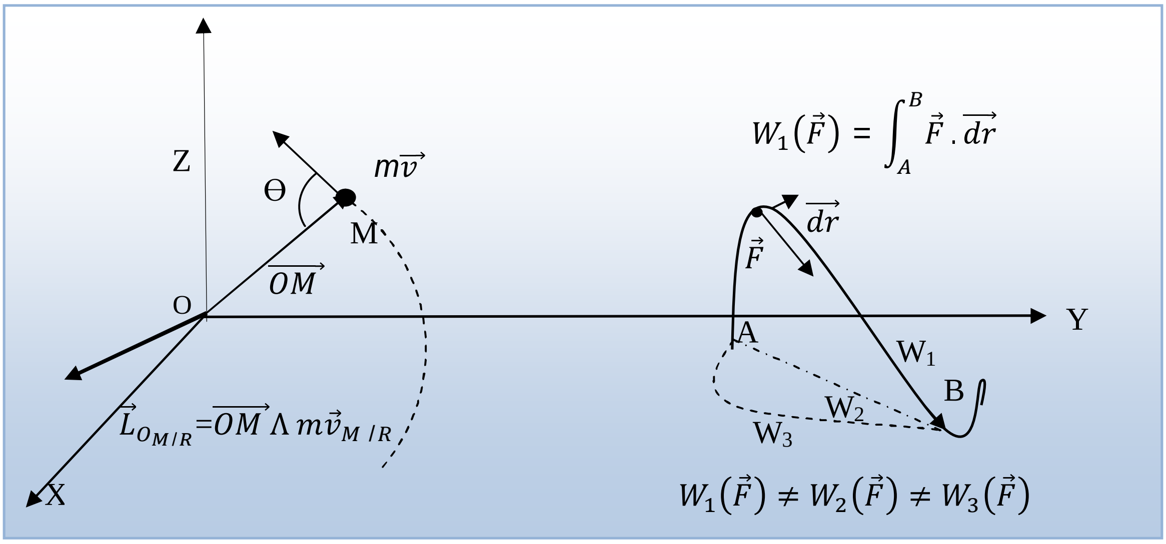
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHESCIENTIFIQUE
CENTRE UNIVERSITAIRE EL-WANCHARISSI DE TISSEMSILT
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Polycopié de cours :

Mécanique du point matériel
Cours et exercices

Élaboré par : Dr ZEBBAR Souhila



TISSEMSILT   2018

Sommaire

Chapitre III : dynamique du point matériel

Chapitre IV : Travail et énergie du point matériel 53

Introduction :

Ce polycopie de cours et exercices de mécanique du point matériel est un moyen pédagogique destiné aux étudiants de la première année sciences et technologie (ST) du système LMD, il peut servir comme un support au cours dispensé aux étudiants. Ces cours qu'on assurait pendant 4 ans au centre universitaire de Tissemsilt, institut des sciences et de la technologie.

Ce présent travail couvre les quatre chapitres du programme de la mécanique du point matériel :

I- Rappels mathématiques: analyse dimensionnelle, vecteurs

II- Cinématique du point matériel.

III- Dynamique du point matériel.

IV-Travail et énergie du point matériel.

Chapitre I : Rappels mathématiques

1- Analyse dimensionnelle

2- Calcul vectoriel

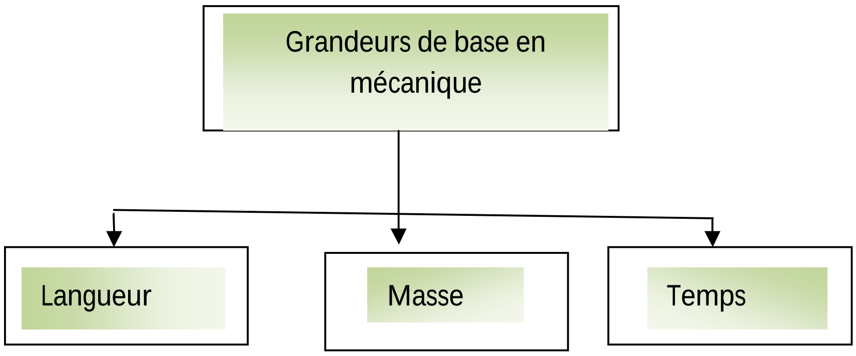
Chapitre I : Rappels mathématiques

I-1 Analyse dimensionnelle :

I.1.1Grandeur physique :

On appelle grandeur physique, toute grandeur qui peut être mesurée , ou calculée à partir d'autres grandeurs dites grandeurs de base. Par exemple : on peut définir les deux grandeurs la distance et le temps en mesurant les deux, tandis que la vitesse se calcule en divisant la distance parcourue par le temps de parcours, dans ce cas la distance et le temps sont des grandeurs de base, la vitesse est une grandeur dérivée.

La plupart des grandeurs physiques découlent les une des autres ainsi que de quelques grandeurs de base. En fait les grandeurs de base utilisées en mécanique sont la masse, la longueur et le temps.



I.1.2 Système International d'Unités (SI):

Le système international (SI) est constitué de 7 unités de base (fondamentales) correspondant à 7 grandeurs physiques comme le résume le tableau suivant :

GRANDEUR	UNITÉ	SYMBOL E DE L'UNITÉ
Longueur	meter	m
Masse	kilogram	kg
Temps	second	s
Intensité de courant electrique	Ampere	A
Intensité lumineuse	candela	cd
Quantité de la matière	mole	mol

Tableau I.1 : Gradeurs physique du (SI)

I.1.2. Les multiples et les sous multiples

I.1.2.a- Les multiples :

10^X	10^{+1}	10^{+2}	10^{+3}	10^{+6}	10^{+9}	10^{+12}	10^{+15}	10^{+18}
Préfixe	deca	hecto	kilo	mega	géga	téra	péta	exa
Symbole	**da**	**h**	**k**	**M**	**G**	**T**	**P**	**E**

I.1.2.b.- Les sous multiples :

10^X	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}
Préfixe	deci	centi	milli	micro	nano	pico	femtto	atto
Symbole	**d**	**c**	**m**	**µ**	**n**	**p**	**f**	**a**

Tableau I.2 :**(a)** *Les multiples et* **(b)** *les sous multiples.*

c- Les unités dérivées :

Toutes les unités des grandeurs physiques (à l'exception de celles précitées) dérivent des unités fondamentales cités ci-dessus.

Exemple : Newton ($1N = 1kg.m.s^{-2}$), Joule(J), Ohm(Ω)…

d- Les unités secondaires :

En plus des unités fondamentales il existe des unités secondaires pour quelques grandeurs.

Exemple : La température : degré Celsius (°C), volume : litre(l), pression : atmosphère(at), énergie :calorie(cal)…

e- Une unité supplémentaire:

L'unité officielle pour les angles plans est le Radian (rad). Elle constitue une unité supplémentaire aux sept unités citées ci-dessus.

I.1.3 Dimension d'une grandeur fondamentale:

Le mot dimension en physique indique la nature physique de la quantité. **Exemple 1:** La distance a la dimension de la longueur notée L : [distance]= L.

Grandeur G	**Symbole de la dimension** [G]
Longueur	L
Masse	M
Temps	T
Température	θ
Intensité du courant électrique	I
Intensité lumineuse	Cd
Quantité de la matière	N

Tableau I.3 : Symboles des dimensions fondamentales.

Exemple I.2 :

Le volume a la dimension de L^3 : $[V]= LLL=L^3$

La vitesse a la dimension de la (longueur / temps) : $[v]= L/T= L.T^{-1}$

I.1.4 Les équations aux dimensions :

Définition :

Dans le cas général l'équation aux dimensions de la grandeur (G), est la suivante :

$$\boxed{[G]= M^aL^bT^c I^d\theta^e N^f J^g} \qquad (I.1)$$

Dans le domaine limité de la mécanique du point matériel, l'équation aux dimensions de la grandeur dérivée (G) est l'expression suivante :

$$\boxed{[G]=M^aL^bT^c} \qquad (I.2)$$

Avec M, L, T …et J sont respectivement les symboles de la masse, de la longueur, temps… a, b, … g des exposants caractérisent la grandeur dérivée G des nombres réels.

Remarques:

***** Grandeurs adimensionnées ou sans dimension : touts les exposants sont nuls .

****** les fonctions exponentielles, logarithmiques, trigonométriques ainsi que les constantes, et tout ce qui se trouve à l'intérieur de ces fonctions ont pour dimension la valeur1. $[e^x]=1$, $[\mathrm{Log}\ x]=1$, $[4]=1$, $[\sin x]=1$, $[\pi]=1$...

Exemple I.3 : Déterminer l'équation aux dimensions de l'accélération et de la force ? Exprimer l'unité de chaque grandeur en SI (système internationale).

Réponse : l'accélération : $a=\frac{v}{t}\rightarrow \quad [a]=\frac{[v]}{[t]} \quad [a]=\frac{L.T^{-1}}{T}\rightarrow[a]=L.T^{-2}$, l'unité : ms^{-2}

La force: $f=ma\rightarrow[f]=MLT^{-2}$, l'unité : $kgms^{-2}$

Exemple I.4 : Déterminer l'équation aux dimensions du travail et de l'énergie.

Réponse : $W=f.d\rightarrow[W]=MLT^{-2}L=ML^2T^{-2}$, l'unité : kgm^2s^{-2}

- * L'analyse dimensionnelle permet de vérifier l'homogénéité d'une formule :

Exemple I.5: Vérifier l'homogénéité de l'expression $x=\frac{1}{2}at^2$, avec x est la distance, a est l'accélération et t est le temps.

$[x]=L$

Réponse : $\left[\frac{1}{2}at^2\right]=1LT^{-2}T^2=L$ Donc l'expression est homogène .

- ** L'analyse dimensionnelle permet de passer d'un système d'unités à un autre :

Exemple I.6 : Trouver l'équivalent de l'unité Joule en SI.

Réponse : $E=\frac{1}{2}mv^2\rightarrow[E]=MLT^{-2}L\Rightarrow 1ML^2T^{-2}\equiv 1Joule$

- *** L'analyse dimensionnelle permet de déterminer la structure des lois physiques compatible avec les grandeurs décrivant le phénomène étudié (longueur, vitesse, force, résistance électrique, champ électrique …)

Exemple I.7 : Exprimer par l'analyse dimensionnelle la période τ d'oscillation d'un pendule simple, sachant que les grandeurs physiques variables sont m, g, l

Réponse :

La période du pendule $\rightarrow [\tau] = [m]^{\alpha}[l]^{\beta}[g]^{\gamma}$

$$\rightarrow [\tau] = M^{\alpha}L^{\beta+\gamma}T^{-\gamma} avec [\tau] = T \rightarrow T = M^{\alpha}L^{\beta+\gamma}T^{-\gamma} \Rightarrow M^{0}L^{0}T^{1} = M^{\alpha}L^{\beta+2\gamma}T^{-\gamma} \Rightarrow \alpha = 0, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = -\frac{1}{2}$$

l'expression possible est $\tau = C\sqrt{\frac{l}{g}}$

avec C=2π $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

I.2 Calcul vectoriel :

Les grandeurs physiques peuvent être de nature scalaire ou vectorielle.

I.2.1 Grandeur scalaire et grandeur vectorielle :

Pour spécifier une grandeur scalaire il suffit de préciser un nombre (et le plus souvent une unité). **Exemple:** L'énergie, La température, la pression en un point, le potentiel, la masse… Une grandeur vectorielle est définie par une direction, un sens, et une intensité

Exemple : la force, L'accélération, la vitesse …

I.2.2 Représentation d'un vecteur :

La direction est la droite qui porte le vecteur : Elle est définie par l'angle mesuré entre le vecteur et l'axe des abscisses.

Le sens représente l'orientation origine-extrémité du vecteur et est symbolisé par une flèche.
L'intensité :(appelée également norme ou module) représente la valeur de la grandeur mesurée par le vecteur. Graphiquement elle correspond à la longueur du vecteur **(Figure I.1)**
Le point d'application est le point qui sert d'origine à la représentation du vecteur $\vec{V}$.

- Notation d'un vecteur $\vec{V}=\overrightarrow{AB}$ (**V**= **AB** ou en gras notation anglo-saxonne).

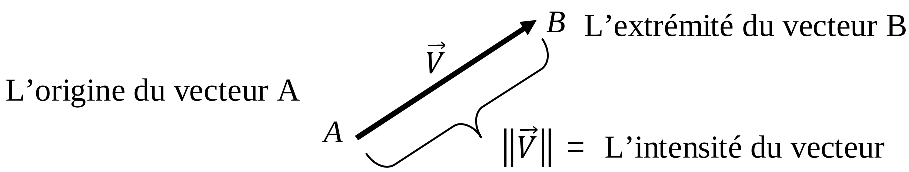


Figure I.1 : Représentation et notation d'un vecteur $\vec{V}=\overrightarrow{AB}$

I.2.3Proprietés des vecteurs :

a-Vecteur libre : Un **vecteur libre** si son point d'application n'est pas fixe. (figure I.2 .a).
b-Vecteur glissant : Un vecteur est nommé "**vecteur glissant**" si l'on impose sa droite support (Δ) sans fixer son point d'application. (figure I.2 .b).
c-Vecteur lié : Un vecteur AB est appelé "**vecteur lié**" si l'on fixe son origineA(figure I.2 .c).

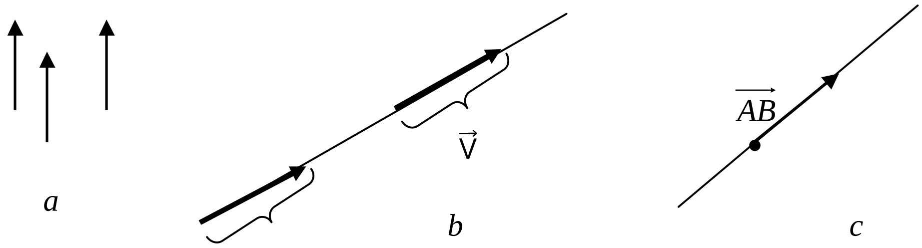


Figure I.2 : a-Vecteur libre, b-Vecteur glissant et c-Vecteur lié

I.2.4-*Vecteur unitaire*:

Un vecteur unitaire $\vec{u}$ est un vecteur dont le module est égal à1.On peut exprimer un vecteur unitaire sous la forme :

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \qquad (I.3)$$

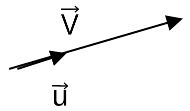


Figure I.2: Le vecteur unitaire $\vec{u}$ de vecteur $\vec{V}$

Exemple : Les vecteurs unitaires de la base cartésienne sont : $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\begin{cases} \vec{i} = \text{Vecteur unitaire suivant } (Ox) \\ \vec{j} = \text{Vecteur unitaire suivant } (Oy) \\ \vec{k} = \text{Vecteur unitaire suivant } (Oz) \end{cases}$$

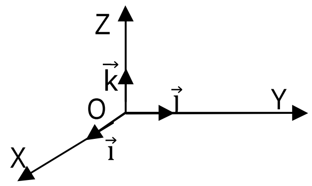


Figure I.3: La base cartésienne orthonormée$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Pour repérer un point M dans l'espace on utilise le repère cartésien orthonormé tridimensionnel (figure I.5) composé de trois axes, Ox, Oy et Oz, mené d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

I.2.5.Composantes d'un vecteur :

I.2.5.b *Dans l'espace (En 3D) :* La position d'un point M dans l'espace est caractérisée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (I.4)$$

x, y et z les projections de M sur les axes Ox, Oy et Oz, respectivement. M′ étant sa projection sur le plan (O, x, y).

Coordonnées de M(x, y, z)

Composantes de $\overrightarrow{OM}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

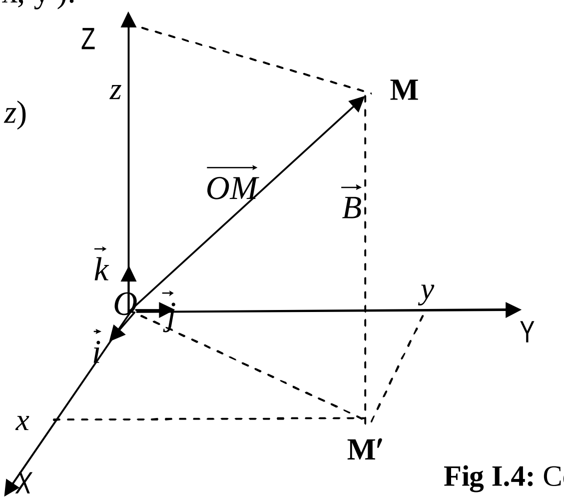


Fig I.4: Composantes d'un vecteur en 3 D

Relation de Chasles : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$ (I.5)

Avec : $\overrightarrow{OM'} = x\vec{i}+y\vec{j}$

Remarque :

Etant donné trois points A(x_A, y_A, z_A), B (x_B, y_B, z_B) et C(x_C, y_C, z_C) :

*Les composantes de vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

Le module est : $\boxed{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$ (I.6)

Cas particulier : Si les trois points A, B et C sont alignés sur un axe, alors nous obtenons la relation de Chasles pour les mesures algébriques : $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ (I.7)

I.2.5.*b. Dans le plan :* (O,X,Y)

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i}+y\vec{j}$

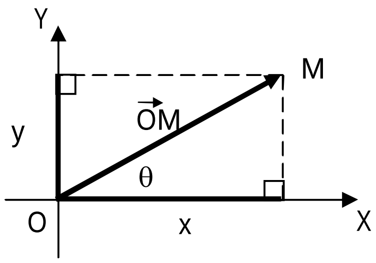


Fig I.5: Composantes d'un vecteur dans le plan.

