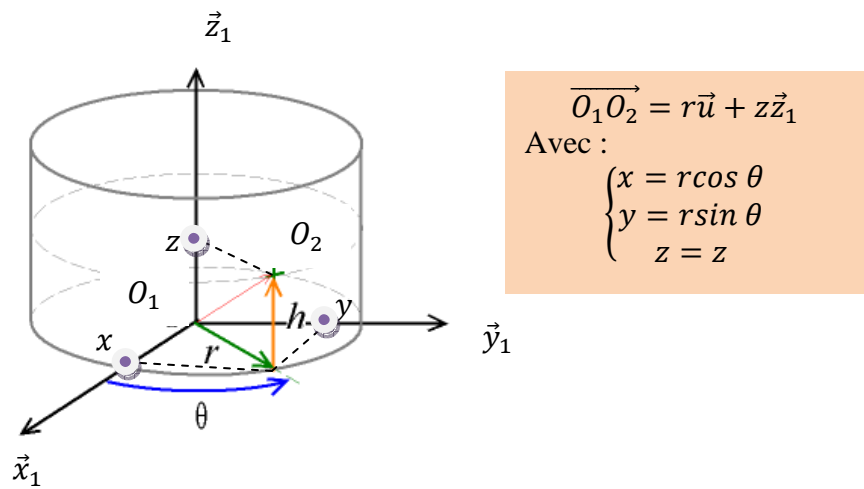
2.1. Paramétrage de la position de l'origine O_2 dans R_1 (3 paramètres)

- **Coordonnées cartésiennes :**

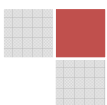
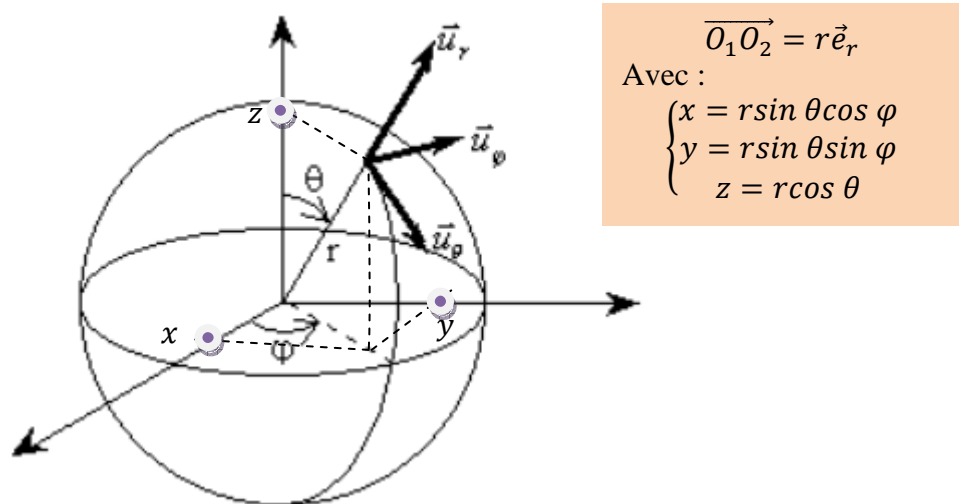




➤ **Coordonnées cylindriques :**



➤ **Coordonnées sphériques :**

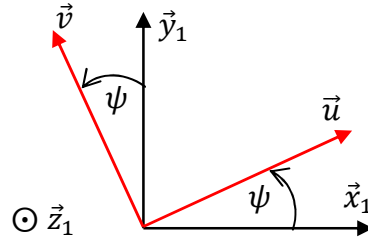


2.2. Paramétrage de l'orientation de la base B2 par rapport à la base B1 (3 paramètres)

L'orientation de la base $B_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ par rapport à la base $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ peut être définie par les trois angles d'Euler (ψ, θ, φ) :

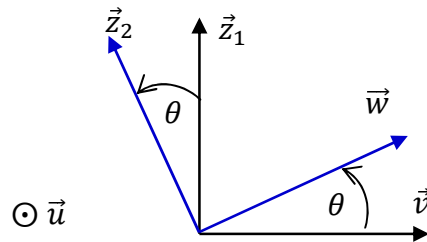
- Rotation de $B'(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1)$ par rapport à $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ d'un angle ψ autour de \vec{z}_1 .

$\psi = (\vec{x}_1, \vec{u})$: Angle de Précession



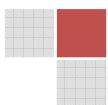
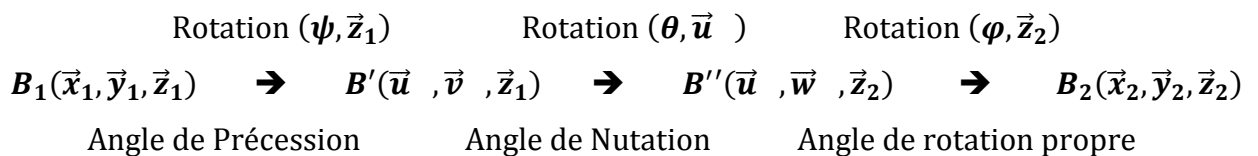
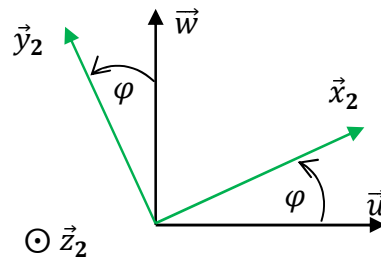
- Rotation de $B''(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_2)$ par rapport à $B'(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1)$ d'un angle θ autour de \vec{u} .

$\theta = (\vec{v}, \vec{w})$: Angle de Nutation



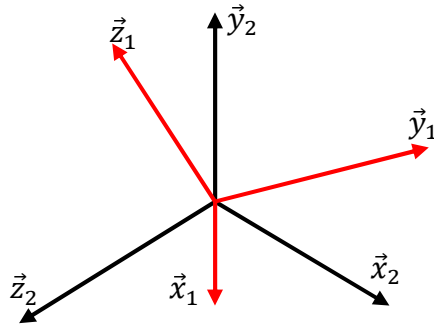
- Rotation de $B_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ par rapport à $B''(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_2)$ d'un angle φ autour de \vec{z}_2 .

$\varphi = (\vec{u}, \vec{x}_2)$: Angle de rotation propre



Position du problème d'une manière plus simple :

Déterminer les rotations nécessaires afin que la base $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ rattrape la base $B_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.



