Cinématique

Exercice 1

Un cerceau de centre G, de rayon R, reste au contact avec un plan (oxy). Ce contact a lieu en un point I du plan.

Soit (x, y, z) les coordonnées de G. On choisit l'axe $\overrightarrow{Gx_1}$ colinéaire à **IG**, l'axe$\overrightarrow{Gz_1}$ est l'axe de révolution du cerceau ; $\overrightarrow{Gy_1}$complète la base orthonormée directe $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$**.** L'axe $\overrightarrow{Gu}$ **(** $\vec{u}$ vecteur unitaire) est la projection parallèle à **z** de l'axe $\overrightarrow{Gx_1}$ sur le plan (Gxy). On pose ψ l'angle que fait **X** avec $\vec{u}$ et θ l'angle que fait $\vec{z}$ avec $\overrightarrow{z_1}$. On désigne par φ l'angle de rotation propre du cerceau autour de son axe $\overrightarrow{Gz_1}$

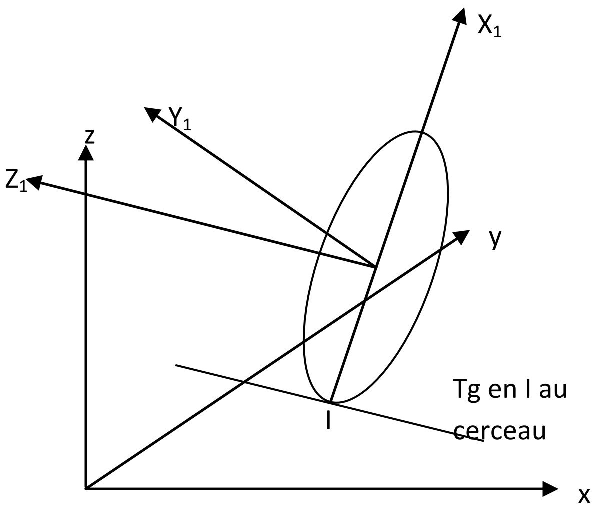
1- Montrer que $\vec{u}, \overrightarrow{x_1}, \vec{z}, \overrightarrow{z_1}$sont dans le même plan.
2- trouver une relation entre z et θ.
3- Donner l'expression du vecteur rotation en fonction de ψ, θ, et φ.
4- Traduire analytiquement la condition de roulement sans glissement.

Solution

1- Montrons que $\vec{u}, \overrightarrow{x_1}, \vec{z}, \overrightarrow{z_1}$sont dans le même plan

$$\left.\begin{array}{l}\text{La tangente au cerceau en I est perpendiculaire à } \overrightarrow{Ix_1} \text{ et à } \overrightarrow{Iz_1} \\ \text{Les axes } \overrightarrow{Gx_1} \text{ et } \overrightarrow{Gy_1} \text{ appartiennent au plan du cerceau}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{Gy_1} \textit{ parallèle à la tangente en I au cerceau}$$

Donc$\overrightarrow{Gy_1}$ est parallèle au plan xoy et par conséquent perpendiculaire à l'axe$\overrightarrow{Oz}$, ce qui donne $\overrightarrow{Gy_1}$ perpendiculaire aux axes$\overrightarrow{Gx_1}$, $\overrightarrow{Gz}$, et$\overrightarrow{Oz}$. De plus $\vec{u}$ est la projection de $\overrightarrow{Gx}$parallèlement à $\overrightarrow{Oz}$ce qui donne $\vec{u}$ perpendiculaire à la tangente en I au cerceau, Ceci signifie que les quatre axes$\overrightarrow{Gx_1}$, $\overrightarrow{Gz_1}$, $\overrightarrow{Oz}$, et $\vec{u}$sont coplanaires.

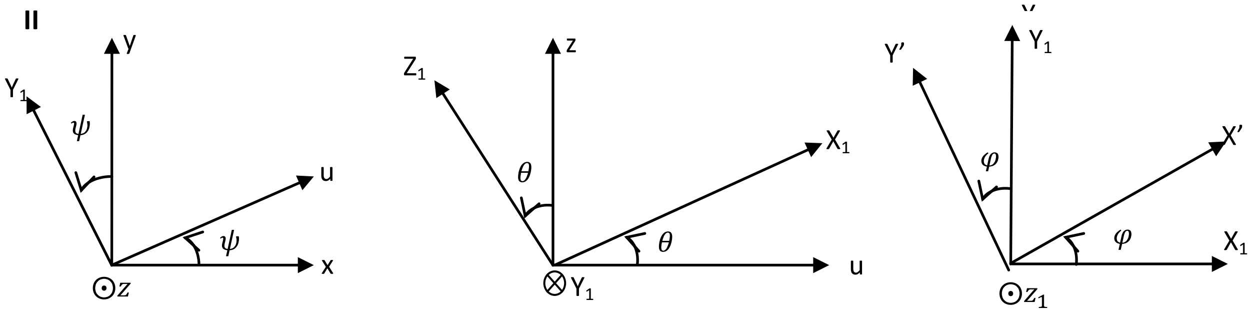


2- Relation entre z et θ

$$R(o, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \xrightarrow{\psi \vec{z}} (O, \vec{u}, \overrightarrow{y_1}, \vec{z}) \xrightarrow{-\dot{\theta}\overrightarrow{y_1}} (G, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}) \xrightarrow{\varphi\overrightarrow{z_1}} (G, \overrightarrow{x'}, \overrightarrow{y'}, \overrightarrow{z_1}) \text{ lié au cerceau}$$

Puisque $\vec{x}, \vec{y}, \vec{u}$ et $\overrightarrow{y_1}$ se trouvent dans le même plan, alors la précession permet le passage de $R(o, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ à $(O, \vec{u}, \overrightarrow{y_1}, \vec{z})$. On doit garder $\overrightarrow{y_1}$ pour retrouver le repère lié au plan du cerceau, pour cette raison la nutation se fera autour de y_1, ce qui permet le passage à $(G, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$. La rotation propre se fait autour de l'axe Z_1(z_1 est lié au cerceau).

II



$I\epsilon(xoy) \Rightarrow \overrightarrow{OI}.\vec{z} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GI}).\vec{z}=0$

$$(x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}).\vec{z} - R\overrightarrow{x_1}.\vec{z} = 0 \Longrightarrow z - R(cos\theta\vec{u} + sin\theta\vec{z}).\vec{z} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{z = Rsin\theta}$$

3- Vecteur vitesse angulaire du cerceau

Le vecteur vitesse angulaire du cerceau est la somme des trois rotations

$$\vec{\Omega}({}^{C}/_{R}) = \boldsymbol{\dot{\psi}\vec{z} - \dot{\theta}\overrightarrow{y_1} + \dot{\varphi}\overrightarrow{z_1} = \dot{\psi}sin\theta\overrightarrow{x_1} - \dot{\theta}\overrightarrow{y_1} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}cos\theta)\overrightarrow{z_1}}$$

4- Condition de roulement sans glissement

La condition de roulement sans glissement est donnée par l'équation

$\vec{V}({}^{I\epsilon C}/_{R}) - \vec{V}({}^{I\epsilon(xoy)}/_{R}) = \vec{0}$ Le plan (xoy) est fixe $\Rightarrow$ $\vec{V}({}^{I\epsilon(xoy)}/_{R}) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{V}({}^{I\epsilon C}/_{R}) = \vec{0} = \vec{V}({}^{G}/_{R}) + \vec{\Omega}({}^{C}/_{R}) \wedge \overrightarrow{GI} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x} + Rsin\psi(\dot{\varphi} + \dot{\psi}cos\theta) + R\dot{\theta}sin\theta cos\psi = 0 & \text{équation 1} \\ \dot{y} - Rcos\psi((\dot{\varphi} + \dot{\psi}cos\theta) + R\dot{\theta}sin\theta sin\psi = 0 & \text{équation 2} \\ \dot{z} - R\dot{\theta}cos\theta = 0 & \text{équation 3} \end{cases}$$

$$\vec{V}({}^{G}/_{R}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad et\ \vec{\Omega}({}^{C}/_{R}) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\ sin\psi - \dot{\varphi}\ sin\theta\ cos\psi \\ -\dot{\theta}\ cos\psi - \dot{\varphi}\ sin\theta\ sin\psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}cos\theta \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad et\ \overrightarrow{GI} = \begin{pmatrix} -Rcos\theta\ cos\psi \\ -Rcos\theta\ sin\psi \\ -Rsin\theta \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

En intégrant l'équation 3 On retrouve le résultat de la question 2 : $\boldsymbol{z = Rsin\theta}$

En multipliant les équations 1 et 2 respectivement par $cos\psi$ et $sin\psi$ et en faisant leur somme , on trouve : $\dot{x}\ cos\psi + \dot{y}\ sin\psi + R\ \dot{\theta}\ sin\theta = 0$

Exercice 2

Soit $R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ un repère orthonormé direct, (C_1) et (C_2) deux cônes droits identiques à bases circulaires. Le rayon de base est r, la hauteur est h, le demi angle au sommet est α, C_1 et C_2 sont les centres des bases des deux cylindres. (C_1) est fixe et son axe coïncide avec. $\overrightarrow{z_0}$ (C_2) roule sans glisser sur le cône (C_1) de sorte que leurs sommets restent fixes et coïncident avec le point O.

1- Paramétrer le système des cônes et donner les figures planes de rotation.
2- Déterminer l'axe instantané de rotation, et donner l'expression de la vitesse angulaire de rotation instantanée.
3- Donner les éléments de réduction du torseur cinématique [C] associé à (C_2) au point C_2.

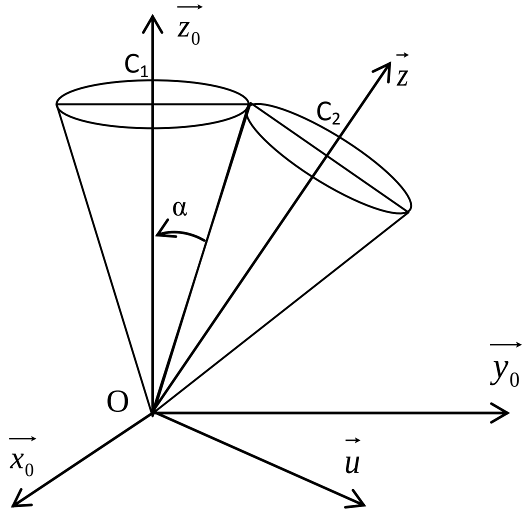
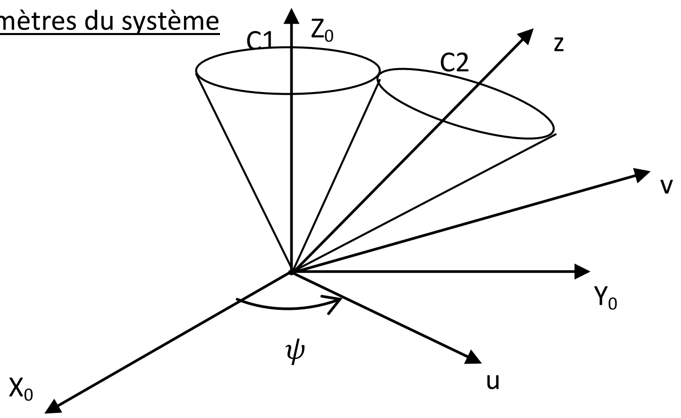


Figure 1.

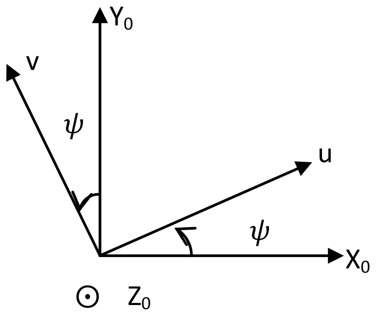
Solution

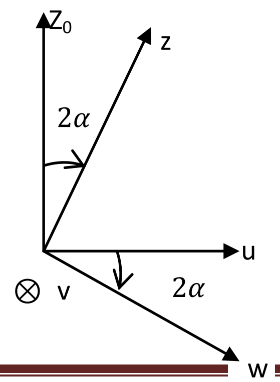
1- Les paramètres du système

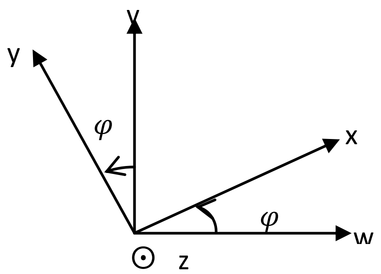


O$\vec{u}$ est la projection de Oz sur le plan (X_0, Y_0).

$$R_0(O,X_0,Y_0,Z_0)\text{Lié à }(C1)\xrightarrow{\dot\psi\overrightarrow{Z_0}}(O,\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{Z_0})\xrightarrow{\substack{rotaion\ de\ 2\alpha\\ autour\ de\ \vec{v}}}(O,\vec{w},\vec{v},\vec{z})\xrightarrow{\dot\varphi\vec{z}}R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})\text{ lié à }(c2)$$







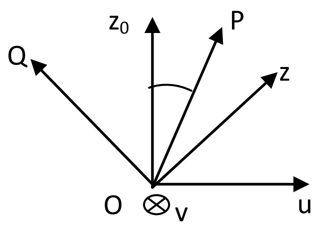
La rotation autour de $\vec{v}$ est d'un angle constant, donc on aune précession et une rotation propre.

$$\vec{\boldsymbol{\Omega}}\left({}^{\boldsymbol{R}}/_{\boldsymbol{R_0}}\right) = \dot{\boldsymbol{\psi}}\overrightarrow{\boldsymbol{Z_0}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}}\vec{\boldsymbol{z}}$$

2- Axe instantané de rotation

Le cône (C_2) roule sans glisser sur le cône (C_1)fixe, ce qui se traduit par : Tous les points appartenant à la génératrice de contact OA ont une vitesse nulle. Le torseur cinématique est alors un glisseur ayant pour vecteur $\vec{\Omega}\left({}^{(C2\,)}/_{R_0}\right)$ et pour moment le vecteur vitesse nulle. Donc l'axe instantané de rotation est le support OA du glisseur.