La norme du vecteur est donnée par la relation suivante :

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (I.8)$$

La direction du vecteur est donnée par la relation suivante :

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad (I.9)$$

Les coordonnées x et y du vecteur sont liées à sa norme et à sa direction par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x = OM\cos\theta \\ y = OM\sin\theta \end{cases} \quad (I.10)$$

I.2.6-*Opérations sur les vecteurs*

I.2.6a.*La somme des vecteurs :*

La résultante des 2 vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le vecteur $\vec{R}$ de la diagonal du parallélogramme.

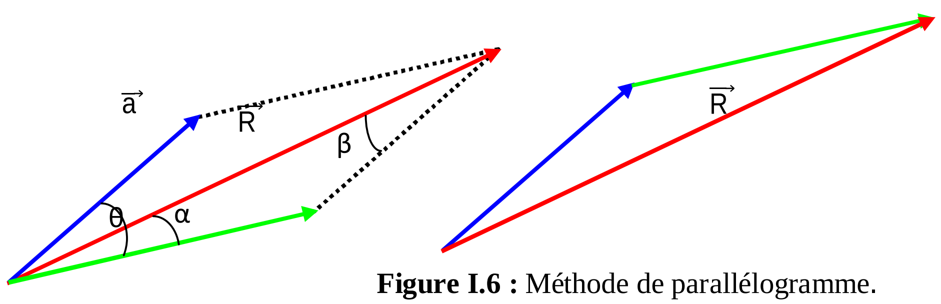


Figure I.6 : Méthode de parallélogramme.

On peut calculer le module du vecteur résultant $\vec{R}$ à partir de la loi des cosinus

$$\boxed{R = \sqrt{a^2 + b^2 - ab.\cos\theta}} \qquad (I.12)$$

Cas particulier : Si θ = π/2 $\boxed{R = \sqrt{a^2 + b^2}}$ (I.13)

Le tableau I.5 résume les différentes méthodes pour calculer le vecteur résultant R

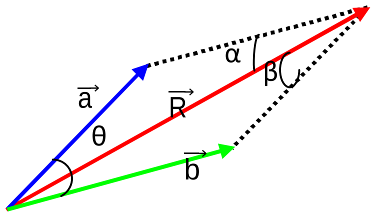
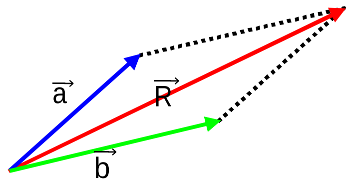
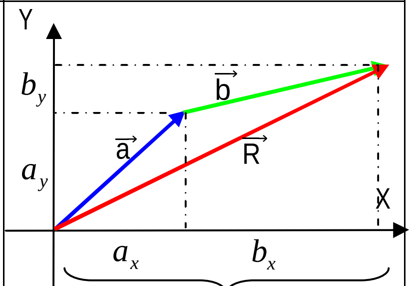
La loi des cosinus	Règle du parallélogramme	Somme des composantes En 2D
 $\boxed{\frac{R}{\sin\theta} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}}$	 $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$ La diagonal du parallélogramme	 $\boxed{\begin{cases} R_x = a_x + b_x \\ R_y = a_y + b_y \end{cases}}$

Tableau I.5 : La somme de deux vecteurs.

Lorsque le nombre de vecteurs à additionner est supérieur à deux on applique la méthode **géométrique** qui consiste à les placer bout à bout comme indiqué sur la figure I.5.

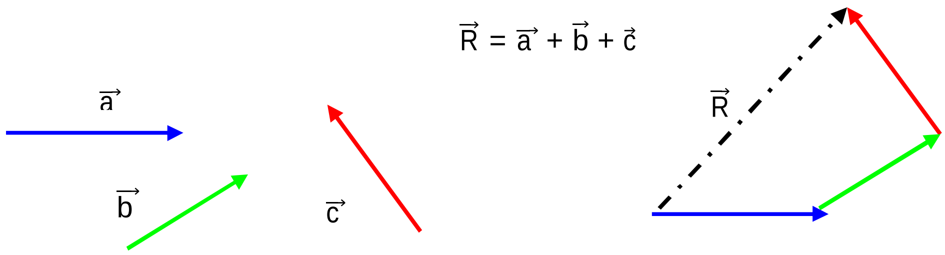


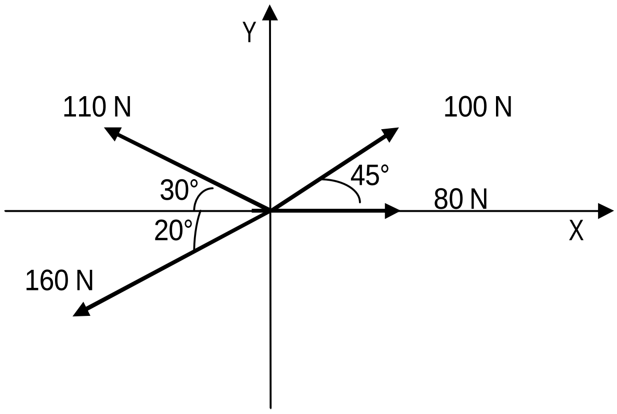
Figure I.5 : Somme de plusieurs vecteurs.

Remarque : L'addition des vecteurs est commutative et distributive.

* Commutativité : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

** Distributivité : $(\vec{a} + \vec{b}).\vec{c} = \vec{a}.\vec{c} + \overrightarrow{b.c}$

Exercice d'application:



1-Trouver la résultante $\vec{R}$ des quatre forces appliqués au point O Fig ci-contre

2- En déduire la norme, la direction et le sens de la résultante.

Réponse: $\vec{R} = R_x\,\vec{i} + R_y\,\vec{j}$

	Vecteur	Composante X	Composante Y
	80	80	0
	100	100 cos 45°	100 sin 45°
	110	-110 cos 30°	110 sin 30°
+)	160	-160 cos 20°	-160 sin 20°
	$\vec{R}$	$R_x = 94$	$R_y = 71$

$$\text{AN: } \vec{R} = -94\vec{i} + 71\vec{j}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-94)^2 + (71)^2} = 118\text{N}$$

tan $\theta = R_y / R_x$

θ = -37° or 143° (0° $\leq \theta \leq$ 360°)

θ = 143° , parce que le vecteur R appartient au deuxième quadrant)

I.2.6.b-*La Soustraction des vecteurs :*

Etant donné deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, la différence $\vec{a}$- $\vec{b}$ peut s'écrire : $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

On peut alors appliquer la règle du parallélogramme (figure I.6)

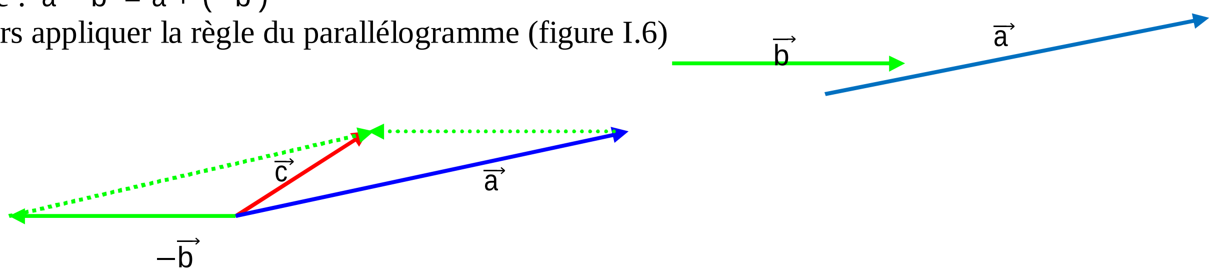


Figure I.6 : La Soustraction de 2 vecteurs.

I.2.7.Produit scalaire :

I.2.7.1Définition : Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le **scalaire** défini par :

$$\vec{a}.\vec{b} = a.b\cos\theta \qquad (I.14)$$

où θ est l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

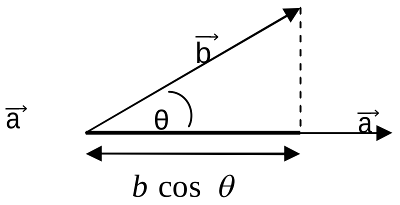


Figure I.7

$\vec{a}.\vec{b} > 0$ pour θ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (aigu)

$\vec{a}.\vec{b} \leq 0$ pour θ $\frac{\pi}{2} \leq \theta$ (obtus)

$\vec{a}.\vec{b} = 0$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ Condition d'orthogonalité de deux vecteurs .

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit du module de l'un par la mesure algébrique de la projection de l'autre sur sa droite support. Ce produit représente la projection algébrique du Vecteur $\vec{a}$ sur $\vec{b}$ (figure I.7).

I.2.7.2Forme analytique du produit scalaire :

Soient les deux vecteurs $\vec{V_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée directe (i , j , k) , le produit scalaire de ces deux vecteurs est le **scalaire** défini par la relation :

$$\boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2} \qquad (I.15)$$

car $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{i} = \vec{k}.\vec{j} = 0$

I.2.7.3Propriétés :

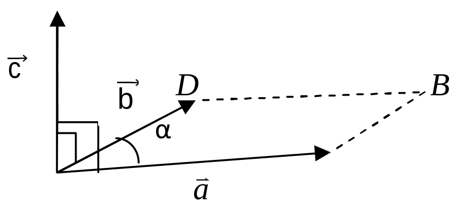
- Commutativité : $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$
- Distributivité par rapport à l'addition : $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$
- Linéarité : $(\alpha\vec{a}).(\beta\vec{b}) = \alpha\beta(\overrightarrow{a.b})$.

I.2.8. Produit vectoriel :

I.2.8.Définition :

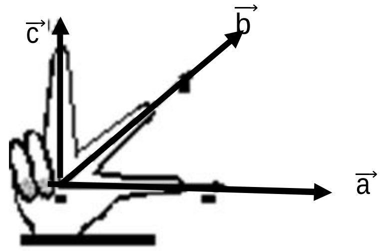
Le **produit vectoriel** de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est un **vecteur** $\vec{c}$, noté :

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} \qquad (I.16)$$



- Son module est : $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\| \sin\alpha$ (I.17)
- Sa direction est tel que le trièdre $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ soit directe.

(règle de la main droite ou encore règle du tire bouchon)



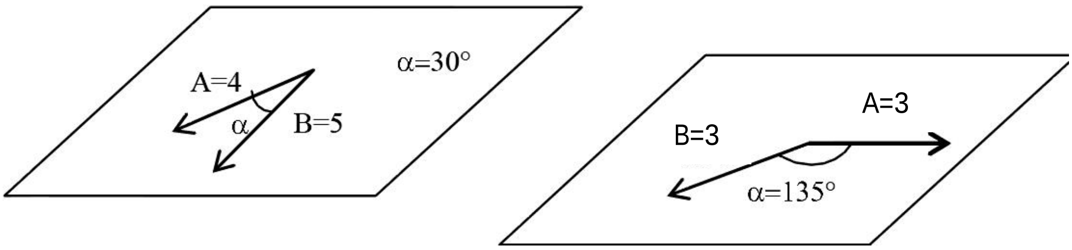
Remarques :

1 -L'intensité $\|\vec{c}\|$ mesure l'aire du parallélogramme OABD construit par les 2 vecteurs.

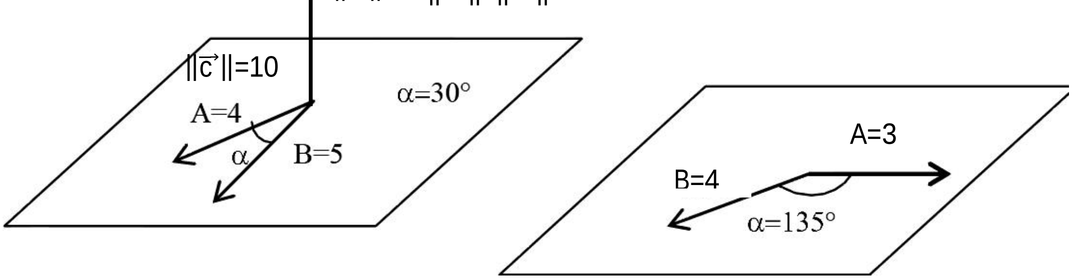
2- $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$ et $\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

Exemple I.8 :

1- Calculer la norme de $\vec{c} = \vec{A} \wedge \vec{B}$, et représenter le vecteur $\vec{c}$ dans les deux cas :



Réponse : $\|\vec{c}\| = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\| \sin\alpha$......................................



I.2.8.2Forme analytique du produit vectoriel :

Soient les deux vecteurs $\vec{V_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le produit scalaire de ces deux vecteurs est le **vecteur** $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ défini par la relation :

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1.z_2 - y_2.z_1)\vec{i} - (x_1.z_2 - x_2.z_1)\vec{j} + (x_1.z_2 - x_2.z_1)\vec{k} \qquad \text{(I.16)}$$

I.2.8.3Propriétés :

- Le produit vectoriel des deux vecteurs est nul si les deux vecteurs ont la même direction α=0
- Non Commutative: $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$.
- Distributivité par rapport à l'addition: $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$

- Linéarité: $\alpha(\vec{a})\wedge\beta(\vec{b})=\alpha\beta(\vec{a}\wedge\vec{b})$ (α et β scalaires).

I.2.9. Produit mixte :

I.2.9.1.Définition : le produit mixte de trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ est le scalaire **d** défini par la relation :

$$d=\vec{c}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b}) \qquad \text{(I.17)}$$

La valeur absolue du produit mixte représente le volume du parallélépipède (figure **I.9**).

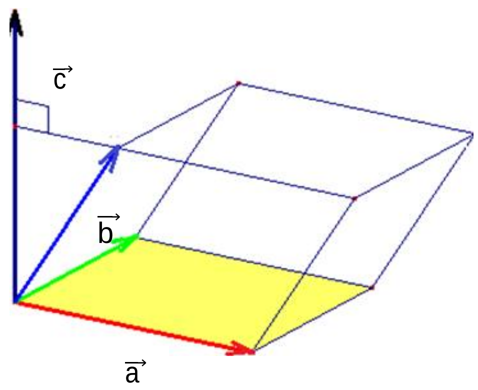


Figure **I.9**

I.2.9.3Propriétés :

Une permutation circulaire des vecteurs ne modifie pas la valeur du produit mixte :

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\wedge\vec{a}) \qquad \text{(I.18)}$$

Exemple I.9 : Démontrer que l'égalité suivante est valide :

$$\vec{\imath}\cdot(\vec{\jmath}\wedge\vec{k})=\vec{k}\cdot(\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath})=\vec{\jmath}\cdot(\vec{k}\wedge\vec{\imath})=1$$

Réponse :

$$\vec{\imath}\cdot\underbrace{(\vec{\jmath}\wedge\vec{k})}_{\vec{\imath}}=\vec{k}\cdot\underbrace{(\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath})}_{\vec{k}}=\cdots=1$$

I.2.10. Dérivée d'un vecteur :

I.2.10. 1- La dérivée du vecteur dans la base fixe $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$:

Soit un vecteur $\vec{V}(t)\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$, la dérivée du vecteur $\vec{V}(t)$dans la base fixe $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est :

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{\imath}+\frac{dy}{dt}\vec{\jmath}+\frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad \text{(I.19)}$$

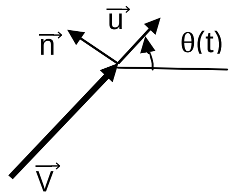
Avec : $\frac{d\vec{\imath}}{dt}=\frac{d\vec{\jmath}}{dt}=\frac{d\vec{k}}{dt}$ (Puisque la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est considérée fixe)

I.2.10.2- La dérivée du vecteur dans une base tournante : (qui ne dépend que de l'angle)m

Soit un vecteur $\vec{V}(t) = V\vec{u}$, la dérivée du vecteur $\vec{V}(t)$ est :

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{u} + V\frac{d\vec{u}}{dt} \qquad (I.20)$$

Avec : $\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\underbrace{\frac{d\vec{u}}{d\theta}}_{\vec{n}} =$ Avec : $\vec{u} \perp \vec{n}$



Important : La dérivée par rapport au temps t d'un vecteur unitaire (qui ne dépend que de l'angle) est un vecteur unitaire qui lui est directement perpendiculaire et dont la norme est multipliée par la vitesse angulaire.