Première méthode :

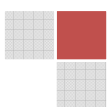
- La première étape consiste à faire une rotation autour de \vec{z}_1 d'un angle ψ appelé angle de précession afin de rendre le vecteur \vec{x}_1 perpendiculaire au vecteur \vec{z}_2 .
- La rotation autour de \vec{x}_1 d'un angle θ appelé angle de nutation permet de rattraper \vec{z}_1 avec \vec{z}_2 . ➔ En conséquence : \vec{z}_1 et \vec{z}_2 sont confondus et perpendiculaires aux vecteurs \vec{x}_1 , \vec{x}_2 , \vec{y}_1 et \vec{y}_2 .
- Une dernière rotation autour de $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ d'un angle φ appelé angle de rotation propre permet de rattraper \vec{x}_1 à \vec{x}_2 et \vec{y}_1 à \vec{y}_2 .

Deuxième méthode :

- La première étape consiste à faire une rotation autour de \vec{x}_1 d'un angle ψ appelé angle de précession afin de rendre le vecteur \vec{y}_1 perpendiculaire au vecteur \vec{x}_2 .
- La rotation autour de \vec{y}_1 d'un angle θ appelé angle de nutation permet de rattraper \vec{x}_1 avec \vec{x}_2 . ➔ En conséquence : \vec{x}_1 et \vec{x}_2 sont confondus et perpendiculaires aux vecteurs \vec{z}_1 , \vec{z}_2 , \vec{y}_1 et \vec{y}_2 .
- Une dernière rotation autour de $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ d'un angle φ appelé angle de rotation propre permet de rattraper \vec{z}_1 à \vec{z}_2 et \vec{y}_1 à \vec{y}_2 .

Troisième méthode :

- La première étape consiste à faire une rotation autour de \vec{y}_1 d'un angle ψ appelé angle de précession afin de rendre le vecteur \vec{z}_1 perpendiculaire au vecteur \vec{y}_2 .
- La rotation autour de \vec{z}_1 d'un angle θ appelé angle de nutation permet de rattraper \vec{y}_1 avec \vec{y}_2 . ➔ En conséquence : \vec{y}_1 et \vec{y}_2 sont confondus et perpendiculaires aux vecteurs \vec{z}_1 , \vec{z}_2 , \vec{x}_1 et \vec{x}_2 .
- Une dernière rotation autour de $\vec{y}_2 = \vec{y}_1$ d'un angle φ appelé angle de rotation propre permet de rattraper \vec{z}_1 à \vec{z}_2 et \vec{x}_1 à \vec{x}_2 .



2.3. Degré de liberté

Le degré de liberté d'un solide S2 par rapport à un solide S1 est le nombre de paramètres indépendants définissant au cours du temps la position de S2 par rapport à S1.

- 6 paramètres sont nécessaires pour définir la position relative de deux solides.
- Lorsque deux solides n'ont aucune liaison, le degré de liberté est donc égal à 6.
- Lorsqu'il existe une liaison mécanique entre deux solides, le degré de liberté est strictement inférieur à 6.

3. Modélisation et paramétrage des liaisons mécaniques :

Les mécanismes sont constitués de pièces mécaniques en contact physique les unes par rapport aux autres. Ces contacts sont appelés liaisons mécaniques. Ces liaisons sont supposées avoir une géométrie parfaite et sans jeu.

3 - 1. Liaisons simples :

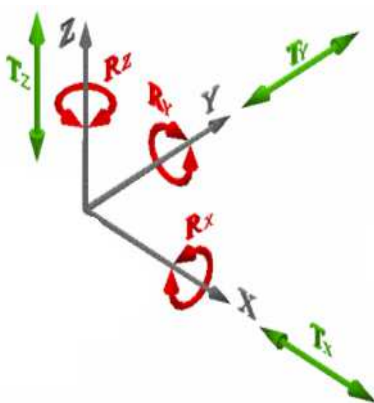
Une liaison simple est une liaison réalisée par le contact de deux surfaces simples : Plan, cylindre et sphère. Le tableau suivant rassemble les six liaisons simples :

	Plan	Cylindre	Sphère
Plan	Appui plan	Linéique rectiligne	Ponctuelle
Cylindre		Pivot glissant	Linéaire annulaire
Sphère			Rotule

Remarque :

Pour étudier ces liaisons (simples ou composées), on adopte les notations et les hypothèses suivantes :

- i. Les liaisons sont supposées sans frottement ;
- ii. Un solide placé librement dans l'espace peut faire six degrés de liberté indépendantes ; trois translations et trois rotations suivant les trois axes du repère choisi (figure ci dessous).



On note :

- T_x : translation suivant l'axe \vec{x}
- T_y : translation suivant l'axe \vec{y}
- T_z : translation suivant l'axe \vec{z}
- R_x : rotation autour de l'axe \vec{x}
- R_y : rotation autour de l'axe \vec{y}
- R_z : rotation autour de l'axe \vec{z}

- iii. Le torseur cinématique du solide j dans son mouvement par rapport au solide i au point A

quelconque est noté par : $\{v(j/i)\} = \left\{ \begin{matrix} \bar{\Omega}(j/i) \\ \vec{V}(A \in j/i) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \Omega_x & v_x \\ \Omega_y & v_y \\ \Omega_z & v_z \end{matrix} \right\}_R$

iv. Le torseur d'action mécanique ou torseur statique du solide i sur le solide j au point A quelconque est noté par :

$$\{F(i \rightarrow j)\} = \left\{ \begin{matrix} \bar{R}(i \rightarrow j) \\ \vec{M}_A(i \rightarrow j) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{matrix} \right\}_R \text{ avec :}$$

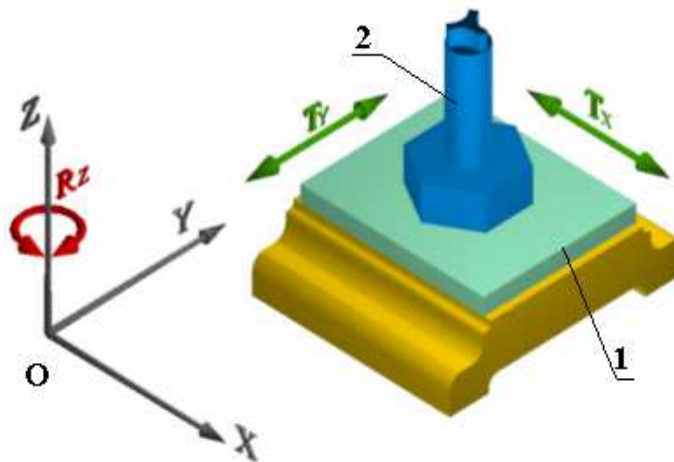
v. On note le nombre d'inconnues cinématiques par Nc (également le nombre de degrés de liberté par ddl)

vi. On note le nombre d'inconnue statique (inconnues d'action mécanique) par Ns

a. Appui plan de normale \vec{z} :

Modèle géométrique :

La liaison appui plan est réalisée par le contact entre deux surfaces planes. La figure suivante donne un modèle géométrique de cette liaison.



