

Mécanique du solide

**Applications
industrielles**

Mécanique du solide

Applications industrielles

Pierre Agati

*Professeur agrégé honoraire
à l'Institut National Polytechnique
de Grenoble*

Yves Brémont

Professeur agrégé à l'IUFM de Créteil

Gérard Delville

Professeur agrégé à l'IUFM de Créteil

2^e édition

DUNOD

Illustration de couverture : *Digital Vision*

Ce pictogramme mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du **photocopillage**.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les

établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la

possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie (**CFC**, 20 rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2003

© Dunod, 2020 pour cette nouvelle présentation

11 rue Paul Bert 92240 Malakoff

© Bordas, 1986, pour la 1^{ère} édition

ISBN 978-2-10-081532-6

Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite selon le Code de la propriété intellectuelle (Art L 122-4) et constitue une contrefaçon réprimée par le Code pénal. • Seules sont autorisées (Art L 122-5) les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, ainsi que les analyses et courtes citations justifiées par le caractère critique, pédagogique ou d'information de l'œuvre à laquelle elles sont incorporées, sous réserve, toutefois, du respect des dispositions des articles L 122-10 à L 122-12 du même Code, relatives à la reproduction par reprographie.

Avant-propos

Dans la collection **Sciences Industrielles** proposée aux étudiants des classes préparatoires aux grandes écoles, DUT, BTS, ainsi qu'aux étudiants du premier cycle universitaire, cet ouvrage **Mécanique du solide** développe les trois grandes parties de la mécanique générale du solide indéformable :

- Cinématique
- Statique
- Dynamique

Les chapitres de ce livre sont construits sur le même plan :

- **Cours**

Un cours concis et complet où chaque notion importante est suivie d'une courte application.

- **À savoir**

Un résumé des résultats essentiels du cours.

- **Exercice résolu**

Un exercice dont la correction détaillée montre la mise en œuvre du cours.

- **Conseils pour la résolution**

Des conseils pour éviter les erreurs classiques.

- **Exercices corrigés**

Des exercices, pour la plupart issus de mécanismes industriels, avec des réponses plus ou moins détaillées.

Nous souhaitons que la méthode pédagogique utilisée et le choix des exercices permettent au futur ingénieur ou technicien de comprendre, d'assimiler et d'appliquer les concepts fondamentaux de la mécanique du solide pour arriver à une modélisation et une étude correcte des systèmes mécaniques industriels.

Les auteurs

Table des matières

AVANT-PROPOS	I
PARTIE I • CINÉMATIQUE	1
CHAPITRE 1 • MODÉLISATION ET PARAMÉTRAGE DES MÉCANISMES	3
1.1 Modélisation des pièces mécaniques	3
1.2 Modélisation des liaisons	3
1.3 Nombre de degrés de liberté d'une liaison	9
1.4 Paramétrage de la position d'un solide par rapport à un repère	10
1.5 Schéma cinématique des mécanismes	13
1.6 Loi « entrée-sortie » d'un mécanisme	15
Exercice résolu : Mélangeur de pâtisserie	16
Exercices corrigés :	
1.1. Guidage en rotation	18
1.2. Joint de OLDHAM	19
1.3. Actionneur de trieur à grains	19
1.4. Échelle contre un arbre	20
1.5. Solides en contact avec un plan	21
1.6. Système bielle manivelle	22
1.7. Régulateur centrifuge Citroën	22
1.8. Joint de Cardan	23
1.9. Barrière de passage à niveau	24
1.10. Moteur de modèle réduit	26
1.11. Machine d'essai de fatigue en flexion	26
CHAPITRE 2 • VECTEURS POSITION, VITESSE ET ACCÉLÉRATION D'UN POINT D'UN SOLIDE	29
2.1 Mesure du temps	29
2.2 Vecteur position d'un point d'un solide	30
2.3 Vecteur vitesse d'un point d'un solide	30
2.4 Vecteur accélération d'un point d'un solide	30
2.5 Calcul du vecteur vitesse et du vecteur accélération d'un point d'un solide	31
2.6 Dérivation graphique	35