Soit $\vec{P}$ le vecteur unitaire porté par OA, et $\vec{Q}$ le vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{P}$ et appartenant au plan (O, $\vec{u}$, $\vec{z}$) ($\vec{P} et\ \vec{Q}$ perpendiculaires à $\vec{v}$ de telle sorte que ($\vec{P}, \vec{v}, \vec{Q}$)forment un trièdre direct).



$$\overrightarrow{Z_0} = cos\alpha\,\vec{P} + sin\alpha\,\vec{Q} \quad et\ \ \vec{z} = cos\alpha\,\vec{P} - sin\alpha\,\vec{Q}$$

$$\vec{\Omega}\left({}^{R}/_{R_0}\right) = \dot{\psi}\overrightarrow{Z_0} + \dot{\varphi}\vec{z} = (\dot{\psi} + \dot{\varphi})cos\alpha\,\vec{P} + (\dot{\psi} - \dot{\varphi})sin\alpha\,\vec{Q}$$

Or OA est l'axe central du torseur et porte $\vec{\Omega}\left({}^{R}/_{R_0}\right)$, donc la composante de $\vec{\Omega}\left({}^{C_2}/_{R_0}\right)$ suivant $\vec{Q}$ est nulle, ce qui donne $\dot{\psi} = \dot{\varphi}$ et par conséquent $\vec{\Omega}\left({}^{C_2}/_{R_0}\right) = \dot{\psi}(\overrightarrow{Z_0} + \vec{Z})\ ou$

$$\vec{\boldsymbol{\Omega}}\left({}^{\boldsymbol{R}}/_{\boldsymbol{R_0}}\right) = \mathbf{2}\,\dot{\boldsymbol{\psi}}\,\boldsymbol{cos\alpha}\,\vec{\boldsymbol{P}} = \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{h}}\dot{\boldsymbol{\psi}}\,\boldsymbol{cos\alpha}^{\mathbf{2}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$$

3- Torseur cinématique

Le torseur cinématique a pour vecteur $\vec{\Omega}\left({}^{C_2}/_{R_0}\right)$ et pour moment en C2 la vitesse de C2 par rapport à $R_0(O,X_0,Y_0,Z_0)$

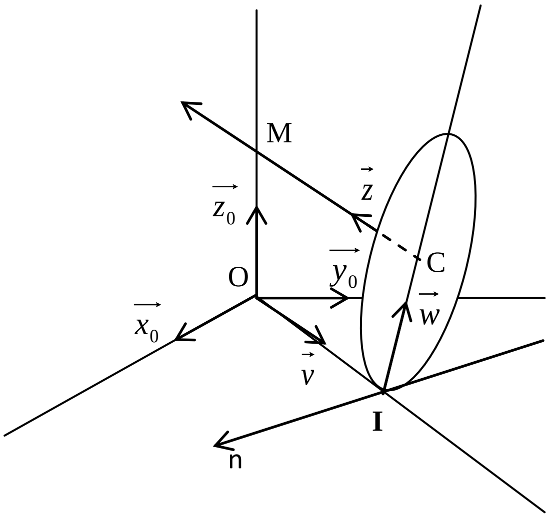
$$\vec{V}({}^{C_2}/_{R_0}) = \vec{V}({}^{A}/_{R_0}) + \vec{\Omega}\left({}^{R}/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{AC_2} = r\dot{\psi}(\overrightarrow{Z_0} + \vec{Z}) \wedge \vec{w} = r\dot{\psi}(1 + \cos(2\alpha))\vec{v}$$

Avec $\vec{V}({}^{A}/_{R_0}) = \vec{0}\ \ (roulement\ sans\ glissement)\ \ et\ \ \overrightarrow{AC_2} = r\vec{w}$

$$[\boldsymbol{C}] = \begin{cases} \vec{\boldsymbol{\Omega}}\left({}^{\boldsymbol{R}}/_{\boldsymbol{R_0}}\right) = \mathbf{2}\,\dot{\boldsymbol{\psi}}\,\boldsymbol{cos\alpha}\,\vec{\boldsymbol{P}} = \dfrac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{h}}\dot{\boldsymbol{\psi}}\,\boldsymbol{cos\alpha}^{\mathbf{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} \\ \vec{\boldsymbol{V}}({}^{\boldsymbol{C_2}}/_{\boldsymbol{R_0}}) = \boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{1} + \mathbf{cos}(\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}))\vec{\boldsymbol{v}} \end{cases}$$

Exercice 3

Soit $R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$un repère orthonormé direct; le plan $(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0})$ lié à R_0 est supposé matérialisé et noté P. Un solide S est constitué d'un disque de centre C et de rayon R auquel est soudée selon son axe une tige rectiligne; soit$R(C,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$un repère orthonormé direct lié à S, avec$(C,\vec{z})$ axe du disque orienté du côté de la tige. S est en mouvement dans R_0 de telle sorte que le disque reste en contact ponctuel avec P en un point I variable, et que la tige (supposée suffisamment longue) coupe constamment $(O,\overrightarrow{z_0})$ en un point variable M (Figure 2). La position de S dans $R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ est repéré par les angles d'Euler habituels (ψ,θ,φ) et la variable λ telle que : $\overrightarrow{OI}=\lambda\vec{v}$.



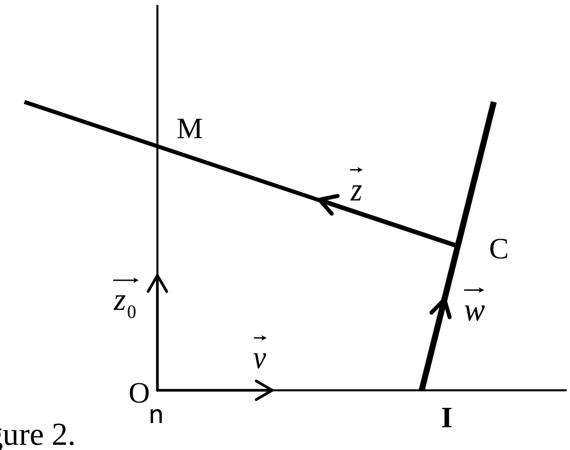
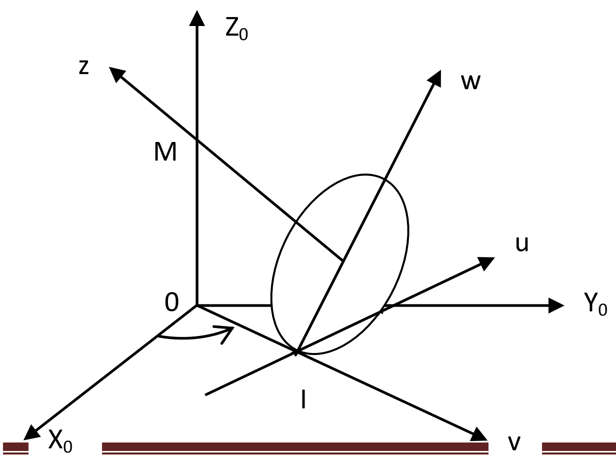


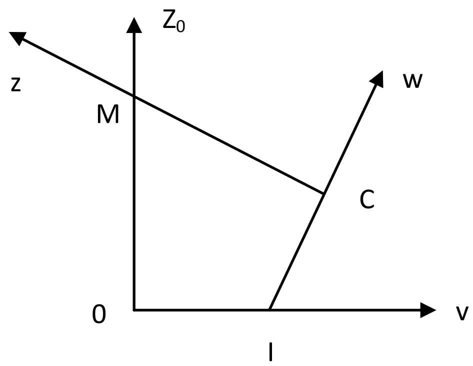
Figure 2.

Questions

1- Déterminer le vecteur vitesse instantanée de rotation $\vec{\Omega}\,(S/R_0)$.
2- Déterminer $\vec{V}\left({}^{I}/_{R_0}\right)$ et $\vec{V}({}^{I}/_{S})$vitesses du point géométrique ; déterminer $\vec{V}\left({}^{I\,\in\,S}/_{R_0}\right)$.
3- Déterminer. $\vec{V}\left({}^{C\,\in\,S}/_{R_0}\right)$
4- M étant le point géométrique intersection de $(O,\overrightarrow{z_0})$ et $(C,\vec{z})$, on pose $\overrightarrow{CM}=\mu\vec{z}$ ($\mu>0$) et $\overrightarrow{OM}=Z\overrightarrow{z_0}$; sachant que θ varie dans un intervalle inclus dans $]0,\pi[$, déterminer μ et Z en fonction des paramètres.
5- Déterminer $\vec{V}\left({}^{M}/_{R_0}\right)$ et $\vec{V}\left({}^{M\,\in\,S}/_{R_0}\right)$.

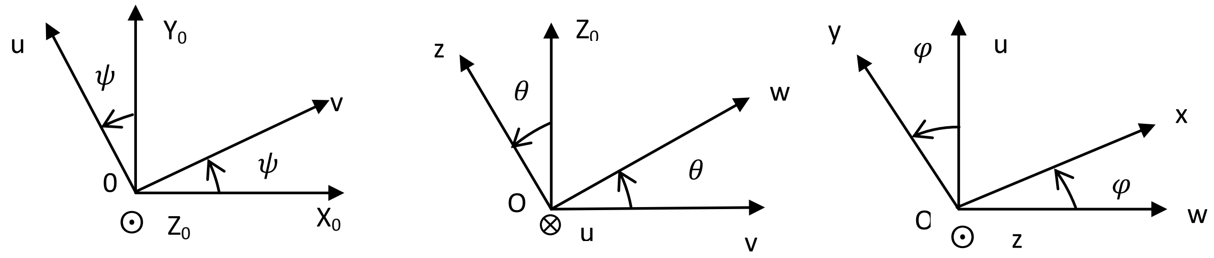
Solution





1- Vecteur vitesse instantanée de rotation

$$R_0(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}) \xrightarrow{\dot{\psi}\overrightarrow{z_0}} R_1(\vec{v},\vec{u},\overrightarrow{z_0}) \xrightarrow{-\dot{\theta}\vec{u}} R_2(\vec{w},\vec{u},\vec{z}) \xrightarrow{\dot{\varphi}\vec{z}} R(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$$



Lorsqu'on tourne le tire- bouchon dans le sens de θ, il avance dans le sens contraire à celui de $\vec{u}$ d'où le signe(-)

$$\vec{\Omega}(S|R_0) = \dot{\psi}\overrightarrow{z_0} - \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{z} = -\dot{\varphi}\,sin\theta\,\vec{v} - \dot{\theta}\vec{u} + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}cos\theta)\overrightarrow{z_0}$$

1- Vitesses du point géométrique I

$*\ \vec{V}(I|R_0)$ est la vitesse absolue du point géométrique I par rapport au repère fixe R_0.

$$\vec{V}(I|R_0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OI}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d(\lambda\vec{v})}{dt}\right|_{R_0} = \dot{\lambda}\vec{v} + \lambda\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{R_0} = \dot{\lambda}\vec{v} + \lambda\dot{\psi}\vec{u}$$

$*\ \vec{V}(I|S)$ *est la vitesse relative du point géométrique I par rapport au repère lié à* (S).

$$\vec{V}(I|S) = \left.\frac{d\overrightarrow{CI}}{dt}\right|_{R} = \left.\frac{d(-R\vec{w})}{dt}\right|_{R} = -R[\left.\frac{d\vec{w}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2|R)\wedge\vec{w}] = R\dot{\varphi}\vec{z}\wedge\vec{w} = R\dot{\varphi}\vec{u}$$

Avec $\left.\frac{d\vec{w}}{dt}\right|_{R_2} = \vec{0}$ et $\vec{\Omega}(R_2|R) = -\vec{\Omega}(R|R_2) = -\dot{\varphi}\vec{z}$

$*\ \vec{V}(I\epsilon S|R_0)$ *est* la vitesse d'entraînement du point géométrique *I* par rapport au repère fixe R_0, c'est aussi la vitesse absolue du point matériel I de (S).

On sait que : $\overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V_a} - \overrightarrow{V_r}$, donc :

$$\vec{V}(I\epsilon S|R_0) = \vec{V}(I|R_0) - \vec{V}(I|S) = \dot{\lambda}\vec{v} + (\lambda\dot{\psi} - R\dot{\varphi})\vec{u}$$

2- Calcul de $\vec{V}(C\epsilon S|R_0)$

1ère méthode

C et I sont deux points du même solide indéformable, donc leurs vitesses sont reliées par la loi de transport des moments d'un torseur, on a :

$$\begin{aligned}\vec{V}(C\epsilon S|R_0) &= \vec{V}(I\epsilon S|R_0) + \vec{\Omega}(S|R_0)\wedge\overrightarrow{IC} = \dot{\lambda}\vec{v} + \dot{\psi}(\lambda + Rcos\theta)\vec{u} + R\dot{\theta}\vec{z}\\ &= (\dot{\lambda} - R\dot{\theta}\,sin\theta)\vec{v} + \dot{\psi}(\lambda + Rcos\theta)\vec{u} + R\dot{\theta}cos\theta\,\overrightarrow{z_0}\end{aligned}$$

2ième méthode

$$\vec{V}(C\epsilon S|R_0)=\left.\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right|_{R_0}=\left.\frac{d\overrightarrow{OI}}{dt}\right|_{R_0}+\left.\frac{d\overrightarrow{IC}}{dt}\right|_{R_0}=\dot{\lambda}\vec{v}+\lambda\dot{\psi}\vec{u}+R\left[\left.\frac{d\vec{w}}{dt}\right|_{R_2}+\vec{\Omega}(R_2|R_0)\wedge\vec{w}\right]$$

$$R\left[\left.\frac{d\vec{w}}{dt}\right|_{R_2}+\vec{\Omega}(R_2|R_0)\wedge\vec{w}\right]=R\,\vec{\Omega}(R_2|R_0)\wedge\vec{w}=R\left[\dot{\psi}sin\theta\,\vec{w}-\dot{\theta}\,\vec{u}+(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\,cos\theta)\vec{z}\right]\wedge\vec{w}$$
$$=R\left(\dot{\theta}\,\vec{z}+\dot{\psi}\,cos\theta\right)\vec{u}$$

$$\boldsymbol{\vec{V}(C\epsilon S|R_0)=\dot{\lambda}\vec{v}+\dot{\psi}(\lambda+R\,cos\theta\,)\vec{u}+R\dot{\theta}\vec{z}}=(\dot{\lambda}-R\dot{\theta}\,sin\theta)\vec{v}+\dot{\psi}(\lambda+Rcos\theta)\vec{u}+R\dot{\theta}cos\theta\,\overrightarrow{z_0}$$
$$=\dot{\lambda}\,cos\theta\,\vec{w}+\dot{\psi}(\lambda+Rcos\theta)\vec{u}+\left(R\dot{\theta}-\dot{\lambda}\,sin\theta\right)\vec{z}$$

3- Détermination de μ et Z en fonction des paramètres.

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CM}=\lambda\vec{v}+R\vec{w}+\mu\vec{z}$$

Or $\vec{w}=cos\theta\vec{v}+sin\theta\overrightarrow{z_0}$ *et* $\vec{z}=-sin\theta\vec{v}+cos\theta\overrightarrow{z_0}$ *et* $\overrightarrow{OM}=Z\overrightarrow{z_0}$, En remplaçant chaque terme par sa valeur, on trouve :

$$\overrightarrow{OM}=(\lambda-\mu\,sin\theta+Rcos\theta)\vec{v}+(\mu\,cos\theta+Rsin\theta)\,\overrightarrow{z_0}$$

Ce qui donne $\begin{cases}\boldsymbol{\lambda-\mu\,sin\theta+Rcos\theta=0}\\ \boldsymbol{\mu\,cos\theta+Rsin\theta=Z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{Z=\frac{R+\lambda\,cos\theta}{sin\theta}}\\ \boldsymbol{\mu=\frac{\lambda+R\,cos\theta}{sin\theta}}\end{cases}$

4- Calcul de $\vec{V}(M|R_0)$ *et de* $\vec{V}(M\epsilon S|R_0)$

$*\ \vec{V}(M|R_0)$ est la vitesse absolue du point géométrique M.

$$\boldsymbol{\vec{V}(M|R_0)=\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{R_0}=\dot{Z}\,\overrightarrow{z_0}}$$

$*\ \vec{V}(M\epsilon S|R_0)$ *est* la vitesse d'entraînement du point M par rapport au repère fixe.

M et C deux points du même solide indéformable, donc :

$$\vec{V}(M\epsilon S|R_0)=\vec{V}(C\epsilon S|R_0)+\vec{\Omega}(S|R_0)\wedge\overrightarrow{CM}=\begin{pmatrix}\dot{\lambda}\,cos\theta\\ \dot{\psi}(\lambda+Rcos\theta)\\ R\dot{\theta}-\dot{\lambda}\,sin\theta\end{pmatrix}_{R_2}+\begin{pmatrix}\dot{\psi}\,sin\theta\\ -\dot{\theta}\\ \dot{\varphi}+\dot{\psi}\,cos\theta\end{pmatrix}_{R_2}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\ \mu\end{pmatrix}_{R_2}$$
$$=\begin{pmatrix}\dot{\lambda}cos\theta-\dot{\theta}\mu\\ \dot{\psi}(\lambda+Rcos\theta-\mu sin\theta)\\ R\dot{\theta}-\dot{\lambda}sin\theta\end{pmatrix}_{R_2}$$

Or, d'après le résultat de la question 4, on a : $\lambda-\mu\,sin\theta+Rcos\theta=0\quad\Rightarrow$

$$\boldsymbol{\vec{V}(M\epsilon S|R_0)=\left(\dot{\lambda}cos\theta-\dot{\theta}\frac{\lambda+R\,cos\theta}{sin\theta}\right)\vec{w}+(R\dot{\theta}-\dot{\lambda}sin\theta)\vec{z}}$$

Exercice 4

Un cercle de centre O, de rayon R, tourne avec une vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega_0}$ autour d'un axe O_0z_0 situé dans son plan à une distance a de O. On complète O_0z_0 par deux axes O_0x_0 et O_0y_0 de façon à former un trièdre orthonormé direct(T_0) tel que à l'instant initial, O sur O_0y_0.