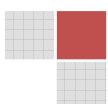
Degrés de liberté :

Le solide 2 peut se translater suivant les axes \vec{x} et \vec{y} et faire uniquement une rotation autour de l'axe \vec{z} . Le tableau suivant donne les degrés de libertés autorisées et non autorisées :

Translation	Tx	Ty	Tz
Rotation	Rx	Ry	Rz

Torseur cinématique :

$$\{u(2/1)\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & v_x \\ 0 & v_y \\ \Omega_z & 0 \end{matrix} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$



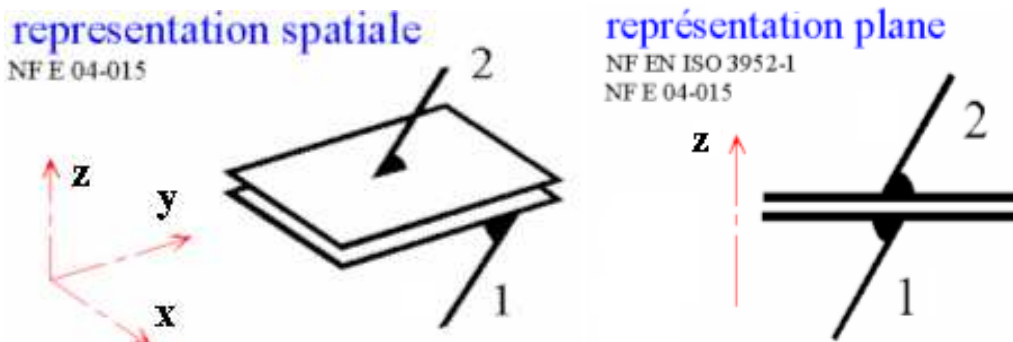
Torseur d'action mécanique :

$$\{F(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

Remarque :

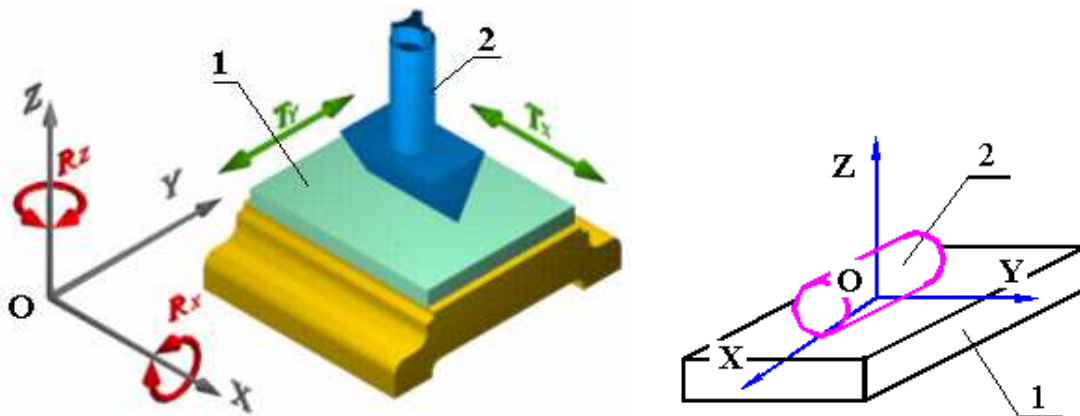
- Le nombre d'inconnues cinématiques est : $Nc = 3$
- Le nombre d'inconnues d'actions mécaniques est : $Ns = 3$

Schématisations normalisées : Appui plan de normale \bar{z}



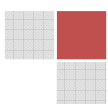
b - Liaison linéique rectiligne d'axe \bar{x} et de normale \bar{z} :

La liaison linéique rectiligne est réalisée par le contact entre une surface cylindrique et une autre plane. La figure suivante donne deux modèles géométriques pour cette liaison.

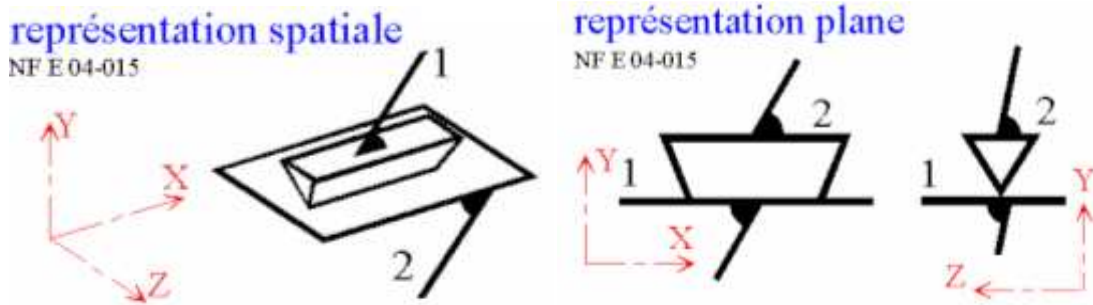


- Le torseur cinématique est : $\{\vartheta(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & v_x \\ 0 & v_y \\ \Omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$

- Le torseur d'actions mécaniques est : $\{F(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$

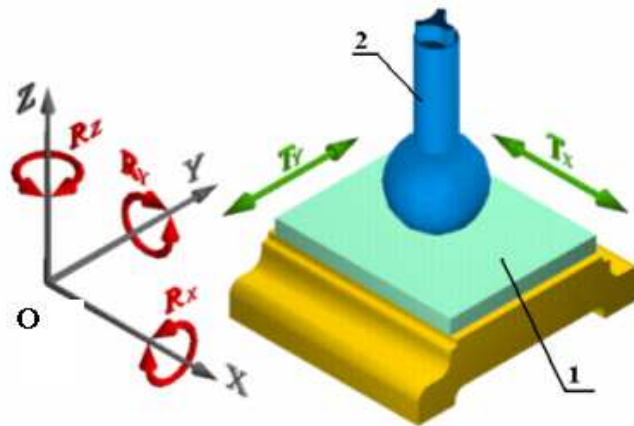


- Le nombre d'inconnues cinématiques est : $N_c = ddl = 4$
- Le nombre d'inconnues du torseur d'action mécanique est : $N_s = 2$
- Schématisations normalisées : appui linéique d'axe \vec{x} et de normale \vec{y} ;



c - Liaison ponctuelle de normale \vec{z} :

La liaison ponctuelle est réalisée par le contact entre une surface sphérique et une surface plane .