Exercice résolu : Mouvement d'un outil de fraise	40
Exercices corrigés :	
2.1. Mouvement hélicoïdal	43
2.2. Mouvement cycloïdal	43
2.3. Manipulateur de fonderie	44
2.4. Tronçonneuse de tube en continu	45
2.5. Navigation à la surface de la Terre	47
2.6. Compresseur volumétrique ROOT	47
2.7. Détermination d'un profil de came	48
2.8. Aérogénérateur à hélice bipale	49
2.9. Équilibreuse de roue	49
CHAPITRE 3 • CHAMP DES VECTEURS VITESSE ET ACCÉLÉRATION DES POINTS D'UN SOLIDE	51
3.1 Champ des vecteurs vitesse des points d'un solide	51
3.2 Champ des vecteurs accélération des points d'un solide	59
Exercice résolu : Échelle contre un mur	61
Exercices corrigés :	
3.1. Pompe à eau	64
3.2. Machine à fileter	65
3.3. Pince à troncs d'arbres	67
3.4. Manipulateur	67
3.5. Pendule double	68
3.6. Régulateur à boules	68
CHAPITRE 4 • COMPOSITION DES MOUVEMENTS	70
4.1 Composition des vecteurs vitesse	70
4.2 Vecteur vitesse de glissement en un point entre deux solides	71
4.3 Composition des vecteurs rotation	73
4.4 Vecteurs rotation de roulement et de pivotement	74
4.5 Composition des torseurs cinématiques	75
4.6 Composition des vecteurs accélération	79
Exercice résolu : Roulement à billes	82
Exercices corrigés :	
4.1. Train d'atterrissage	84
4.2. Rectifieuse plane	86
4.3. Mécanisme de changement de vitesse	88
4.4. Poulie réductrice REDEX	88
4.5. Pompe oscillante	90
4.6. Réducteur à billes	91
4.7. Variateur de vitesse Graham	92
4.8. Variateur de vitesse « patin »	93
4.9. Variateur de vitesse à billes PIV	94
CHAPITRE 5 • MOUVEMENT PLAN SUR PLAN	96
5.1 Centre instantané de rotation. Base et roulante	96
5.2 Recherche géométrique du centre instantané de rotation	97
5.3 Propriété de la base et de la roulante	98

5.4 Profils conjugués	99
5.5 Mouvement plan sur plan de trois plans	101
Exercice résolu : Pompe à débit réglable	102
Exercices corrigés :	
5.1. Presse à décolleter	103
5.2. Roulement à billes	105
5.3. Poulie réductrice REDEX	106
5.4. Croix de Malte	107
5.5. Guidage à billes	107
5.6. Rectification des dentures d'un pignon	108
5.7. Variateur GUSA	109
5.8. Piqueuse plate Singer	110
5.9. Tracé d'un profil conjugué	111
5.10. Véhicule sur un plan	112
PARTIE II • STATIQUE	115
CHAPITRE 6 • MODÉLISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES	117
6.1 Représentation mathématique des actions mécaniques	117
6.2 Modélisation des actions mécaniques à distance	121
6.3 Modélisation des actions mécaniques de contact	125
Exercice résolu : Limiteur de couple	139
Exercices corrigés :	
6.1. Centre de surface	142
6.2. Centre de masse	142
6.3. Poutre encastrée	142
6.4. Barrage poids	143
6.5. Vanne à secteur circulaire	144
6.6. Transmission par roues coniques	144
6.7. Flotteur de carburateur	145
6.8. Effet Magnus	146
6.9. Butée Michell	146
6.10. Relations de Hertz	148
CHAPITRE 7 • PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE	150
7.1 Équilibre d'un ensemble matériel par rapport à un repère	150
7.2 Principe fondamental	150
7.3 Théorème des actions mutuelles	152
7.4 Application : système vis-écrou	152
Exercice résolu : Meuble sur rouleaux	157
Exercices corrigés :	
7.1. Portique	163
7.2. Porte tôle	163
7.3. Fixation de sécurité pour ski	164
7.4. Suspension avant de véhicule	166
7.5. Robot manipulateur	167
7.6. Montage de tournage	169

7.8. Compresseur pneumatique	170
7.10. Solides sur un plan incliné	171
CHAPITRE 8 • HYPERSTATISME ET MOBILITÉ DES MÉCANISMES	172
8.1 Hypothèses de l'étude	172
8.2 Graphe des liaisons d'un mécanisme	172
8.3 Torseurs d'action mécanique transmissible et cinématique d'une liaison	173
8.4 Liaison équivalente	174
8.5 Liaisons en parallèle	175
8.6 Liaisons en série	176
8.7 Structure des mécanismes	177
8.8 Hyperstatisme d'un mécanisme	178
8.9 Mobilité d'un mécanisme	180
8.10 Relation entre hyperstatisme et mobilité	182
8.11 Avantages et inconvénients d'un mécanisme isostatique par rapport à un mécanisme hyperstatique	184
Exercice résolu : Robot de manutention	185
Exercices corrigés :	
8.1. Bride de serrage	185
8.2. Guidage de translation	191
8.3. Montage de fraisage	192
8.4. Tripode de joint articulé	194
8.5. Montage de perçage	195
8.6. Table d'affuteuse	196
8.7. Épandeur d'engrais	198
8.8. Plateau tournant	198
8.9. Butée pour table de fraiseuse	202
PARTIE III • DYNAMIQUE	205
CHAPITRE 9 • CINÉTIQUE	207
9.1 Principe de conservation de la masse	207
9.3 Torseur dynamique	208
9.4 Relation entre le moment cinétique et le moment dynamique	209
9.5 Énergie cinétique	210
9.6 Application	210
9.7 Remarques	211
9.8 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe	212
9.9 Opérateur d'inertie d'un solide	213
9.10 Base principale d'inertie	215
9.11 Les différents moments d'inertie	216
9.12 Théorème de Huygens	217
9.13 Moment cinétique d'un solide	219
Exercice résolu : Régulateur de vitesse	225