Un repère T(O, x, y, z) est lié au cercle de sorte que à l'instant initial Oy et O_0y_0 soient confondus, Ox et O_0x_0 parallèles de même que Oz et O_0z_0. Soit A le point du cercle d'ordonnée dans (T_0) : a+R.

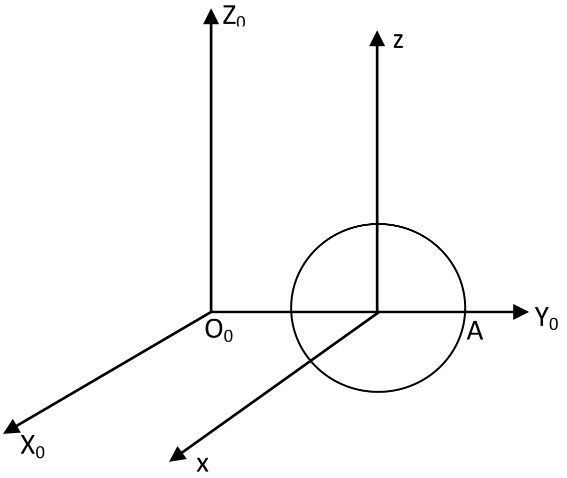
Le point M se déplace sur le cercle à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ autour de Ox.

1- Déterminer la vitesse et l'accélération absolues de M pour une position quelconque.
2- En déduire leurs expressions lorsque le point M passe en A dans le repère T.

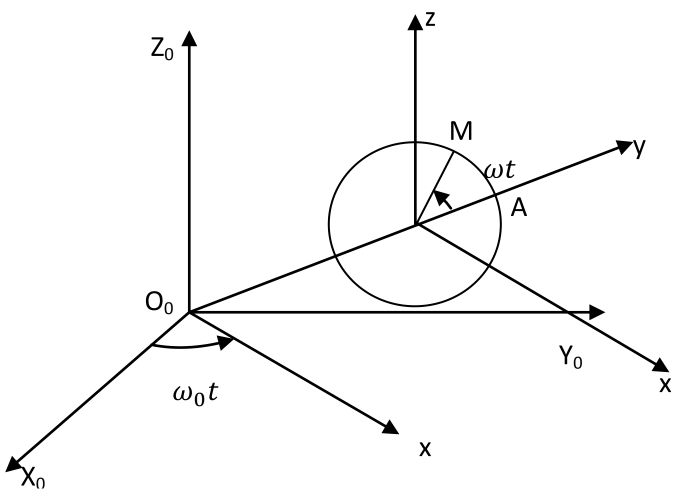
Solution

1- Vitesse absolue de M

A t=0



à t≠0



$$\vec{k} = \overrightarrow{k_0}$$

$$\overrightarrow{V_a}\left({}^{M}/_{T_0}\right) = \overrightarrow{V_r}\left({}^{M}/_{T}\right) + \overrightarrow{V_e}\left({}^{M}/_{T_0}\right)$$

- Vitesse relative

$$\overrightarrow{V_r}\left({}^{M}/_{T}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_T = \left.\frac{d\left[R\left(cos\omega t\,\vec{j} + sin\omega t\,\vec{k}\right)\right]}{dt}\right|_T = R\omega\left[-sin\omega t\,\vec{j} + cos\omega t\,\vec{k}\right]$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{V_r}\left({}^{M}/_{T}\right) = R\omega\left[-sin\omega t\,\vec{j} + cos\omega t\,\vec{k}\right]}$$

- Vitesse d'entraînement

$$\overrightarrow{V_e}\left({}^{M}/_{T_0}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_0O}}{dt}\right|_{T_0} + \vec{\Omega}\left({}^{T}/_{T_0}\right) \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O_0O}}{dt}\right|_{T_0} = \left.\frac{da\vec{j}}{dt}\right|_{T_0} = a\left[\underbrace{\left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_T}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}\left({}^{T}/_{T_0}\right) \wedge \vec{j}\right] = a\omega_0\overrightarrow{k_0} \wedge \vec{j} = -a\omega_0\vec{\imath}$$

$$\vec{\Omega}\left({}^{T}/_{T_0}\right)\wedge\overrightarrow{OM}=\omega_0\overrightarrow{k_0}\wedge R\left(cos\omega t\,\vec{j}+sin\omega t\,\vec{k}\right)=-\omega_0 R\,cos\omega t\,\vec{\imath}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{V_e}\left({}^{M}/_{T_0}\right)=-\omega_0(a+R\,cos\omega t)\vec{\imath}}$$

- Vitesse absolue

$$\boldsymbol{\overrightarrow{V_a}\left({}^{M}/_{T_0}\right)=\begin{pmatrix}-\omega_0(a+R\,cos\omega t)\\-R\omega\,sin\omega t\\R\omega\,cos\omega t\end{pmatrix}_T}$$

- <u>Accélération relative</u>

$$\overrightarrow{\gamma_r}\left({}^{M}/_{T}\right)=\left.\frac{d\overrightarrow{V_r}\left({}^{M}/_{T}\right)}{dt}\right|_T=-R\omega^2\left[cos\omega t\,\vec{j}+sin\omega t\,\vec{k}\right]$$

- <u>Accélération d'entraînement</u>

$$\overrightarrow{\gamma_e}\left({}^{M}/_{T_0}\right)=\left.\frac{d^2\overrightarrow{O_0O}}{dt^2}\right|_{T_0}+\underbrace{\frac{d\vec{\Omega}\left({}^{T}/_{T_0}\right)}{dt}}_{=\vec{0}}\wedge\overrightarrow{OM}+\vec{\Omega}\left({}^{T}/_{T_0}\right)\wedge\left[\vec{\Omega}\left({}^{T}/_{T_0}\right)\wedge\overrightarrow{OM}\right]$$

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{O_0O}}{dt^2}\right|_{T_0}=-a\omega_0^2\,\vec{j}\quad et\quad\vec{\Omega}\left({}^{T}/_{T_0}\right)\wedge\left[\vec{\Omega}\left({}^{T}/_{T_0}\right)\wedge\overrightarrow{OM}\right]=-R\omega_0^2\,cos\omega t\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{\gamma_e}\left({}^{M}/_{T_0}\right)=-\omega_0^2[a+R\,cos\omega t]\vec{j}$$

- <u>Accélération de Coriolis</u>

$$\overrightarrow{\gamma_C}\left({}^{M}/_{T_0}\right)=2\,\vec{\Omega}\left({}^{T}/_{T_0}\right)\wedge\overrightarrow{V_r}\left({}^{M}/_{T}\right)=2R\omega\omega_0\,sin\omega t\,\vec{\imath}$$

- <u>Accélération absolue</u>

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\gamma_a}\left({}^{M}/_{T_0}\right)=\begin{pmatrix}2R\omega\omega_0\,sin\omega t\\-\omega_0^2[a+R\,cos\omega t]-R\omega^2\,cos\omega t\\-R\omega^2\,sin\omega t\end{pmatrix}_T}$$

2- <u>Vitesse et accélération au point A</u>

Au point A : $\omega t=2k\pi\ \Rightarrow\ cos\omega t=1$ et $sin\omega t=0$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{V_a}\left({}^{A}/_{T_0}\right)=\begin{pmatrix}-\omega_0(a+R)\\0\\R\omega\end{pmatrix}_T}\quad et\quad\boldsymbol{\overrightarrow{\gamma_a}\left({}^{A}/_{T_0}\right)=\begin{pmatrix}0\\-\omega_0^2[a+R]-R\omega^2\\0\end{pmatrix}_T}$$

<u>Exercice 5</u>

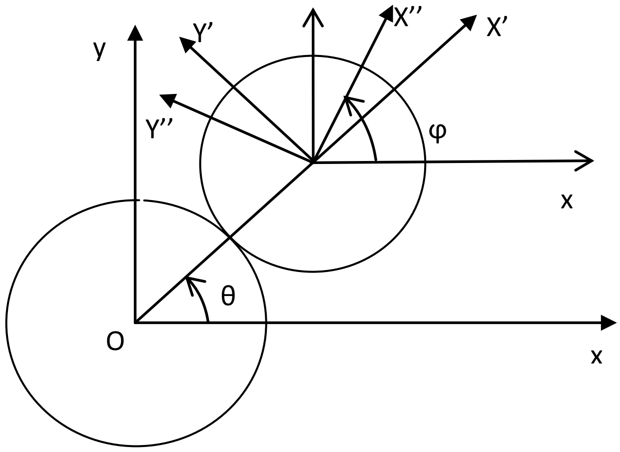
Un cylindre (C) d'axe Oz et de rayon R est fixe. Un deuxième cylindre (S) dont l'axe O'Z' et le rayon R', roule sans glisser à l'extérieur du premier cylindre. Les axes Oz et O'z' sont parallèles.

1- Paramétrer le système des deux cylindres.
2- Donner la condition de roulement sans glissement, ainsi que le degrés de liberté du système.

<u>Solution</u>

1- Paramètres du système

Soit $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ le repère fixe lié au cylindre (C) et $R'\left(O,\vec{x'},\vec{y'},\vec{z'}\right)$ le repère lié à l'axe O'z' du cylindre (S) tel que $\left(O,\vec{x'}\right)$ coïncide avec OO'.



Le repère $R''\left(O,\vec{x''},\vec{y''},\vec{z'}\right)$ et lié au cylindre (S). φ est l'angle de rotation de (S) autour de son axe, et θ l'angle de rotation de l'axe O'z' autour de Oz. $\vec{z'}=\vec{z}$

Soit A le point de contact entre (C) et (S).

$$R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \xrightarrow{\dot{\theta}\,\vec{z}} R'\left(O,\vec{x'},\vec{y'},\vec{z'}\right) \quad et \quad R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \xrightarrow{\dot{\varphi}\,\vec{z}} R''\left(O,\vec{x''},\vec{y''},\vec{z'}\right)$$

2- Condition de roulement sans glissement

La condition de roulement sans glissement permet d'écrire : $\vec{V}(A\in S/R)-\vec{V}(A\in C/R)=\vec{0}$

(C) est fixe $\Rightarrow \vec{V}(A\in C/R)=\vec{0} \;\; \Rightarrow \vec{V}(A\in S/R)=\vec{V}(O'/R)+\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{O'A}=\vec{0}$

$$\vec{V}(O'/R)=\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R=(R+R')\frac{d\vec{x'}}{dt}=(R+R')\dot{\theta}\,\vec{y'}$$

$$\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{O'A}=\dot{\varphi}\,\vec{z'}\wedge -R'\,\vec{x'}=-R'\dot{\varphi}\,\vec{y'} \;\;\Rightarrow \vec{V}(A\in S/R)=\left[(R+R')\dot{\theta}-R'\dot{\varphi}\right]\vec{y'}=\vec{0}$$

La condition de roulement sans glissement est donnée par : $\dot{\varphi}=\frac{R+R'}{R'}\,\dot{\theta}$

On a deux paramètres θ et φ et une équation reliant ces paramètres, le degrés de liberté est donc égal à 1.

Exercice 6

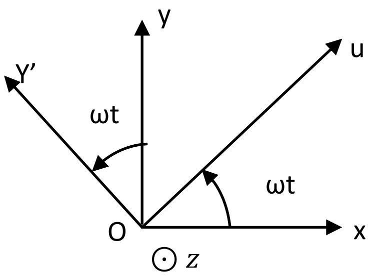
Un tube cylindrique mince OA, incliné par rapport à l'horizontale d'un angle α, tourne autour de la verticale à une vitesse angulaire constante ω. Un point matériel P de masse m, assujetti à se déplacer dans ce tube, est initialement au repos à la distance a de O, intersection de l'axe vertical de rotation avec le tube. Soient les repères d'espace R$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\,)$ constitué de l'axe vertical de rotation Oz et du plan horizontal xoy, R'$\left(O,\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'}\right)$ lié au tube cylindrique d'axe Oz' portant OA, Oy' dans le plan xOy et Ox' complète le trièdre direct.

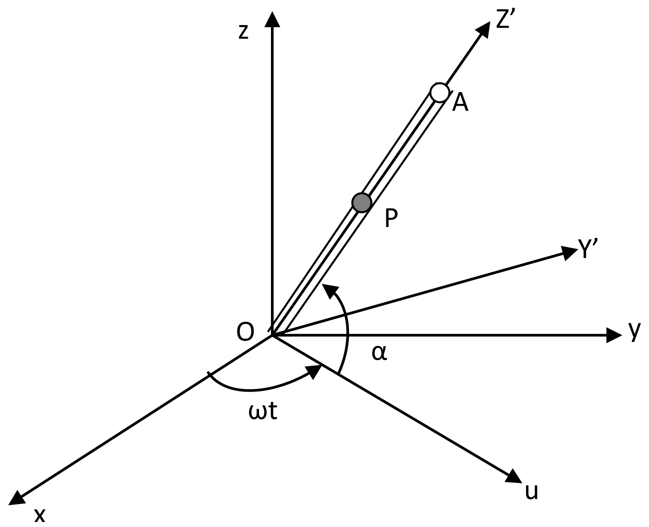
1- Ecrire le vecteur vitesse angulaire de rotation dans la base du repère mobile R'. On fera par la suite tous les calculs dans cette base.
2- Calculer la vitesse relative et d'entraînement du point matériel P. En déduire sa vitesse absolue.
3- Calculer l'accélération de P par rapport au repère fixe par composition de mouvement.

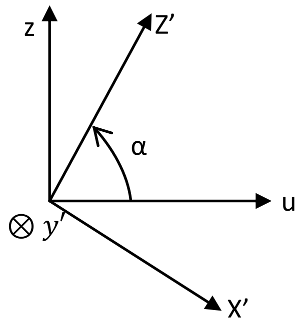
4- Retrouver les résultats des questions 2 et 3 par calcul direct.