I.6.2 .Propriétés :

- Dérivée d'un produit scalaire. $\frac{d\vec{V}_1.\vec{V}_2}{dt} = \frac{d\vec{V}_1}{dt}.\vec{V}_2 + \vec{V}_1.\frac{d\vec{V}_2}{dt}$

- Dérivée d'un produit vectoriel : $\frac{d\vec{V}_1\Lambda\vec{V}_2}{dt} = \frac{d\vec{V}_1}{dt}\Lambda\vec{V}_2 + \vec{V}_1\Lambda\frac{d\vec{V}_2}{dt}$

- Un vecteur de module constant est orthogonal à sa dérivée $\vec{V}_1 \perp \frac{d\vec{V}_1}{dt}$.

I.2.11. Opérateurs différentiels :

I.2.11.1 -Gradient :

On appelle l'opérateur différentiel $\vec{\nabla}$ « nabla » la grandeur suivante : $\vec{\nabla} = \frac{d}{dx}\vec{i} + \frac{d}{dy}\vec{j} + \frac{d}{dz}\vec{k}$

Soit la fonction scalaire *f(x,y,z)* , le vecteur gradient de f , noté : $\overrightarrow{grad f} = \vec{\nabla} f(x,y,z)$ est défini

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \frac{df(x,y,z)}{dx}\vec{i} + \frac{df(x,y,z)}{dy}\vec{j} + \frac{df(x,y,z)}{dz}\vec{k} \qquad (I.20)$$

I.2.11.2 --Divergence :

Soit le vecteur $\vec{V}$, la divergence du vecteur $\vec{V}$ est un scalaire défini comme étant : $div\vec{V} = \nabla.\vec{V}$

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{dV_x}{dx}\vec{i}.\vec{i} + \frac{dV_y}{dy}\vec{j}.\vec{j} + \frac{dV_z}{dz}\vec{k}.\vec{k} \qquad (I.21)$$

I.2.11.3 - Rotationnel :

Le rotationnel d'un vecteur est un vecteur défini comme étant : $\overrightarrow{\mathbf{Rot\,V}} = \vec{\nabla}\Lambda\vec{V}$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left(\frac{dV_z}{dy} - \frac{dV_y}{dz}\right)\vec{i} - \left(\frac{dV_z}{dx} - \frac{dV_x}{dz}\right)\vec{j} + \left(\frac{dV_y}{dx} - \frac{dV_x}{dy}\right)\vec{k} \qquad (I.22)$$

Exemple I.10:

1-Donner l'expression de $\overrightarrow{\text{grad}V}$ dans les différents systèmes de coordonnées.

2-Exprimer en fonction du vecteur $\vec{r}$ ($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$) et de sa norme r les gradients des fonctions :

- $V_1(r) = r$
- $V_2(r) = 1/r$

On rappelle l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial}{r sin\theta \partial\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

Réponse I.10 :

En coordonnées cartésiennes, $\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$

En coordonnées cylindriques, $\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{e_\rho} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$

En coordonnées sphériques, $\vec{\nabla} = \frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial V}{r sin\theta \partial\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$

I-Analyse dimensionnelle :

Exercice N° 01:

1- Ecrire l'équation aux dimensions de l'énergie cinétique et de la puissance, exprimer l'unité Joule, et l'unité Watt en unités du SI.

2-En système CGS l'unité de mesure de la force est la « dyne », pour l'accélération le « Gal», et la vitesse en unité anglo-saxonne : knot (noeud), 1 kn = 1 mile/hour=1.852km/h

-Exprimer la conversion de l'unité pour chaque grandeur physique en SI.

Exercice N° 02: ☹ Compléter le tableau suivant :

Grandeur physique	l'équation aux dimensions	Unité de mesure en SI	Autre unité fondamentale
L'énergie E	[E] =…..		
La résistance R d'un (conducteur Ohmique)			l'Ohm (Ω)
La capacité d'un condensateur			
La densité d'un liquide			
La constante universelle de gravitation G			
la constante de raideur k *(ressort)*			
La permittivité du vide ε_0			

Exercice N° 03:

1- l'équation paramétrique du mouvement d'un point matériel M est définie par :

$X(t) = at^3 + bt - c$

3-1 Donner la dimension de chaque grandeur :
a……………………………………………………………………………….
b ………………………………………………………………………………………………….
c…………………………………………………………………………………………………

2-Préciser l'unité en (SI) : a…………………b ………………………..c…………………….

Exercice N° 04:

1- Par l'analyse dimensionnelle vérifier l'homogénéité des expression suivantes : $t = 2\pi\sqrt{\frac{m}{l}}$

v(t)=X.ω^2 cos(ωt+φ) (t est le temps, m la masse , x et l la longueur , v(t) vitesse instantanée , ω=pulsation) .

2- La hauteur maximale atteinte par l'objet est donnée par la formule : $h = \dfrac{A^2 \sin\alpha}{2g}$ Trouver La dimension de la grandeur A , g est la pesanteur.

Exercice N° 05:

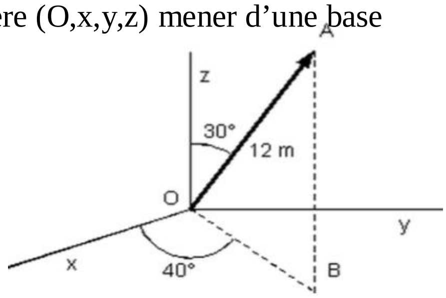
1-Donner la dimension de la pression P, montrer qu'une pression est également le rapport d'une énergie E sur un volume V.

2- L'équation d'un gaz parfait s'écrit : $\left(p + \dfrac{a}{V_0}\right)(V_0 - b) = RT$ avec p la pression du gaz, V_0 le volume molaire et T la température. Déterminer les dimensions des constantes physiques a, b et R, puis donner l'unité de R en SI.

II-Calcul vectoriel :

On considère dans tous les exercices ; un repère (O,x,y,z) mener d'une base orthonormée directe $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Exercice N° 06: Déterminer les composantes du vecteur A, ainsi que les angle entre A et les axes Ox, Oy, Oz (figure ci contre)



Exercice N° 07:

Deux points A et B dont les coordonnées sont données par : A (2, 3,-3) ; B (5,7, 2).

1- Déterminer les composantes et le module du vecteur $\vec{AB}$.

2- Trouver la direction et le sens de $\vec{AB}$

Exercice N° 08:

La ligne d'action d'une force F de 500 N passe par les deux points A(1.22 , 0, 2.74) et B(0 , 1.22, 0.61). Déterminer les composantes de cette force.

Exercice N° 09:

On considère le vecteur suivant: $\vec{V} = (2xy + z^3)\vec{\imath} + (2y + x^2)\vec{\jmath} + (3xz^2 + 2)\vec{k}$

Montrer que le rottationnel de $\vec{V}$ est nul. $\overrightarrow{\mathbf{Rot\,V}} = \vec{\mathbf{0}}$

Exercice N° 10:

Soient les deux vecteurs : $\vec{V1}\begin{pmatrix}1\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix}$,$\vec{V2}\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix}$.

-Trouver α et β pour que $\vec{V1}$soit parallèle à $\vec{V2}$, puis déterminer le vecteur unitaire pour chacun des deux vecteurs.

Exercice N° 09 : On considère les trois vecteurs suivants : $\vec{V1}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 5\end{pmatrix}$, $\vec{V2}\begin{pmatrix}-3\\ 1.5\\ -7.5\end{pmatrix}$, $\vec{V3}\begin{pmatrix}-5\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$

1- Trouver les modules des vecteurs : $\vec{V1}+\vec{V2}$ et $\vec{V2}-\vec{V3}$.

2- Calculer le produit $\vec{V1}.\vec{V2}$ et $\vec{V1}\wedge\vec{V2}$. et. Que peut on dire du sens et de la direction du vecteur $\vec{V2}$par rapport à $\vec{V1}$.

3-Calculer le produit mixte $\vec{V1}.(\vec{V2}\wedge\vec{V3})$, et le produit double $\vec{V1}\wedge(\vec{V2}\wedge\vec{V3})$.

4- Déterminer la surface du triangle formé par les vecteurs $\vec{V2}$ et $\vec{V3}$.

4- Déterminer le volume formé par le trièdre $\vec{V1}$, $\vec{V2}$ et $\vec{V3}$.

Chapitre II : Cinématique

II.1- Définitions

II.2 - Vecteur position dans les systèmes de coordonnées (cartésiennes, cylindrique, sphérique, curviligne)- loi de mouvement - Trajectoire

II.3 - Vecteurs Vitesse et accélération dans les systèmes de coordonnées.

II.4 - Etude des mouvements d'un point matériel dans les différents systèmes de coordonnées.

II.5 Mouvement relatif : composition du mouvement

Introduction :

La cinématique est la branche de la mécanique qui étudie le mouvement d'un corps, c'est-à-dire la modification apparente de : la position, la vitesse, et l'accélération en fonction du temps, en ignorant les causes (les forces).

II.1Définitions :

a) Notion de point matériel :

Les mouvements des corps sont souvent très complexes. Lorsque, dans l'étude du mouvement d'un mobile, on ne considère que sa position, on peut, pour simplifier, réduire ce corps à un point matériel ayant la même masse et localisé en son centre de gravité. Cela revient à négliger tout effet de rotation du solide sur lui-même ou son extension spatiale.

Exemple :

Système masse-ressort, la masse peut être réduite à un point matériel.

b) Notion de référentiel :

Le repos et le mouvement sont deux notions relatives. En effet, un observateur A immobile voit un arbre dans une position fixe alors que le conducteur B d'une voiture roulant à proximité le voit en mouvement vers l'arrière. L'étude d'un mouvement exige de connaître la position dans l'espace à tout instant t par rapport à un référentiel. Ce référentiel peut être lié à un repère orthonormé $\Re(O, x, y, z)$ dans lequel est repérée la position M(x,y,z) d'un mobile . Le corps est au repos par rapport à ce repère si ses coordonnées sont constantes au cours du temps. Cependant, si au moins l'une d'elles varie le corps est en mouvement par rapport à $\Re$. Un repère d'espace : Exemple le repère cartésien $\Re(O, x, y, z)$ est défini par une origine O fixe dans le référentiel et des axes et munis d'une base orthonormées directe

- Une horloge : À chaque instant, on associe un nombre réel *t* appelé date qui correspond à la durée écoulée depuis l'instant origine.

c) Trajectoire :

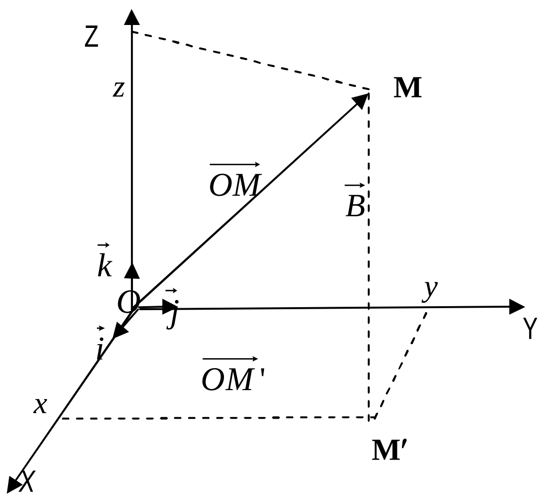
C'est le lieu géométrique des positions successives occupées par le point matériel au cours du temps et par rapport au système de référence choisi. La trajectoire peut être une réalité matérielle (route, voie ferrée….) ou une réalité physique qui n'est pas matérialisée (trajectoire d'un projectile).

II.2 - Vecteur position dans les systèmes de coordonnées (cartésiennes, cylindrique, sphérique, curviligne) :

Pour décrire le mouvement d'un mobile M, il faut le repérer à chaque instant par son vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$, O est l'origine du repère R adopté pour l'étude. Le choix du système de coordonnée lié à l'origine du repère dépend des propriétés spécifiques du problème considéré.

II.2.1 Le système de coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{(II.1)}$$



Dans le cas d'un mouvement rectiligne il est évident que le système de coordonnées cartésiennes est le mieux adapté. Ce ne sera plus le cas pour des mouvements curvilignes pour lesquels le système de coordonnées polaires ou cylindriques sera le plus souvent utilisé

II.2.2 Le système de coordonnées polaires (cylindriques en 3D) :

Dans le cas où le point M est mobile dans un plan, le point M peut être repéré par ses coordonnées polaires (ρ,θ) avec : la distance ρ = OM, et θ l'angle que fait le segment OM avec l'axe Ox (voir **Figure II.3**) :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{e_\rho} \quad \text{(II.2)}$$

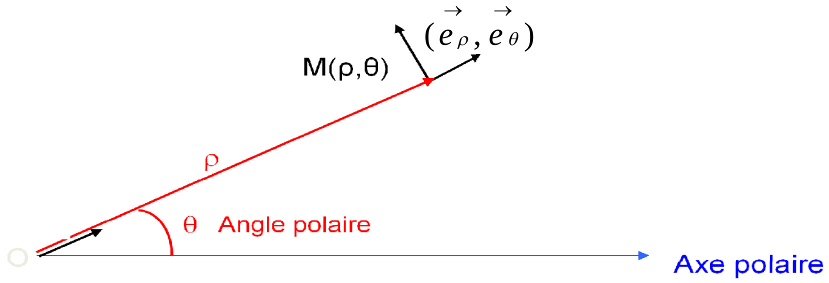


Figure II.3 : Les coordonnées polaires (ρ,θ) et la base associée $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta})$

Les relations entre coordonnées cartésiennes et polaires sont : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ (II.3)

Si le point doit être repéré dans l'espace il est possible d'utiliser les coordonnées cylindriques. La projection P du point M dans le plan (O, x, y) est repérée en coordonnées polaires (ρ,θ). La projection de M sur l'axe Oz donne la cote z (voir figure II.4).La base associée est composée de la base polaire et du vecteur unitaire suivant l'axe Oz. Le vecteur position s'obtient en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\, \overrightarrow{e_\rho} - z\, \vec{k} \qquad \text{(II.4)}$$

Les relations entre coordonnées cartésiennes et cylindriques sont :

$$M\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \text{(II.5)}$$

On peut inverser ces relations pour obtenir l'expression des coordonnées cylindriques en fonction des coordonnées cartésiennes :

$$M\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\frac{x}{y} \\ z = z \end{cases}$$

La valeur de θ sera précisée dans l'intervalle $[0\ ,\ 2\pi]$ en fonction des signes respectifs de x et y qui sont ceux de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
Les vecteurs unitaires de la base mobile s'écrient en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath} \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases} \qquad \text{(II.6)}$$

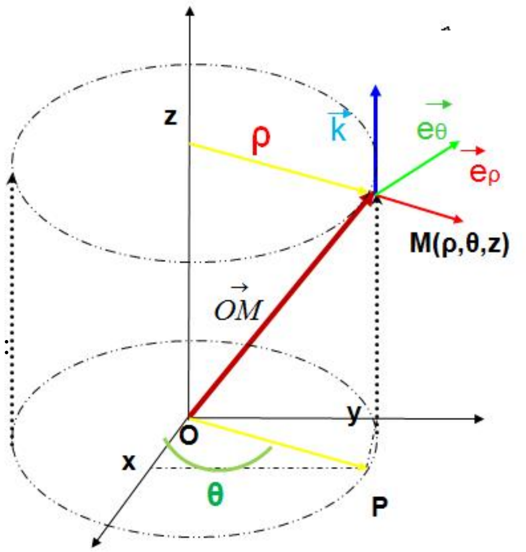


Figure II.4 : Les coordonnées cylindriques (ρ,θ ,z) et la base associée $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \vec{k})$

II.2.3 Le système de coordonnées sphériques:

La position est alors définie par la distance r du point M au point O et deux angles φ et φ.
L'angle θ est appelé *colatitude* .
L'angle φ est appelé *longitude* ou *azimut.*

$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} \qquad \text{(II.7)}$$

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est représenté dans la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$

$$\overrightarrow{OM}: \begin{cases} x = \overrightarrow{Om\rho}.\vec{\imath} = r.\sin\theta.\cos\varphi \\ y = \overrightarrow{Om\rho}.\vec{\jmath} = r.\sin\theta.\sin\varphi \\ z = \overrightarrow{Om\rho}.\vec{k} = r = r.\cos\theta \end{cases} \qquad \text{(II.8)}$$

Les relations entre coordonnées cartésiennes et sphériques sont :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = arctg\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{y}{x} \\ \theta = \tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases} \qquad \text{(II.9)}$$