Exercices corrigés :	
9.1. Matrices d'inertie	229
9.2. Pale d'hélicoptère	230
9.3. Plateau tournant	231
9.4. Vilebrequin	233
9.5. Bras manipulateur	235
9.6. Table élévatrice	235
9.7. Équilibreuse de roue	236
9.8. Roulement à rouleaux coniques	237
9.9. Différentiel	238
CHAPITRE 10 • PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE	240
10.1 Principe fondamental	240
10.2 Théorème des actions mutuelles	241
10.3 Cas particuliers	242
10.5 Expression du principe fondamental de la dynamique dans un repère non galiléen	247
10.6 Équilibrage dynamique	249
Exercice résolu : Véhicules au démarrage	253
Exercices corrigés :	
10.1. Variateur de vitesse à plateau	256
10.2. Tourelle de machine-outil	257
10.3. Mandrin anti-centrifuge	258
10.4. Système tige-excentrique	260
10.5. Effet gyroscopique	261
10.6. Butée à billes	262
10.7. Aérogénérateur	264
10.8. Équilibrage dynamique	265
10.9. Broche multiplicatrice de vitesse de coupe	267
10.10. Pendule de torsion	269
CHAPITRE 11 • ÉNERGÉTIQUE	270
11.1 Puissance	270
11.2 Travail	275
11.3 Énergie potentielle	275
11.4 Théorème de l'énergie cinétique	278
Exercice résolu : Démarreur pour moteur Diesel	284
Exercices corrigés :	
11.1. Extracteur à inertie	287
11.2. Dispositif de marquage automatique	287
11.3. Embrayage	289
11.4. Moteur électrique de laminoir	290
11.5. Voiture jouet à friction	290
11.6. Vérin à double effet	291
11.7. Détermination expérimentale d'un moment d'inertie	292
11.8. Résolution des problèmes de statique	293
11.9. Rendement d'un train d'engrenages	295
11.10. Volant d'inertie	297
11.11. Démarrage d'une MOCN	299
INDEX	301

Partie 1

Cinématique

Chapitre 1

Modélisation et paramétrage des mécanismes

Un mécanisme est un ensemble de pièces mécaniques reliées entre elles par des liaisons, en vue de réaliser une fonction déterminée.

Le but de ce livre est l'étude des mouvements et des actions mécaniques dans les mécanismes. Pour cela, commençons par modéliser les pièces mécaniques et les liaisons.

1.1 MODÉLISATION DES PIÈCES MÉCANIQUES

Nous considérerons que les pièces mécaniques peuvent être modélisées, en première approximation, par des solides indéformables. Ceci exclut bien sûr les pièces dont la fonction est précisément de se déformer : ressorts, rondelles élastiques, barres de torsion, etc.

Définition d'un solide indéformable. Une pièce mécanique (S) peut être considérée comme un solide indéformable si quels que soient les points A et B de (S) la distance AB reste constante au cours du temps t .



$$\forall A \text{ et } B \in (S), \quad \forall t, \quad \|\overline{AB}\| = \text{Cte.}$$

Figure 1.1

1.2 MODÉLISATION DES LIAISONS

Définissons les modèles de liaisons, qui existent entre deux solides (S_1) et (S_2), que l'on utilisera pour établir les schémas cinématiques des mécanismes.

Pour chaque modèle de liaison, qui est un modèle de référence théorique, nous donnerons :

- la définition mathématique ;
- les mouvements relatifs que la liaison autorise ;
- les schématisations planes et spatiales normalisées sous forme de tableau, au *paragraphe 1.2.12*.

Pour cela un repère orthonormé direct $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sera placé sur chaque liaison.

Ce repère n'est lié à aucun des deux solides (S_1) ou (S_2).

1.2.1 Liaison ponctuelle

Définition. Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison ponctuelle si, au cours de leur mouvement relatif, un point A_2 de (S_2) reste dans un plan P_1 de (S_1).