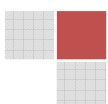
Translation	T_x	T_y	T_z
Rotation	R_x	R_y	R_z

- Le torseur cinématique du solide 2 dans son mouvement par rapport au solide 1 est le

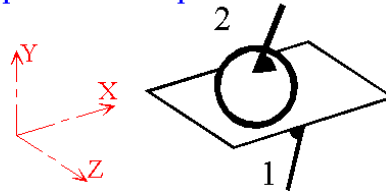
torseur suivant : $\left\{ \vartheta(2/1) \right\} = \begin{Bmatrix} \Omega_x & v_x \\ \Omega_y & v_y \\ \Omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

- Le torseur d'action mécanique est : $\left\{ F(1 \rightarrow 2) \right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

- Le nombre d'inconnues cinématiques ou degrés de libertés est : $N_c = ddl = 5$
- Le nombre d'inconnues du torseur d'action mécanique est : $N_s = 1$
- Schématisations normalisées : liaison ponctuelle de normale \vec{y}

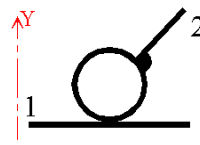


représentation spatiale



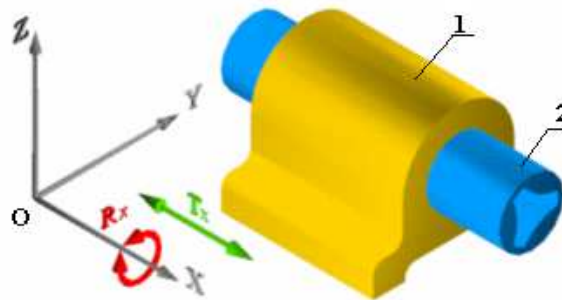
représentation plane

NF EN ISO 3952-1



d - Liaison pivot glissant d'axe \bar{x} :

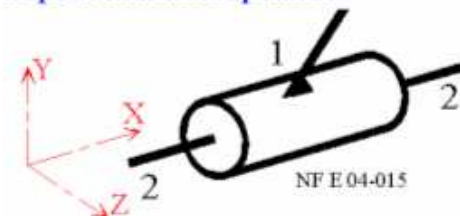
La liaison pivot glissant est réalisée par une surface cylindrique placée dans une autre surface cylindrique.



Translation	T_x	T_y	T_z
Rotation	R_x	R_y	R_z

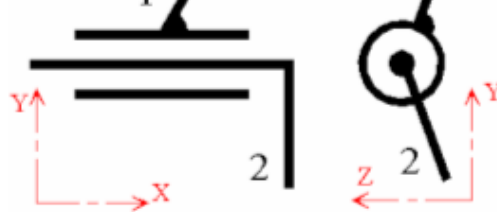
- Le torseur cinématique est : $\{ \vartheta(2/1) \} = \begin{matrix} \Omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}_{o(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$
- Le torseur d'action mécanique est : $\{ F(1 \rightarrow 2) \} = \begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{matrix}_{o(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$
- Le nombre de degrés de libertés est : $Nc = ddl = 2$
- Le nombre d'inconnues d'action mécanique est : $Ns = 4$
- Schématisations normalisées : pivot glissant d'axe \bar{x} ;

représentation spatiale

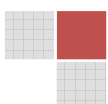


représentation plane

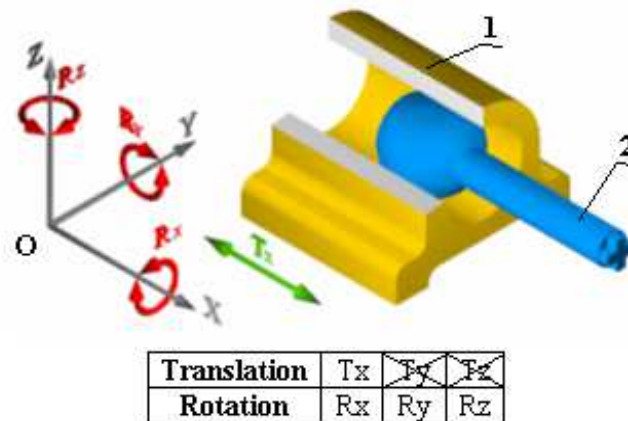
NF EN ISO 3952-1
NF E 04-015



e - Liaison linéaire annulaire d'axe \bar{x} :



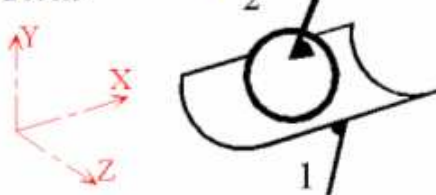
La liaison linéaire annulaire est réalisée par le contact entre une surface sphérique placée dans une surface cylindrique.



- Le torseur cinématique est : $\{ \vartheta(2/1) \} = \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \Omega_x & v_x \\ \Omega_y & 0 \\ \Omega_z & 0 \end{matrix} \right\}_{(x, y, z)} \\ o \end{matrix}$
- Le torseur d'actions mécaniques est : $\{ F(1 \rightarrow 2) \} = \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{matrix} \right\}_{(x, y, z)} \\ o \end{matrix}$
- Le nombre d'inconnues cinématiques est : $Nc = ddl = 4$
- Le nombre d'inconnues du torseur d'action mécanique est : $Ns = 2$
- Schématisations normalisées : linéaire annulaire d'axe \bar{x} ;