En coordonnées cartésiennes, les vecteurs unitaires

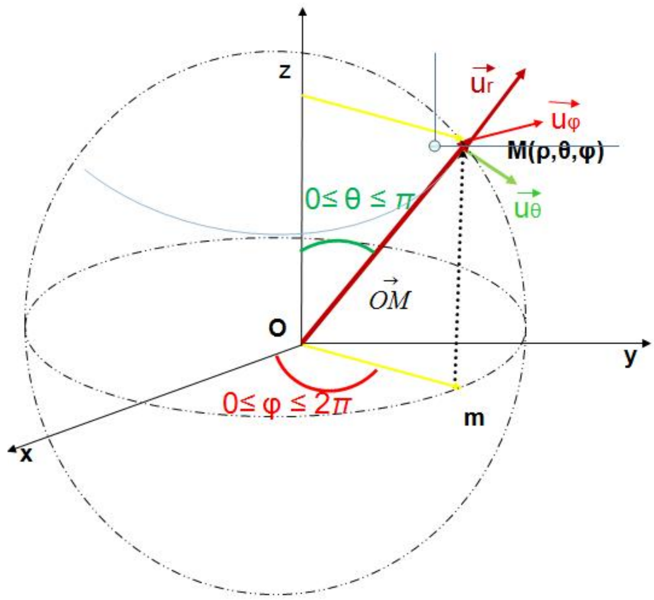


Figure II.5 : Les coordonnées sphériques (r, θ ,φ) et la base associée $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$.

de la base sphérique s'écrient:

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\varphi \,.\sin\theta\,\vec{\imath} + sin\varphi.\,sin\theta\vec{\jmath} + cos\theta\vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos\varphi.\,cos\,\theta\,\vec{\imath} - sin\varphi cos\theta\vec{\jmath} - \ sin\theta\vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = \vec{e}_\theta = -sin\,\varphi\,\vec{\imath} + cos\varphi\vec{\jmath} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{cases} \qquad \text{(II.10)}$$

Exemple II.1 :

1-Convertir en coordonnées cylindriques les coordonnées cartésiennes : (-√2; √2; 1)
2-Convertir en coordonnées sphériques les coordonnées cartésiennes : (3; 1; 2)
3- Convertir le vecteur $\vec{V}$ en coordonnées sphériques avec : $\vec{V} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

Réponse :

1- Les équations de conversions cartésiennes cylindriques sont : $(x, y, z) \rightarrow (\rho, \theta, z)$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \tan^{-1} -1 = -\frac{\pi}{4} \text{ et comme } \frac{x}{y} < 0 \Rightarrow \theta = \pi - (-\frac{\pi}{4}) \\ z = 1 \end{cases}$$

2- Les équations de conversions cartésiennes sphériques sont: $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \\ \varphi = \tan^{-1}\dfrac{z}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{1}{1} \\ \varphi = \tan^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{3} \\ \theta = \dfrac{\pi}{4} \\ \varphi = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Le vecteur $\vec{V}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ s'écrit : $\vec{V} = V_r\overrightarrow{u_r} + V_\theta\overrightarrow{u_\theta} + V_\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$ On remplace les vecteurs unitaires de la base sphérique :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\varphi \,.\sin\theta\,\vec{\imath} + sin\varphi.\,sin\theta\vec{\jmath} + cos\theta\vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos\varphi.\,cos\,\theta\,\vec{\imath} - sin\varphi cos\theta\vec{\jmath} - \ sin\theta\vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = \vec{e}_\theta = -sin\,\varphi\,\vec{\imath} + cos\varphi\vec{\jmath} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{cases}$$

$$\vec{V} \begin{cases} V_x = V_r\cos\varphi\,.\sin\theta + V_\theta cos\varphi.\,cos\theta - V_\varphi sin\,\varphi \\ V_y = V_r\sin\varphi\,.\sin\theta + V_\theta sin\varphi.\,cos\theta + V_\varphi cos\varphi \\ V_z = V_r\cos\varphi - V_\theta sin\varphi \end{cases}$$

On constitue un système de 3 équations à 3 inconnues $V_rV_\theta V_\varphi$;puis la matrice de déplacement à partir de ce système :

$$\begin{vmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\,.\sin\theta & \cos\varphi.\cos\theta & -sin\varphi \\ \sin\varphi\,.\sin\theta & sin\varphi.\,cos\theta & \cos\varphi \\ cos\theta & -sin\theta & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{vmatrix} \Rightarrow$$

La transposé est : $\begin{vmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\,.\sin\theta & \sin\varphi\,.\sin\theta & cos\theta \\ \cos\varphi.\cos\theta & sin\varphi.\,cos\theta & -sin\theta \\ -sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{vmatrix}$

En fin de compte l'expression est :

$$\vec{V} = (X_r \sin\theta\cos\varphi + Y\sin\theta\sin\varphi + Z\cos\varphi\cdot)\vec{u}_r + (X\cos\theta\cos\varphi + Y\cos\theta\sin\varphi - Z\sin\varphi)\vec{u}_\theta + (-X\sin\varphi + Y\cos\varphi)\vec{u}_\varphi$$

II.2 Vecteurs Vitesse et accélération dans les systèmes de coordonnées :

II.2.1 Vecteur Vitesse :

a) Vitesse moyenne :

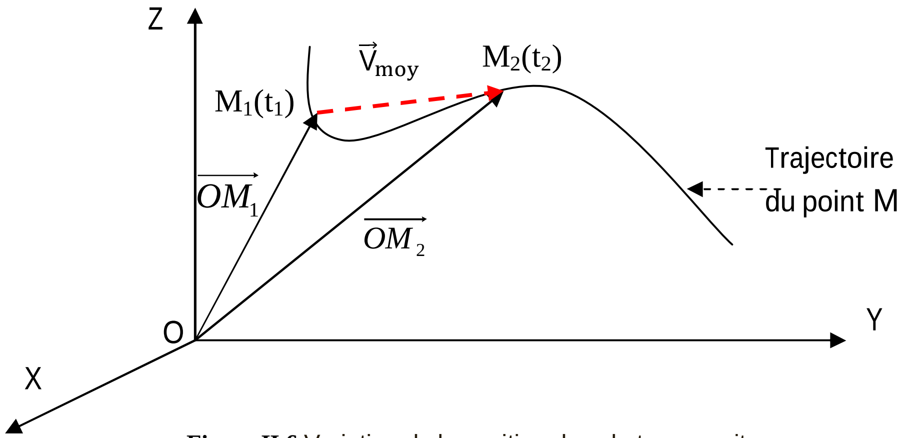


Figure II.6 Variation de la position dans le temps : vitesse moyenne.

Si la position du point mobile M à l'instant t_1 correspond au point $M(t_1) = M_1$ et à l'instant t_2 au point $M(t_2) = M_2$ le vecteur vitesse moyenne se définit par :

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{\Delta t} \qquad \text{(II.7)}$$

b) Vitesse instantanée:

Le vecteur vitesse $\vec{V}$ d'un mobile traduit le taux de variation de son vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps. Cette variation peut concerner la direction de $\overrightarrow{OM}$, son module ou les deux.

- L'unité de la vitesse dans le système international (SI) est le mètre par seconde (m/s)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}} \qquad \text{(II.8)}$$

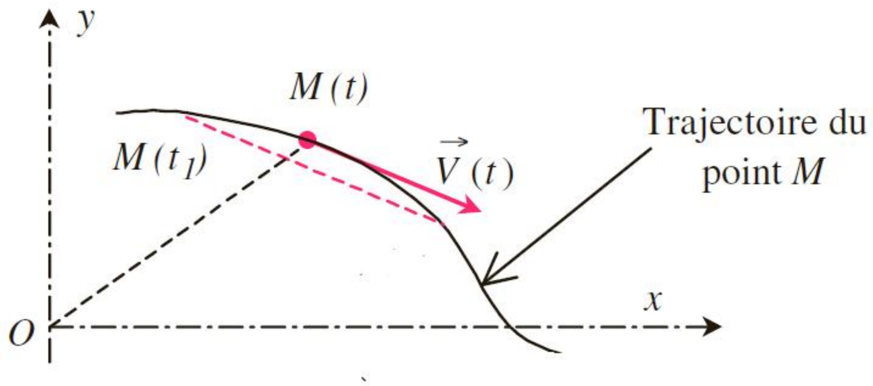


Figure II.7

II.2.2 Vecteur accélération:

Le vecteur accélération correspond à la variation du vecteur vitesse par unité de temps. L'accélération s'exprime, dans le système international $m.s^{-2}$.

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \tag{II.9}$$

II.3 Expressions des vecteurs vitesse et accélération en systèmes de coordonnées

II.3 1 Expressions en coordonnées cartésiennes:

a- Composantes du vecteur vitesse dans la base cartésiennes :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Ou : $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ et $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ Sont les composantes du vecteur vitesse dans la base cartésiennes.

$$\boxed{\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}} \tag{II.10}$$

b-Composantes du vecteur accélération dans la base cartésiennes :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k}$$

Ou : $\frac{dV_x}{dt} = \ddot{x}$, $\frac{dV_y}{dt} = \ddot{y}$ et $\frac{dV_z}{dt} = \ddot{z}$ Sont les composantes du vecteur accélération dans la base cartésiennes.

$$\boxed{\vec{\gamma} = \gamma_x\vec{i} + \gamma_y\vec{j} + \gamma_z\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}} \tag{II.11}$$

II.3 2 Expression en coordonnées cylindriques en **3D (Polaires en2D) :**

Le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e_\rho} - z\,\vec{k}$

a-Pour la vitesse :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + z\frac{d\vec{k}}{dt} \tag{II.12}$$

avec: $\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$ car $\vec{k}$ est fixe, mais :

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho \qquad \text{(II.1 3)}$$

On remplace (II.1 3) dans (II.1 2) on trouve :

$$\vec{V} = \underbrace{\dot{\rho}}_{V_{radiale}}\ \vec{e}_\rho + \underbrace{\rho\dot{\theta}}_{V_{orthoradiale}}\ \vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{k} \qquad \text{(II.14)}$$

où $v_r = \frac{d\rho}{dt}$ = vitesse radiale et $v_\theta = \rho\frac{d\theta}{dt}$ = vitesse orthoradiale

b-Pour l'accélération :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{k})}{dt} \qquad \text{(II.15)}$$

$$\vec{\gamma} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \rho\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho + \ddot{z}\vec{k} \qquad \text{(II.16)}$$

$$\vec{\gamma} = \underbrace{\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)}_{(r)\text{radiale}}\vec{e}_\rho + \underbrace{\left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)}_{(\theta)\text{transversale}}\ \vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{k} \qquad \text{(II.17)}$$

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$$

Remarque : Pour un mouvement circulaire uniforme on a z=0 et aussi :

$$\rho = C^{ste} \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0 \quad et \quad \dot{\theta} = C^{ste} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = 0$$

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma_r} = -\rho\dot{\theta}^2\,\vec{e}_\rho \qquad \text{(II.16)}$$

L'accélération est radiale ou centripète est dirigée vers le centre de la trajectoire.

Exemple II.2 :
Démontrer que la norme du vecteur vitesse en coordonnées polaires est donnée par l'expression suivante : $v = \rho\sqrt{1+\dot{\theta}^2}$

II.3.3 Expression en coordonnées **curvilignes** :

Dans le cas d'un mouvement plan, il est possible d'exprimer le vecteur accélération en utilisant la base de Frenet définie par.($\vec{\tau}, \vec{n}$).

a-Le vecteur vitesse en un point M le long d'une trajectoire est :

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} \qquad \text{(II.17)}$$

Le vecteur unitaire $\vec{\tau}$ est tangent à la trajectoire définie par $\vec{\tau} = \frac{\overrightarrow{OM}}{s}$

$\overset{\frown}{s} = \rho\theta$ définit l'abscisse curviligne , ρ (ou R) le rayon de courbure $v = \frac{ds}{dt} = \rho\frac{d\theta}{dt} = \rho\dot{\theta}$

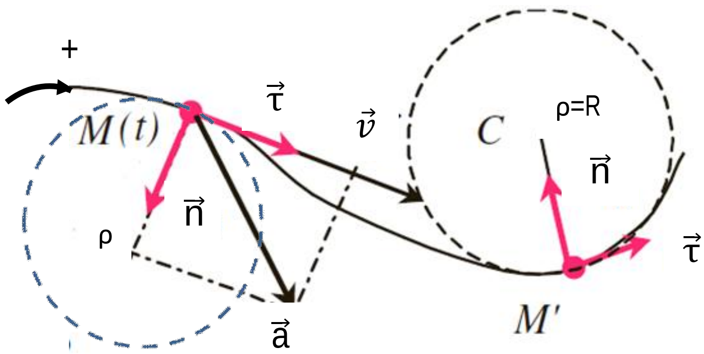


Fig (II.8) :Les vecteurs vitesse et accélération et la base de Frenet. ($\vec{\tau}, \vec{n}$).

b-Le vecteur accélération est :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} \qquad \text{(II.17)}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a_\tau}\vec{\tau} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}}_{a_n}\vec{n} \qquad \text{(II.18)}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{Tengentielle}} + \vec{a}_{\text{Normale}}$$

Le rayon de courbure ρ = R en M' correspond au rayon CM' du cercle tangent à la trajectoire au point M' considéré.

Exemple II.3 : 2- Démontrer que le rayon de courbure ρ peut être calcule en utilisant l'expression suivante : $\rho = \frac{v^3}{\|\vec{a}\wedge\vec{v}\|}$

Réponse : On calcule le produit vectoriel $\vec{a}\wedge\vec{v} = v\frac{dv}{dt}\underbrace{(\vec{\tau}\wedge\vec{\tau})}_{\vec{0}} + \frac{v^3}{\rho}(\vec{n}\wedge\vec{\tau}) = \frac{v^3}{\rho}\vec{u}$

$$\|\vec{a} \Lambda \vec{v}\| = \frac{v^3}{\rho}$$

Donc l'expression est démontrée.

II.4. - Etude de mouvements d'un point matériel dans les différents systèmes de coordonnées :

II.4.1 lois de mouvement :

***a .Équations horaires du mouvement** :*
Ce sont les fonctions $\{x(t), y(t), z(t)\}$ ou $\{\rho(t), \theta(t), z(t)\}$.

Exemple : Les relations $x(t) = v_o t$, $y(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2$, et $z(t) = 0$ ou $\theta(t) = \omega.t$

b. Équation de la trajectoire : Cette équation est obtenue en éliminant le temps entre les différentes coordonnées ou équations horaires. **Exemple :** $y(t) = \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$

c. Équation différentielle : C'est une équation reliant une fonction (par exemple x(t)) avec ses dérivées. **Exemple :** $x + a\dot{x} + b\ddot{x} = 0$

d. Diagrammes des espaces, vitesses et accélérations :
La relation x = f (t) est l'équation horaire du mouvement. Par conséquent, Le **graphe** de x(t) constitue le **diagramme des espaces.**

II.4.2.Exemples de mouvements :

II.4.2.1 Mouvements à accélération constante: C'est un mouvement pour lequel le vecteur accélération est un vecteur constant indépendant du temps.

$$\vec{a}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = Cte$$

L'expression de la vitesse est alors par intégration : $\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} \end{cases} \Rightarrow$

$$v_x(t)_{v_{0x}} = \int_{t_0}^{t} a_x\, dt,\ v_y(t)_{v_{0y}} = \int_{t_0}^{t} a_y\, dt,\ v_z(t)\_v_{0z} = \int_{t_0}^{t} a_z\, dt \qquad \text{(II.19)}$$

v_0 (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})est la vitesse à l'instant t = 0.
On en déduit que :

$$v: \begin{cases} v_x = a_x t + v_{0x} \\ v_y = a_y t + v_{0y} \\ v_z = a_z t + v_{0z} \end{cases}$$

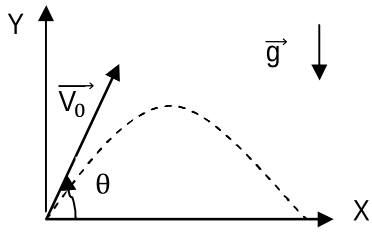
On distingue :

a / Mouvement Rectiligne est pour $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. **Exemple** : le cas d'un point matériel en **chute libre** en l'absence de tout frottement.

b / Sinon le mouvement s'effectue dans le plan défini par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{v}$ et par la position occupée par le point matériel à l'instant initial. E**xemple** : le cas **d'un projectile.**

Exemple II.4 :

Un projectile M, de masse m, est lancé à partir d'un point O avec une vitesse initiale $\vec{V_0}$ faisant un angle θ avec l'horizontale.
La résistancede l'air est négligeable et la pesanteur est supposée constante $\vec{g}= -g\vec{k}$ (voir la figure ci contre).