Solution

1- Vecteur vitesse angulaire de rotation







$$R(O,x,y,z) \xrightarrow{\omega\ \vec{z}} R_1(O,u,y',z) \xrightarrow{\alpha\ autour\ de\ y'} R'(O,x',y',z')$$

α est constant, donc $\vec{\Omega}(^S/_R) = \omega\vec{z} = \omega\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\vec{z'} - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\vec{x'}\right] = \omega[\sin\alpha\,\vec{z'} - \cos\alpha\,\vec{x'}]$

$$\boldsymbol{\vec{\Omega}(^S/_R) = \omega\left[\sin\alpha\,\vec{z'} - \cos\alpha\,\vec{x'}\right]}$$

2- Vitesse de P par rapport au repère R

Vitesse relative de P

$$\vec{V_r}\left(^P/_{R'}\right) = \left.\frac{d\vec{OP}}{dt}\right|_{R'} = \dot{r}\,\vec{z'} \qquad \text{où } \vec{OP} = r\vec{z'}$$

Vitesse d'entraînement de P

$$\vec{V_e}(^P/_R) = \vec{\Omega}\left(^{R'}/_R\right) \wedge \vec{OP} = \boldsymbol{\omega}[\sin\alpha\,\vec{z'} - \cos\alpha\,\vec{x'}] \wedge r\vec{z'} = r\,\omega\,\cos\alpha\,\vec{y'}$$

$$\vec{V_e}(^P/_R) = r\,\omega\,\cos\alpha\,\vec{y'}$$

Vitesse absolue de P

$$\boldsymbol{\vec{V_a}(^P/_R) = \vec{V_r}(^P/_R) + \vec{V_e}(^P/_R) = r\,\omega\,\cos\alpha\,\vec{y'} + \dot{r}\,\vec{z'}}$$

3- Accélération de P par rapport au repère R

Accélération relative

$$\overrightarrow{\gamma_r}\left({}^{P}/_{R'}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{V_r}\left({}^{P}/_{R'}\right)}{dt}\right|_{R'} = \ddot{r}\,\overrightarrow{z'}$$

Accélération d'entraînement

$$\overrightarrow{\gamma_e}\left({}^{P}/_{R}\right) = \vec{\Omega}\left({}^{S}/_{R}\right) \wedge \left[\vec{\Omega}\left({}^{S}/_{R}\right) \wedge \overrightarrow{OP}\right] = \omega\left[sin\alpha\,\overrightarrow{z'} - cos\alpha\,\overrightarrow{x'}\right] \wedge r\,\omega\,cos\alpha\,\overrightarrow{y'}$$

$$\overrightarrow{\gamma_e}\left({}^{P}/_{R}\right) = -r\omega^2 cos\alpha\left[\,sin\alpha\,\overrightarrow{x'} + cos\alpha\,\overrightarrow{z'}\,\right]$$

Accélération de Coriolis

$$\overrightarrow{\gamma_C}\left({}^{P}/_{R}\right) = 2\,\vec{\Omega}\left({}^{S}/_{R}\right) \wedge \overrightarrow{V_r}\left({}^{P}/_{R'}\right) = 2\omega\,\dot{r}\,cos\alpha\,\overrightarrow{y'}$$

Accélération absolue

$$\overrightarrow{\gamma_a}\left({}^{P}/_{R}\right) = \overrightarrow{\gamma_r}\left({}^{P}/_{R}\right) + \overrightarrow{\gamma_e}\left({}^{P}/_{R}\right) + \overrightarrow{\gamma_C}\left({}^{P}/_{R}\right)$$

$$\overrightarrow{\gamma_a}\left({}^{P}/_{R}\right) = \begin{pmatrix} -r\omega^2 cos\alpha sin\alpha \\ 2\omega\,\dot{r}\,cos\alpha \\ \ddot{r} - r\omega^2 cos^2\alpha \end{pmatrix}_{R'}$$

4- Vitesse et accélération par calcul direct

Vitesse de P par rapport à R

$$\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{z'} \Rightarrow \vec{V}\left({}^{P}/_{R}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right|_{R} = \dot{r}\,\overrightarrow{z'} + r\left.\frac{d\overrightarrow{z'}}{dt}\right|_{R} = \dot{r}\,\overrightarrow{z'} + r\left[\underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{z'}}{dt}\right|_{R'}}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}\left({}^{R'}/_{R}\right) \wedge \overrightarrow{z'}\right]$$

$$\vec{V}\left({}^{P}/_{R}\right) = \dot{r}\,\overrightarrow{z'} + r\omega\left[sin\alpha\,\overrightarrow{z'} - cos\alpha\,\overrightarrow{x'}\right] \wedge \overrightarrow{z'} = \dot{r}\,\overrightarrow{z'} + r\omega cos\alpha\,\overrightarrow{y'}$$

Accélération de P par rapport à R

$$\overrightarrow{\gamma_a}\left({}^{P}/_{R}\right) = \left.\frac{d\vec{V}\left({}^{P}/_{R}\right)}{dt}\right|_{R} = \ddot{r}\,\overrightarrow{z'} + \dot{r}\left.\frac{d\overrightarrow{z'}}{dt}\right|_{R} + \dot{r}\omega cos\alpha\,\overrightarrow{y'} + r\omega cos\alpha\left.\frac{d\overrightarrow{y'}}{dt}\right|_{R}$$

$$= \ddot{r}\,\overrightarrow{z'} + 2\,\dot{r}\omega cos\alpha\,\overrightarrow{y'} + r\omega cos\alpha\,\vec{\Omega}\left({}^{R'}/_{R}\right) \wedge \overrightarrow{y'}$$

$$\overrightarrow{\gamma_a}\left({}^{P}/_{R}\right) = \begin{pmatrix} -r\omega^2 cos\alpha sin\alpha \\ 2\omega\,\dot{r}\,cos\alpha \\ \ddot{r} - r\omega^2 cos^2\alpha \end{pmatrix}_{R'}$$

Exercice 7

On considère le disque D homogène, de centre G, de rayon a et de masse m, astreint à se déplacer sur l'axe matériel Ox du plan vertical fixe (O, x, y) d'un repère orthonormé direct R_0(O, x, y, z). Soit R_S(G, x_S, y_S, z_S)le repère direct lié au disque. I est le point de contact entre le disque et l'axe Ox. On appelle x(t), y(t), z(t) les coordonnées de G et φ(t) paramétrise la rotation propre du disque autour de Oz. On suppose que D roule sans glisser sur l'axe Ox.

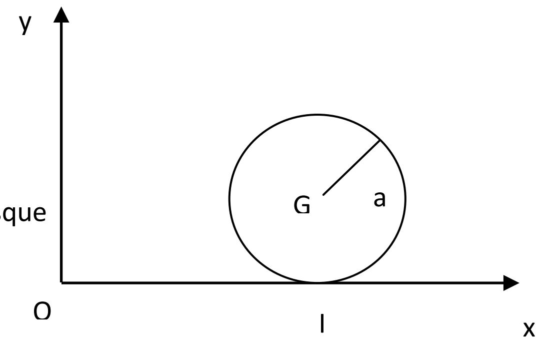
1- Identifier les variables angulaires d'Euler, et paramétrer le disque
2- Calculer la vitesse de glissement et donner la condition de roulement sans glissement.
3- Nous supposons maintenant que le disque roule sans glisser à l'intérieur d'un anneau fixe A de centre O et de rayon R. A chaque instant un point I du disque est en contact avec un point de l'anneau. Paramétrer le disque et donner la condition de roulement sans glissement.
4- Donner la condition de roulement sans glissement dans le cas où le disque roule à l'extérieur de l'anneau.

Solution

1- <u>Paramétrage du disque</u>

On a une seule rotation du disque autour de son axe : C'est la rotation propre φ(t) ; et une translation de G Parallèlement à l'axe Ox.

$\vec{\Omega}\left({}^{D}/_{R_0}\right) = \dot{\varphi}\vec{z}$ est le vecteur vitesse angulaire du disque



Par rapport au repère R_0.

2- <u>Vitesse de glissement</u>

$$\vec{V_g}\left({}^{D}/_{Ox}\right) = \vec{V}\left({}^{I \in D}/_{R_0}\right) - \underbrace{\vec{V}\left({}^{I \in Ox}/_{R_0}\right)}_{=\vec{0}} = \vec{V}\left({}^{G}/_{R_0}\right) + \vec{\Omega}\left({}^{D}/_{R_0}\right) \wedge \vec{GI}$$

$$\boldsymbol{\vec{V_g}\left({}^{D}/_{Ox}\right) = \dot{x}\,\vec{x} + \dot{\varphi}\,\vec{z} \wedge -a\vec{y} = (\dot{x} + a\dot{\varphi})\,\vec{x}}$$

La condition de roulement sans glissement est : $\vec{V_g}\left({}^{D}/_{Ox}\right) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\dot{x} + a\dot{\varphi} = 0}$

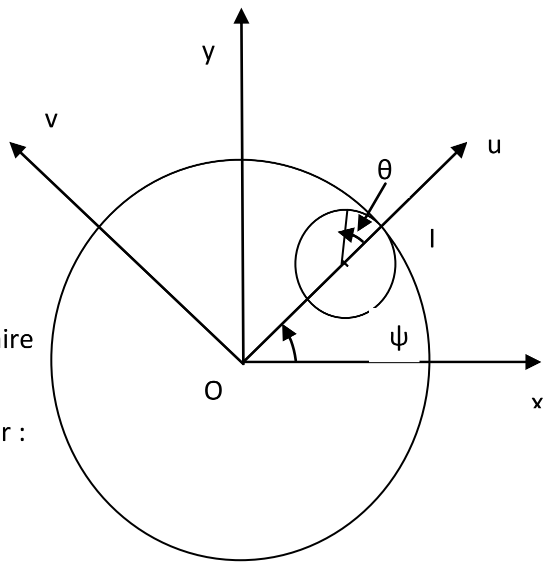
Dans ce cas, le degrés de liberté du disque est égal à 1

3- <u>Condition de roulement sans glissement</u>

On a deux rotations :

- la rotation de G autour de O ; G décrit un cercle de Centre O et de rayon (R-a) : c'est la précession
- la rotation propre du disque autour de son axe Gz.par rapport au repère (G, u, v, z)

$\vec{\Omega}\left({}^{D}/_{R_0}\right) = (\dot{\psi} + \dot{\theta})\vec{z} = \dot{\varphi}\vec{z}$ est le vecteur vitesse angulaire



La condition de roulement sans glissement est donnée par :

$$\vec{V_g}\left({}^{D}/_{A}\right) = \vec{0}$$

Or le cerceau A est fixe⇒ $\vec{V}\left({}^{I \in D}/_{R_0}\right) = \vec{0}$

$$\vec{V}\left({}^{G}/_{R_0}\right) + \vec{\Omega}\left({}^{D}/_{R_0}\right) \wedge \vec{GI} = \vec{0}$$

$$\boldsymbol{\vec{V}\left({}^{G}/_{R_0}\right) = \left.\frac{d\vec{OG}}{dt}\right|_{R_0} = (R-a)\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0} = (R-a)\dot{\psi}\,\vec{v}}$$

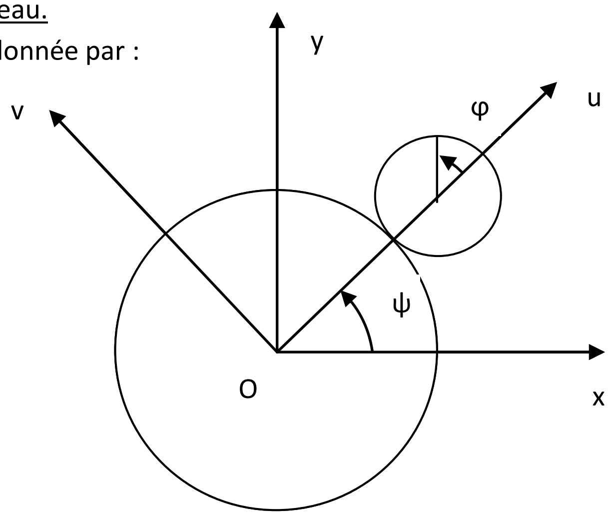
$$\vec{\Omega}\left({}^{D}/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{GI} = \dot{\varphi}\vec{z} \wedge a\,\vec{u} = a\dot{\varphi}\,\vec{v}$$

$$(R-a)\dot{\psi} + a\dot{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}} = -\frac{\boldsymbol{R-a}}{\boldsymbol{a}}\,\dot{\boldsymbol{\psi}}$$

4- <u>Le disque roule sans glisser à l'extérieur du cerceau.</u>

La condition de roulement sans glissement est donnée par :

$$\vec{V}\left({}^{G}/_{R_0}\right) + \vec{\Omega}\left({}^{D}/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{GI} = \vec{0}$$



$$\vec{V}\left({}^{G}/_{R_0}\right) = (R+a)\dot{\psi}\,\vec{v}$$

$$\vec{\Omega}\left({}^{D}/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{GI} = -a\,\dot{\varphi}\,\vec{v}$$

$$(R+a)\dot{\psi} - a\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\boldsymbol{R+a}}{\boldsymbol{a}}\,\dot{\boldsymbol{\psi}}.$$

Exercice 8

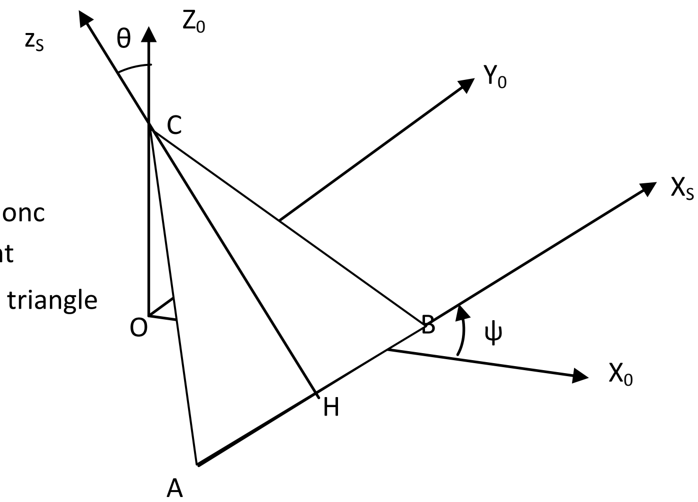
Le sommet C d'un triangle quelconque ABC est astreint à se déplacer sur l'axe vertical Oz_0 du repère R_0, tandis que le côté opposé AB reste dans le plan horizontal de normale $\vec{z_0}$ passant par O. On appelle H le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur AB.

1- Définir un repère orthonormé R_S attaché au triangle (origine et base).
2- Proposer un paramétrage de la position de R_S par rapport à R_0 (position de l'origine et orientation de la base).
3- De combien de paramètres la position de R_S par rapport à R_0 dépend-elle ?
4- Pour une position donnée du triangle, exprimer ces paramètres en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{HC}$ (dont les positions par rapport à R_0 sont supposées connues)

Solution

1- <u>Définition du repère</u>

$\overrightarrow{HC}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$, on peut donc Prendre les axes portant respectivement $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{HC}$ comme axes du trièdre lié au triangle Tels que :



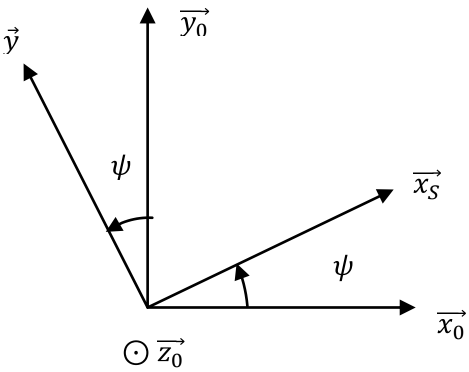
$$\vec{x_S} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \quad et \quad \vec{z_S} = \frac{\overrightarrow{HC}}{\|\overrightarrow{HC}\|}$$

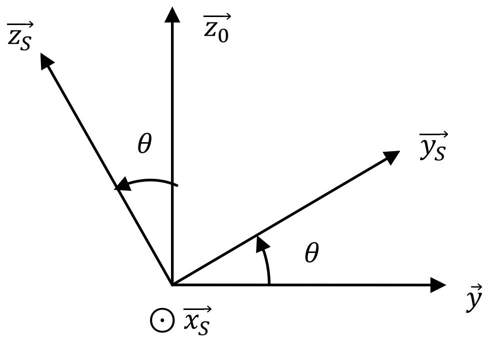
L'axe $\vec{y_S}$ complète le trièdre tel que : $\vec{y_S} = \vec{z_S} \wedge \vec{x_S}$

Le trièdre lié au triangle est alors : $R_S(H, \vec{x_S}, \vec{y_S}, \vec{z_S})$.

2- <u>Paramètrage de R_S par rapport à R_0</u>

$\overrightarrow{AB}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{HC}$ et à $\overrightarrow{z_0}$, soit ψ l'angle que fait $\overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{x_0}$, et θ l'angle que fait $\overrightarrow{z_S}$ avec $\overrightarrow{z_0}$.





$$R_0(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}) \xrightarrow{\dot{\psi}\,\overrightarrow{z_0}} R(\overrightarrow{x_S},\vec{y},\overrightarrow{z_0}) \xrightarrow{\dot{\theta}\,\overrightarrow{x_S}} R_S(\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S},\overrightarrow{z_S})$$

L'origine H du repère R_S est donnée par : $\overline{OH} = \overline{CH}\ sin\theta$

3- <u>Paramètres dont dépend la position de R_S</u>

La position de R_S par rapport à R_0 dépend des deux angles d'Euler : la précession ψ et la nutation θ

4- <u>Expression des paramètres en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC}$</u>

Pour déterminer les valeurs des angles dans une position connue, on a :

$$cos\psi = \overrightarrow{x_S}\cdot\overrightarrow{x_0} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{x_0}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \qquad et \qquad cos\theta = \overrightarrow{z_0}\cdot\overrightarrow{z_S} = \frac{\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{z_0}}{\|\overrightarrow{HC}\|}$$

Exercice 9

Pendule simple

Dans le plan vertical $(\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{Oy_0})$ d'un repère fixe orthonormé direct R_0(O, $\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}$) où $\overrightarrow{Ox_0}$ est la verticale descendante, on considère le mouvement d'un pendule simple constitué d'une tige rectiligne (T_1) de longueur L et de centre de gravité G_1.