représentation spatiale

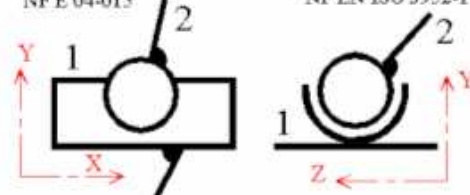
NFE 04-015



représentation plane

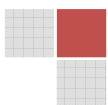
NFE 04-015

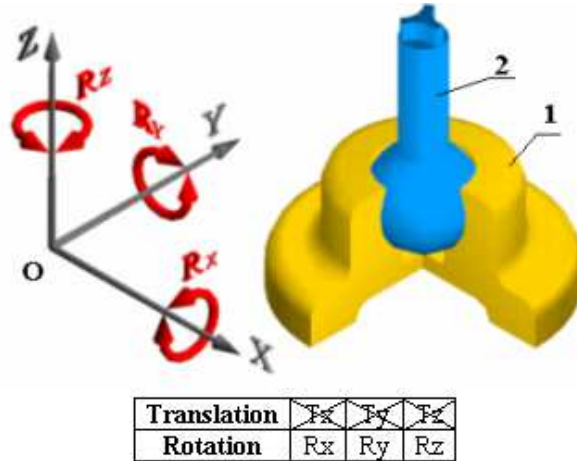
NF EN ISO 3952-1



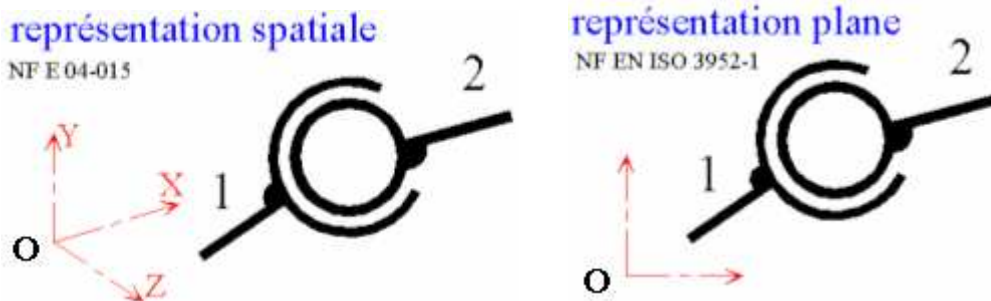
f - Rotule de centre O :

La liaison rotule est réalisée par deux surfaces sphériques.





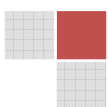
- Le torseur cinématique est : $\{\vartheta(2/1)\} = \begin{matrix} \left(\begin{matrix} \Omega_x & 0 \\ \Omega_y & 0 \\ \Omega_z & 0 \end{matrix} \right)_{(x, y, z)} \end{matrix}$
- Le torseur d'action mécanique est : $\{F(1 \rightarrow 2)\} = \begin{matrix} \left(\begin{matrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{matrix} \right)_{(x, y, z)} \end{matrix}$
- Le nombre d'inconnues cinématiques est : $Nc = ddl = 3$
- Le nombre d'inconnues d'action mécanique est : $Ns = 3$
- Schématisations normalisées : liaison rotule de centre O

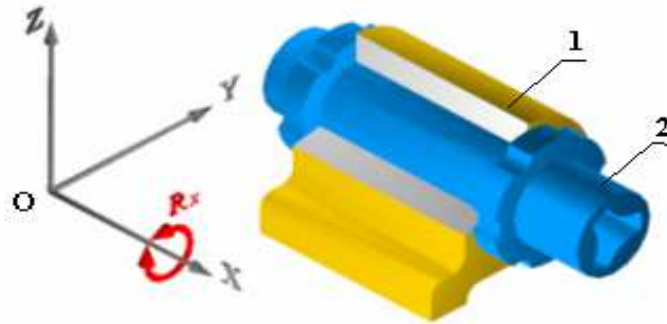


3 - 2. Liaisons composées :

a - Liaison pivot d'axe \bar{x} :

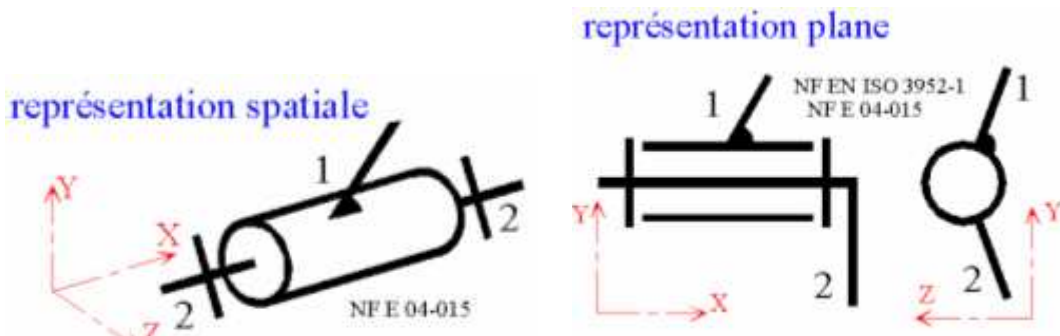
La liaison pivot n'autorise qu'une seule rotation autour de son axe.





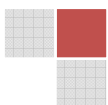
Translation	T_x	T_y	T_z
Rotation	R_x	R_y	R_z

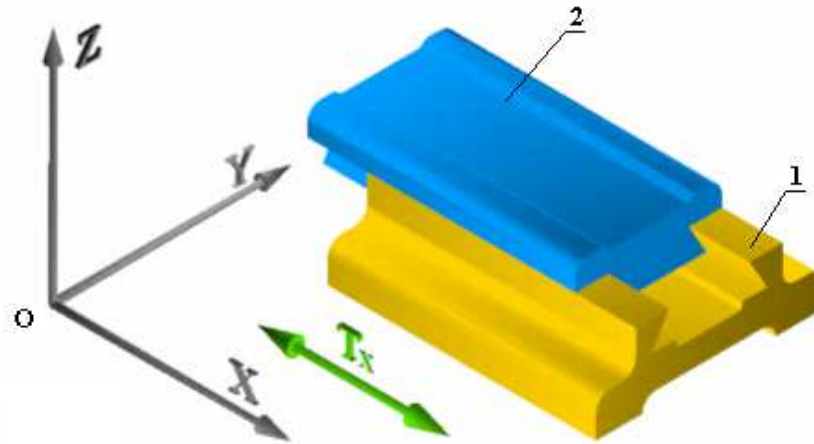
- Le torseur cinématique est : $\{\vartheta(2/1)\} = \begin{matrix} \Omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}_{o(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$
- Le torseur d'action mécanique est : $\{F(1 \rightarrow 2)\} = \begin{matrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{matrix}_{o(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$
- Le nombre de degrés de liberté est : $Nc = ddl = 1$
- Le nombre d'inconnues du torseur d'actions mécaniques est : $Ns = 5$
- La liaison pivot est obtenue par association en parallèle de deux liaisons rotule ou une liaison rotule et une liaison linéaire annulaire (voir exemples suivants)
- Schématisations normalisées : pivot d'axe \bar{x} ;



b - Liaison glissière d'axe \bar{x} :

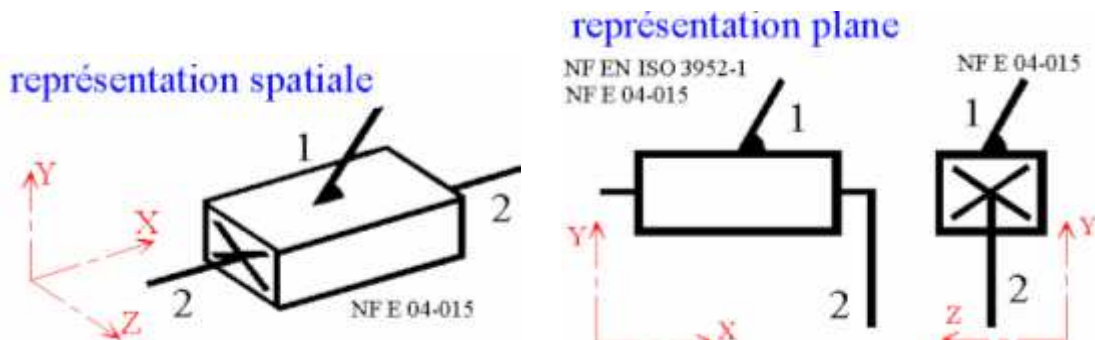
La liaison glissière n'autorise qu'une seule translation.