1. Déterminer le vecteur position de M à un instant t quelconque.
2. Donner l'équation de la trajectoire. **Réponse :**

1-C'est un mouvement (en 2D) à accélération constante : $\overrightarrow{a_y} = -\vec{g}$

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = -gt + v_{0y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = V_0 \cos\theta . t \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\theta . t \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = (V_0 \cos\theta . t)\vec{\imath} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\theta . t\right)\vec{\jmath}$$

2- L'équation de la trajectoire est : $y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_0 \cos\theta} + V_0 \tan\theta . x$

II.4.3 Mouvements uniforme, accéléré et décéléré :

On distingue trois types de mouvements suivant l'évolution de la norme du vecteur vitesse

a- Mouvement *uniforme* la norme du vecteur vitesse est constante. $\vec{a} . \vec{v} = 0 \Rightarrow$

$a = 0, ou \alpha = \dfrac{\pi}{2}$

b- Mouvement *accéléré* si la norme de la vitesse augmente. $\vec{a} . \vec{v} > 0$

c- Mouvement *décéléré* si la norme de la vitesse diminue. $\vec{a} . \vec{v} > 0$

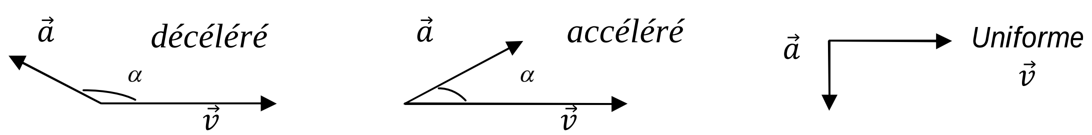


Figure II.17 : Vecteurs vitesse et accélération pour les mouvements quelconques.

II.4.4 Mouvement rectiligne :

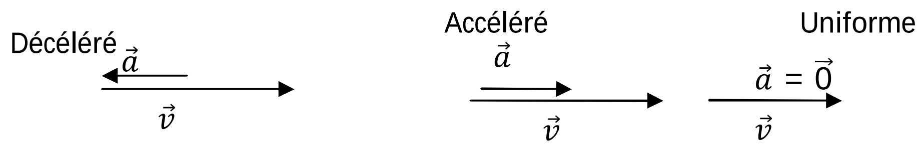


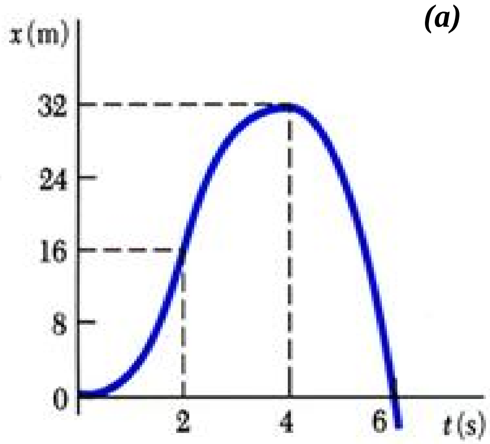
Figure II.18 : Vecteurs vitesse et accélération dans le cas d'un mouvement **rectiligne**.

Exemple II.5 : Tracer les diagrammes d'espace x(t), de vitesse *v*(t) et d'accélération a(t)

Sachant que l'équation horaire du (mvt) est : $x = 6t^2 - t^3$ dans l'intervalle t ϵ [0 ,6s]

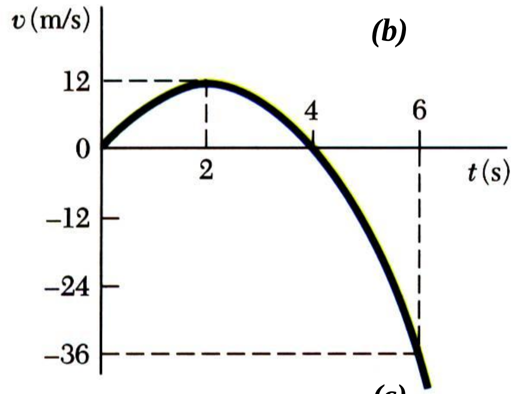
Réponse : Figure II.9***(a)***

Diagrammes des espaces :



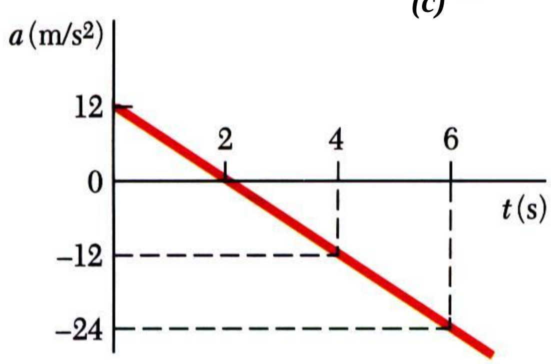
$$x = 6t^2 - t^3$$

Diagrammes des vitesses :



$$v = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2$$

Diagrammes des accélérations :



$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 12 - 6t$$

Figure II.9

II.4.5 Mouvement rectiligne sinusoïdal :

L'équation horaire est une fonction sinusoïdale du temps du type : $x(t) = X_{max} \cos(\omega t + \varphi)$ La quantité ω s'appelle la pulsation (unité en rad.s^{-1}, homogène à l'inverse d'un temps). Attention, ce n'est pas une vitesse angulaire même si l'unité est identique

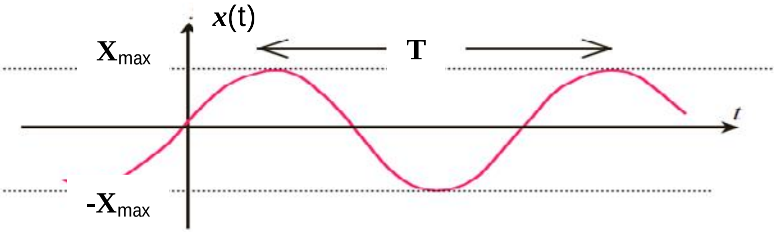


Figure II.10 : Représentation du mouvement sinusoïdal dans le temps.

X_{max} :est l'amplitude maximale du mouvement d'oscillation du point *M* autour du point *O*. La fonction cosinus variant entre –1 et +1, *x* oscille entre $-X_{max}$ et X_{max}

(ω t+φ) :est la phase à l'instant *t*

φ est la phase à l'origine (à $t = 0$)

Exemple : le mouvement d'une masse accrochée à un ressort.

L'équation différentielle du mouvement est donc : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

- **Remarque :** Le diagramme des espaces n'est pas nécessairement une droite même dans le cas d'un mouvement rectiligne. Il ne faut pas confondre le diagramme des espaces avec la trajectoire.
- L'équation horaire d'un mouvement **(MRUV)** s'écrit :

$$x(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_o t + x_o \qquad \text{(II.22)}$$

Cette équation est obtenue par intégration de l'accélération γ : $\frac{dv}{dt} = \gamma = C^{ste} \Rightarrow dv = \gamma\, dt$

$$v(t) = \int \gamma\, dt = \gamma \int dt = \gamma\, t + K \qquad \text{(II.23)}$$

Puisque γ est constante, on peut la sortir de l'intégrale, K est une constante d'intégration que l'on détermine à partir des conditions initiales (position et vitesse). En appelant v_o la vitesse à l'instant t = 0, on a :

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v\,dt \Rightarrow x = \int v\,dt = \int (\gamma t + v_o)dt = \gamma \int t\,dt + v_o \int dt$$

$x(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_o t + K'$ (K' est déterminée à partir de la position initiale x_o à t = 0.)

II.4.6Mouvements circulaires:

La trajectoire du point est un cercle fixe de centre O et de rayon R. En coordonnées polaires. Dans cette base de projection $\overrightarrow{(e_\rho, e_\theta)}$, les équations horaires du mouvement sont : (ρ=R=Cte , Θ(t))

-Le vecteur vitesse est dans ce cas : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = (\dot{\theta}\vec{k} \Lambda \rho \overrightarrow{e_\rho})$ On notera que le vecteur vitesse est orthoradial. On appelle *vitesse angulaire* la quantité : $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}$.

Le vecteur vitesse s'écrit alors :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = (\vec{\omega} \, \Lambda \overrightarrow{OM}) \qquad (II.23)$$

Avec :

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{k} = \dot{\theta}(\vec{e}_\theta \, \Lambda \, \vec{e}_\rho) \qquad (II.24)$$

Dans le cas d'un mouvement uniforme, la vitesse angulaire **ω** est constante puisque *v* et *R* sont constants. voir fig II.11

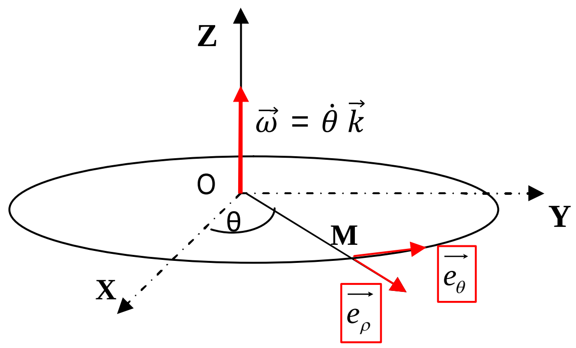


Fig. II.11. Mouvement circulaire.

Le vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \, \Lambda \overrightarrow{OM})}{dt} \qquad (II.25)$$

$$\vec{a} = \frac{d\omega}{dt}\vec{k}\Lambda\overrightarrow{OM} + \vec{\omega}\,\Lambda \underbrace{\frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}}_{\vec{v}} \Rightarrow \qquad \vec{a} = \frac{d\omega}{dt}\vec{k}\Lambda\overrightarrow{OM} + \vec{\omega}\,\Lambda\left(\underbrace{\vec{\omega}\,\Lambda\overrightarrow{OM}}_{\vec{v}}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{a} = \frac{d\omega}{dt}\vec{k}\Lambda\overrightarrow{OM} + \omega\vec{k}\,\Lambda\left(\omega\vec{k}\,\Lambda\overrightarrow{OM}\right) \qquad (II.26)$$

Remarque : Le système de coordonnées polaires est bien adapté pour ce type de mouvement, exemple : En coordonnées polaires le cercle se définit simplement par : ρ = R en cartésienne l'équation du même cercle s'écrit : $x^2 + y^2 = R^2$

Les équations horaires du mouvement peuvent s'écrire alors : Voire le tableau ci-dessous :

Mouvement circulaire $R=\rho=ct^e$	C. cartésiennes	C. polaires	**En fonction de la vitesse angulaire** $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{k} = \dot{\theta}(\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\rho)$
V. position $\vec{OM}$	$\vec{OM} = x\vec{i}+y\vec{j}$	$\vec{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho$	///
V. vitesse $\vec{v}$	$\vec{v} = \dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}$	$\vec{v} = \rho\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$	$\vec{\omega} \wedge \vec{OM}$
V.accélération $\vec{a}$	$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$	$\vec{a} = -\rho\,\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho + \rho\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta$	$\frac{d\omega}{dt}\vec{k}\wedge\vec{OM} + \omega\vec{k}\wedge\left(\omega\vec{k}\wedge\vec{OM}\right)$
Accélération tangentielle $\vec{a}_\tau$	//	$\vec{a}_\tau = -\rho\,\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho$	$\omega\vec{k}\wedge\left(\omega\vec{k}\wedge\vec{OM}\right)$
Accélération normale $\vec{a}_\theta$	//	$\vec{a}_\theta = \rho\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta$	$\frac{d\omega}{dt}\vec{k}\wedge\vec{OM}$

Tableau II.1 RÉCAPITULATIF

On distingue :

- **Mouvement circulaire uniforme** : la trajectoire se trouve sur un cercle ou un arc de courbe. La norme du vecteur vitesse V est constante, mais sa direction change.
- **Mouvement circulaire varié** : la trajectoire se trouve sur un cercle, et la norme du vecteur vitesse et sa direction changent au cours du temps .

II.5. Mouvement relatif : composition du mouvement

Soit un point matériel M , en mouvement à la fois par rapport à un repère $R(Oxyz)$ et par rapport à un repère $R'(Ox'y'z')$.On va chercher la relation entre les vecteurs vitesses $\vec{V}_{(M/R)}$ et $\vec{V}_{(M/R')}$, ainsi que la relation entre les vecteurs accélération $\vec{a}_{(M/R)}$ et $\vec{a}_{(M/R')}$. Ces relations, dites « de composition du mouvement », sont particulièrement utiles lorsqu'on étudie des mécanismes dans lesquels les mouvements relatifs mutuels des pièces sont connus.

Soit $R(Oxyz)$ lié à un observateur O et à une base fixes.

Soit $R'(O'x'y'z')$ lié à un observateur Oet à une base mobiles par rapport à R

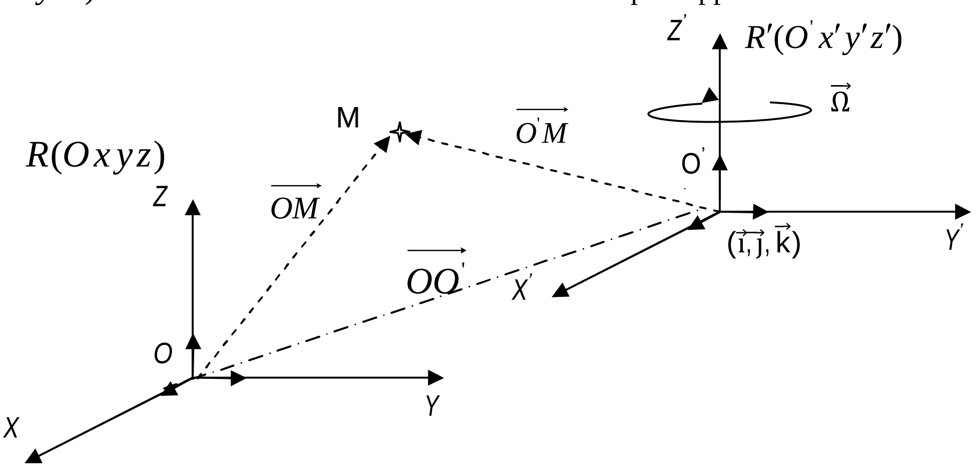


Figure II.11 : Changement de référentiel.

Dans le référentiel fixe R, le vecteur-position s'écrit : $\vec{OM} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

a) Composition de vecteur vitesse :

Le vecteur-vitesse du point M par rapport au référentiel R est

$$\vec{V_a} = \vec{V}/R = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{\imath}+\dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k} \qquad (II.27)$$

On procède de même dans le référentiel R' mobile pour obtenir l'expression du vecteur-vitesse du point *M* par rapport au référentiel R'.
l'expression du vecteur-vitesse du point *M* par rapport au référentiel *R' est*

$$\vec{V_r} = \vec{V}/R' = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \dot{x}'\vec{\imath}'+\dot{y}'\vec{\jmath}' + \dot{z}'\vec{k}' \qquad (II.28)$$

Or : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Rightarrow$

$$\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\vec{V_a}} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}}_{\vec{V_e}} + \underbrace{\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}}_{\vec{V_r}} \qquad (II.29)$$

Par définition $\vec{V_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$ est la *vitesse d'entraînement*.

On en déduit la relation de la loi de composition des vitesses :

$$\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r} \qquad (II.30)$$

Dans le cas, où R' **est en translation par rapport à** R les axes ne subissent aucune rotation donc les vecteurs unitaires sont fixes dans le référentiel R' $x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{V_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$

b) Composition de vecteur accélération :

On dérive (II.29) par rapport au temps pour obtenir l'accélération de *M* par rapport au référentiel R.

$$.\vec{a}_{absolue} = \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}}_{\vec{a_e}} + \underbrace{2\left(\dot{x}'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)}_{\vec{a_c}} + \underbrace{\ddot{x}'\vec{\imath}' + \ddot{y}'\vec{\jmath}' + \ddot{z}'\vec{k}'}_{\vec{a_r}}$$

La loi de composition des accélérations s'exprime par la relation :

$$\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_c} + \vec{V_r} \qquad (II.31)$$

Exercice N°II.1 :

un tramway quitte l'arrêt en direction du centre-ville. Le tramway accélère tout d'abord avec une accélération a_1 = 1,3 m.s^{-2} pendant 10 s jusqu'à atteindre sa vitesse de déplacement V_o. Il se déplace alors avec cette vitesse constante V_o pendant une minute lorsque le conducteur aperçoit devant lui un obstacle sur les voies situé à environ 50 m.

a) Quelle est la distance parcourue par le tramway au moment où le conducteur aperçoit l'obstacle ?

b) Sachant que le freinage d'urgence correspond à une décélération a_2 = 3 m.s^{-2} et que le temps de réaction du conducteur est de 2 s, le tramway pourra-t-il s'arrêter avant de heurter l'obstacle ?

c) Tracer le diagramme des vitesses.

Exercice N°II.2 :

Un point matériel M est animé d'un mouvement rectiligne dont l'accélération est donnée par a = 32 -4v avec comme conditions initiales x = 0 et v = 4 pour t = 0).