L'extrémité A de la tige est astreinte à se déplacer sur l'axe $\overrightarrow{Oy_0}$. On posera OA = y et ψ =($\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{AB}$).

1- Quels sont les paramètres nécessaires et suffisants pour connaître la position de (T_1) ?
2- Définir un repère R_1 d'axes $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}$ *et* $\overrightarrow{z_1}$ lié à (T_1).
3- Quel est le vecteur vitesse de rotation de (T_1) par rapport à R_0 ; noté : $\vec{\Omega}(T_1/R_0)$
4- Déterminer les éléments de réduction du torseur cinématique $[\tau]_{G_1}$ de (T_1) au point G_1 par rapport à R_0 en fonction des données du problème.
5- Déterminer le vecteur vitesse de l'extrémité B de (T_1) par rapport à R_0 :
   a) Par la méthode directe,

b) En utilisant la loi de distribution des vitesses dans un solide indéformable.

c) Ecrire les éléments de réduction du torseur cinématique en B par rapport à R_0.

6- Calculer les accélérations des points A et B dans R_0.

Pendule double.

On accroche à la tige (T_1) une deuxième tige identique (T_2) d'extrémités BC. (T_1) et (T_2) sont articulées en B. Soit R_2(B, $\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_0}$) le repère lié à (T_2) tel que : $\overrightarrow{BC} = L\vec{x_2}$ et $\alpha = (\vec{x_1}, \vec{x_2})$.

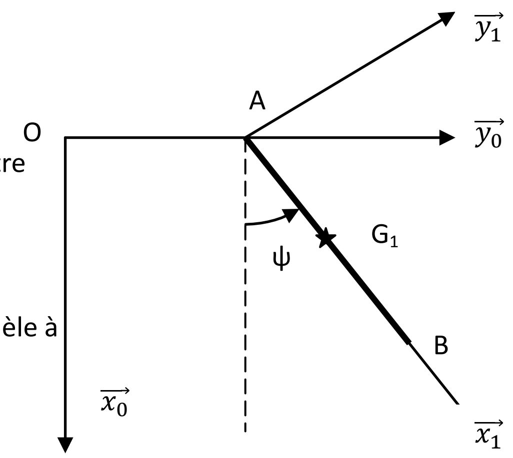
1- Faites des représentations graphiques planes des repères en indiquant les angles de rotation permettant le passage d'un repère à l'autre.

2- Déterminer le vecteur vitesse de rotation instantanée de la tige (T_2) par rapport à R_0 ; $\vec{\Omega}(T_2/R_0)$

3- Déterminer le vecteur vitesse linéaire de l'extrémité C de (T_2) par rapport à R_0 ; on l'exprimera dans la base de R_1.

Solution

Pendule simple



1- Paramètres de position de (T_1)
Les paramètres nécessaires et suffisants pour connaître la position de (T_1) sont : y = OA et ψ.

2- Repère lié à (T_1)
Le repère lié à (T_1) est R_1 d'origine A et tel que :
$\vec{x_1}$ suivant AB, $\vec{y_1}$ faisant l'angle ψ avec $\vec{y_0}$ et $\vec{z_1}$ parallèle à $\vec{z_0}$.

3- Vitesse de rotation

$$\vec{\Omega}\left({}^{T_1}/_{R_0}\right) = \dot{\psi}\,\vec{z_0}.$$

4- Torseur cinématique

$$\vec{V}\left({}^{G_1}/_{R_0}\right) = \vec{V}\left({}^{A}/_{R_0}\right) + \vec{\Omega}\left({}^{T_1}/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{AG_1} = \dot{y}\vec{y_0} + \dot{\psi}\vec{z_0} \wedge \frac{L}{2}(cos\psi\,\vec{x_0} + sin\psi\,\vec{y_0})$$

$$\vec{V}\left({}^{G_1}/_{R_0}\right) = -\frac{L}{2}\,\dot{\psi}\,sin\psi\,\vec{x_0} + \left(\dot{y} + \frac{L}{2}\,\dot{\psi}\,cos\psi\right)\vec{y_0}$$

$$[\tau]_{G_1} = \begin{cases} \vec{\Omega}\left({}^{T_1}/_{R_0}\right) = \dot{\psi}\,\vec{z_0} \\ \vec{V}\left({}^{G_1}/_{R_0}\right) = -\frac{L}{2}\,\dot{\psi}\,sin\psi\,\vec{x_0} + \left(\dot{y} + \frac{L}{2}\,\dot{\psi}\,cos\psi\right)\vec{y_0} \end{cases}$$

5- Vitesse de B

a) Calcul direct

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = y\,\vec{y_0} + L\,(cos\psi\,\vec{x_0} + sin\psi\,\vec{y_0})$$

$$\vec{V}\left({}^{B}/_{R_0}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_{R_0} = -L\,\dot{\psi}\,sin\psi\,\vec{x_0} + (\dot{y} + L\,\dot{\psi}\,cos\psi)\vec{y_0}$$

b) Loi de distribution des vitesses

$$\vec{V}\left({}^{B}/_{R_0}\right) = \vec{V}\left({}^{A}/_{R_0}\right) + \vec{\Omega}\left({}^{T_1}/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{AB} = \dot{y}\overrightarrow{y_0} + \dot{\psi}\overrightarrow{z_0} \wedge L(\cos\psi\,\overrightarrow{x_0} + \sin\psi\,\overrightarrow{y_0})$$
$$= -L\,\dot{\psi}\,\sin\psi\,\overrightarrow{x_0} + (\dot{y} + L\,\dot{\psi}\,\cos\psi)\overrightarrow{y_0}$$

c) Torseur cinématique en B

$$[\tau]_B = \begin{cases} \vec{\Omega}\left({}^{T_1}/_{R_0}\right) = \dot{\psi}\,\overrightarrow{z_0} \\ \vec{V}\left({}^{B}/_{R_0}\right) = -L\,\dot{\psi}\,\sin\psi\,\overrightarrow{x_0} + (\dot{y} + L\,\dot{\psi}\,\cos\psi)\overrightarrow{y_0} \end{cases}$$

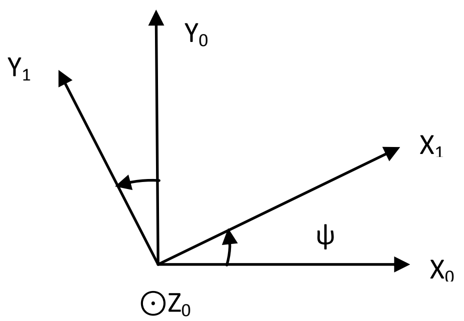
6- <u>Accélérations des points A et B</u>

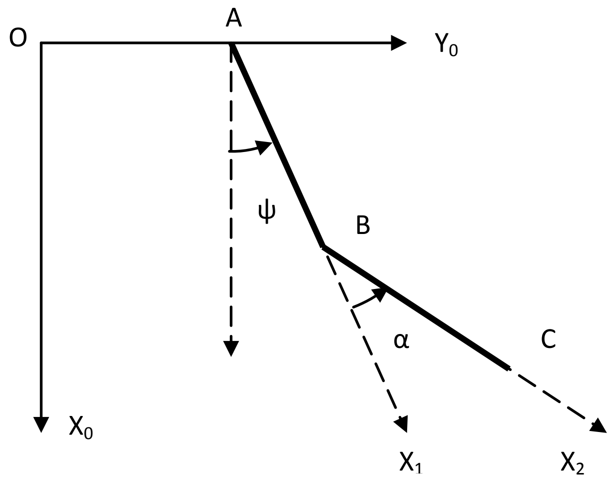
$$\vec{\gamma}\left({}^{A}/_{R_0}\right) = \left.\frac{d\vec{V}\left({}^{A}/_{R_0}\right)}{dt}\right|_{R_0} = \ddot{y}\,\overrightarrow{y_0}$$

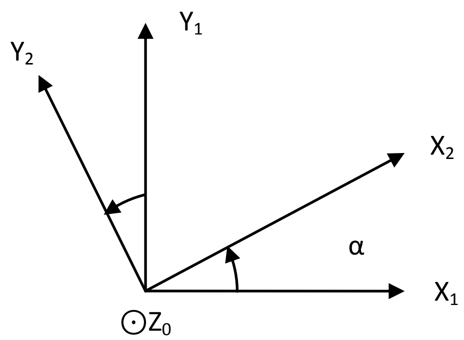
$$\vec{\gamma}\left({}^{B}/_{R_0}\right) = \left.\frac{d\vec{V}\left({}^{B}/_{R_0}\right)}{dt}\right|_{R_0} = \begin{pmatrix} -L\,\ddot{\psi}\,\sin\psi - L\dot{\psi}^2\,\cos\psi \\ \ddot{y} + L\,\ddot{\psi}\,\cos\psi - L\,\dot{\psi}^2\,\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

<u>Pendule double</u>

1- <u>Représentations planes des repères</u>







$$R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}) \xrightarrow{\dot{\psi}\,\overrightarrow{z_0}} R_1(A,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0}) \xrightarrow{\dot{\alpha}\,\overrightarrow{z_0}} R_2(B,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_0})$$

2- <u>Vecteur vitesse rotation de (T$_2$)</u>

$$\vec{\Omega}\left({}^{T_2}/_{R_0}\right) = (\dot{\psi} + \dot{\alpha})\overrightarrow{z_0}$$

3- <u>Vitesse de l'extrémité C de (T$_2$)</u>

$$\vec{V}\left({}^{C}/_{R_0}\right) = \vec{V}\left({}^{B}/_{R_0}\right) + \vec{\Omega}\left({}^{R_2}/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{BC}$$

$$= \begin{pmatrix} -L\dot{\psi}\, sin\psi \\ \dot{y} + L\dot{\psi}\, cos\psi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} + \dot{\alpha} \end{pmatrix}_{R_0} \wedge \begin{pmatrix} L\, cos(\alpha + \psi) \\ L\, sin(\alpha + \psi) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

$$= \begin{pmatrix} -L\dot{\psi}\, sin\psi - L(\dot{\psi} + \dot{\alpha})sin(\alpha + \psi) \\ \dot{y} + L\dot{\psi}\, cos\psi + L(\dot{\psi} + \dot{\alpha})cos(\alpha + \psi) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

$$Or \quad \overrightarrow{x_0} = cos\psi\, \overrightarrow{x_1} - sin\psi \overrightarrow{y_1} \qquad et \quad \overrightarrow{y_0} = sin\psi\, \overrightarrow{x_1} + cos\psi\, \overrightarrow{y_1}$$

En remplaçant $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$ par leurs valeurs, on trouve :

$$\vec{V}\left({}^{C}/_{R_0}\right) = \begin{pmatrix} -L(\dot{\psi} + \dot{\alpha})sin\alpha + \dot{y}\, sin\psi \\ L\dot{\psi} + L(\dot{\psi} + \dot{\alpha})cosa + \dot{y}\, cos\psi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

<u>Exercice 10</u>

Soit $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ un repère orthonormé direct, avec $(O, \overrightarrow{z_0})$ vertical ascendant, supposé galiléen. Le solide étudié (S) est constitué par un disque homogène (D) de centre C, de rayon R et de masse m, auquel est soudé suivant son axe de révolution une tige (T) infiniment mince, homogène de masse identique m et de longueur L. (S) est en articulation sphérique en O avec le repère R$_0$. Au cours du mouvement de (S) par rapport à R$_0$, le disque roule sans glisser sur le plan horizontal (π) et reste en contact ponctuel avec le plan en un point I de sa circonférence.

On repère la position de (S) dans R$_0$ à l'aide des angles d'Euler habituels (ψ, θ, φ). On note $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{z_0})$ et $R_2(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ les deux repères intermédiaires et $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère lié à (S).

1- Montrer que l'angle de nutation θ garde une valeur constante au cours du mouvement.
2- Représenter les figures planes des rotations représentant les angles d'Euler et qui font passer de (R$_0$) à (R).
3- En déduire le vecteur vitesse de rotation instantanée.
4- Exprimer les éléments de réduction en O puis en I du torseur cinématique du solide (S) dans son mouvement par rapport à (R$_0$). Que vaut son invariant scalaire I$_S$?
   En déduire la nature de ce torseur et son axe instantané de rotation.

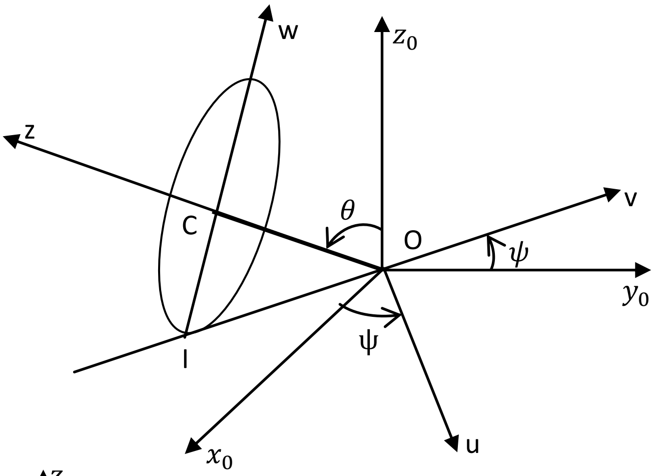
<u>Solution</u>

1- <u>Valeur de l'angle de nutation</u>

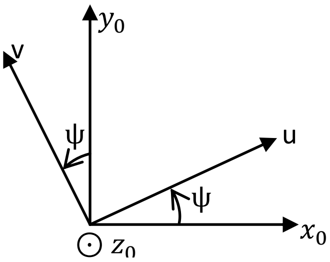
Considérons le triangle IOC droit en C où OC est la tige de longueur l et CI le rayon du disque.

$$cotg\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=tg\theta=\frac{l}{r}$$

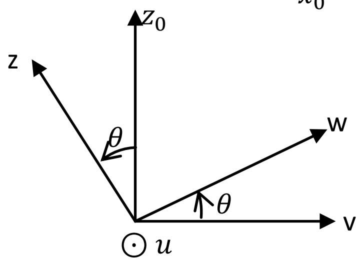
Donc θ est un angle constant .