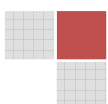
Translation	T_x	T_y	T_z
Rotation	R_x	R_y	R_z

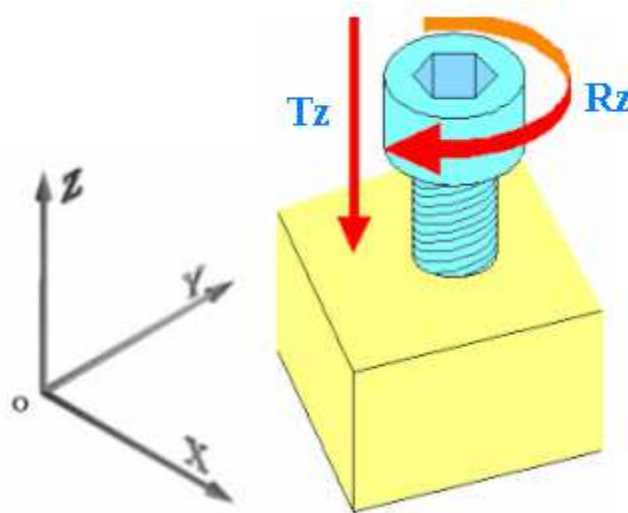
- Le torseur cinématique est : $\{\vartheta(2/1)\} = \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} 0 & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \end{matrix}$
- Le torseur d'action mécanique est : $\{F(1 \rightarrow 2)\} = \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{matrix} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \end{matrix}$
- Le nombre de degrés de libertés est : $Nc = ddl = 1$
- Le nombre d'inconnues du torseur d'action mécanique est : $Ns = 5$
- Schématisations normalisées : glissière d'axe \bar{x} ;



c. Liaison hélicoïdale d'axe \bar{z} :

La liaison hélicoïdale présente une rotation et une translation conjuguées. L'exemple typique de cette liaison est le système vis écrou ; une rotation de la vis est conjuguée avec une translation de celle ci dans l'écrou. On distingue deux types de filetage ; filetage gauche et filetage droite.





- Le torseur cinématique est : $\{\vartheta(2/1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \Omega_z & v_z \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$ Avec $v_z = \pm \frac{p}{2\pi} \Omega_z$; + ou - selon le

type de filetage. p : pas de filetage

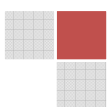
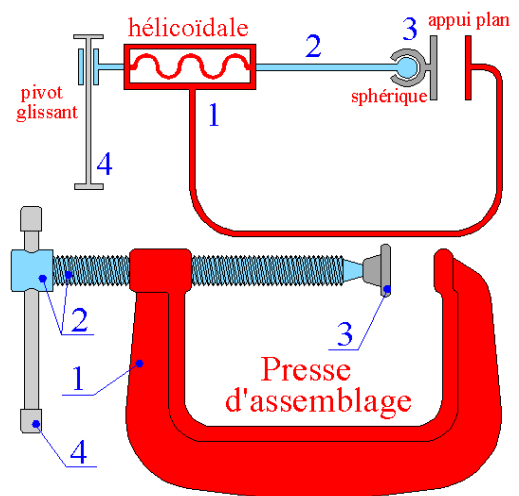
- ✓ Si le filetage est à droite : $v_z = + \frac{p}{2\pi} \Omega_z$
- ✓ Si le filetage est à gauche : $v_z = - \frac{p}{2\pi} \Omega_z$

- Le torseur d'actions mécaniques est : $\{F(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$

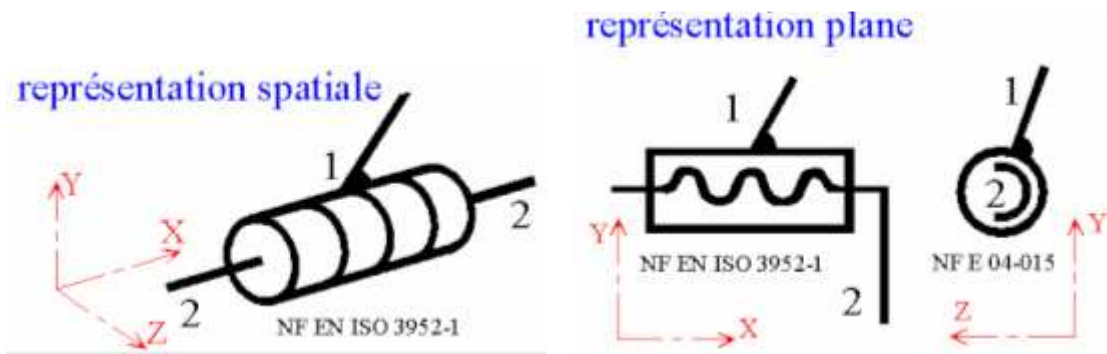
- Avec $N_{12} = \pm \frac{p}{2\pi} Z_{12}$; + ou - selon le type de filetage;

- ✓ Si le filetage est à gauche : $N_{12} = - \frac{p}{2\pi} X_{12}$
- ✓ Si le filetage est à droite : $N_{12} = + \frac{p}{2\pi} X_{12}$

- Exemple 1 : étau simple;