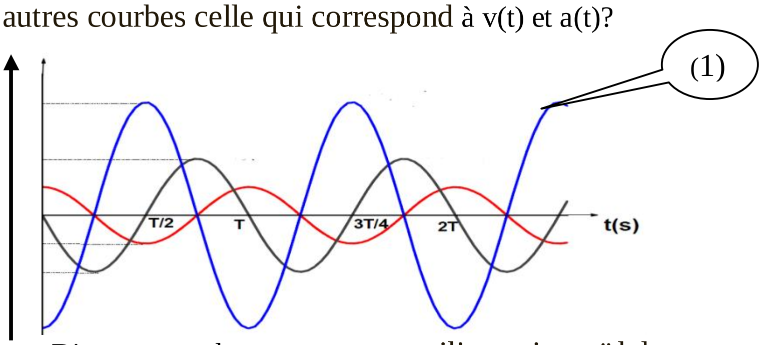
- Trouver v en fonction de t , x en fonction de t et x en fonction de v .

Exercice N°II.3 :

La courbe (1) de la figure si dissous représente les variations de L'abscisse x(t) d'un mouvement rectiligne sinusoïdale sur un axe x'x, avec : $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$

a) Montrer que l'accélération est de la forme $\ddot{x} = -kx$ et déterminer la dimension de k.

b) Préciser parmi les 2 autres courbes celle qui correspond à v(t) et a(t)?



Diagrammes du mouvement rectiligne sinusoïdale.

Exercice N°II.4:

Un bateau prend la mer en direction du Nord 60° Ouest à la vitesse 4 km/h par rapport à l'eau la direction du courant d'eau est tel que le mouvement résultant par rapport à la terre s'effectue dans la direction de l'ouest à la vitesse de 5 km/h.

- Calculer la vitesse et la direction du courant d'eau par rapport au sol.

Exercice N°II.5:

Dans un référentiel $R = Oxyz$. Un point M décrit dans le plan $z = 0$ une trajectoire circulaire de centre O et de rayon R (fig. 1).

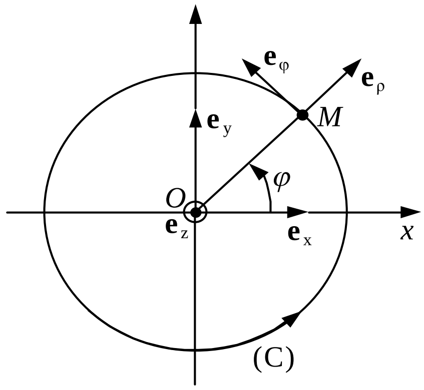


Fig. 1. Mouvement circulaire.

1) Exprimer la vitesse $\overrightarrow{V_{M/R}}$ du point M par rapport à R.
2) On définit la vitesse angulaire ω par et le vecteur rotation par$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_z}$. Montrer que la vitesse peut se mettre sous la forme intrinsèque$\vec{V}_{M/R} = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$.
3) Exprimer l'accélération $\vec{a}_{M/R}$ du point *M* par rapport à *R*. En déduire les expressions de l'accélération normale $\vec{a}_n$ et de l'accélération tangentielle$\vec{a}_t$.
4) Que deviennent ces expressions dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme ?

Chapitre III : Dynamique du point matériel

III.1- Généralité : - Référentiels absolu et Galiléen- Notion de masse - Notion de force

III.2- Vecteur quantité de mouvement

III.3- Lois de Newton

III.4- Exemples d'applications

III.5- Théorème du moment cinétique :

Introduction :

La dynamique est l'étude des mouvements des corps en relation avec les causes, appelées Forces, qui les produisent.

III.1 Généralité :

III.1.2 Référentiels absolu et Galiléen :

Le référentiel est un ensemble d'observateurs qui mesurent la position et le temps.
Le référentiel absolu est un référentiel considéré comme fixe, par contre le référentiel Galiléen est en mouvement de translation uniforme par rapport à un référentiel absolu.
Un référentiel est défini soit par son nom (exemple : référentiel terrestre) soit par un de ses repères R(O, x, y, z).Exemple :
Le ***référentiel de Copernic*** est la meilleur approximation de référentiel Galiléen a pour origine le centre de masse du système solaire, et pour axes des directions vers trois étoiles fixes.

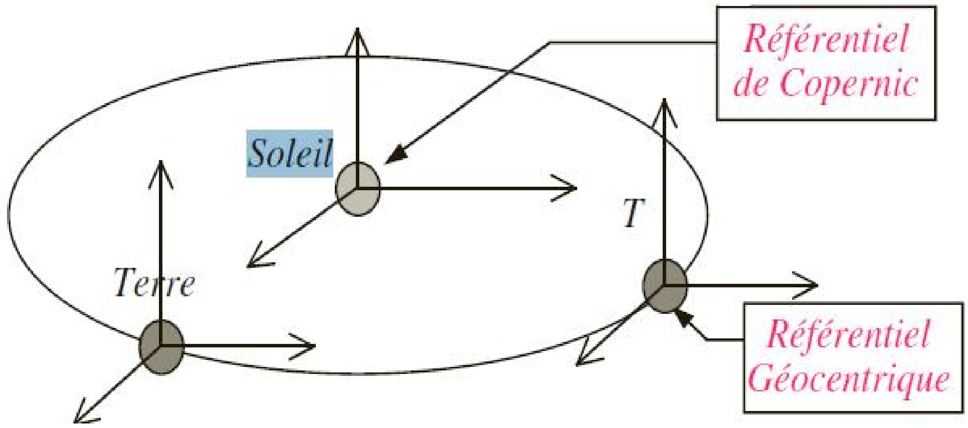


Figure II.1 Les référentiels de Copernic et géocentrique : le référentiel géocentrique est en mouvement circulaire uniforme par rapport au référentiel de Copernic.

III.1.2 Notion de masse :

La vitesse d'un corps ne suffit pas à décrire son mouvement. Il faut introduire une quantité caractérisant la « répugnance » du corps à toute modification de son mouvement, c'est-à-dire son **inertie**, il est possible d'associer à un point matériel un scalaire positif, m, qui est sa masse. Elle s'exprime en kilogrammes (kg).

Elle est invariable dans la mécanique newtonienne, dans la mécanique relativiste, elle dépend de la vitesse à travers l'expression :

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}} \qquad \text{(III.1)}$$

avec:
m_0, est la masse au repos
m, est la masse à la vitesse v.
c, est la vitesse de la lumière, $c \approx 3\ 10^8$m.s

III.1.3 Notion de Force : En physique une force désigne l'interaction entre deux objets ou systèmes. Il existe 4 interactions universelles : Interaction gravitationnelle, Interaction électromagnétique, Interaction nucléaire faible et Interaction nucléaire forte.

III.2 Vecteur quantité de mouvement :

Le vecteur quantité de mouvement $\vec{P}$ (parfois appelé impulsion) pour un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$ par rapport à R est :

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{v}} \qquad \text{(III.2)}$$

L'unité de la quantité de mouvement dans le système international est le kg.m.s^{-1}.

Pour un système constitué de *n* points matériels le vecteur quantité de mouvement est le vecteur résultant :

$$\boxed{\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{v}_i} \qquad \text{(III.3)}$$

III.3 Lois de Newton :

III.3.1. 1ére loi de Newton, « Principe de l'inertie » :

Galilée est le premier qui a suggéré ce principe. Il constitue la première loi de Newton et qui s'énonce comme suit :

« Tout objet conserve son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme en l'absence de forces agissant sur lui » Cette 1ière loi peut aussi s'énoncer :

Dans un référentiel (*R*) galiléen, tout point matériel A mécaniquement isolé (ou pseudo isolé), est soit au repos soit en mouvement rectiligne uniforme.

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \text{ ou bien } \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}} \qquad \text{(III. 4)}$$

Ce principe conduit à la loi de conservation de la quantité de mouvement totale d'un système isolé ou pseudo isolé. La propriété ci-dessus constitue une définition des repères galiléens et le principe d'inertie postule leur existence. Un repère galiléen est un repère en translation rectiligne et uniforme dans le repère de Copernic.

III.3.2. 2éme loi de Newton : Principe fondamental de la dynamique du point

Par rapport à un référentiel galiléen R, le mouvement d'un point matériel de masse m et soumis à plusieurs forces extérieures, dont la somme est $\boxed{\vec{f}_{ext}}$

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{f}\,ext} \qquad \text{(III.5)}$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors à l'aide du vecteur accélération sous la forme :

$$\boxed{\vec{f}\,ext = m\vec{a}} \qquad \text{(III.6)}$$

Remarque : Cette formule ne s'applique qu'aux systèmes de masse constante. Le cas d'une fusée qui consomme du carburant et voit sa masse diminuer ou encore celui d'une goutte d'eau qui tombe dans une atmosphère contenant de la vapeur d'eau et grossit au cours du mouvement ne peuvent pas être traités avec cette relation.

III.3.3. 3éme loi de Newton : Principe des actions réciproques

La troisième et dernière loi de Newton s'énonce de la manière suivante : Si un point matériel A exerce sur un point matériel B une force $\vec{f}_{A/B}$,alors le point B exerce sur le point A une force $\vec{f}_{B/A}$telle que

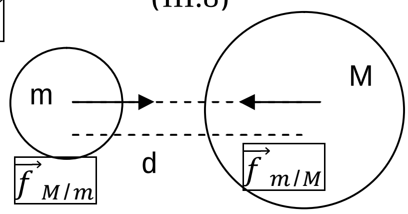
$$\boxed{\vec{f}_{A/B} = -\vec{f}_{B/A}} \qquad (\text{III .7})$$

III.4.Exemples de forces :

III.4.1 Force à distance :

III.4.1.a La force d'interaction gravitationnelle : Cette force d'interaction suit une loi énoncée par *Newton* en 1650.

$$\boxed{\vec{f}_{M/m} = -\vec{f}_{m/M} = G\frac{M.m}{d^2}\vec{u}} \qquad (\text{III.8})$$

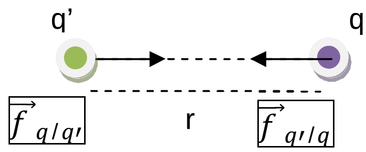


$\vec{u}$: vecteur unitaire

G : une constante
G= 6,67 x 10^{-11} $m^3 Kg^{-1} s^{-2}$
M et m les 2 masses en interaction.

La force d'interaction Colombienne :
L'interaction coulombienne loi de Colomb pour les charges électriques.

$$\boxed{\vec{f}_{q/q'} = -\vec{f}_{q'/q} = k\frac{q.q'}{r^2}\vec{u}} \qquad (\text{III.9})$$



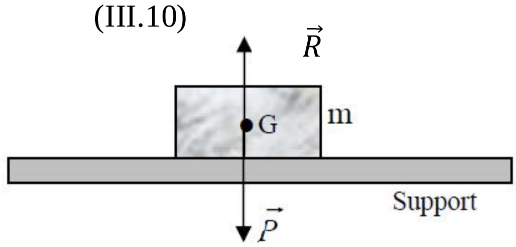
k= $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ = 9x 10^9 (USI)
q et q' les 2 charges en interaction.

III.4.1 b. Force de contact :

- ✓ **Réaction de support :**

La force que subit un objet, posé sur un support horizontal, en provenance du support s'appelle réaction du support. La réaction du support sur l'objet m est répartie sur toute la surface de contact support-objet $\vec{R}$, représente la résultante de toutes les actions exercées sur la surface de contact.

L'objet étant en équilibre $\vec{R} + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = -\vec{P}$ (III.10)



- ✓ **Force de frottement :** c'est la résistance qui apparait lors du contacte entre deux surfaces rugueuses et qui s'oppose au déplacement relatif des deux surfaces Il existe plusieurs types de frottements : Les frottements entre les corps solides et les frottements dans les fluides :

*Les frottements solides / solides : La nature de ces forces se traduit par un coefficient de frottement μ dont la valeur dépend des matériaux en contact.

L'expression de la norme de la force de frottement s'écrit :

$$\boxed{\vec{f}_d = \mu_d . \vec{R}} \qquad \text{(III.11)}$$

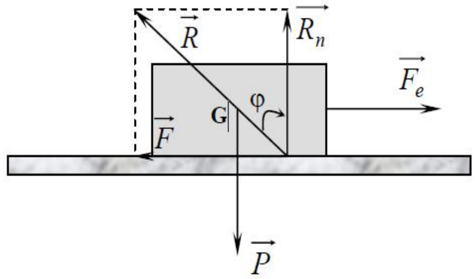
Le *frottement statique* intervient entre surfaces **immobiles** l'une par rapport à l'autre. Par contre le *frottement dynamique* intervient lors du mouvement.

On distingue : le coefficient de frottement statique μ_s qui représente la valeur maximale, et le coefficient de frottement dynamique (ou de glissement) μ_d avec $\mu_d < \mu_s$.

Exemple :

Dans cette figure, l'objet est en mouvement sous l'action de la force d'entraînement $\vec{F}_e$.

- F_e : Force d'entraînement ;
- R_n : Force de réaction.
- F : Force de frottement.
- ϕ : angle de frottement.

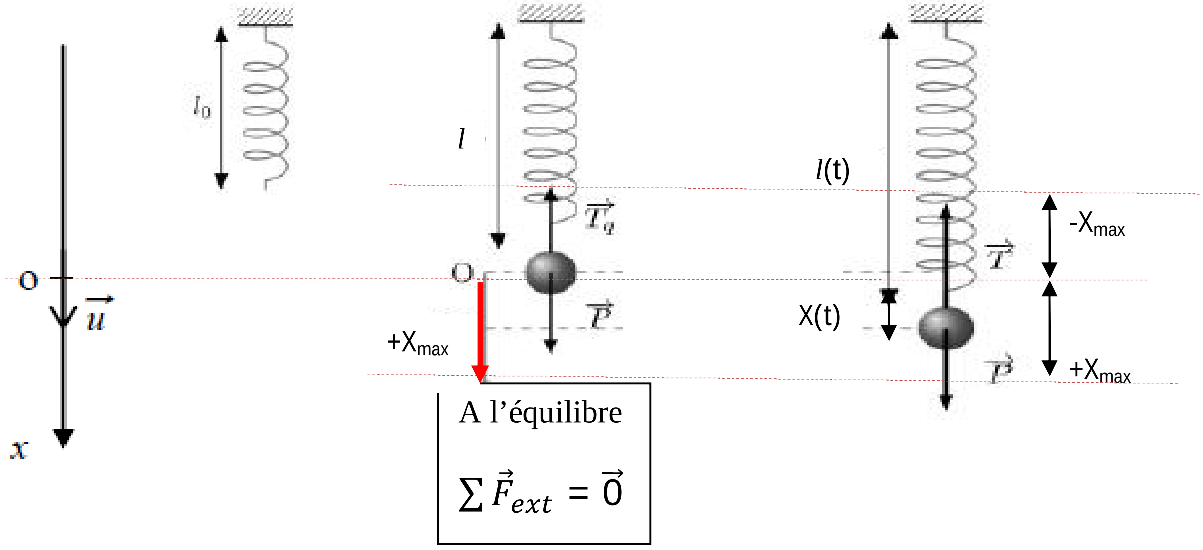


$F_d = \mu_d . R$ en module. Avec : $\mu_d = tg\varphi = \frac{F}{R}$

Matériaux	μ_d
Acier-Acier	0.2
Bois - Bois	0.3
Caoutchouc-bitume	0.6

Force de rappel du ressort (Tension $\vec{T}$) :

Soit un point M de masse m accroché au bout d'un pendule élastique rectiligne (ressort). Quand le ressort s'allonge, une force de rappel $\vec{F} = -k.(l - l_0)\,\vec{u}$,proportionnelle à cet allongement et appelée tension s'exerce sur la masse :



Où l désigne la longueur du ressort à l'instant considéré. A l'équilibre, on a $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

$$m\vec{g} - k(l - l_0)\vec{u} = \vec{0}$$
$$mg = k(l - l_0)$$

En mouvement on applique le principe fondamental de la dynamique : on choisit l'origine de l'axe vertical Ox à la position d'équilibre à l'instant t le déplacement de la masse par rapport à sa position d'équilibre $l(t) = l_0 + x$ .La projection du (pfd) le long de cette axe conduit à :

$$mg - k(l(t) - l_0) = ma$$
$$mg - k(l - l_0 + x) = ma$$
$$-k(x) = ma \quad \equiv \quad m\ddot{x} + kx = 0$$
$$m\ddot{x} + kx = 0$$

On pose $k/m = \omega^2$, l'équation différentielle du mouvement de la masse m est :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

La solution de cette équation différentielle du second ordre sans second membre est *dont la solution est : x(t)= A cos(ω t+φ)*

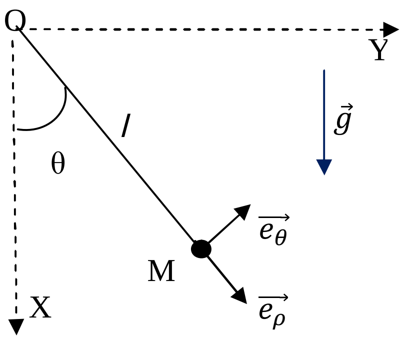
A et φ deux constantes à déterminer par les conditions initiales.
D'où le système :

$$\begin{cases} x(0) = X_{max} \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} A\cos\varphi = X_{max} \\ -A\omega\sin\varphi = 0 \end{cases} \begin{cases} \cos\varphi = \frac{X_{max}}{A} \\ \varphi = 0, \varphi = \pi \end{cases} \quad \varphi = 0 \text{ car } \frac{X_{max}}{A} > 0$$

Finalement : $x(t) = X_{max}\cos\omega t$ on a un mouvement rectiligne sinusoïdale, de période T et de pulsation ω avec $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Exemple III.1:

Un pendule simple constitué d'un objet ponctuel M de masse m, accroché à un fil inextensible de longueur l et de masse négligeable. Son mouvement a lieu dans le plan vertical (xOy) du référentiel fixe $\Re(O,xyz)$.
On écarte le pendule d'un angle θ de sa position d'équilibre (θ=0) et on le lâche sans vitesse initiale. Les forces de frottement sont supposées inexistantes.
(le champ de pesanteur terrestre g est considéré comme uniforme.)