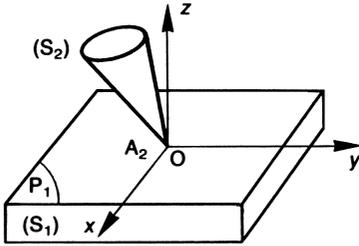


Figure 1.2

Mouvement relatif

Considérons le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tel que son origine O soit confondue avec le point A_2 et le vecteur unitaire \vec{z} soit perpendiculaire au plan P_1 . Par rapport aux trois axes de ce repère, le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) se décompose en rotations et translations élémentaires suivantes :

- rotations autour de (O, \vec{x}) , (O, \vec{y}) et (O, \vec{z}) ;
- translations suivant (O, \vec{x}) et (O, \vec{y}) .

1.2.2 Liaison linéaire rectiligne

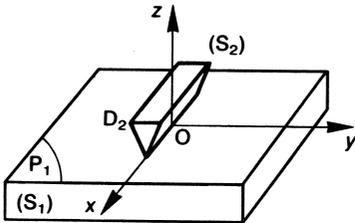


Figure 1.3

Définition. Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison linéaire rectiligne si, au cours de leur mouvement relatif, une droite D_2 de (S_2) reste dans un plan P_1 de (S_1) .

Mouvement relatif

Considérons le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tel que l'axe (O, \vec{x}) soit confondu avec la droite D_2 et le vecteur unitaire \vec{z} perpendiculaire au plan P_1 .

Le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) se décompose en :

- rotations autour de (O, \vec{x}) et (O, \vec{z}) ;
- translations suivant (O, \vec{x}) et (O, \vec{y}) .

1.2.3 Liaison linéaire annulaire

Définition. Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison linéaire annulaire si, au cours de leur mouvement relatif, un point A_2 de (S_2) reste sur une droite D_1 de (S_1) .

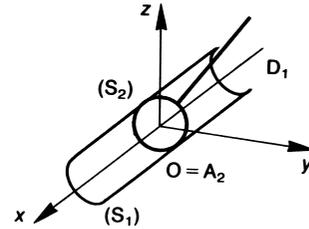


Figure 1.4

Mouvement relatif

Considérons le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ d'origine A_2 , tel que l'axe (O, \vec{x}) soit confondu avec la droite D_1 . Par rapport à ce repère, le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) est constitué des mouvements élémentaires suivants :

- rotations autour de (O, \vec{x}) , (O, \vec{y}) et (O, \vec{z}) ;
- translation suivant (O, \vec{x}) .

1.2.4 Liaison rotule

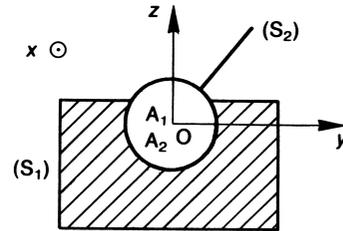


Figure 1.5

Définition. Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison rotule si, au cours de leur mouvement relatif, un point A_2 de (S_2) reste confondu avec un point A_1 de (S_1) .

Mouvement relatif

Plaçons l'origine O du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ au point A_1 confondu avec A_2 . Le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) se décompose en :

- rotations autour de (O, \vec{x}) , (O, \vec{y}) et (O, \vec{z}) .

1.2.5 Liaison appui plan

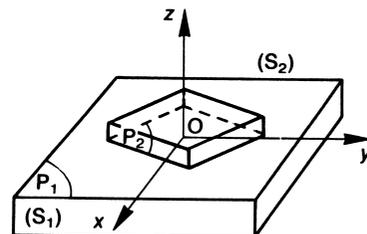


Figure 1.6

Définition. Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison appui plan si, au cours de leur mouvement relatif, un plan de P_2 de (S_2) reste confondu avec un plan P_1 de (S_1) .

Mouvement relatif

En positionnant le vecteur unitaire \vec{z} du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ perpendiculaire aux plans P_1 et P_2 on constate que le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) se décompose en :

- rotation autour de (O, \vec{z}) ;
- translations suivant (O, \vec{x}) , (O, \vec{y}) .

1.2.6 Liaison pivot glissant

Définition. Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison pivot glissant si, au cours de leur mouvement relatif, une droite D_2 de (S_2) reste confondue avec une droite D_1 de (S_1) .