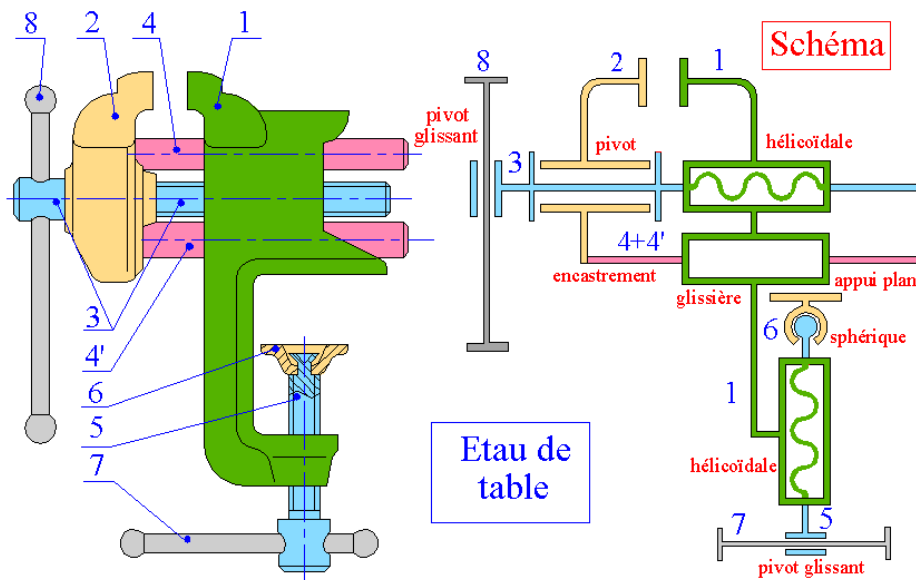
- Schématisations normalisées : glissière d'axe \bar{x} ;



3 - 4. Schéma d'architecture d'un mécanisme :

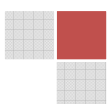
- **Schéma cinématique** : Permet de visualiser les mouvements relatifs des pièces principales d'un mécanisme.

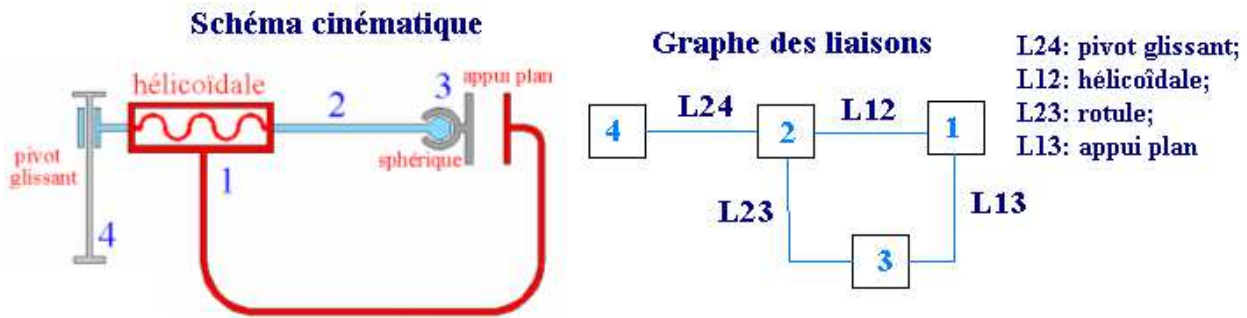
Exemple 1 : étau à table ;



- **Graphe de liaisons** : Permet de représenter les différentes liaisons entre les différentes pièces du mécanisme, il permet également de déterminer facilement l'extérieur d'une pièce ou un ensemble de pièce.

Exemple 1 : étau simple ;



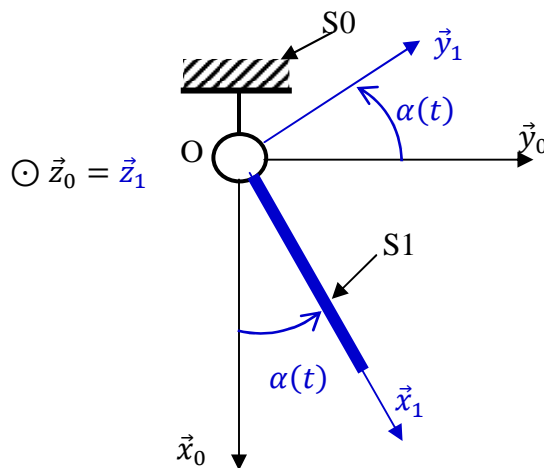


4. Paramétrage de mouvements particuliers

4-1. Mouvement de rotation :

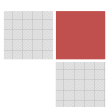
Le système suivant est composé de :

- Un bâti (S0) lié au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- Une tige (S1), liée au repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$, en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) avec le bâti (S0) avec $\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1,) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ représente le paramètre de rotation.



- La vitesse angulaire de S1 par rapport à S0 est déterminé par :

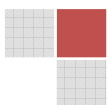
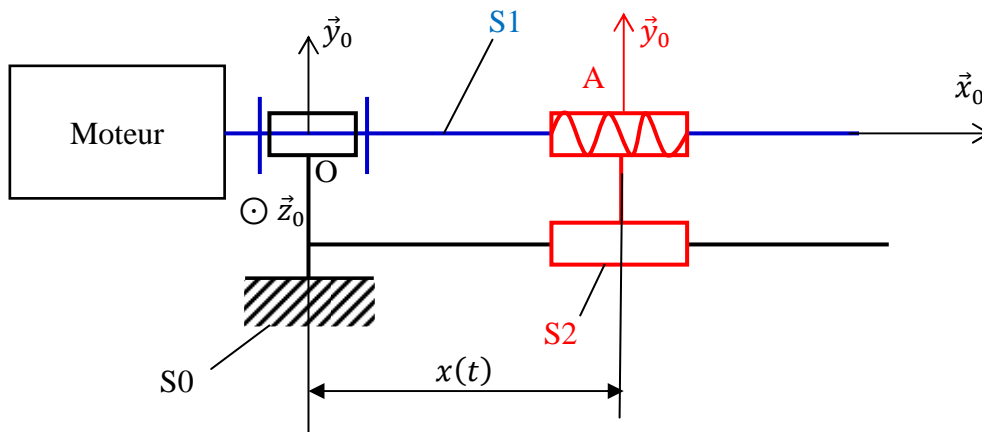
$$\vec{\Omega}(S_1/S_0) = \text{sens} * \text{norme} * \text{direction}$$