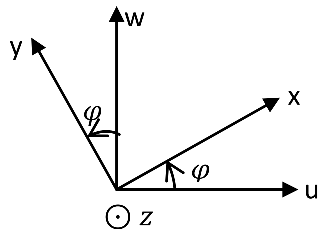
2- <u>Figures planes des rotations</u>



Précession



Nutation



Rotation propre

3- <u>Vecteur vitesse de rotation instantanée</u>

Le vecteur vitesse de rotation instantanée est donné par :

$$\vec{\Omega}\left(S/_{R_0}\right)=\vec{\Omega}\left(S/_{R_2}\right)+\vec{\Omega}\left(R_2/_{R_1}\right)+\vec{\Omega}\left(R_1/_{R_0}\right)=\dot{\varphi}\vec{z}+\dot{\theta}\vec{u}+\dot{\psi}\vec{z_0}$$

Or l'angle de nutation est constant ce qui donne $\dot{\theta}=0$ et par conséquent

$$\vec{\Omega}\left(S/_{R_0}\right)=\dot{\varphi}\vec{z}+\dot{\psi}\vec{z_0}=\dot{\psi}\,sin\theta\,\vec{w}+(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\,cos\theta)\vec{z}$$

4- <u>Eléments de réduction du torseur cinématique en O.</u>

On a une liaison sphérique au point O, O est un point du solide S $\Rightarrow \vec{V}\left(O\in S/_{R_0}\right)=\vec{0}$

$$\left[\tau\left(S/_{R_0}\right)\right]_O=\begin{bmatrix}\vec{\Omega}\left(S/_{R_0}\right)=\dot{\psi}\,sin\theta\,\vec{w}+(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\,cos\theta)\vec{z}\\ \vec{V}\left(O\in S/_{R_0}\right)=\vec{0}\end{bmatrix}_O$$

<u>Eléments de réduction du torseur cinématique en I</u>

Au point I on a roulement sans glissement ce qui donne $\vec{V}\left(I\in S/_{R_0}\right)=\vec{V}\left(I\in R_0/_{R_0}\right)=\vec{0}$

$$\left[\tau\left(S/_{R_0}\right)\right]_I=\begin{bmatrix}\vec{\Omega}\left(S/_{R_0}\right)=\dot{\psi}\,sin\theta\,\vec{w}+(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\,cos\theta)\vec{z}\\ \vec{V}\left(I\in S/_{R_0}\right)=\vec{0}\end{bmatrix}_I$$

L'invariant scalaire est alors nul avec une résultante non nulle, le torseur est alors un glisseur.

$$I_s=\vec{V}\left(I\in S/_{R_0}\right)\vec{\Omega}\left(S/_{R_0}\right)=\vec{V}\left(O\in S/_{R_0}\right)\vec{\Omega}\left(S/_{R_0}\right)=0$$

L'axe instantané de rotation est l'ensemble des points où le moment du torseur est nul c-à-d l'axe OI

Puisque OI est l'axe instantané de rotation, il est parallèle à $\vec{\Omega}\left(S/_{R_0}\right)$ qui peut s'écrire sous la forme :

$\vec{\Omega}\left(S/_{R_0}\right) = \Omega\, \vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur unitaire porté par IO.

$$\vec{\Omega}\left(S/_{R_0}\right) = \dot{\varphi}\vec{z} + \dot{\psi}\vec{z_0} = \dot{\varphi}(cos\theta\, \vec{z_0} - sin\theta\, \vec{v}) + \dot{\psi}\vec{z_0} = \Omega\, \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} \Omega = -\dot{\varphi} sin\theta \quad et \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\, cos\theta = 0 \end{cases}$$

Cette deuxième équation peut être obtenue en appliquant la condition de roulement sans glissement ; en effet cette condition nous donne $\vec{V}\left(I \in S/_{R_0}\right) = \vec{0}$, en plus I et O sont deux points du même solide ce qui permet d'écrire :

$$\vec{V}\left(I \in S/_{R_0}\right) = \vec{V}\left(O \in S/_{R_0}\right) + \vec{\Omega}\left(S/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{OI} = \vec{0} \qquad \Rightarrow$$

$$\vec{\Omega}\left(S/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{OI} = [\dot{\varphi}(cos\theta\, \vec{z_0} - sin\theta\, \vec{v}) + \dot{\psi}\vec{z_0}] \wedge (-l sin\theta)\vec{v} = l\, sin\theta\, (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\, cos\theta) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\psi} + \dot{\varphi}\, cos\theta = 0$$

L'ensemble des positions de l'axe instantané de rotation est appelé surface axoïde, dans ce cas c'est le plan horizontal x_0 y_0.

Exercice 11

On donne le repère usuel orthonormé direct $R_0(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ et le repère $R(C, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z_0})$ en mouvement dans R_0. L'origine C est défini dans R_0 via deux points A et B de la façon suivante :

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ avec $\overrightarrow{OA} = l\, \vec{u}$ (l=cste), appartenant au plan (Ox_0y_0) et $\overrightarrow{OB} = h(t)\vec{z_0}$. L'axe Cu est dirigé par $\overrightarrow{BC}$ et l'angle $(\vec{x_0}, \vec{u}) = \psi(t)$.

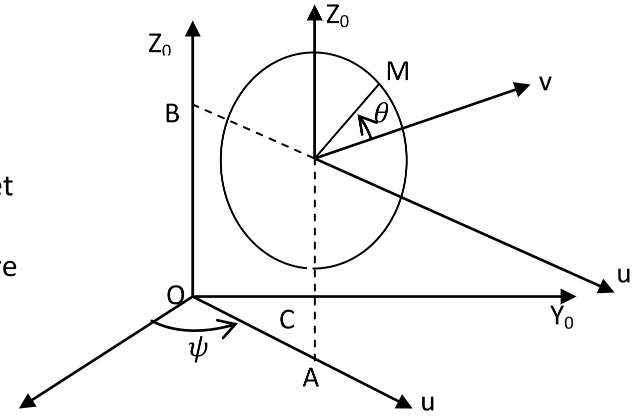
Un point M d'un solide S décrit un cercle C(C,a), du plan (C, $\vec{v}, \vec{z_0}$), de centre C et de rayon a, cercle sur lequel il est défini par l'angle $\left(\vec{v}, \overrightarrow{CM}\right) = \theta(t)$.

1- Calculer la vitesse du point M par rapport à R_0.
2- Calculer la vitesse relative du point M par rapport à R, la vitesse d'entraînement de R par rapport à R_0 et vérifier la loi de composition des vitesses.
3- Calculer l'accélération du point M par rapport à R_0.
4- Calculer les accélérations :relative, d'entraînement et de Coriolis du point M. Vérifier la loi de composition des accélérations.

Solution

1- Vitesse absolue de M

Le point M décrit un cercle de centre C et de rayon a, et tourne autour de l'axe Cu avec une vitesse angulaire :$\dot{\theta}\, \vec{u}$. Le Centre C du cercle (C, a) tourne autour de L'axe Oz_0 avec une vitesse angulaire ;$\dot{\psi}\vec{z_0}$, en effectuant un mouvement hélicoïdal d'axe Oz_0 et de rayon BC=l



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CM}$$
$$\overrightarrow{OM} = l\vec{u} + a\cos\theta\,\vec{v} + (h + a\sin\theta)\overrightarrow{z_0} \quad X_0$$

$$\vec{V}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{R_0} = l\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0} - a\,\dot{\theta}\,\sin\theta\vec{v} + a\cos\theta\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{R_0} + \left(\dot{h} + a\,\dot{\theta}\,\cos\theta\right)\overrightarrow{z_0}$$
$$\vec{V}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = -a\dot{\psi}\cos\theta\,\vec{u} + \left(l\,\dot{\psi} - a\,\dot{\theta}\,\sin\theta\right)\vec{v} + \left(\dot{h} + a\,\dot{\theta}\,\cos\theta\right)\overrightarrow{z_0}$$

2- Composition des vitesses

- Vitesse relative de M

$$\overrightarrow{V_r}\left({}^{M}/_{R}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{CM}}{dt}\right|_{R} = a\dot{\theta}[-\sin\theta\,\vec{v} + \cos\theta\,\overrightarrow{z_0}\,]$$

- Vitesse d'entraînement de M

$$\overrightarrow{V_e}\left({}^{M}/_{R}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right|_{R_0} + \vec{\Omega}\left({}^{R}/_{R_0}\right)\wedge\overrightarrow{CM}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d(l\vec{u} + h\overrightarrow{z_0})}{dt}\right|_{R_0} = l\dot{\psi}\,\vec{v} + \dot{h}\,\overrightarrow{z_0} \qquad et\,\vec{\Omega}\left({}^{R}/_{R_0}\right)\wedge\overrightarrow{CM} = \dot{\psi}\overrightarrow{z_0}\wedge a(\cos\theta\,\vec{v} + \sin\theta\,\overrightarrow{z_0})$$

$$\overrightarrow{V_e}\left({}^{M}/_{R}\right) = -a\dot{\psi}\cos\theta\,\vec{u} + l\dot{\psi}\,\vec{v} + \dot{h}\,\overrightarrow{z_0}$$

On remarque que $\vec{V}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = \overrightarrow{V_r}\left({}^{M}/_{R}\right) + \overrightarrow{V_e}\left({}^{M}/_{R}\right)$, la loi de composition des vitesses est donc vérifiée.

3- Accélération du point M

$$\vec{\gamma}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = \left.\frac{d\vec{V}\left({}^{M}/_{R_0}\right)}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\vec{V}\left({}^{M}/_{R_0}\right)}{dt}\right|_{R} + \vec{\Omega}\left({}^{R}/_{R_0}\right)\wedge\vec{V}\left({}^{M}/_{R_0}\right)$$

$$\vec{\gamma}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = \begin{pmatrix} -a\ddot{\psi}\cos\theta + a\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta \\ l\ddot{\psi} - a\ddot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}^2\cos\theta \\ \ddot{h} + a\ddot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}^2\sin\theta \end{pmatrix}_R + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_R \wedge \begin{pmatrix} -a\dot{\psi}\cos\theta \\ l\dot{\psi} - a\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{h} + a\,\dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix}_R$$
$$= \begin{pmatrix} -a\ddot{\psi}\cos\theta + 2a\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta - l\dot{\psi}^2 \\ l\ddot{\psi} - a\ddot{\theta}\sin\theta - a\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\right)\cos\theta \\ \ddot{h} + a\ddot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}^2\sin\theta \end{pmatrix}_R$$

4- Composition des accélérations

- Accélération relative

$$\overrightarrow{\gamma_r}\left({}^{M}/_{R}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{V_r}\left({}^{M}/_{R}\right)}{dt}\right|_{R} = a\begin{pmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta \\ \ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta \end{pmatrix}_R$$

- Accélération d'entraînement de M

$$\overrightarrow{\gamma_e}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OC}}{dt^2}\right|_{R_0} + \frac{d\vec{\Omega}\left({}^{R}/_{R_0}\right)}{dt}\wedge\overrightarrow{CM} + \vec{\Omega}\left({}^{R}/_{R_0}\right)\wedge\left[\vec{\Omega}\left({}^{R}/_{R_0}\right)\wedge\overrightarrow{CM}\right]$$

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OC}}{dt^2}\right|_{R_0} = \begin{pmatrix} -l\dot{\psi}^2 \\ l\ddot{\psi} \\ \ddot{h} \end{pmatrix}_R \quad ; \quad \frac{d\vec{\Omega}\left({}^{R}/_{R_0}\right)}{dt} \wedge \overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} -a\ddot{\psi}\cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_R \quad et$$

$$\vec{\Omega}\left({}^{R}/_{R_0}\right) \wedge \left[\vec{\Omega}\left({}^{R}/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{CM}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -a\dot{\psi}^2\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}_R \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\gamma_e}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = \begin{pmatrix} -a\ddot{\psi}\cos\theta - l\dot{\psi}^2 \\ l\ddot{\psi} - a\dot{\psi}^2\cos\theta \\ \ddot{h} \end{pmatrix}_R$$

- Accélération de Coriolis

$$\overrightarrow{\gamma_c}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = 2\,\vec{\Omega}\left({}^{R}/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{V_r}\left({}^{M}/_{R}\right) = 2a\dot{\psi}\,\dot{\theta}\,\sin\theta\,\vec{u}$$

- Accélération absolue de M

$$\overrightarrow{\gamma_a}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = \overrightarrow{\gamma_r}\left({}^{M}/_{R}\right) + \overrightarrow{\gamma_e}\left({}^{M}/_{R}\right) + \overrightarrow{\gamma_c}\left({}^{M}/_{R}\right) = \begin{pmatrix} -a\ddot{\psi}\cos\theta + 2a\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta - l\dot{\psi}^2 \\ l\ddot{\psi} - a\ddot{\theta}\sin\theta - a\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\right)\cos\theta \\ \ddot{h} + a\ddot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}^2\sin\theta \end{pmatrix}_R$$

La loi de composition des accélérations est vérifiée.

Exercice 12 (Epreuve de mécanique 2 Juillet 2011)

On se propose d'étudier le mouvement d'une bille dans un roulement à billes (Voir Figure).

Soit $R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ un repère fixe lié au bâti (S_0). Les deux cylindres (bagues) (S1) et (S_2) sont animés d'un mouvement de rotation autour de l'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$ de (S_0). On pose :

$$\begin{cases} \vec{\Omega}(S_1/R_0) = \Omega_1\,\overrightarrow{z_0} \\ \vec{\Omega}(S_2/R_0) = \Omega_2\,\overrightarrow{z_0} \end{cases}$$

La bille (S) de centre C, animée d'un mouvement plan, roule sans glisser en I_1 avec (S1) et en I_2 avec (S_2), à ce mouvement correspond le torseur cinématique, au point C :

$$[V(S/R_0)] = \begin{cases} \vec{\Omega}(S/R_0) = \Omega\,\overrightarrow{z_0} \\ \vec{V}\,(C/R_0) = V\,\overrightarrow{y_1} \end{cases}$$ avec V et Ω des inconnues du problème

Soit $R_1(O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$ un repère tel que $\overrightarrow{x_1}$ ait même direction et même sens que $\overrightarrow{OC}$. On pose :

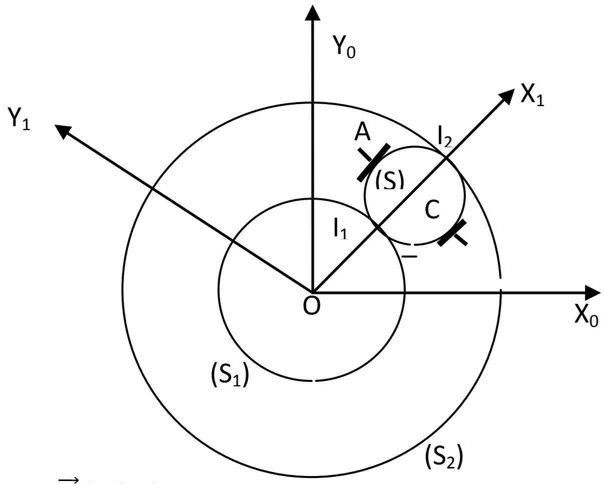
$$\overrightarrow{OI_1} = R_1\overrightarrow{x_1} \quad et \quad \overrightarrow{OI_2} = R_2\overrightarrow{x_1} \quad \text{où}\ \overrightarrow{x_1} = \frac{\overrightarrow{OC}}{\left\|\overrightarrow{Oc}\right\|}$$

La cage (S_3) a un mouvement de rotation d'axe $(O,\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_1})$ par rapport à (S_0).

Tous les résultats doivent être exprimés dans le repère R_1

1- En utilisant la loi de distribution des vitesses, déterminer les vitesses :

$$\vec{V}(I_1 \in S/R_0)\ et\ \vec{V}(I_1 \in S_1/R_0)$$



2- Exprimer la condition de roulement sans glissement en I_1

3- Déterminer les vitesses : $\vec{V}(I_2 \epsilon\, S/R_0)$ et $\vec{V}(I_2 \epsilon\, S_2/R_0)$ et exprimer la condition de roulement sans glissement en I_2

4- Déduire de ce qui précède les expressions de V et Ω en fonction de Ω_1, Ω_2, R_1 et R_2.

5- Déterminer la vitesse instantanée de rotation : $\vec{\Omega}(S_3/R_0) = \vec{\Omega}(R_1/R_0)$ sachant que O et C appartiennent au repère R_1.

6- Déterminer alors la vitesse instantanée de rotation : $\vec{\Omega}(S/S_3)$.

7- Déterminer la vitesse de glissement de la bille par rapport à la cage (S_3) au point A, $\vec{V}(A\, \epsilon\, S/S_3)$, tel que : $\overline{CA} = \frac{1}{2}\,(R_2 - R_1)\overrightarrow{y_1}$

Solution

1- Calcul des vitesses de I_1.

D'après la loi de distribution des vitesses des points C et I_1 appartenant au solide S :

$$\vec{V}(I_1 \in S/R_0) = \vec{V}(C/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overline{CI_1} = V\overrightarrow{y_1} + \Omega\overrightarrow{z_0} \wedge -\frac{R_2 - R_1}{2}\overrightarrow{x_1}$$
$$= \left(V - \frac{R_2 - R_1}{2}\Omega\right)\overrightarrow{y_1}$$

$\vec{V}(I_1 \in S_1/R_0)$ se calcule à partir de la vitesse du point O de (S_1)

$$\vec{V}(I_1 \in S_1/R_0) = \vec{V}(O \in S_1/R_0) + \vec{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \overline{OI_1} = \Omega_1\overrightarrow{z_0} \wedge R_1\overrightarrow{x_1} = R_1\Omega_1\overrightarrow{y_1}$$

Car le point O est fixe.