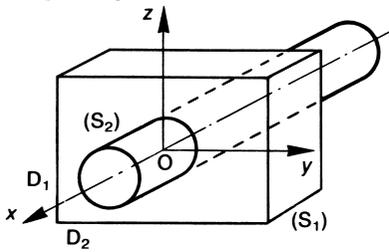


Figure 1.7

Mouvement relatif

Plaçons l'axe (O, \vec{x}) du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sur les droites D_1 et D_2 . Le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) se décompose en :

- rotation autour de (O, \vec{x}) ;
- translation suivant (O, \vec{x}) .

1.2.7 Liaison sphérique à doigt

Définition. Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison sphérique à doigt si, au cours de leur mouvement relatif, d'une part, un point A_2 de (S_2) reste confondu avec un point A_1 de (S_1) , et d'autre part, un autre point B_2 de (S_2) reste dans un plan P_1 de (S_1) contenant le point A_1 .

Mouvement relatif

Plaçons l'origine O du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ au point A_1 confondu avec le point A_2 , l'axe (O, \vec{x}) suivant A_2B_2 et l'axe (O, \vec{y}) normal au plan P_1 . Le mouve-

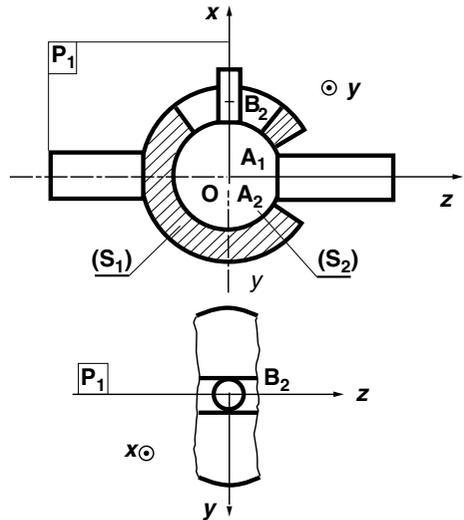


Figure 1.7 (bis)

ment de (S_2) par rapport à (S_1) se décompose en :

- rotations autour de (O, \vec{x}) et (O, \vec{y}) .

Remarque

Une réalisation technologique usuelle est le joint de Cardan.

1.2.8 Liaison hélicoïdale

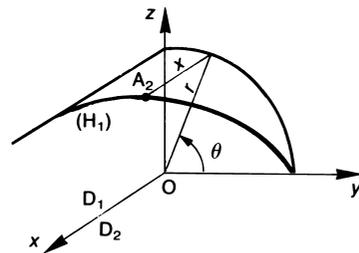


Figure 1.8

Définition. Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison hélicoïdale si, au cours de leur mouvement relatif, d'une part, une droite D_2 de (S_2) reste confondue avec l'axe D_1 d'une hélice circulaire H_1 de rayon r liée à (S_1) , et d'autre part, un point A_2 de (S_2) situé à une distance r de D_2 décrit l'hélice circulaire H_1 .

Mouvement relatif

En positionnant l'axe (O, \vec{x}) du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sur les droites D_1 et D_2 , on constate que le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) se décompose en :

- rotation autour de (O, \vec{x}) ;
- translation suivant (O, \vec{x}) .

Ces deux mouvements ne sont pas indépendants. En effet, si l'on suppose le repère R lié à (S_1) on peut

définir la position du point A_2 par rapport à R , par le paramètre angulaire θ et l'abscisse x (figure 1.8).

En appelant p le pas réduit de l'hélice ($p = \text{pas de l'hélice} / 2\pi$) on a entre x et θ la relation (dans le cas d'une hélice à droite) :

$$x = p\theta$$

1.2.9 Liaison glissière

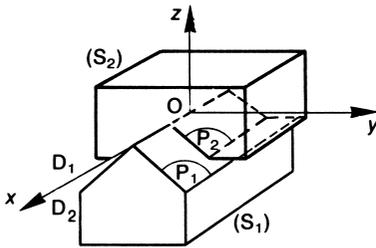


Figure 1.9

Définition. Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison glissière si, au cours de leur mouvement relatif, d'une part, un plan P_2 de S_2 reste confondu avec un plan P_1 de (S_1) , et d'autre part, une droite D_2 liée à (S_2) et située dans le plan P_2 reste confondu avec une droite D_1 liée à (S_1) et située dans le plan P_1 .

Mouvement relatif

Plaçons l'axe (O, \vec{x}) du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sur les droites D_1 et D_2 . Le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) est une translation d'axe (O, \vec{x}) .

1.2.10 Liaison pivot

Définition. Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison pivot si au cours de leur mouvement relatif deux points A_2 et B_2 de (S_2) , distants d'une longueur l , restent confondus avec deux points A_1 et B_1 de (S_1) , distants d'une même longueur l (non nulle).