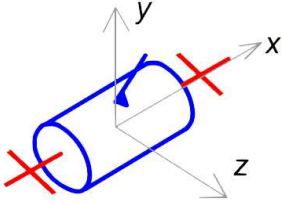
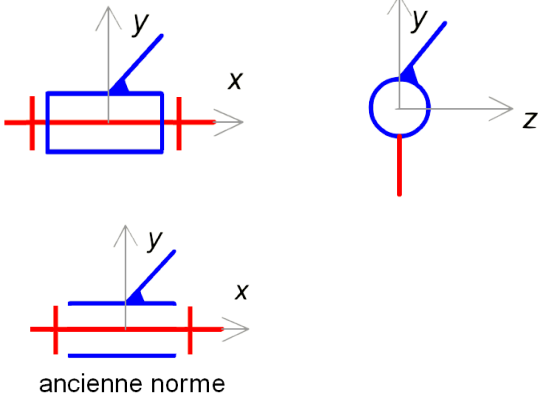
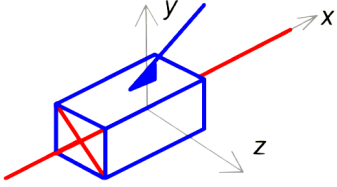
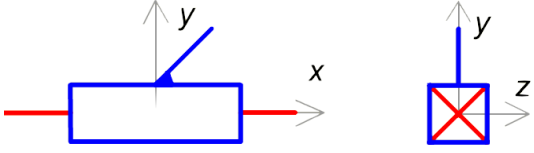
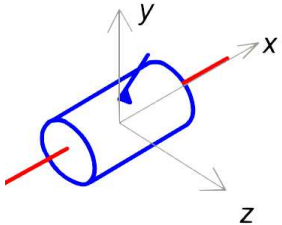
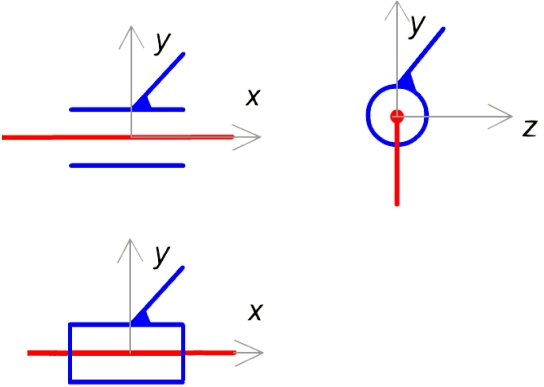
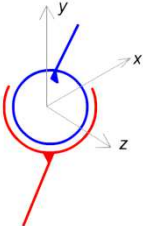
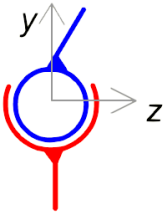
4-1. Mouvement de translation :

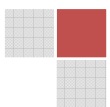
Le système suivant est composé de :

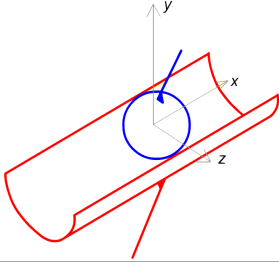
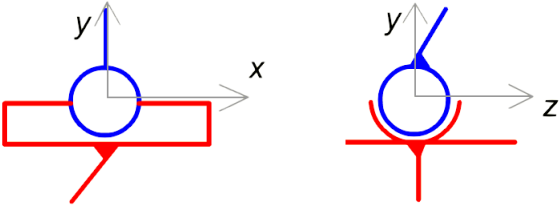
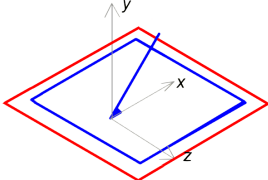
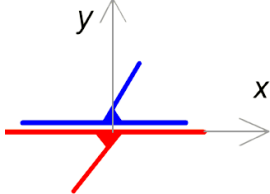
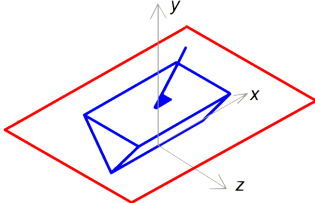
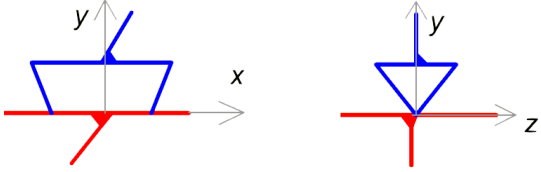
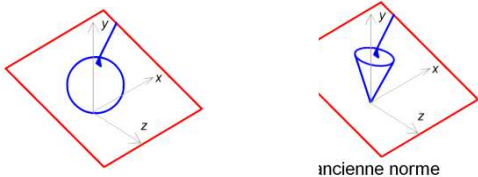

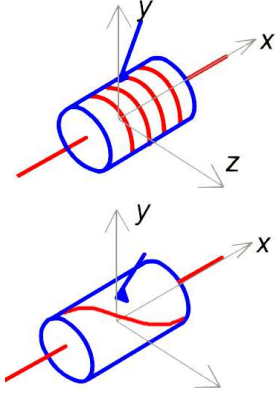
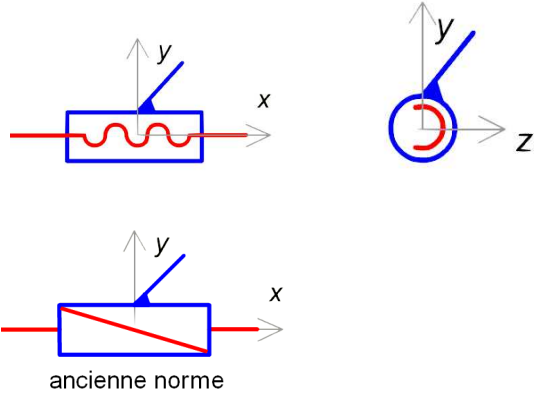
- Un bâti (S0) lié au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- Une vis (S1), liée au repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, en liaison pivot d'axe (O, \vec{x}_0) avec le bâti (S0) avec $\alpha(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1,) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ représente le paramètre de rotation. La vis S1 est animée d'un mouvement de rotation à l'aide d'un moteur.
- Un coulisseau (S2), lié au repère $R_2(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, en liaison hélicoïdale avec (S1) et en liaison glissière avec (S0). $\overline{OA} = x(t)\vec{x}_0$



Annexe : Symboles des liaisons :

LIAISON	SCHÉMATISATION SPATIALE	SCHÉMATISATION PLANE
<p>PIVOT d'axe (A,x)</p>		 <p>ancienne norme</p>
<p>GLISSIERE d'axe (A,x)</p>		
<p>PIVOT GLISSANT d'axe (A,x)</p>		 <p>symbole admissible</p>
<p>ROTULE de centre A</p>		



<p>LINEAIRE ANNULAIRE d'axe (A,x)</p>		
<p>APPUI PLAN de normale (A,y)</p>		
<p>LINEAIRE RECTILIGNE de normale (A,y) et d'axe (A,x)</p>		
<p>PONCTUELLE de normale (A,y)</p>	 <p style="text-align: center;">ancienne norme</p>	 <p style="text-align: center;">ancienne norme</p>
<p>GLISSIERE HELICOIDALE d'axe (A,x)</p>	 <p style="text-align: center;">ancienne norme</p>	 <p style="text-align: center;">ancienne norme</p>