2- Condition de roulement sans glissement

La vitesse de glissement de (S) par rapport à (S_1) au point I_1 est nulle :

$$\overrightarrow{V_g}(S/S_1) = \vec{V}(I_1 \in S/R_0) - \vec{V}(I_1 \in S_1/R_0) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad V - \frac{R_2 - R_1}{2}\Omega = R_1\Omega_1 \quad (1)$$

3- Les vitesses de I_2

D'après la loi de distribution des vitesses des points C et I_2 appartenant au solide S :

$$\vec{V}(I_2 \in S/R_0) = \vec{V}(C/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overline{CI_2} = V\overrightarrow{y_1} + \Omega\overrightarrow{z_0} \wedge \frac{R_2 - R_1}{2}\overrightarrow{x_1}$$
$$= \left(V + \frac{R_2 - R_1}{2}\Omega\right)\overrightarrow{y_1}$$

$\vec{V}(I_2 \in S_2/R_0)$ se calcule à partir de la vitesse du point O de (S_2)

$$\vec{V}(I_2 \in S_2/R_0) = \vec{V}(O \in S_2/R_0) + \vec{\Omega}(S_2/R_0) \wedge \overline{OI_2} = \Omega_2\overrightarrow{z_0} \wedge R_2\overrightarrow{x_1} = R_2\Omega_2\overrightarrow{y_1}$$

La condition de roulement sans glissement en I_2 se traduit par la relation :

$$\overrightarrow{V_g}(S/S_2) = \vec{V}(I_2 \in S/R_0) - \vec{V}(I_2 \in S_2/R_0) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad V + \frac{R_2 - R_1}{2}\Omega = R_2\Omega_2 \quad (2)$$

4- Expressions de V et Ω en fonction de Ω_1, Ω_2, R_1 et R_2.

En calculant la somme des équations (1) et (2), on trouve :

$$(1)+(2) \Rightarrow V=\frac{1}{2}(R_1\Omega_1+R_2\Omega_2) \quad \text{et} \qquad (2)-(1) \Rightarrow \Omega=\frac{R_2\Omega_2-R_1\Omega_1}{\mathrm{R_2-R_1}}$$

5- Vitesse instantanée de rotation : $\vec{\Omega}(S_3/R_0)=\vec{\Omega}(R_1/R_0)$.
O et C appartiennent au repère R_1.

$$\vec{V}(C \in R_1/R_0)=\vec{V}(O \in R_1/R_0)+\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow$$

$$V\vec{y_1}=\Omega(R_1/R_0)\vec{z_0} \wedge \left(R_1+\frac{R_2-R_1}{2}\right)\vec{x_1}=\Omega(R_1/R_0)\left(R_1+\frac{R_2-R_1}{2}\right)\vec{y_1}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\Omega}(R_1/R_0)=\frac{2V}{R_1+R_2}\vec{z_0}=\frac{R_1\Omega_1+R_2\Omega_2}{R_1+R_2}\vec{z_0}$$

6- Vitesse instantanée de rotation : $\vec{\Omega}(S/S_3)$.
On a : $\vec{\Omega}(S/R_0)=\ \vec{\Omega}(S/S_3).+\vec{\Omega}(S_3/R_0)$ avec $\vec{\Omega}(S_3/R_0)=\vec{\Omega}(R_1/R_0)$, donc :

$$\vec{\Omega}(S/S_3)=\vec{\Omega}(S/R_0)-\vec{\Omega}(S_3/R_0)=\left[\frac{R_2\Omega_2-R_1\Omega_1}{\mathrm{R_2-R_1}}-\frac{R_1\Omega_1+R_2\Omega_2}{R_1+R_2}\right]\vec{z_0}$$

$$\text{Soit} \qquad : \vec{\Omega}(S/S_3)=\frac{2R_1R_2(\Omega_2-\Omega_1)}{R_2^2-R_1^2}\vec{z_0}$$

7- vitesse de glissement de la bille par rapport à la cage (S_3) au point A.
Calculons la vitesse de glissement au point A de la bille (S) par rapport à la cage (S_3).
A et C deux points de (S), donc d'après la loi de distribution des vitesses, on a :

$$\vec{V}(A \in S/S_3)=\vec{V}(C \in S/S_3)+\vec{\Omega}(S/S_3) \wedge \overrightarrow{CA}$$

Le point C étant lié à (S) et à (S_3) : $\vec{V}(C \in S/S_3)=\vec{0}$

D'où : $\vec{V}(A \in S/S_3)=\vec{\Omega}(S/S_3) \wedge \overrightarrow{CA}=\frac{2R_1R_2(\Omega_2-\Omega_1)}{R_2^2-R_1^2}\vec{z_0} \wedge \frac{1}{2}(R_2-R_1)\vec{y_1}$

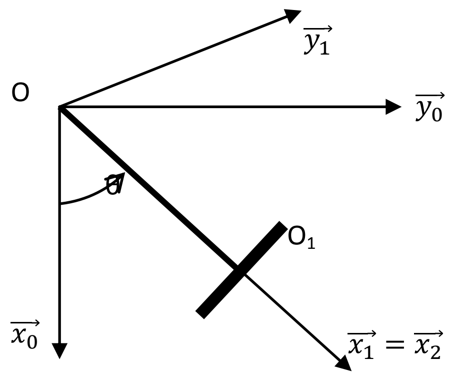
Soit : $\vec{V}(A \in S/S_3)=\frac{R_1R_2(\Omega_2-\Omega_1)}{R_1+R_2}$

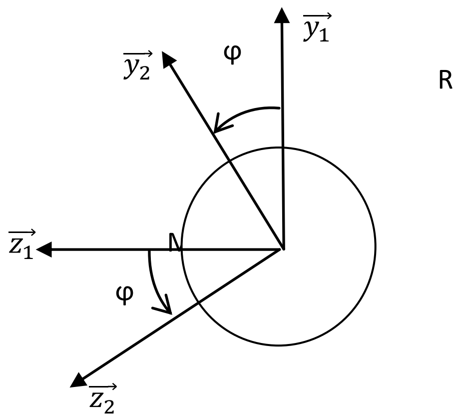
Exercice 13

Le système mécanique représenté ci-dessous est composé de deux solides.
(S_1) : une barre de longueur ***OO_1 = L***, de ***masse négligeable***, maintenue à ses deux extrémités par des liaisons : sphériques en ***O*** et cylindrique en ***O_1*** d'axe $\vec{x_1}$ Le disque ***(S_2)*** mince de centre ***O_1*** a un rayon ***R*** et une masse ***m.*** La barre, liée au repère $R_1(O,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_0})$, est en rotation dans le plan vertical à une vitesse angulaire $\dot{\theta}$ par rapport au repère fixe $R_0(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})$ autour de l'axe $\vec{z_0}=\vec{z_1}$. Le disque lié au repère $R_2(O,\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z_2})$, tourne autour de l'axe $\vec{x_1}=\vec{x_2}$ à une vitesse de rotation $\dot{\varphi}$. Déterminer :

1. La vitesse de rotation instantanée du disque par rapport au repère fixe $R_0(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})$
2. La vitesse et l'accélération des points ***O_1*** et **M (** point de la circonférence du disque) par calcul direct, et par composition de mouvements.

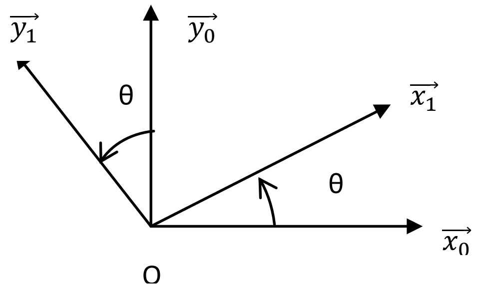
.

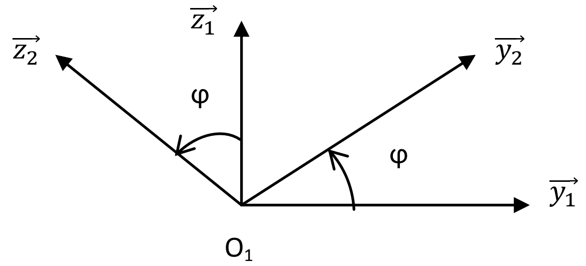




Solution

1- Le vecteur de rotation instantané du disque par rapport au repère fixe est :





$$\vec{\Omega}\left({}^{D}/_{R_0}\right) = \dot{\theta}\,\vec{z_1} + \dot{\varphi}\,\vec{x_1}$$

2- Vitesse et accélération de O_1 par calcul direct

$$\overrightarrow{OO_1} = L(\cos\theta\,\vec{x_0} + \sin\theta\,\vec{y_0}) \Rightarrow$$

$$\vec{V}\left({}^{O_1}/_{R_0}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_{R_0} = L\dot{\theta}\,(-\sin\theta\,\vec{x_0} + \cos\theta\,\vec{y_0}) = L\dot{\theta}\,\vec{y_1}$$

$$\vec{\Gamma}\left({}^{O_1}/_{R_0}\right) = L\begin{pmatrix} -\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta \\ \ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} = L\,\ddot{\theta}\,\vec{y_1} - L\,\dot{\theta}^2\,\vec{x_1}$$

Vitesse et accélération de M par composition des mouvements

- Vitesse relative

$$\vec{V}\left({}^{M}/_{R_1}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1} = R\left.\frac{d\vec{z_2}}{dt}\right|_{R_1} = R\,\vec{\Omega}\left({}^{R_2}/_{R_1}\right) \wedge \vec{z_2} = R\,\dot{\varphi}\,\vec{x_1} \wedge (\cos\varphi\,\vec{z_1} - \sin\varphi\,\vec{y_1})$$

$$\vec{V}\left({}^{M}/_{R_1}\right) = -R\,\dot{\varphi}(\cos\varphi\,\vec{y_1} + \sin\varphi\,\vec{z_1})$$

- Vitesse d'entraînement

$$\vec{V}\left({}^{M\epsilon R_1}/_{R_0}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_{R_0} + \vec{\Omega}\left({}^{R_1}/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{O_1M} = L\dot{\theta}\,\vec{y_1} + \dot{\theta}\,\vec{z_1} \wedge R\,\vec{z_2}$$

$$= L\dot{\theta}\,\overrightarrow{y_1} + R\dot{\theta}\,\overrightarrow{z_1} \wedge (\cos\varphi\,\overrightarrow{z_1} - \sin\varphi\,\overrightarrow{y_1})$$

$$\vec{V}\left({}^{M\epsilon R_1}/_{R_0}\right) = \dot{\theta}\,(R\sin\varphi\,\overrightarrow{x_1} + L\,\overrightarrow{y_1})$$

- Vitesse absolue

$$\vec{V}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = \vec{V}\left({}^{M}/_{R_1}\right) + \vec{V}\left({}^{M\epsilon R_1}/_{R_0}\right) = \begin{pmatrix} R\,\dot{\theta}\sin\varphi \\ L\,\dot{\theta} - R\,\dot{\varphi}\cos\varphi \\ -R\,\dot{\varphi}\sin\varphi \end{pmatrix}_{R_1}$$

- Accélération relative

$$\vec{\Gamma}\left({}^{M}/_{R_1}\right) = \left.\frac{d\,\vec{V}\left({}^{M}/_{R_1}\right)}{dt}\right|_{R_1} = -R\begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi \\ \ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi \end{pmatrix}_{R_1}$$

- Accélération d'entraînement

$$\vec{\Gamma}\left({}^{M\epsilon R_1}/_{R_0}\right) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right|_{R_0} + \frac{d\vec{\Omega}\left({}^{R_1}/_{R_0}\right)}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}\left({}^{R_1}/_{R_0}\right) \wedge \left[\vec{\Omega}\left({}^{R_1}/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right]$$

$$\vec{\Gamma}\left({}^{M\epsilon R_1}/_{R_0}\right) = \begin{pmatrix} -L\,\dot{\theta}^2 + R\ddot{\theta}\sin\varphi \\ L\,\ddot{\theta} - R\dot{\theta}^2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

- Accélération de Coriolis

$$\overrightarrow{\Gamma_C}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = 2\vec{\Omega}\left({}^{R_1}/_{R_0}\right) \wedge \vec{V}\left({}^{M}/_{R_1}\right) = 2\dot{\theta}\,\overrightarrow{z_1} \wedge -R\dot{\varphi}(\cos\varphi\,\overrightarrow{y_1} + \sin\varphi\,\overrightarrow{z_1})$$

$$\overrightarrow{\Gamma_C}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = 2R\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\cos\varphi\,\overrightarrow{x_1}$$

- Accélération absolue

$$\vec{\Gamma}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = \vec{\Gamma}\left({}^{M}/_{R_1}\right) + \vec{\Gamma}\left({}^{M\epsilon R_1}/_{R_0}\right) + \overrightarrow{\Gamma_C}\left({}^{M}/_{R_0}\right)$$

$$\vec{\Gamma}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = \begin{pmatrix} -L\,\dot{\theta}^2 + R\ddot{\theta}\sin\varphi + 2R\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\cos\varphi\,\overrightarrow{x_1} \\ L\,\ddot{\theta} - R\dot{\theta}^2\sin\varphi - R\ddot{\varphi}\cos\varphi + R\dot{\varphi}^2\sin\varphi \\ -R\,\ddot{\varphi}\sin\varphi - R\dot{\varphi}^2\cos\varphi \end{pmatrix}_{R_1}$$

Exercice 14

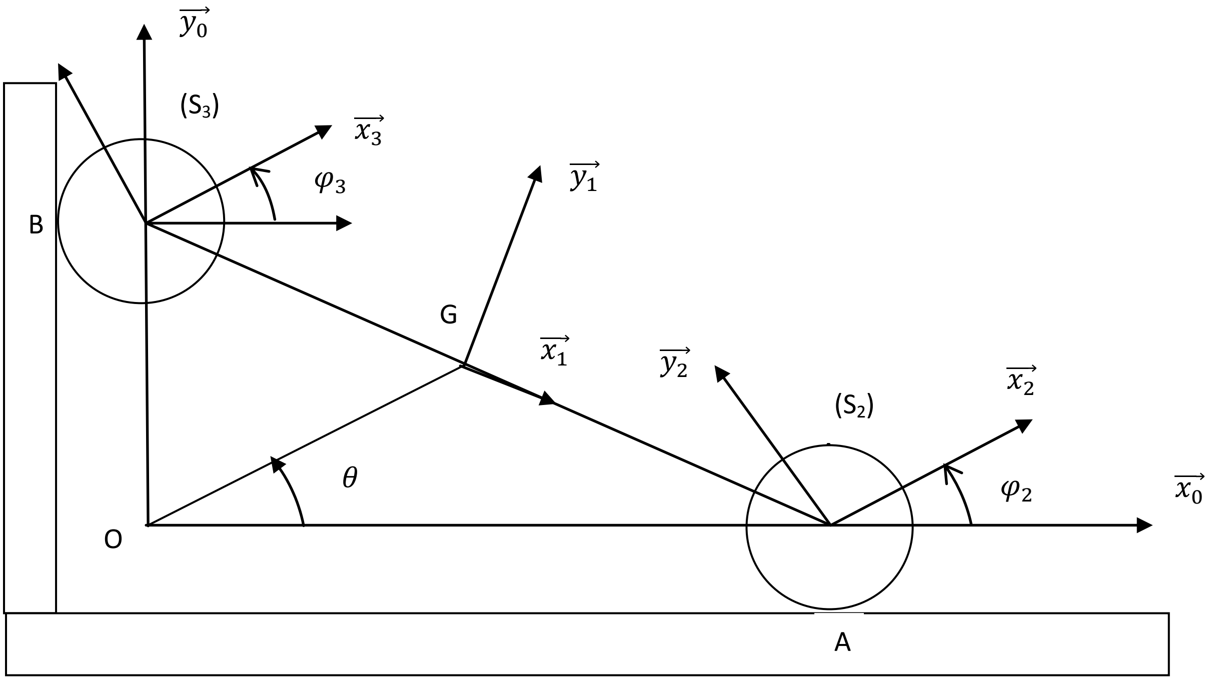
On considère un système **(S)** composé des trois parties rigides suivantes :

- Une tige S_1 supposée unidimensionnelle dont les extrémités sont notées A et B, elle est homogène, de longueur 2L, de masse m et de centre de masse G.
- Deux disques minces plans identiques S_2 et S_3 ,ils sont homogènes de rayon R, de masse M et de centres respectifs A et B.