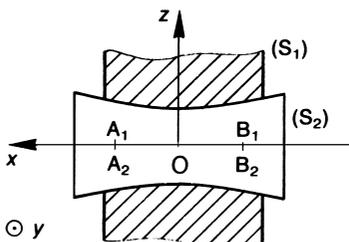


Figure 1.10

Mouvement relatif

Plaçons l'axe (O, \vec{x}) du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sur les droites A_1B_1 et A_2B_2 . Le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) est une rotation d'axe (O, \vec{x}) .

1.2.11 Liaison encastrement

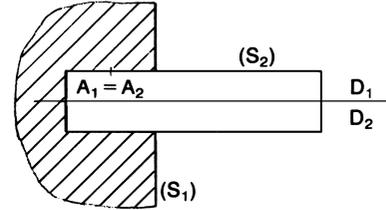


Figure 1.11

Définition. Les deux solides (S_1) et (S_2) ont une liaison encastrement si, au cours de leur mouvement relatif, d'une part, une droite D_2 de (S_2) reste confondu avec une droite D_1 de (S_1) , et d'autre part, un point A_2 de (S_2) situé à une distance d non nulle de D_2 reste confondu avec un point A_1 de (S_1) situé à la même distance d de D_1 .

Mouvement relatif

La liaison encastrement ne permet aucun mouvement relatif entre (S_1) et (S_2) .

1.2.12 Schématisations normalisées des liaisons

Dans le tableau de la figure 1.12 sont présentées les schématisations planes et spatiales normalisées des liaisons que nous venons d'étudier. Comme précédemment, sur chaque liaison est placé le repère orthonormé direct $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

1.2.13 Choix d'une modélisation de liaison

D'un point de vue cinématique, une liaison réelle entre deux solides (S_1) et (S_2) est caractérisée par :

- une géométrie (forme, dimension de la liaison) ;
- un jeu de fonctionnement.

Application 1

Liaison entre un arbre (S_2) et son alésage (S_1) .

Notons :

d le diamètre de l'arbre.

l la longueur du palier.

j le jeu radial dans la liaison ($j > 0$).

Degrés de liberté	Désignation des liaisons	Schématisation spatiale	Schématisation plane	Mouvements élémentaires Rot./Transl.
5	Liaison ponctuelle de normale (O, \vec{z})			$\begin{vmatrix} R_X & T_X \\ R_Y & T_Y \\ R_Z & 0 \end{vmatrix}$
4	Liaison linéaire rectiligne d'axe (O, \vec{x}) de normale (O, \vec{z})			$\begin{vmatrix} R_X & T_X \\ 0 & T_Y \\ R_Z & 0 \end{vmatrix}$
4	Liaison linéaire annulaire d'axe (O, \vec{x})			$\begin{vmatrix} R_X & T_X \\ R_Y & 0 \\ R_Z & 0 \end{vmatrix}$
3	Liaison rotule de centre O			$\begin{vmatrix} R_X & 0 \\ R_Y & 0 \\ R_Z & 0 \end{vmatrix}$
3	Liaison appui plan de normale (O, \vec{z})			$\begin{vmatrix} 0 & T_X \\ 0 & T_Y \\ R_Z & 0 \end{vmatrix}$
2	Liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{x})			$\begin{vmatrix} R_X & T_X \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$
2	Liaison sphérique à doigt d'axes (O, \vec{x}) et (O, \vec{y})			$\begin{vmatrix} R_X & 0 \\ R_Y & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$
1	Liaison hélicoïdale d'axe (O, \vec{x})			$\begin{vmatrix} R_X & T_X \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

Degrés de liberté	Désignation des liaisons	Schématisation spatiale	Schématisation plane	Mouvements élémentaires Rot./Transl.
1	Liaison glissière d'axe (O, \vec{x})			$\begin{vmatrix} 0 & T_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$
1	Liaison pivot d'axe (O, \vec{x})			$\begin{vmatrix} R_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$
0	Liaison encastrement			$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

Figure 1.12

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct, l'axe (O, \vec{x}) étant placé suivant l'axe de l'alésage.

Les mouvements de (S_2) par rapport à (S_1) se classent, compte tenu du jeu j , en deux catégories :

- Mouvements de grande amplitude :
 - rotations autour de (O, \vec{x}) ;
 - translation suivant (O, \vec{x}) .
- Mouvements de faible amplitude :
 - rotations autour de (O, \vec{y}) et (O, \vec{z}) ;
 - translation suivant (O, \vec{y}) et (O, \vec{z}) .

considère généralement que l'on peut modéliser la liaison, avec une précision suffisante par :

- une liaison pivot glissant pour $\frac{l}{d} \geq 1,5$;
- une liaison linéaire annulaire pour $\frac{l}{d} \leq 0,2$.