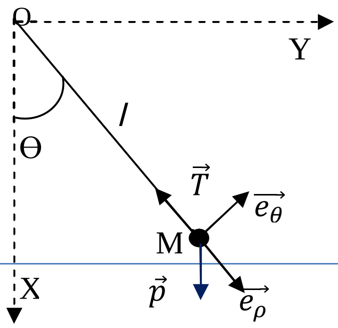
1) Exprimer les forces appliquées au point M dans la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}, \vec{k})$.

2) En appliquant le PFD dans le référentiel galiléen $\Re$ établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas de faibles oscillations.

3) Etablir l'expression de la tension T du fil.

On donne : $a_r = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$; $a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}$

Réponse :



1) Le poids $\vec{p} = m\vec{g}$ avec : $\vec{p} = mg\cos\theta\,\vec{e_\rho} - mg\sin\theta\,\vec{e_\theta}$

La tension du fil $\vec{T}$ avec : $\vec{T} = -T\,\vec{e_\rho}$

2) Le *PFD* dans ce référentiel galiléen est le suivant: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$
La projection du *PFD* sur e_θ donne : $ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$
l'équation du mouvement est $\boxed{\ddot{\theta} + (g/l)\theta = 0}$ pour de faibles oscillations.

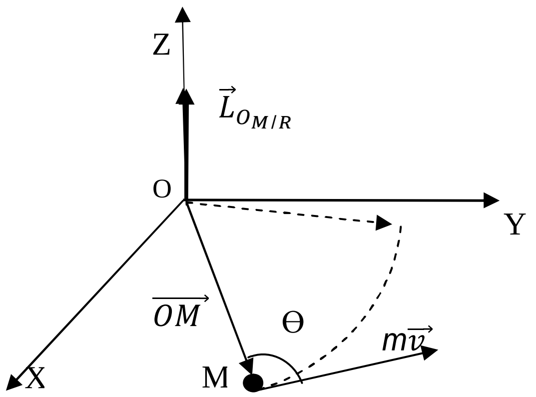
4) En projetant le PFD sur $\vec{e_\rho}$ l'expression de la tension T du fil est
La projection du PFD sur $\vec{e_\rho}$ donne : $-l\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T \Longrightarrow T = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2$

III.5 Théorème du moment cinétique :

III.5.1 Moment cinétique par rapport à un point :

Le vecteur moment cinétique du point matériel M $\vec{L}_{O_{M/R}}$ par rapport à O se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_{M/R}$ dans le référentiel R est défini par le produit vectoriel:

$$\vec{L}_{O_{M/R}} = \overrightarrow{OM} \Lambda m\vec{v}_{M/R} \qquad \text{(III.12)}$$



Avec : $\left\|\vec{L}_{O_{M/R}}\right\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| . m \left\|\vec{v}_{M/R}\right\| \sin\theta$
m est la masse du point
$\overrightarrow{OM}$ est le vecteur position
$\vec{p} = m\vec{v}_{M/R}$ est La quantité de mouvement par rapport au référentiel R

III.5 2Théorème du moment cinétique:

« La dérivée par rapport au temps du vecteur moment cinétique est le ***moment de la force F$_{ext}$ par rapport à un point*** » :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{O_{M/R}}(M)}{dt} = \overrightarrow{OM} \Lambda \vec{f}_{\text{ext}}} \qquad \text{(III.13)}$$

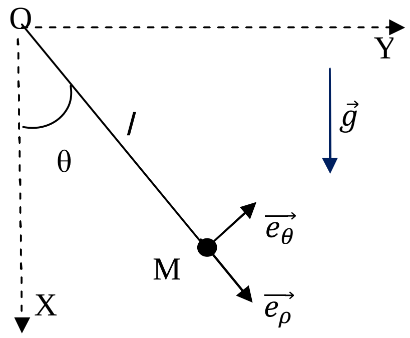
Demonstration:

$$\frac{d\vec{L}_{O_{M/R}}(M)}{dt} = \underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Lambda m\vec{v}_{M/R}\right)}_{=0} + \overrightarrow{OM} \Lambda m \frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt}$$

$\vec{\delta}_{0_{M/R}}(\vec{f}_{ext}) = \overrightarrow{OM} \Lambda \vec{f}_{ext} = \overrightarrow{OM} \Lambda m \frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt}$ est le m***oment de la force F$_{ext}$ par rapport à O***:

Exemple III.2: En appliquant le théorème du moment cinétique dans le référentiel galiléen $\Re$ établir l'équation différentielle du mouvement d'un pendule simple dans le cas de faibles oscillations.

Réponse III.2:



Réponse III.2:

Le théorème du moment cinétique s'écrit : $\frac{d\vec{L}_{O_{M/R}}}{dt} = \overrightarrow{OM} \Lambda \sum \vec{f}_{ext} = \overrightarrow{OM} \Lambda (\vec{p} + \vec{T})$

Avec : $\vec{L}_{O_{M/R}} = \overrightarrow{OM} \Lambda\, m\vec{v} = l\vec{e}_\rho \Lambda\, ml\dot{\theta}\vec{e}_\theta = ml^2\dot{\theta}\vec{k} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{O_{M/R}}}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\vec{k}$

- $\overrightarrow{OM} \Lambda \vec{p} = l\vec{e}_\rho \Lambda \left(mgcos\theta\vec{e}_\rho - mgsin\theta\vec{e}_\rho\right) = -mglsin\theta\vec{k}$
- $\overrightarrow{OM} \Lambda \vec{T} = \vec{0}$

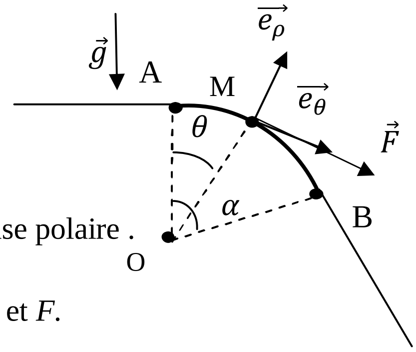
Ce qui implique que : $ml^2\ddot{\theta}\vec{k} = -mglsin\theta\vec{k} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$

$$On\ obtient\ finalement\ pour\ \ les\ faibles\ oscillations$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

Exercice III.1 :

Une voiture, assimilé à un point matériel M de masse m = 1 000 kg débute une descente en A à la vitesse v_0 = 125 km.h^{-1} figure ci-contre :



La trajectoire de la descente de A à B est un arc de cercle, de centre O, de rayon R = 130 m et d'angle $\theta = 15^\circ$.On suppose que durant la descente la force motrice $\vec{F}$ de la voiture est tangente à la route et de valeur algébrique F *est* constante. (On néglige les frottements.)

1. Déterminer les équations du mouvement de $M(R, \theta)$ en projection sur la base polaire .

2. Après avoir multiplié l'équation sur $\vec{e_\theta}$, l'intégrer.

3. Déterminer la réaction normale N en fonction de R, θ, g (pesanteur), m, v_0 et F.

4.

a) Déterminer l'expression vérifiée par l'angle θ_d pour lequel la voiture quitterait le sol (décolle).

b) Calculer cet angle dans le cas où le conducteur coupe le moteur $F=0$ en A (on prendra g = 9,8 m.s^{-2}).

Exercice III.2 :

On considère une piste ABC inclinée d'un angle $\alpha = \pi/6$ et constituée d'une partie parfaitement lisse AB = 16m, et d'une partie rugueuse BC. On lance à partir de A un cube assimilé à un point matériel de masse M = 1kg avec une vitesse v_A parallèle à la piste (voir figure 1). Le contact entre le cube et la partie BC de la piste est caractérisé par un coefficient de frottement dynamique
μ_d = 0, 4. On donne g = 10m/s^2.

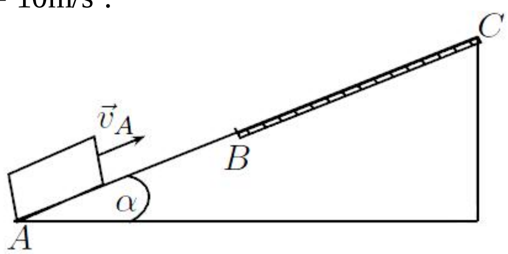


Figure 1

1. Représenter les forces appliquées au cube sur les parties AB et BC de la piste.
2- Quelle doit être la vitesse v_{A1} pour que la vitesse v_B au point B soit nulle.
3- On lance le cube avec une autre vitesse v_{A2}. Il s'immobilise en un point D entre B et C. En déduire l'expression de la distance BD en fonction de v_{A2} , AB, g, α, μ_d = 0, 4 . Calculer cette distance sachant que v_{A2} = 14m/s.
4. Qu'arrivera-t-il au cube, après avoir atteint le point D, si le contact cube-piste est caractérisé par un coefficient de frottement statique égal à : a) μ_s = 0, 5 b) μ_s = 0, 65

On donne g=10 m .s^{-2}

Exercice III.3 :

Un point matériel de masse m, glisse le long du trajet ABC représenté sur la figure 1
- Le trajet AB est circulaire de centre O, et de rayon R. Les frottements sont négligeables le long de AB. - Le trajet BC est horizontal, caractérisé par un coefficient de glissement μ.
30°

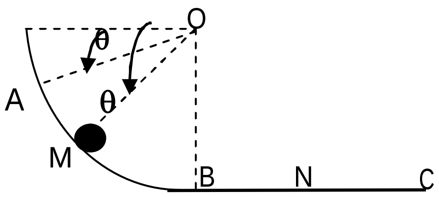


Figure 2

1-Représenter les forces exercées sur la masse au point M.

2-a) démontrer que la vitesse acquise au point *M* défini par l'angle θ est donnée par l'expression $v=\sqrt{2Rg(\sin\theta-\frac{1}{2})}$, exprimer la force de réaction *N* au point M, v_A=0?

3.b) En déduire les valeurs de la vitesse et de la force de réaction *N* au point B ?

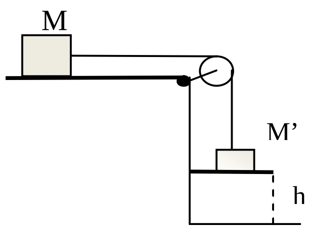
4- Exprimer la vitesse au point N ; sachant que la force de frottement f= μ.mg , et BC=R ?
5-Calculer le coefficient de glissement μ , pour que le point matériel s'arrêt au point C ?

Exercice III.4 :

Deux corps M et M' de masse m et m' respectivement, sont reliés par un fil inextensible passant par la gorge d'une poulie de masse négligeable. Initialement le corps M' se trouve à une hauteur h du sol, il est lâché sans vitesse initiale. Le contact entre le corps M et le plan horizontal est caractérisé par des coefficients de frottement statique μ_s et glissement μ_g

Données : m = 6 kg,

μ_s = 0.6, μ_d = 0,4,
h=1.5m et g = 10 m.s^{-2}

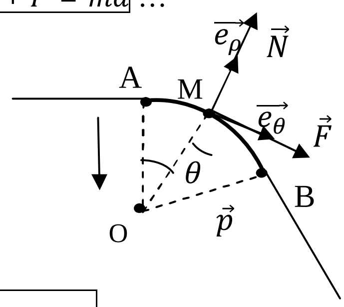


1- Donner l'expression de la masse m'_{min} pour que le système se mette en mouvement, en fonction de m et μ_s .
2- On prend maintenant un masse m'= 4 kg, le système se met en mouvement. En considérant les deux phases du mouvement de la masse M jusqu'à son arrêt:
a- Quelle est la nature du mouvement de la masse M. Justifier.
b- Calculer l'accélération dans la première phase
c- Déduire la vitesse à la fin de cette phase.
d- Calculer l'accélération dans la deuxième phase
e- Déduire la distance totale D parcourue par la masse M. Donner sa valeur.

Corrigé du TD N°3 :

Exercice III.1: 1-Représentation des forces :

2-Le PFD dans ce référentiel galiléen est le suivant: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ $\boxed{\vec{p} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}}$ …



En projection sur la base polaire : avec R=cte

suivant $\vec{e_\rho}$ donne : $\boxed{-mgcos\theta + N = -mR\dot{\theta}^2 \quad (1)}$

suivant $\vec{e_\theta}$donne : $\boxed{mgsin\theta + F = mR\ddot{\theta} \quad (2)}$

3-On multiplie l'équation sur $\vec{e_\theta}$ $\boxed{\dot{\theta}\, mgsin\theta + F\dot{\theta} = mR\ddot{\theta}\,\dot{\theta}}$

$\dot{\theta}\, mgsin\theta + F\dot{\theta} = mR\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{dt}$ dont l'intégration donne $\boxed{: \frac{1}{2}mR\dot{\theta}^2 = -mgcos\theta + F\theta + Cte}$.

Cte d'après les conditions initiales(t=0s $\theta=0$; et $\dot{\theta} = \frac{v_0}{R}$ on obtient $\boxed{:Cte = m\frac{v_0^2}{2R} + mg}$

Calcul de N : de (2) N= $mgcos\theta - mR\dot{\theta}^2$ On remplace $mR\dot{\theta}^2 = -2mgcos\theta + 2F\theta + m\frac{v_0^2}{R} + 2mg$

On trouve : N= $mgcos\theta + 2mgcos\theta - 2F\theta - m\frac{v_0^2}{R} - 2mg \Rightarrow$ $\boxed{N = mg\,(3cos\theta - 2) - 2F\theta - m\frac{v_0^2}{R}}$

La voiture décolle lorsque N=0 $\Rightarrow mg\,(3cos\theta - 2) - 2F\theta - m\frac{v_0^2}{R} = 0 \Rightarrow cos\theta = \frac{2}{3mg}F\theta + \frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2}{3}$

$cos\theta = \frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2}{3} \Rightarrow$ $\theta_d = \boxed{Arcos\left(\frac{\left(\frac{125}{3.5}\right)^2}{3.9.8*130} + \frac{2}{3}\right) = 12^\circ}$…

Exercice III.2:

2-De la relation : $v_B^2 - v_A^2 = 2.a_1.AB$

pour trouver l'accélération a, on applique le PFD:$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_1$

; et par projection sur les deux axes, il vient : $\begin{cases} sur(ox) \\ sur(oy) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -mg\sin\theta = ma_1 \Rightarrow a_1 = -g\sin\alpha..(1) \\ -mg\cos\theta + R = 0 \end{cases}$

$v_B^2 - v_A^2 = 2.a_1.AB \Rightarrow v_A = \sqrt{2g\sin\alpha AB} = 12.65ms^{-1}$

3-On applique le PFD : sur la partie BD$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_2$ la définition du coefficient de frottement nous permette d'écrire :

$$f = \mu.R$$

$\begin{cases} -mg\sin\theta - f = ma_2 ....(1) \\ -mg\cos\theta + R = 0 \end{cases}$ $,avec: f = \mu_d R \Rightarrow a_2 = -g(\sin + \mu\cos)$ $BD = \dfrac{v^2{}_{A2} - 2g\sin\alpha AB}{2g(\sin + \mu_d\cos)}$

$BD = 2.13m$

4-Pour vérifier si le 2ème bloc bouge : la condition est $P_x \geq f_{s;\max}$ $mg\sin 30 \geq \mu_s.R \Rightarrow \mu_s \leq tg\alpha$

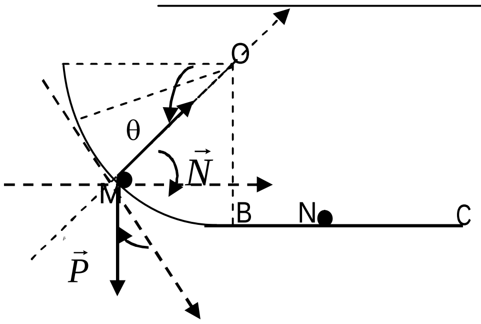
tgπ/6=0.58 : $\mu_s = 0.5 \leq tg\alpha$ le bloc redescend après son arrêt .

$\mu_s = 0.65 \geq tg\alpha$ le bloc reste au repos.