Ces trois éléments sont assemblés de telle sorte que le plan de chacun des disques et la droite support de la tige restent dans le même plan. Les liaisons disque/ tige en A et B ne permettent aux disques qu'une rotation autour de l'axe perpendiculaire à ce plan.

Le mouvement de S_2 est tel qu'il reste en contact avec le montant horizontal d'un bâti fixe en P(point géométrique) et celui de S_3 est tel qu'il reste en contact avec le montant vertical de ce même bâti fixe en Q (point géométrique).
Les montants horizontal et vertical du bâti sont respectivement repérés par les axes (C, $\overrightarrow{x_0}$) et (C, $\overrightarrow{y_0}$). Le mouvement de S reste localisé dans le plan (O, $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$) de manière à ce que les axes (O, $\overrightarrow{x_0}$) et (O, $\overrightarrow{y_0}$).soient les trajectoires respectivement de A et B, on suppose que les contacts en P et Q ont lieu avec un roulement sans glissement..On note P_2 le point matériel de S_2 qui se trouve en P et Q_3 le point matériel qui se trouve en Q.
L'espace est rapporté au repère fixe $R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ et on définit respectivement les repères liés à S_1, S_2 et S_3 :
$R_1(G,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_0})$ avec $\overrightarrow{BA} = 2L\,\overrightarrow{x_1}$
$R_2(A,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_0})$ avec $\varphi_2 = (\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_2})$
$R_3(B,\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_3},\overrightarrow{z_0})$ avec $\varphi_3 = (\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_3})$
On note $\theta = \left(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{OG}\right)$. Le repère R_0 sera utilisé comme repère de projection.
Déterminer par rapport à R_0 :

1- Le torseur cinématique de S_1 en G, A et B
2- Le torseur cinématique de S_2 en A et P_2.
3- Le torseur cinématique de S_3 en B et Q_3.
4- Ecrire les conditions de roulement sans glissement en P et Q et en déduire l'évolution des angles φ_2 et φ_3 en fonction de celle de θ. Réécrire les différents torseurs cinématiques en ne faisant désormais apparaître que l'angle θ et ses dérivées.



Solution

1- Torseur cinématique de S_1

- **Paramétrage**

Le centre de masse G décrit un cercle de rayon L et de centre O, donc le triangle OGA est isocèle(OG=GA=L)et par conséquent $(\widehat{OG,OA}) = (\widehat{AG,AO}) = \theta$ et $(\widehat{GO,GA}) = \pi - 2\theta$

$$\overrightarrow{x_1} = cos\theta\,\overrightarrow{x_0} - sin\theta\,\overrightarrow{y_0} \quad et \quad \vec{y} = sin\theta\,\overrightarrow{x_0} + cos\theta\,\overrightarrow{y_0}$$

Lorsque G tourne d'un angle , (S_1) tourne du même angle mais dans le sens contraire c-à-d de $(-\theta)$, donc : $\vec{\Omega}\left({}^{S_1}/_{R_0}\right) = -\dot{\theta}\,\vec{z_0}$

- **<u>Torseur cinématique de (S_1) en G</u>**

$$\overrightarrow{OG} = L(\cos\theta\,\vec{x_0} + \sin\theta\,\vec{y_0}) \Rightarrow \vec{V}\left({}^{G}/_{R_0}\right) = L\dot{\theta}(-\sin\theta\,\vec{x_0} + \cos\theta\,\vec{y_0})$$

$$\left[\vec{V}\left({}^{S_1}/_{R_0}\right)\right]_G = \begin{cases} \vec{\Omega}\left({}^{S_1}/_{R_0}\right) = -\dot{\theta}\,\vec{z_0} \\ \vec{V}\left({}^{G}/_{R_0}\right) = L\dot{\theta}(-\sin\theta\,\vec{x_0} + \cos\theta\,\vec{y_0}) \end{cases}$$

- **<u>Torseur cinématique de (S_1) en A</u>**

$$\vec{V}\left({}^{A\epsilon S_1}/_{R_0}\right) = \vec{V}\left({}^{G}/_{R_0}\right) + \vec{\Omega}\left({}^{S_1}/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{GA} = -2L\,\dot{\theta}\,\sin\theta\,\vec{x_0}$$

$$\left[\vec{V}\left({}^{S_1}/_{R_0}\right)\right]_A = \begin{cases} \vec{\Omega}\left({}^{S_1}/_{R_0}\right) = -\dot{\theta}\,\vec{z_0} \\ \vec{V}\left({}^{A\epsilon S_1}/_{R_0}\right) = -2L\,\dot{\theta}\,\sin\theta\,\vec{x_0} \end{cases}$$

- **<u>Torseur cinématique de (S_1) en B</u>**

$$\vec{V}\left({}^{B\epsilon S_1}/_{R_0}\right) = \vec{V}\left({}^{G}/_{R_0}\right) + \vec{\Omega}\left({}^{S_1}/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{GB} = 2L\,\dot{\theta}\,\cos\theta\,\vec{y_0}$$

$$\left[\vec{V}\left({}^{S_1}/_{R_0}\right)\right]_B = \begin{cases} \vec{\Omega}\left({}^{S_1}/_{R_0}\right) = -\dot{\theta}\,\vec{z_0} \\ \vec{V}\left({}^{B\epsilon S_1}/_{R_0}\right) = 2L\,\dot{\theta}\,\cos\theta\,\vec{y_0} \end{cases}$$

2- **<u>Torseur cinématique de S_2</u>**

- **<u>Torseur cinématique de S_2 en A</u>**

$$\vec{\Omega}\left({}^{S_2}/_{R_0}\right) = \dot{\varphi}_2\,\vec{z_0}$$

Le point A est un point matériel appartenant à la fois aux solides (S_1) et (S_2), donc :

$$\vec{V}\left({}^{A\epsilon S_1}/_{R_0}\right) = \vec{V}\left({}^{A\epsilon S_2}/_{R_0}\right) = -2L\,\dot{\theta}\,\sin\theta\,\vec{x_0}$$

$$\left[\vec{V}\left({}^{S_2}/_{R_0}\right)\right]_A = \begin{cases} \vec{\Omega}\left({}^{S_2}/_{R_0}\right) = \dot{\varphi}_2\,\vec{z_0} \\ \vec{V}\left({}^{A\epsilon S_2}/_{R_0}\right) = -2L\,\dot{\theta}\,\sin\theta\,\vec{x_0} \end{cases}$$

- **<u>Torseur cinématique de(S_2) en P_2</u>**

$$\vec{V}\left({}^{P_2\epsilon S_2}/_{R_0}\right) = \vec{V}\left({}^{A\epsilon S_2}/_{R_0}\right) + \vec{\Omega}\left({}^{S_2}/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{AP_2} = (R\dot{\varphi}_2 - 2L\dot{\theta}\,\sin\theta\,)\vec{x_0}$$

$$\left[\vec{V}\left({S_2}/{R_0}\right)\right]_{P_2} = \begin{cases} \vec{\Omega}\left({S_2}/{R_0}\right) = \dot{\varphi}_2\,\overrightarrow{z_0} \\ \vec{V}\left({P_2 \epsilon S_2}/{R_0}\right) = \left(R\dot{\varphi}_2 - 2L\,\dot{\theta}\,sin\theta\right)\overrightarrow{x_0} \end{cases}$$

3- <u>Torseur cinématique de (S_3) en B et Q_3</u>

- **<u>Torseur cinématique de (S_3) en B</u>**

  Puisque le point B est un point matériel appartenant à la fois aux solides (S_1) et (S_3), on peut écrire :

$$\vec{V}\left({B\epsilon S_1}/{R_0}\right) = \vec{V}\left({B\epsilon S_3}/{R_0}\right) = 2L\,\dot{\theta}\,cos\theta\,\overrightarrow{y_0}$$

$$\left[\vec{V}\left({S_3}/{R_0}\right)\right]_{B} = \begin{cases} \vec{\Omega}\left({S_3}/{R_0}\right) = \dot{\varphi}_3\,\overrightarrow{z_0} \\ \vec{V}\left({B\epsilon S_3}/{R_0}\right) = 2L\,\dot{\theta}\,cos\theta\,\overrightarrow{y_0} \end{cases}$$

- **<u>Torseur cinématique de (S_3) en Q_3</u>**

$$\vec{V}\left({Q_3\epsilon S_3}/{R_0}\right) = \vec{V}\left({B\epsilon S_3}/{R_0}\right) + \vec{\Omega}\left({S_3}/{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{BQ_3} = \left(2L\,\dot{\theta}\,cos\theta - R\dot{\varphi}_3\right)\overrightarrow{y_0}$$

$$\left[\vec{V}\left({S_3}/{R_0}\right)\right]_{Q_3} = \begin{cases} \vec{\Omega}\left({S_3}/{R_0}\right) = \dot{\varphi}_3\,\overrightarrow{z_0} \\ \vec{V}\left({Q_3\epsilon S_3}/{R_0}\right) = \left(2L\,\dot{\theta}\,cos\theta - R\dot{\varphi}_3\right)\overrightarrow{y_0} \end{cases}$$

<u>4-Conditions de roulement sans glissement</u>

- **<u>En P</u>**

$$\vec{V}\left({P\epsilon bâti}/{R_0}\right) = \vec{V}\left({P_2\epsilon S_2}/{R_0}\right) = \vec{0} \Rightarrow \dot{\varphi}_2 = \frac{2L\dot{\theta}\,sin\theta}{R}$$

- **<u>En Q</u>**

$$\vec{V}\left({Q\epsilon bâti}/{R_0}\right) = \vec{V}\left({Q_3\epsilon S_3}/{R_0}\right) = \vec{0} \Rightarrow \dot{\varphi}_3 = \frac{2L\dot{\theta}\,cos\theta}{R}$$

$$\frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{\varphi}_3} = tg\theta$$

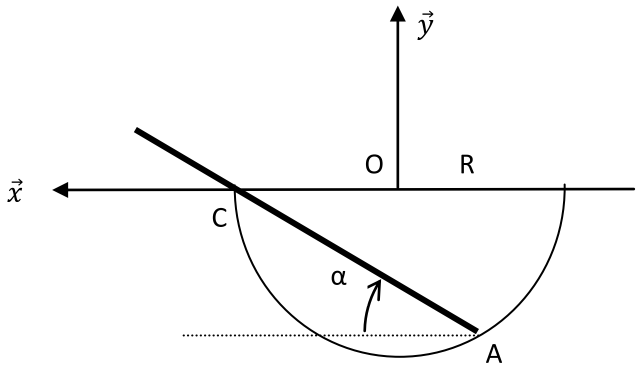
$$\left[\vec{V}\left({S_2}/{R_0}\right)\right]_{A} = \begin{cases} \vec{\Omega}\left({S_2}/{R_0}\right) = \dfrac{2L\dot{\theta}\,sin\theta}{R}\,\overrightarrow{z_0} \\ \vec{V}\left({A\epsilon S_2}/{R_0}\right) = -2L\,\dot{\theta}\,sin\theta\,\overrightarrow{x_0} \end{cases}$$

$$\left[\vec{V}\left(S_3/R_0\right)\right]_B = \begin{cases} \vec{\Omega}\left(S_3/R_0\right) = \dfrac{2L\dot{\theta}\cos\theta}{R}\,\vec{z_0} \\ \vec{V}\left(B\epsilon S_3/R_0\right) = 2L\,\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{y_0} \end{cases}$$

Exercice 15

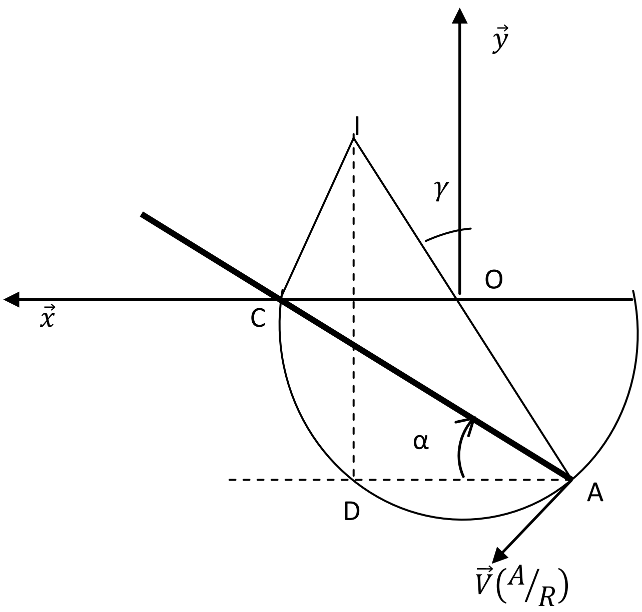
Soit un repère fixe lié à un demi- cylindre creux de rayon *R*, sur lequel se déplace une barre de longueur *2L*. Le mouvement se fait dans le plan vertical ***(xOy)***. La barre est en contact permanent avec le demi- cylindre en deux points, l'extrémité A en contact avec la surface du cylindre et le point *C* avec son bord.

1. Déterminer les coordonnées du centre instantané de rotation (C.I.R.) géométriquement ;
2. Retrouver les coordonnées du centre instantané de rotation (C.I.R.) analytiquement ;
3. En déduire la vitesse du point C de la barre



Solution

1- **Coordonnées du centre instantané de rotation (géométriquement)**



I centre instantané de rotation, donc IA est perpendiculaire à la vitesse de A

$$\vec{V}(A/R)$$

De même IC est perpendiculaire à la vitesse de C en C

$$\vec{V}(C/R)$$

Le triangle (ICA) rectangle en C est alors inscrit dans le cercle de centre O et de rayon R , ce qui signifie que IA=2R

le triangle (COA) isocèle :

CO=OA.

En plus (CO,CA) =(AD,AC)=α car deux angles alternes internes

L'angle (OC,OA)=π-2α

L'angle (OI,OC)=2α et par conséquent :

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$$

$$\overrightarrow{OI} = R\cos2\alpha\,\vec{x_0} + R\sin2\alpha\,\vec{y_0}$$

2- Coordonnées du centre instantané de rotation (analytiquement)

La vitesse de centre instantané de rotation de la barre est nulle.

$$\vec{V}\left({}^{I}/_{R_0}\right) = \vec{V}\left({}^{A}/_{R_0}\right) + \vec{\Omega}\left({}^{S_1}/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{AI} = \vec{0}$$

$$\vec{V}\left({}^{A}/_{R_0}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_{R_0} \quad avec \quad \overrightarrow{OA} = -R\cos 2\alpha\,\overrightarrow{x_0} - R\sin 2\alpha\,\overrightarrow{y_0}$$

$$\vec{V}\left({}^{A}/_{R_0}\right) = \begin{pmatrix} 2R\,\dot{\alpha}\,\sin 2\alpha \\ -2R\,\dot{\alpha}\,\cos 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} \quad et \quad \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix} x_I + R\cos 2\alpha \\ y_I + R\sin 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{V}\left({}^{I}/_{R_0}\right) = \begin{pmatrix} 2R\,\dot{\alpha}\,\sin 2\alpha \\ -2R\,\dot{\alpha}\,\cos 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}_{R_0} \wedge \begin{pmatrix} x_I + R\cos 2\alpha \\ y_I + R\sin 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} = \dot{\alpha}\begin{pmatrix} R\sin 2\alpha - y_I \\ x_I - R\cos 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_I = R\cos 2\alpha} \\ \boldsymbol{y_I = R\sin 2\alpha} \end{cases}$$

3- Vitesse du point C

$$\vec{V}\left({}^{C}/_{R_0}\right) = \vec{V}\left({}^{I}/_{R_0}\right) + \vec{\Omega}\left({}^{S_1}/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{IC} = \vec{\Omega}\left({}^{S_1}/_{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{IC}$$

$$\boldsymbol{\vec{V}\left({}^{C}/_{R_0}\right) = R\dot{\alpha}\begin{pmatrix} \sin 2\alpha \\ 1 - \cos 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}}$$