Pour $0,2 < \frac{l}{d} < 1,5$ la modélisation de la liaison sera en fonction du degré de précision que l'on adoptera pour analyser le mécanisme dont fait partie la liaison.

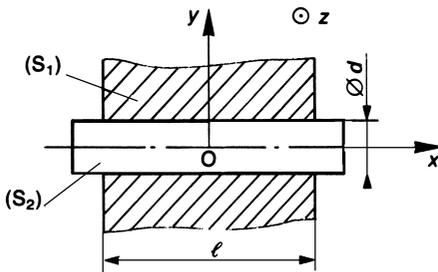


Figure 1.13

L'amplitude de ces mouvements dits de faible amplitude est fonction du jeu j et du rapport $\frac{l}{d}$ de la liaison. Le choix de la modélisation d'une liaison réelle par tel ou tel modèle de liaison en fonction du degré de précision que l'on décide d'adopter. Dans le cas présent, si l'on suppose que l'ajustement est du type H7 g6, on

Application 2

Montage de l'arbre d'une fusée de roue dans son palier sur deux roulements rigides à une rangée de billes (figure 1.14).

Globalement la liaison de l'arbre (S_2) par rapport au palier (S_1) est modélisable, avec une précision donnée, par une liaison pivot d'axe (O, \vec{x}) .

Cette liaison est réalisée avec deux roulements rigides à une rangée de billes (R_1) et (R_2) .

Considérons la liaison réalisée par un seul roulement (R_1) par exemple.

Modélisons la liaison entre la bague extérieure du roulement et (S_1) par une liaison encastrement ainsi que la liaison entre la bague intérieure du roulement et (S_2) .

Reste à modéliser la liaison entre la bague intérieure et la bague extérieure. Pour cela nous devons tenir compte :

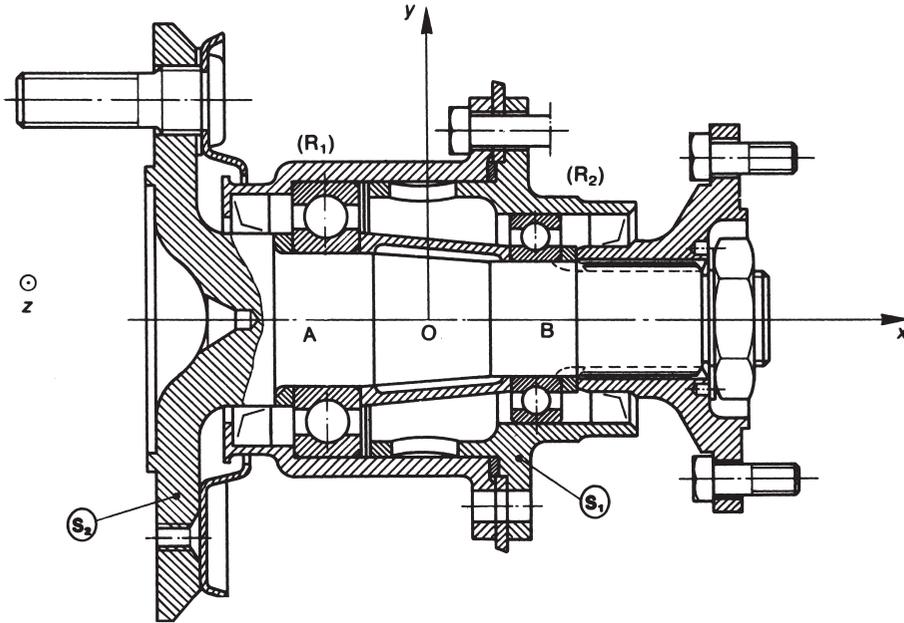


Figure 1.14

- du rotulage possible du roulement, c'est-à-dire de l'angle d'inclinaison maximal que peut prendre l'axe de la bague intérieure par rapport à l'axe de la bague extérieure (angle noté α) ;
- de la déformation de l'arbre, plus précisément de l'inclinaison maximale que peut prendre l'axe de la section droite située en A par rapport à la ligne moyenne de l'arbre (angle noté β) (figure 1.15).

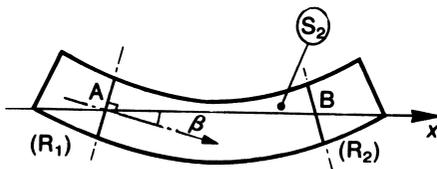


Figure 1.15

Suivant les valeurs relatives de α et β on adopte les modélisations suivantes :

- $\alpha \geq \beta$: modélisation par une liaison rotule,
- $\alpha < \beta$: modélisation par une liaison pivot.