1er cas : rupture d'équilibre

Exercice III.3: 1-Représentation des forces exercées : ..... On applique le PFD $\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$
$\Rightarrow \vec{p} + \vec{N} = m\vec{a}$

1 $\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a} \Rightarrow On : projecte : \begin{cases} sur\ (MT) \Rightarrow P_T = ma_T \Leftrightarrow g\cos\theta = \dfrac{dv}{dt}......(1) \\ sur\ (MN) \Rightarrow N - P_N = ma_N \Leftrightarrow N - mg\sin\theta = m\dfrac{v^2}{R}.....(2) \end{cases}$

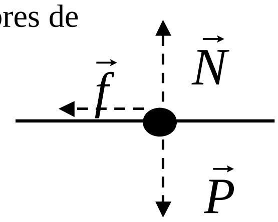


$$mg\sin\theta = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} = g\cos\theta}$$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = g\sin\theta \Leftrightarrow d\theta.\frac{dv}{dt} = d\theta.g\sin\theta$

$On; a : \omega = \frac{v}{R} = \frac{d\theta}{dt}$

$\Rightarrow vdv = Rg\sin\theta d\theta$.. Intégrons les deux membres de



l'équation le domaine de variation est $[30°,\theta]$, celui de v est $[0,v]$:

$\int_0^v vdv = \int_{30}^{\theta} Rg\cos\theta d\theta. \Leftrightarrow \frac{1}{2}v^2 = Rg(\sin\theta - \sin 30°) \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2Rg(\sin\theta - \frac{1}{2})}}$ Pour

θ=90° :Calcul de : la vitesse correspondante

la force de réaction N $\boxed{N = 2mg}$.L'application de la deuxième loi de Newton donne :

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} : \quad -f = ma. \Rightarrow \mu g = -\frac{dv}{dt} = -\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \mu gdt = -dv \Rightarrow \mu gdx = -vdv \Rightarrow$

$\int \mu gdx = -\int vdv$

$\int_0^{BC} \mu gdx = -\int_{vB}^{vC} vdv \Rightarrow\Rightarrow v_c = \sqrt{Rg(1-2\mu)} \Rightarrow \boxed{vc = \sqrt{Rg(1-2\mu)} = 0 \Rightarrow \quad \mu = 1/2}$

Chapitre IV: Travail et énergie du point matériel

- Travail et puissance
- Energie cinétique
- Energie potentielle
- Energie mécanique

Chapitre IV: Travail et énergie du point matériel

IV.1. Travail d'une force :

Si un point matériel M subit un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dr}$ sous l'effet d'une force $\vec{F}(M)\big|_R$ ce dernier effectue un travail élémentaire dW défini par :

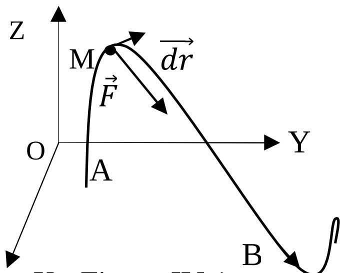


Figure IV.1

$$dW = \vec{F}(M)\big|_R . \overrightarrow{dr} \qquad (IV.1)$$

Pour un déplacement de A à B (figure IV.1), le travail total est :

$$W_1(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} . \overrightarrow{dr} \qquad (IV.2)$$

$$W_1(\vec{F}) = \int_{x_A}^{x_B} F_x\, dx + \int_{Y_A}^{y_B} F_y\, dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z\, dz \qquad (IV.3)$$

si la force F est constante en grandeur et en direction l'expression de $W_1(\vec{F})$ prend une forme plus simple:

$$W_1(\vec{F}) = F_x \int_{x_A}^{x_B} dx + F_y \int_{Y_A}^{y_B} dy + F_z \int_{z_A}^{z_B} dz$$

Exemple: Le travail du poids $W_{A-B}(\vec{P})$

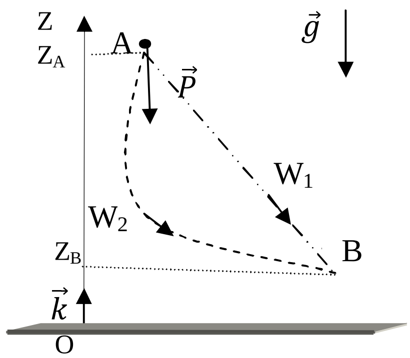


Figure IV.2

$$W_{A-B}(\vec{P}) = \int_A^B \vec{P} . \overrightarrow{dr} = -P \int_{z_A}^{z_B} dz = -mg(z_B - z_A) \qquad (IV.4)$$

Le travail du poids est indépendant du chemin suivit entre les point A et B.

$$W_1(\vec{P}) = W_2(\vec{P})$$

Remarques :

• W = 0 et ($\vec{F} \neq \vec{0}$, $et\ \overrightarrow{dr} \neq \vec{0}$) la force $\vec{F}$ est perpendiculaire au déplacement $\overrightarrow{dr}$.

• W > 0 le travail est appelé **travail moteur**.

- W < 0 contraire il est dit **travail résistant**.
- Si le travail dépend du chemin suivi entre A et B donc :

$$W_1(\vec{F}) \neq W_2(\vec{F}) \neq W_3(\vec{F})$$

- $\vec{F}(M)\big|_R . \overrightarrow{dr} = F.dr.\cos(\vec{F},\overrightarrow{dr}) \quad = F_\tau . ds$

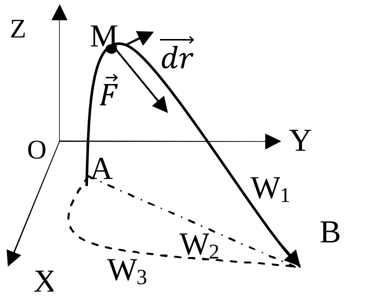


Figure IV.3

Où $F.cos\theta = F_\tau$ est la composante tangentielle de F, et dr = ds est la coordonnée curviligne. Ce qui donne :

$$W_{A-B} = \int_{sA}^{sB} F_\tau . ds$$

L'unité du travail est le Joule, 1 J = 1 kg. m^2.s^{-2}.

IV.2 Puissance d'une force:

On définit la *puissance* de la force $\vec{F}(M)\big|_R$ appliquée au point matériel *M* animé de la Vitesse $\vec{v}(M)|_R$, dans un référentiel *R*, par le produit scalaire : P= $\left(\vec{f}(M)\big|_R\right).(\vec{v}(M)|_R)$

$$P = \vec{f}(M).\left(\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\right) = \frac{dW}{dt} \qquad (IV.5)$$

L'unité de puissance est le Watt, 1 W = 1 kg. m^2.s^{-3}.

Exercice d'application :

Calculer les travaux des forces appliquées au cube M de masse m Fig IV.4 le long du chemin AB=10m.

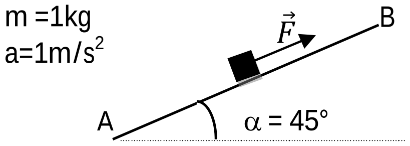


Figure IV.4

Réponse :

L'application de la deuxième loi de Newton permet d'écrire :

$\sum \vec{F} + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$

Projetons cette équation sur les deux axes de coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} -Psin\alpha + F = ma \quad (1) \\ N = Pcos\alpha \end{cases}$$

L'équation (1) permet d'écrire : $F = ma + Psin\alpha$ AN : $F = 1 + 10\,.0{,}71 = 8{,}1\,N$

Le travail de F est alors

$$W = W(\vec{F}) + W(\vec{P}) + W(\vec{N})$$

$\vec{N}$est perpendiculaire au plan, et son travail est nul.$W(\vec{N}) = 0$

$$W(\vec{P}) = p_x \int_{x_A}^{x_B} dx + \underbrace{p_y \int_{Y_A}^{y_B} dy}_{0}$$

$$W(\vec{P}) = -P\,cos\alpha\,AB = -71\,J$$

$$W(\vec{F}) = F.AB = 81\,J$$

IV.3. Energie cinétique :

IV.3.1 Energie cinétique :

Soit un point matériel de masse m se déplaçant sous l'action de forces de résultante$\vec{F}$, M sa position à l'instant t et $\overrightarrow{dr}$le déplacement de ce point pendant le temps dt :

Le travail de la force $\vec{F}$ pendant le temps dt est : $dW = \vec{F}.\overrightarrow{dr}$

Mais $dW = m\frac{d\vec{v}}{dt}.\overrightarrow{dr} = m.d\vec{v}.\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} = m.\vec{v}.d\vec{v}$ (IV. 6)

Par suite : $W_{A-B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dr} = m\int_{V_A}^{V_B} \vec{v}.d\vec{v} = \frac{1}{2}m(V^2{}_B - V^2{}_A)$ (IV. 7)

On appelle *énergie cinétique du point matériel en A* la quantité scalaire E_{C_A}:

$$\boxed{E_{C_A} = \frac{1}{2}mV^2{}_A} \qquad \text{(IV. 8)}$$

L'unité de l'énergie est le Joule. (J)

IV.3.2 Théorème de l'énergie cinétique :

La relation : $\boxed{W_{A-B}(\vec{F}) = \frac{1}{2}m(V^2{}_B - V^2{}_A) = \Delta E_c}$ (IV.9)

exprime le **théorème de l'énergie cinétique** qui s'énonce comme suit :

« La variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail des forces qui s'exercent sur ce point entre les deux instants considérés ».

Le théorème de l'énergie cinétique peut se formuler de deux manières :

1. expression intégrale : $\boxed{\Delta E_c = \sum W(\vec{F})}$

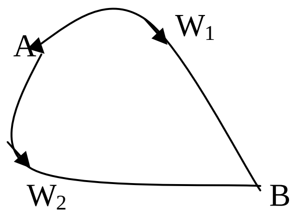
2. expression différentielle : $\boxed{dE_c = dw}$

IV.4. Energie potentielle :

IV. 4. 1. Energie potentielle et Forces conservatives

Une force est dite conservative lorsque le travail produit par cette force est **indépendant du chemin** suivi par son point d'application.

$W_{AB} = W_1 = W_2$



$W_{AB} = W_1 = -W_3$

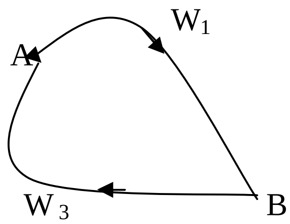


Figure IV.5

Dans ce cas on dit que **la force dérive d'une énergie potentielle E_P**

$$\vec{f} = -\overrightarrow{grad}E_P = -\vec{\nabla}\,E_P \qquad \text{(IV.10)}$$

Ou encor

$$E_P = -\int \vec{F}.\overrightarrow{dr} \qquad \text{(IV.11)}$$

La fonction scalaire $E_P(x, y, z)$ est appelée énergie potentielle.

Exemples de forces conservatives qui dérivent d'énergies potentielles:

- Le poids d'un corps qui dérive d'une énergie potentielle dite **gravitationnelle** :

$$E_{Pp} = -\int \vec{F}.\overrightarrow{dr} = -P\int dz = mgz + \text{Cte} \qquad \text{(IV.12)}$$

- la force élastique qui dérive d'énergie potentielle élastique

$$E_{Pe} = -\int \vec{F}.\overrightarrow{dr} = -\int -kx.\,dx = \frac{1}{2}kx^2 + \text{Cte} \qquad \text{(IV.13)}$$

- la force électrique qui dérive d'énergie potentielle électrique

$$E_{Pe} = -\int \vec{F}.\overrightarrow{dr} = -\int \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{r^2}.\,d\vec{r} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r} + Cte \qquad \text{(IV.14)}$$

Remarque :

1- Pour déterminer l'énergie potentielle en n'importe quel point A, il faut connaître celle d'un point de référence A_0. Souvent, A_0 est choisi, par convention, à l'endroit où la force F est nulle (lorsque cela est possible) et on donne arbitrairement la valeur zéro à E_{PA_0}

$$E_{PA} - \underbrace{E_{PA_0}}_{0} = E_{PA}$$

2- Si la force est non-conservative, donc elle ne dérive pas d'une énergie potentielle.

Exemples de forces non-conservatives

- Les forces de frottement.

- Les forces de pression.

IV.5. Energie mécanique totale :

La quantité $E_m = E_P + E_C$ représente **l'énergie mécanique totale** d'un point matériel. Si l'énergie mécanique est conservée le principe de conservation est écrit alors :

$$E_{m\ initiale} = E_{m\ finale} \qquad (IV.15)$$

IV.5.1.Théorème de l'énergie mécanique : l'énergie mécanique totale d'un point matériel soumis à des forces conservatives est constante. $E_m = E_P + E_C = Cte$

Exemple IV.1 : Plan incliné et ressort

Un point matériel M de masse m glisse sans vitesse initiale, sur un plan incliné d'angle α, à une distance L d'un ressort de raideur k. Figure IV.6 a :

1) Identifier les forces Figure IV.6 b.
2) Calculer les travaux des forces.
3) En appliquant le Théorème de l'Energie cinétique, déterminer la compression maximal du ressort.
4) Calculer la vitesse maximale

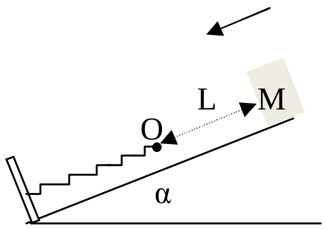


Fig IV.6 a

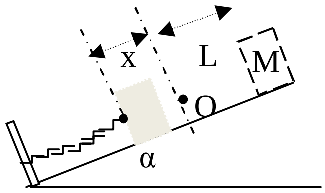


Fig IV.6 b

Réponse :

1) Le poids $\vec{p} = m\vec{g}$, la réaction du plan incliné $\vec{R}$ La force de rappel du ressort : $\vec{F} = -kx\,\vec{\imath}$
.

2) $\vec{R}$ est orthogonale à la direction du déplacement et pas conséquent le travail de la force est nul.

- Travail du poids entre la position initiale (M à -L du ressort) et une position intermédiaire x :

$$W(\vec{p}) = \int_{-L}^{x} \vec{p}.\overrightarrow{dr} = \int_{-L}^{x} m\vec{g}.\vec{\imath}dx = mgsin \propto .(x+L)$$

- Travail de la force de rappel :

$$W(\vec{F}) = \int_{0}^{x} \vec{F}.\overrightarrow{dr} = \int_{0}^{x} -kx\vec{\imath}.\vec{\imath}dx = \frac{1}{2}k\,x^2$$

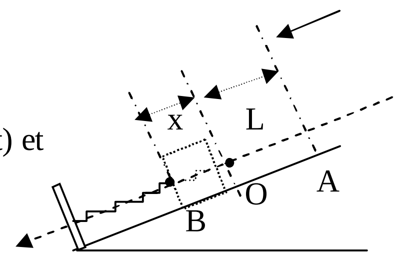


Figure IV.7

3) $\Delta E_c = E_{c_B} - E_{c_O} = \sum W(\vec{F})$ Lorsque la compression est maximale la vitesse est nulle et donc

$\frac{1}{2}m\,(0 - v^2) = mgsin \propto .(x_{max}) - \frac{1}{2}k\,(x_{max})^2 = 0$ .... (1)

$avec\ \ E_{c_O} - E_{c_A} = \frac{1}{2}m\,(v^2 - 0) = mg\,sin\alpha\,(L)$. On remplace dans (1)

$-mg\,sin\alpha\,(L) = mgsin \propto .(x_{max}) - \frac{1}{2}k\,(x_{max})^2 = 0$

$$2mg\,sin\alpha\,(L) - 2mg\,sin\alpha\,(x_{max}) + k\,(x_{max})^2 = 0$$

$$(x_{max})^2 - 2\underbrace{\frac{mg\,sin\alpha}{k}}_{a}\,x_{max} - 2\underbrace{\frac{mg\,sin\alpha}{k}}_{a}L = 0$$

$$(x_{max})^2 + 2a\,x_{max} + 2aL = 0$$

$$x_{max} = a \pm \sqrt{a^2 + 2aL} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{max} = \frac{mg\,sin\alpha}{k} + \sqrt{\frac{(mg\,sin\alpha)^2}{k^2} + \frac{2mg\,sin\alpha}{k}L}}$$

4) Calcul de la vitesse maximale :

$$E_{c_O} = \frac{1}{2}m\,v_{max}^{\;2} = mg\,sin\alpha\,(L) \quad v_{max} = \sqrt{2gsin\alpha}$$

Références:

1- MÉCANIQUE GÉNÉRALE Cours et exercices corrigés
Sylvie Pommier , Yves Berthaud.

2- MINI MANUEL Mécanique du point Cours et exercices
Michel Henry , Nicolas Delorme .

3- LECTURES IN GENERAL PHYSICS Part One Mechanics Principles and Applications. Dr. Hazem Falah Sakeek.

4- Travaux Dirigés de Physique Mécanique 2 L1 S2 Phys–103a Université Paris–Sud 11 2013–2014.

5- PHYSIQUE TOUT-EN-UN Cours et exercices corrigés.1ére année Marie-Noëlle Sanz Anne-Emmanuelle Badel François Clausset.