1.3 NOMBRE DE DEGRÉS DE LIBERTÉ D'UNE LIAISON

Définition. Le nombre de degrés de liberté d'une liaison est le nombre de mouvements indépendants de rotation et de translation suivant (O, \vec{x}) , (O, \vec{y}) et (O, \vec{z}) que la liaison autorise.

Applications :

- la liaison ponctuelle est à 5 degrés de liberté ;
- la liaison pivot glissant est à 2 degrés de liberté ;
- la liaison hélicoïdale est à 1 degré de liberté car la translation et la rotation suivant l'axe de la liaison sont proportionnelles.

Remarque

Lorsque deux solides n'ont aucune liaison on dit qu'ils ont une **liaison libre**. Cette liaison est à 6 degrés de liberté.

1.4 PARAMÉTRAGE DE LA POSITION D'UN SOLIDE PAR RAPPORT À UN REPÈRE

Pour définir la position d'un solide (S) par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, il faut commencer par lier à ce solide un repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et ensuite définir la position du repère R_1 par rapport au repère R .

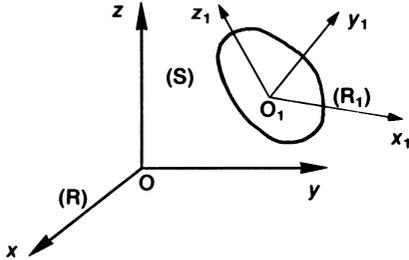


Figure 1.16

Le repère R_1 est caractérisé par son origine O_1 et sa base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Nous devons donc définir la position de l'origine O_1 dans R et l'orientation de la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ de R_1 par rapport à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de R .

Remarque

Tous les repères introduits sont orthonormés directs.

1.4.1 Paramétrage de la position de l'origine O_1

Les paramètres qui définissent la position d'un point dans un repère sont habituellement :

- les coordonnées cartésiennes ;
- les coordonnées cylindriques ;
- les coordonnées sphériques.

Le type de coordonnées choisi est fonction du problème que l'on a à traiter (problème à symétrie de révolution autour d'un axe, problème à symétrie sphérique, ...).

a) *Coordonnées cartésiennes*

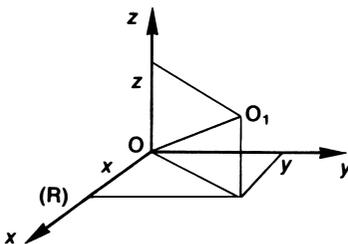


Figure 1.17

Les coordonnées cartésiennes x, y, z du point O_1 sont les projections orthogonales du vecteur \vec{OO}_1 sur la base du repère R .

Ces paramètres sont en nombre nécessaire et suffisant pour positionner O_1 dans R .

Par suite, les paramètres x, y, z sont dits *indépendants*.

Imaginons que OO_1 soit une tige de longueur l ayant une liaison rotule de centre O avec un bâti, et supposons que pour la commodité des calculs on soit amené à traiter le problème avec les quatre paramètres x, y, z, l .

Dans ce cas, les quatre paramètres introduits sont liés entre eux par la relation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2.$$

Les paramètres x, y, z, l sont alors dits *dépendants*.

D'une façon générale, si l'on définit la position d'un point dans un repère par n paramètres ($n \geq 3$), il existe entre ces n paramètres, introduits a priori, q relations indépendantes, telles que :

$$q = n - 3$$

b) *Coordonnées cylindriques*

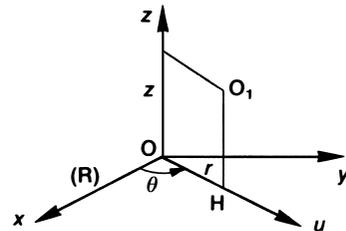


Figure 1.18

Soit :

H la projection orthogonale du point O_1 sur le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) .

\vec{u} un vecteur unitaire de direction \vec{OH} .

Les coordonnées cylindriques du point O_1 dans le repère R sont :

$r = \vec{OH}$: mesure algébrique de \vec{OH} sur l'axe (O, \vec{u}) .

$\theta = (\vec{x}, \vec{u})$: angle orienté par le vecteur unitaire \vec{z} normal au plan (\vec{x}, \vec{u}) .

z : projection orthogonale de \vec{OO}_1 sur l'axe (O, \vec{z}) .

Relations entre les systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques

Si l'on définit la position du point O_1 par les cinq paramètres x, y, z, r et θ , il existe entre eux $q = 5 - 3 = 2$ relations indépendantes.

Ces deux relations s'obtiennent en projetant le vecteur \vec{OH} sur \vec{x} et \vec{y} :